

ÚJABB EREDMÉNYEK AZ ABSZTRAKT ALGEBRA TERÜLETÉN

SZELE TIBOR

Előadta a Matematikai Állandó Bizottság 1951 december 13-án tartott ülésén

Az absztrakt algebra, vagy kevésbé szabatos elnevezéssel modern algebra bizonyos értelemben különleges helyet foglal el a matematika legújabb ágai között. Ennek oka az a hatalmas mérvű és rendkívül gyors ütemű fejlődés, amely ezt a tudományt a XX. század immár mögöttünk levő első felében mai állapotához eljuttatta. Elegendő néhány szóval utalni erre a nagy átalakulásra. Száz esztendővel ezelőtt még nyilván nem lehetett szó arról, hogy az algebra önálló tudomány volna, hiszen az akkori algebra még u. n. „alaptételét“ is kénytelen volt a függvénytanból kölcsönözni. Ezzel szemben a századforduló táján feltörő hatalmas erejű új gondolatok és fogalomalkotások, valamint ezek kristálytisztaságú rendszerének kialakulása lehetővé tette, hogy az algebra századunk első negyedében teljesen autark tudománnyá váljék, legalábbis olyan értelemben, hogy azóta csupán a matematika alapjaira vonatkozó kutatásokból, különösképpen a halmazelméletből merít. Ennél többet ezen a téren a dolog természeténél fogva nem is várhatunk. Másfelől a század második negyedében bekövetkező legújabb fejlődés odavezetett, hogy ma az algebra a matematika úgyszólván valamennyi ágában folyó kutatásoknál jelentős szerepet tölt be. Alapvető fontosságú fogalmakat és módszereket lehetett átültetni a tiszta algebra talajából a matematika látszólag egészen távolieső tudományágaiba, s ez nemcsak rendkívül termékenynek bizonyult a korszerű kutatásban, hanem érezhető hatással volt az illető tudományágak „probléma-látására“, beállítottságára is. Ezért minden túlzás nélkül mondhatjuk azt, hogy korunkban a modern algebra gyakorol a matematika egészének fejlődésére olyan univerzálisan influáló hatást, mint a múlt század második felében a függvénytan. Ugyanakkor hangsúlyoznunk kell azonban azt is, hogy ez a félreismerhetetlen folyamat a valóságban igen természetes és egészséges kölcsönhatások alakjában megy végbe, amelyek során az algebra is nyer értékes indítatásokat a matematika egyéb területein folyó kutatásokból. Elegendő ilyen vonatkozásban példaképpen arra a mindkét irányban igen termékeny kapcsolatra utalnunk, amely egyrészt az absztrakt algebra, másrészt a funkcionál-analízis, a modern geometriák, a topológia és a matematika alapjaira vonatkozó kutatások legújabb fejlődése között fennáll. Tehát semmiképpen sincs szó arról, hogy az algebra említett hatása a legcsekélyebb mértékben is veszélyeztetné a matematika többi ágainak önállóságát és szuverénitását.

Ha mármost ilyen mély kapcsolatban van az algebra az egész matematika jelenkori fejlődési irányaival, akkor örvendetesnek mondható, hogy hazánk-

ban is több matematikus foglalkozik absztrakt algebrával és ért el ezen a téren számottevő eredményeket. Különösen biztató annak a grafikonnak ezidei tendenciája, amelyet a hazai algebrai kutatások extenzitásának időbeli fejlődéséről lehetne készíteni. *Bauer Mihályra, Haar Alfrédra és Kürschák Józsefre* gondolva ugyanis nyilvánvaló, hogy a jelen század első harmadában voltak világraszóló magyar alkotások az absztrakt algebra területén, de az ilyen irányú kutatások akkoriban a rendkívül gazdag és sokoldalú magyar matematikai életnek még aránylag csupán szűk metszetét jelentették. Ezzel szemben századunk második harmadának eddig eltelt első felében rohamos emelkedést mutat az említett grafikon. Csak a legutóbbi egy-másfél esztendő alatt is olyan kiterjedt és sokoldalú vizsgálatokat folytattak algebristáink, hogy nehezen megoldható feladat a rendelkezésre álló idő alatt hiánytalanul beszámolni e vizsgálatok legfontosabb eredményeiről, hiszen algebrával foglalkozó matematikusainknak már a száma is örvendetesen nagy. Ezenfelül koruk és matematikai munkásságuk pillanatnyi szakasza tekintetében is széles spektrumot mutatnak: van köztük három akadémikus, akik egyszersmind Kossuth-díjasok is; viszont négy egészen fiatal, illetve kutatómunkájának kezdetén álló algebristánkról is szólnunk kell, egyrészt ama kapcsolat miatt, amelyben munkásságuk az őket irányító matematikusokéval van, másrészt mert eredményeik elérik azt a fokot, amely szükségessé teszi, hogy szerepeljenek ebben a beszámolóban. Jó fényt vet ez a jelenség arra, hogy az alkotó munka szempontjából milyen kedvező és egészséges közösségi szellem hatja át algebristáinkat. Ennek köszönhető, hogy nem egymástól elszigetelten, csupán egyéni becsvágytól hajtva végzik munkájukat, hanem állandó gondolatcsere kapcsolatában élnek egymással, azokkal a matematikusokkal, akik másirányú vizsgálataikban fel tudják használni a modern algebra eredményeit. Ezenfelül azok az algebristáink, akik már érettebb kutatók, természetesnek tartják, hogy tudásukat, kialakított módszereiket és problémáikat továbbadják azoknak a fiatal, illetve kezdő kutatóknak, akik közül az eljövendő évtizedek magyar algebristái kerülnek majd ki. Ezért a jövőtől nemcsak azt várhatjuk, hogy a hazánkban folyó algebrai kutató munka megmarad mostani színvonalán, hanem azt is, hogy ez a színvonal még emelkedni fog.

Ha azt kérdezzük, hogy algebrai kutatásunk az absztrakt algebra számára melyik ágában bizonyult legeredményesebbnek, akkor erre az az egyértelmű válasz, hogy a csoportelméletben. Ez annyira nyilvánvaló és külföldi matematikusok által is elismert tény, hogy ma már nem elhamarkodott derűlátás egy önálló magyar csoportelméleti iskoláról beszélni, amely éppen ezekben az években alakul ki, de körvonalai már most is teljes határozottsággal felismerhetők. Örömmel kell rámutatnunk arra, hogy — természetesen sokszorosra nagyított méretekben — hasonló jelenség nyilvánul meg a Szovjetunió matematikai életében is, ahol, mint legilletékesebb, *A. G. Kuros* akadémikus állapította meg nemrégiben, hogy a szovjet algebristák eredményei a csoportelmélet terén a

legjelentősebbek. Mi, magyar algebristák, úgy véljük, hogy itt nemcsak véletlenről van szó, s rajtunk áll, hogy azt a rendkívül kedvező lehetőséget, amelyet ez az analógia nyújt számunkra, minél jobban felhasználjuk. Már az eddigiéik során is sokat köszönhetünk az élenjáró szovjet csoportelméleti iskola hatásának, de a legközelebbi jövőben még inkább igyekezni fogunk elmélyedni a nagy szovjet eredmények és módszerek tanulmányozásában.

Mielőtt a hazánkban folyó algebrai kutatások legújabb eredményeinek ismertetésére rátérnék, legyen szabad kegyelettel megemlékeznem egy nagyon fiatalon elhunyt magyar algebristáról, *Sándor Gyuláról*, aki az alatt a rendkívül rövid idő alatt is, amely adatott neki, bizonyosságát tudta nyújtani nagyerejű algebrai tehetségének. *Sándor Gyula* munkaszolgálatosként halt meg 1944-ben, az akkori rémuralom következtében. Nem sokkal halála előtt egy levelet írt *Rédei Lászlónak*, aki ezt a levelet mostanában publikálta. Ez teszi időszerűvé egyebek között mostani megemlékezésünket *Sándor Gyuláról*. Az említett levélben *Sándor* pontos becslést ad a törzshatványmodulusú magasabbfokú kongruenciák megoldásainak számára. Ez az eredmény egy *Nagell—Ore*-féle tétel élesítését jelenti és absztrakt algebrai értelmezése nyilvánvaló. Fájdalommal gondolunk azokra a további szép eredményekre, amelyekkel *Sándor Gyula* oly korai elhunytja miatt lett szegényebb matematikai életünk.

Még csupán annyit jegyzek meg tulajdonképpen beszámolóim megkezdése előtt, hogy az alábbiakban absztrakt algebra helyett röviden csak algebrát fogok mondani, viszont beszámolóim időhiány miatt csupán az absztrakt algebra területén elért eredményekre vonatkozik. Vannak hazai kutatóinknak szép eredményei a klasszikus, illetve numerikus algebra körében is, ezekre azonban én most nem terjeszkedhetem ki.

Hajós György legújabb algebrai eredményeinek ismertetésénél abból kell kiindulnunk, hogy *Hajós* tíz évvel ezelőtt világraszóló eredményt ért el *Minkowski* egy olyan sejtésének bebizonyításával, amely azelőtt egy félévszázadon át dacolt a legkiválóbb matematikusok egész sorának sokirányú bizonyítási kísérletével. Az ily módon *Minkowski—Hajós*-féle tétellé változott sejtésnek eredeti, számelméleti jellegű megfogalmazásáról ezúttal nem szólva, azt a geometriai megfogalmazást kell említenünk, amelyet szintén *Minkowski* adott sejtésének. Nevezzünk e célból pontrácsnak az n -dimenziós euklideszi térben olyan, csupa izolált pontokból álló ponthalmazt, amely önmagába megy át minden olyan translációnál, melyet a halmaz két pontja által meghatározott vektor definiál. Nevezzük továbbá egyszerűen térfedő kockarácsnak csupa egybevágó kockák olyan halmazát ugyancsak az n -dimenziós térben, amelyre érvényesek a következők: a tér bármely pontja hozzátartozik a halmaz legalább egy kockájához, de a halmaz két különböző kockájának soha sincsen közös belső pontja; továbbá a halmazhoz tartozó kockák középpontjai pontrácsot alkotnak. A *Minkowski—Hajós*-féle tétel mármost úgy szól, hogy egyszerűen térfedő kockarács mindig oszloposított, azaz tartalmaz két olyan szomszédos kockát, amelyek egy $n-1$ dimenziójú oldallapja teljes egé-

szében közös. Bármennyire egyszerűen hangzik is ebben a fogalmazásban a tétel, bizonyítása rendkívüli nehézségekbe ütközik, s ezek a nehézségek a tér dimenziószámával oly erősen növekednek, hogy *Hajós* előtt nagy teljesítménynek számított az is, amikor pl. bebizonyították a tételt 8 dimenziós térre. *Hajós* az első döntő fontosságú lépést azzal tette a tétel általános igazolása irányában, hogy egy egészen új, csoportelméleti fogalmazást adott neki, amely már teljesen független a geometriai fogalmazásban szereplő tér dimenziószámától. Minkowski sejtésének ezt a *Hajóstól* származó csoportelméleti alakját sikerült azután valamivel később ma \acute{g} ának *Hajós*nak rendkívül mély és éleselméjű meggondolások útján bebizonyítani. A *Hajós*-féle csoportelméleti tétel megfogalmazása céljából tekintsünk egy G véges Abel-féle csoportot. Jelölje A és B két tetszőleges részhalmazát, vagy másszóval komplexusát G -nek. Ha G bármely eleme pontosan egyféleképpen előállítható egy A -beli és egy B -beli elem szorzataként, akkor azt mondjuk, hogy G az A és B komplexusok szorzata. Ezt a tényt így jelöljük: $G = A \cdot B$. Nevezzük továbbá szimplexeknek G csupa különböző elemekből álló és

$$[\alpha]_n = [1, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{n-1}]$$

alakú komplexusait. Az α^n elemet a felírt szimplex záróelemének nevezzük. Ez nyilván akkor és csak akkor eleme a szimplexnek, ha $\alpha^n = 1$, azaz ha a szimplex csoport. Mármost a *Hajós*-féle csoportelméleti tétel így szól: Ha egy véges Abel-féle csoportot előállítunk szimplexek szorzataként, akkor e szimplexek egyike okvetlenül csoport.

Jellemző e tétel rendkívüli mélységére, hogy bár tisztán csoportelméleti tényt fejez ki, mindmáig nem sikerült senkinek sem kizárólag csoportelméleti eszközökkel bebizonyítani, hanem csak úgy, hogy gyűrűelméleti, pontosabban csoportalgebrai segédeszközöket is igénybe veszünk. *Hajós* egyik legnagyobb-jelentőségű eredménye a csoportalgebrai bizonyítási módszer felfedezése volt, amely mindmáig az egyetlen járható út e roppant nehéz és mély tétel igazolására. Tíz esztendő telt el *Hajós* bizonyításának publikálása óta, s ez idő alatt fel is figyeltek rá a matematikusok a világ minden részében, de *Hajós* bizonyítása mindmáig lényegében az egyetlen. Továbbhaladni főképpen csak *Hajós* bizonyításának technikai egyszerűsítése irányában sikerült, azonban a *Hajóstól* származó döntő gondolatok változatlan megtartása mellett. Nagy örömmel állapíthatjuk meg, hogy ezek az eredmények is magyar matematikusoknak, elsősorban *Rédei Lászlónak* köszönhetők.

O. H. Keller 1930-ban azt a sejtést mondta ki, hogy egybevágó kockák egyszeresen térfedő rendszere akkor is mindig oszlopozott, ha nem kívánjuk meg, hogy a kockák középpontjai rácsot alkossanak. Ez az u. n. Keller-féle sejtés nyilván általánosítása a Minkowski—*Hajós*-féle tételnek, s bizonyítása eddig csak legfeljebb hatdimenziós térre sikerült. *Hajós* legújabbán a Keller-féle sejtés analóg csoportelméleti megfogalmazását is meg tudta adni,

s ez az eredménye úgy tekinthető, mint az első komoly lépés Keller sejtésének általános igazolása irányában. Ettől kezdve joggal remélhetjük, hogy ez a mostanáig reménytelenül nehéznek bizonyult sejtés előbb-utóbb mégis igazolást nyer majd. Megalapozza ezt a reményünket az a körülmény is, hogy a Hajós-féle csoportelméleti fogalmazásban Keller sejtése is dimenziómentes. A sejtés csoportelméleti alakja így szól: Ha

$$G = K \cdot [\alpha_1] \cdot [\alpha_2] \cdots [\alpha_m],$$

ahol K a G véges Abel-féle csoport tetszőleges komplexusa, akkor az $[\alpha_i]$ szimplexek közt van olyan, amelynek záróeleme előállítható két K -beli elem hanyadosaként. Nyilvánvaló, hogy ez az állítás a $K=1$ esetben a Hajós-féle csoportelméleti tételbe megy át.

Hajós csoportelméleti vizsgálatai egy másirányú, de szintén igen érdekes és nehéz problémakörhöz is elvezettek, amelyben legújabban szintén nagyszűlyű eredményt sikerült *Hajós*-nak elérnie. Nevezzük a G csoport valamely A komplexusát periódikusnak, ha van G -nek olyan $\alpha \neq 1$ eleme, amelyre $\alpha \cdot A = A$. Ez a követelmény nyilván pontosan annyit jelent, hogy A az α elem által generált ciklikus csoport bizonyos G -beli mellékosztályaiból áll. Mármost *Hajós* azt a problémát vetette fel, hogy ha G fel van bontva két komplexus szorzatára, igaz-e, hogy ezek egyike szükségképpen periódikus. Legelőször azt sikerült *Hajós*-nak bebizonyítani, hogy abban az esetben, amikor G törzshatványrendű ciklikus csoport, a válasz igenlő. De már általában tetszőleges véges ciklikus csoport esetében is igen nehéz ez a probléma. Legújabban azt sikerült *Hajós*-nak kimutatnia, hogy ha G olyan ciklikus csoport, amelynek rendje felbontható három páronként relatív prímszám szorzatára, s e három szám közül legalább kettő összetett, akkor G előállítható két nem-periódikus komplexusának szorzataként. Eszerint a felvetett kérdésre az esetek legnagyobb részében nemleges a válasz. *Rédei László*-nak viszont azt sikerült bebizonyítania, hogy a válasz igenlő, ha a G ciklikus csoport rendje háromnál nem több prímszám szorzata. Ilyen módon most már csupán a $p^m q^n$, $p^m q r$, $p q r s$ rendszámú ciklikus csoportok esetében nyílt a probléma, ahol p, q, r, s különböző prímszámokat jelentenek.

Kalmár László egyik legújabb dolgozatában a valós számok *Cantor*-féle értelmezésének *van der Waerden* által algebraizált módját egy igen lényeges ponton tökéletesítette, s ennek köszönhetően a valós számok bevezetésének ez az útja tisztán algebraivá vált. Hogy milyen új és mély bepillantást enged *Kalmár* eredménye a valós számtestnek ebbe a tisztán algebrai konstrukciójába, azt az az örvendetes tény is mutatja, hogy ezek a vizsgálatok *Kalmár*-t egy igen érdekes sejtéshez vezették, amelyet azóta *Kalmár* és *Rédei* egyik tanítványa, *Steinfeld Ottó* be is bizonyított. Ennek az eredménynek megfogalmazása céljából tekintsünk egy K archimédészileg elrendezett testet, s jelöljük B -vel a K -beli elemekből álló korlátos, C -vel a Cauchy-féle konvergenciakritériumnak elegettevő, N -el pedig a nulla-határértékű sorozatok halmazát. A B, C, N halmazok

nyilván gyűrűt alkotnak a sorozatok szokásos módon értelmezett összeadására és szorzására nézve, s ezenfelül N ideálja B -nek. Ha K a racionális számtest, akkor a C/N maradékosztálygyűrű alkalmas a valós számtest algebrai értelmezésére. Mármost *Kalmár* sejtése, illetve Steinfeld eredménye úgy szól, hogy a C/N test maximális a B/N maradékosztálygyűrűben, azaz C/N -nek nincsen valódi testbővítése a B/N gyűrűben.

Ugyancsak *Kalmár László* legújabb kutatásai nevezetes eredményhez vezettek az asszociatív rendszerek szóproblémájával kapcsolatban is. E probléma tulajdonképpen a matematika alapjaira vonatkozó vizsgálatok körébe tartozik elsősorban, de nyilvánvaló, hogy szorosan összefügg az algebraival is, és az ilyen természetű kapcsolatok éppen a legutóbbi időben igen termékenyeknek bizonyultak az algebra haladására nézve. Tekintsünk véges számú generátorelemmel és definiáló relációval megadott asszociatív rendszert, amelyben tehát egy asszociatív művelet van értelmezve. Egy ilyen rendszer *Thue* által 1914-ben felvetett „szóproblémája“ nem más, mint az a kérdés, hogy mi a szükséges és elegendő feltétele annak, hogy egy reláció érvényes legyen ebben a rendszerben. E problémát akkor tekintenők megoldhatónak, ha volna olyan eljárás, amelynek segítségével bármely adott relációról véges számú lépésben el tudnók dönteni, hogy érvényes-e a tekintett asszociatív rendszerben. Egy ilyen végesjellegű eldöntő eljárás szabatos definíciójával többen foglalkoztak, s legkézenfekvőbb definíciónak az mondható, amelyet *Markov* szovjet akadémikus adott az I. Magyar Matematikai Kongresszuson tartott előadásában az algorithmus fogalmára. Mármost *Markov* és *Post* egymástól függetlenül s majdnem egyidőben, elég bonyolult módon kimutatták olyan végesen generált asszociatív rendszer létezését, amelynek szóproblémája nem oldható meg általános rekurzív eljárással. *Kalmár* legújabban erre az u. n. Markov—*Post*-féle tételre sokkal egyszerűbb, közvetlenül az általános rekurzív eljárás fogalmán alapuló bizonyítást adott.

Rédei László a legutóbbi időben is rendkívül termékeny munkásságot folytatott és gyarapította nagyjelentőségű eredményekkel a csoportelmélet, a gyűrűelmélet, az algebrai struktúrák általános elméletének és az algebrai lényeg miatt az általunk tárgyalt tárgykörbe tartozó véges geometriának területét. Legkiemelkedőbb alkotásai a legújabbak közül egy, az algebraik elméletével kapcsolatos új fogalomnak, a *duplaalgebrának* bevezetése, amelyet mindjárt ismeretek, továbbá az algebrai struktúrák *ferdesorozatának* fogalma, amely már a *Rédei*től eredő általános értelmezése óta eltelt rövid idő alatt is rendkívül értékesnek és hasznosnak bizonyult mind a csoportelmélet, mind a gyűrűelmélet problémakörében.

Közismert dolog, hogy a modern gyűrűelmélet egyik legszebb és legjobban kidolgozott ága az algebraik, vagy más elnevezéssel hiperkomplex rendszerek elmélete. Ha a lehető legáltalánosabb felépítésben akarnánk ezt az elméletet tárgyalni, akkor egységgel bír, különben pedig teljesen tetszőleges

ferde gyűrűt kellene alapul vennünk. Ekkor azonban az az algebrai vonatkozásban ritka és szokatlan helyzet áll elő, hogy az algebraik különösen szép és fontos példái, mint amilyen a polinomgyűrű, a teljes mátrixgyűrű, az alternáló számok gyűrűje és a kvaterniógyűrű, áldozatul esnek a tárgyalásmód nagy általánosságának. Ezek ugyanis a szokásos értelmezésben csak akkor algebraik, ha az alapgyűrű kommutatív. Rédeinek e felismerésből kiindulva sikerült a szokásos operátorfeltételek alkalmas megváltoztatásával egy duplaalgebrának nevezett olyan gyűrűosztályt értelmeznie, amely természetes általánosítása az algebraik fogalmának, az utóbbival kommutatív alapgyűrű esetén egybeesik, s amely az előbb említett négy fontos esetet is felöleli. A duplaalgebra elnevezés azt jelzi, hogy az ilyen rendszernek az alapgyűrű kétoldali operátortartománya. Egészen bizonyos, hogy ez az új fogalom nagyjelentőségűnek bizonyul majd a modern gyűrűelméletben, éspedig egyrészt azért, mert eddig egymástól egészen távoleső gyűrűtípusok egységes tárgyalását teszi lehetővé, kiküszöbölve ezáltal az eddigi algebra-fogalom legsúlyosabb hiányosságát, másrészt mert remélhető, hogy idővel sikerülni fog a duplaalgebraik elméletét az algebraikéhoz hasonló mélységben feltárni. Ilyen vonatkozásban máris nagybecsű eredményei vannak Rédeinek. Sikerült nevezetesen megadnia az összes olyan duplaalgebraikat, amelyeknek van monomiális bázisa, azaz olyan bázisa, hogy két báziselem szorzata mindig egy báziselem szorozva az alapgyűrű valamely elemével. Az összes ilyen duplaalgebraik megadása egy csoportnak egy félcsoport által való Schreier-féle bővítése útján sikerül Rédeinek. Alkalmass félcsoport esetén ez a konstrukció a legegyszerűbb esetekben éppen a fentebb említett négy fontos gyűrűt szolgáltatja.

Egy másik, hasonlóan nagy rendszerező erővel bíró algebrai struktúra, amelyet Rédei egyik legújabb dolgozatában rendkívül általánosan értelmez, a ferdeszorzat. Hogy ez a fogalom is mennyire alkalmas egymástól eddig elszigeteltnek tekintett konstrukciók egységes tárgyalására, azt legszebben az a tény illusztrálja, hogy a ferdeszorzat a csoportelméletben egyenlőrangú speciális esetként öleli fel a Schreier-féle csoportbővítést és a faktorizálható csoportok Zappa—Szép-féle elméletét. Rédei ilyen irányú vizsgálatai külföldön is visszhangra találtak már, amennyiben Kochendörfer is bekapcsolódott e kutatásokba.

A Schreier-féle csoportbővítési elmélet gyűrűelméleti analogonját 1942-ben sikerült Everettnak megcsinálnia. Everett nehéz tárgyalásmódja helyett Rédei ezt a problémát is rendkívül elegánsan és áttekinthető módon tudja megoldani a ferdeszorzat segítségével.

Egyik további igen érdekes gyűrűelméleti dolgozatában az összes olyan gyűrűket sikerül Rédeinek explicit formában megadnia, amelyek bármely részmodulusa kétoldali ideál. Figyelemreméltó, hogy egy ilyen gyűrű mindig kommutatív. Ez a Rédei által megoldott probléma úgy tekinthető, mint a Hamilton-féle csoportok problémájának gyűrűelméleti analogonja.

Egy *Szele Tiborral* közösen írt gyűrűelméleti dolgozatában megadja *Rédei* az összes elsőrangú gyűrűket, így nevezve egy gyűrűt, ha additív csoportja elsőrangú csoport. E dolgozat eredményeit tőlük függetlenül valamivel szűkebb keretben egy évvel később *R. A. Beaumont* és *H. S. Zuckermann* is publikálták a *Pacific Journal of Mathematics* 1. kötetében.

Igen figyelemreméltóak *Rédei*nek azok a dolgozatai is, amelyekben a *Hajós-féle* csoportelméleti tétel eredeti bizonyítását egyszerűsíti. Kiemelendő, hogy *Rédei* talált egy új megfogalmazást is a *Minkowski—Hajós-féle* tételre, amely a valós számok additív csoportjának egy tulajdonságát fejezi ki és így szól: Jelöljük V -vel a valós számok additív csoportját, V_n -el pedig n számú V csoport direkt összegét. Ha U olyan alcsoportja V_n -nek, hogy V_n U szerinti bármely mellékosztályába pontosan egy olyan (x_1, \dots, x_n) elem esik, amelyre $0 \leq x_i < 1$ ($i = 1, \dots, n$), akkor V_n -nek legalább egyik $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ eleme U -ban van.

A véges egyszerű csoportok elméletével kapcsolatos *Rédei* következő újabb eredménye: Bármely G páros rendű véges egyszerű csoport tartalmaz olyan $G \supset H \supset K$ részcsoporthálókat, amelyben H és K nem *Abel-féle* csoport, kivéve azt az esetet, amikor G rendje 2 vagy 60.

Szép Jenővel közösen a véges nilpotens csoportok generátorrendszereiről a következő eredményt nyerte *Rédei*: Ha $\{\alpha, \beta, \dots\}$ véges p -csoport és $\{\alpha, \beta, \dots\} \neq \{\beta, \dots\}$, akkor $\{\alpha, \beta, \dots\} \neq \{\alpha^p, \beta, \dots\}$. Hasonló megállapítás érvényes a tekintett csoport kommutátorcsoportjára nézve is. Legújabban *N. Ito* kimutatta, hogy ezek az eredmények tovább nem élesíthetők.

Jelenleg is folyamatban vannak *Rédei* vizsgálatai két adott ciklikus csoport összes *Zappa—Szép-féle* szorzatának meghatározására.

Annak a *Szele Tibor* által több dolgozatban vizsgált kérdésnek a duálisaként, hogy egy gyűrű mennyiben van determinálva additív csoportja által, *Steinfeld Ottó*, *Rédei* tanítványa, azt a problémát vetette fel, hogy melyek az összes gyűrűk, amelyek multiplikatív félcsoporthálója elő van írva. Ez egy rendkívül nehéz probléma, amely az említett magyar kutatóktól függetlenül *D. Ellis* floridai matematikus vizsgálataiban is felmerült, aki azonban eddig még nem tudott eredményt elérni ezzel kapcsolatban. *Rédei* egy fontos észrevételéből kiindulva most *Rédei* és *Steinfeld* közösen kutatják ezt a problémát, már eddig is szép eredményekkel.

Mahler és *Jarnik* felfedezte a rácspontra vonatkozó *Minkowski-féle* alaptétel p -adikus általánosítását. *Rédei*nek sikerült ezt a tételt még tovább általánosítania, egyúttal kiderítve, hogy a tétel valódi lényegének nem a p -adikus számok, hanem a véges projektív terek, azaz a véges testek nyelve az igazi kifejezője. *Rédei* tétele egyszersmind *Thue* egyik eredményének is nagymérvű általánosítása. Ezenfelül több figyelemreméltó számelméleti alkalmazását is adta már *Rédei* emez eredményének, amelyek közül egyik a törzsszámmodulusra

vonatkozó hatványmaradékok eloszlását illeti és *Vinogradov* egy nevezetes tételével áll kapcsolatban.

Aczél János vizsgálatainak egyik legújabb eredménye algebrai vonatkozásban is figyelemreméltó. *Frobeniustól* származik a hiperkomplex számok elméletének az a nevezetes tétele, hogy a kvaterniótest az egyetlen lehetséges véges fokszámú nem-kommutatív testbővítése a valós számtestnek. *Aczél*nak sikerült egy ennél részben erősebb, részben gyengébb, de Frobenius tételével szoros kapcsolatban levő tételt bebizonyítania, amely lényegében azt mondja ki, hogy a kvaterniótest a valós számtestnek egyetlen negyedfokú nullosztómentes gyűrűbővítése. Kiemelendő *Aczél* bizonyításának geometriai jellege és rendkívül szemléletes volta, ami didaktikai szempontból számottevő haladást jelent, mivel ezen az úton hozzáférhetővé válik Frobenius tételének gondolköre olyanok számára is, akik előzőleg nem foglalkoztak behatóan absztrakt algebrával.

Fuchs László legújabb vizsgálatai az elrendezett és részben elrendezett csoportok elmélete, az értékelésemélet, továbbá az ideálemélet terén hoztak rendkívül értékes gyümölcsöket.

Legyen G additív Abel-féle csoport. G -t akkor nevezzük *részben elrendezett* csoportnak, ha elemei részben rendezett halmazt alkotnak oly módon, hogy $a > 0$ és $b > 0$ esetén mindig $a + b > 0$. A tekintett elrendezés Fuchs elnevezése szerint *normális*, ha abból, hogy G valamely a elemére és valamely n természetes számra $na \cong 0$, mindig $a \cong 0$ következik. Mármost Fuchs problémája a következő: A részben elrendezett G csoport rendezése mikor terjeszthető ki a csoport teljes elrendezésévé, ha a kiterjesztésnél ezenfelül még G egy tetszőleges eleméről előírjuk, hogy az 0 -nál nagyobb legyen (amennyiben ez a követelmény nem áll fenn már eleve, illetve nincs ellentmondásban G eredeti elrendezésével). Fuchs tétele úgy szól, hogy ez akkor és csak akkor lehetséges, ha G eredeti elrendezése normális. Ez a tétel speciális esetként tartalmazza *F. Levi* ama szép tételét, mely szerint egy Abel-féle csoport akkor és csak akkor elrendezhető, ha torziómentes.

Egy másik, ugyancsak részben elrendezett csoportokra vonatkozó dolgozatában *G. Birkhoff* egyik eredményét általánosítja *Fuchs*. Az olyan részben rendezett csoportokra, amelyek egyszersmind *lattice*-t is alkotnak ugyanarra a rendezési relációra nézve, *Birkhoff* értelmezte az *abszolút érték* fogalmát, mint az $a, -a$ elempár felső burkát. *Birkhoff*nál tehát az abszolút érték is csoportelem. *Fuchs* kiterjeszti ezt a fogalomalkotást tetszőleges részben rendezett csoportokra is, ahol tehát *lattice*-követelmények teljesüléséről nincs szó. Az a mély és finom gondolat, amely ezt az általánosítást lehetővé teszi, analóg ötletet tartalmaz ahhoz, amely a legnagyobb közös osztó és az ideál közti kapcsolatot eredményezi. A Fuchs-féle abszolút érték fogalmának megvannak mindazok a tulajdonságai, amelyek a közösleges abszolút értéket jellemzik.

Fuchs egy további dolgozatában részben elrendezett csoportok rendezéstartó homomorfizmusaival foglalkozik. Megmutatja, hogy a csoportelmélet homomorfiatétele, továbbá a két izomorfiatétel átvihető az ilyen homomorfizmusokra is. A homomorfiatételben szereplő normálosztó mindig *konvex* alcsoport és a faktorcsoport indukált elrendezése általában kiterjesztendő. E szisztematikus vizsgálatok rendkívül szép alkalmazásaként adódik *Fuchs* következő tétele: Egy normálisan részben elrendezett csoportnak akkor és csak akkor nincs valódi *konvex* alcsoportja, ha a csoport rendezéstartóan izomorf a valós számok egy additív alcsoportjával.

Végül még egy további, ebbe a tárgykörbe vágó dolgozatában a *Schreier*-féle csoportbővítést sikerül átvinnie *Fuchs*nak részben elrendezett csoportokra, amely utóbbiak elméletében magától értetődő módon ugyanolyan alapvető fontosságú szerepet tölt be ez az eredmény, mint a közönséges csoportoknál. Kiemeli az eredmény szépségét a következő korollárium: ha ismeretes egy részben elrendezett csoport közönséges *Schreier*-féle bővítése egy részben elrendezett csoporttal, akkor ez a bővítés mindig elrendezhető az alapul vett csoportok elrendezése által indukált módon, hacsak az a nyilvánvalóan szükséges követelmény teljesül, hogy a bővítésnél felhasznált automorfizmusok rendezéstartóak.

Fuchs legújabb eredményeinek egy másik kategóriájára áttérve, azt a dolgozatát vesszük sorra, amelyben az értékelélméletet általánosítja igen messzemenően. Különös öröm számunkra emlékezetünkbe idézni, hogy ennek az egész modern algebrában, sőt ennek keretein is túlmenően, oly nagyjelentőségű elméletnek felfedezője *Kürschák József*, szintén magyar matematikus volt. *Kürschák* elméletében eredetileg az értékhalmoz kettős kompozíciójú algebrai struktúra volt. *Krull*tól származik az a további fontos haladást jelentő lépés, hogy az u. n. *exponenciális értékelést* veszi alapul, mikoris az értékhalmoznak csupán elrendezett *Abel*-féle csoportot kell alkotnia. *Fuchs* legújabbban úgy általánosította az elméletet, hogy elegendő, ha az értékhalmoz részben elrendezett *Abel*-féle csoport. Az exponenciális értékelés axiómái ekkor a következők: a K kommutatív test bármely zérustól különböző a eleméhez hozzárendeljük egy G részben elrendezett additív *Abel*-féle csoport valamely $v(a)$ elemét, mint a „abszolút értékét“, oly módon, hogy $v(ab) = v(a) + v(b)$ mindig teljesüljön, továbbá $v(a) \geq v(b)$ és $v(a') \geq v(b)$ esetén mindig $v(a - a') \geq v(b)$ álljon. Mármint a pozitív és zérus abszolút értékű elemek a test zéruselemével együtt egy integritástartományt alkotnak, amelyet a test értékgyűrűjének nevezünk. Az erre a fogalomra vonatkozó következő fontos tétel csak az elmélet *Fuchs*-féle általánosításában igaz: Egy integritástartomány kvociensteste mindig értékelhető úgy, hogy az értékgyűrű éppen az alapul vett integritástartomány legyen. Ez a tétel egyebek között azért is jelentős, mert lehetővé teszi, hogy az integritástartomány bizonyos tulajdonságait az értékcsoporthoz egyszerűbb struktúrájában vizsgáljuk. Az előbbi tételben fellépő értékcsoporthoz továbbá akkor

és csak akkor teljesen elrendezett, ha az integritástartomány minden ideálja irreducibilis, azaz nem állítható elő két tőle különböző ideál metszeteként. *Fuchs* ezen eredményeinek számos alkalmazásai közül különösen figyelemreméltó *Clifford* egy eredményének új és egyszerűbb bizonyítása, amely kritériumot tartalmaz arra nézve, hogy egy integritástartomány mikor integrálisan zárt. Kiemelendő még az a további szép eredmény, mely szerint integrálisan zárt gyűrű értékcsoportja teljesen elrendezett csoportok szubdirekt összege.

Ideálméleti tárgyú dolgozatainak egyikében messzemenően általánosítja a *Noether*-féle gyűrűkre vonatkozó felbontási tételeket, s *Fuchs* tárgyalásában ez a ma már klasszikusnak nevezhető elmélet sokkal egyszerűbbé, áttekinthetőbbé és rövidebbé vált.

Egy másik idevágó tárgyú dolgozatában egy új fogalmat, a *primális ideál* fogalmát vezeti be *Fuchs*. A kommutatív R gyűrű J ideálját akkor nevezi primálisnak, ha az R/J maradékosztálygyűrűben a nullosztók ideált alkotnak. Bebizonyítja továbbá azt a tételt, hogy R minden ideálja előállítható primális ideálok metszeteként. Amennyiben az R gyűrű maximum-követelménynek is eleget tesz, akkor az előbbi tétellel kapcsolatban unicitás is állítható bizonyos értelemben.

A normalizátor csoportelméleti fogalmának analógiájára vezette be *Kalmár László* a gyűrűelméletben az *idealizátor* fogalmát. Egy adott kommutatív R gyűrű esetében R valamely S részgyűrűjének idealizátorán R maximális olyan részgyűrűjét értjük, amelyben S ideál. *Fuchs* legújabbán egy szép alkalmazását találta e fogalomnak a modern aritmetikában. *Fuchs* eredménye így szól: az R kommutatív gyűrű akkor és csak akkor integrálisan zárt R kvociensgyűrűjében, ha minden végesen generált és legalább egy nem-nullosztót tartalmazó ideáljának idealizátora a kvociensgyűrűben része R -nek. E tétel további érdekes következménye azt mondja ki, hogy egy maximum-követelménynek elegettevő R integritástartományban egy J ideál akkor és csak akkor bomlik fel egyértelműen prímeállok szorzatára, ha J bármely prímeállosztója maximális ideál R -ben, s valamennyi ilyen prímeállosztó idealizátora R kvociensstestében éppen R .

Végül megemlítendő még, hogy az I. Magyar Matematikai Kongresszuson tartott előadásában *Fuchs* tetszőleges gyűrűk radikáljára új definíciót adott, amely másirányú általánosítása a radikál klasszikus definíciójának, mint a *Jacobson*-féle radikál. Idetartozik még *Fuchs* jelenleg is folyó vizsgálatainak következő eredménye. Ha átvisszük egy csoport Φ -alcsoporthoz fogalmát arra az esetre, amikor a tekintett csoport egy gyűrű, önmagával, mint baloldali operátortartománnyal ellátva, akkor a Φ -alcsoport éppen a *Jacobson*-féle radikál lesz.

Gyires Béla egyik legújabb dolgozatában egy adott elem adott tényezőszámú faktorizációinak pontos számát határozta meg maradékosztálygyűrűkben. Eredménye úgy tekinthető, mint a „factorisatio numerorum“ klasszikus problémájának átvitele egységelemmel bíró, véges, ciklikus gyűrűkre.

Kertész András bebizonyította, hogy egy csoport akkor és csak akkor bír azzal a tulajdonsággal, hogy valamennyi alcsoportja direkt faktor, ha a csoport elemi Abel-féle csoport, azaz bármely elemének rendje véges és négyzetmentes szám. Mint utólag kiderült, *R. Baer* egyik vizsgálatában egy más jellemző tulajdonságuk alapján ugyanezek a csoportok léptek fel. Legújabbán *Kertész Szele Tiborral* együtt az olyan Abel-féle csoportokkal foglalkozik, amelyek valamennyi endomorf képe direkt faktor. Az ilyen csoportok között már igen bonyolult típusok is fellépnek.

Szép Jenő igen figyelemreméltó eredményekben gazdag vizsgálatokat folytatott a véges csoportok struktúra-elméletében. Köztudomású, hogy ez az egyik legvonzóbb, de évtizedek óta megoldatlan problémáit tekintve egyszerűsmind az egyik legnehezebb ága is a modern algebrának. Amikor *Schreier* felfedezte a nevééről elnevezett bővítésméletet, úgy látszott, hogy ezzel a struktúraprobléma egycsapásra az egyszerű csoportok kivizsgálására redukálódott. Nem szólva most arról, hogy a *Schreier*-féle bővítésmélet konkrét struktúra-vizsgálatokban sem váltotta be az eleinte hozzáfűzött reményeket, elég arra rámutatnunk, hogy az egyszerű csoportok problémáira ez az elmélet természeténél fogva teljesen alkalmazhatatlan. Ezért igen öröndetes, hogy *Szép*-nek egy olyan vizsgálati módszert sikerült kidolgoznia, amely éppen az egyszerű csoportokkal kapcsolatban vezetett becses eredményekhez. Nevezzük egy véges csoport tágabb, illetve szűkebb értelemben vett faktorizációjának a csoport két olyan alcsoport szorzataként való előállítását, amelyek metszete tetszőleges, illetve csak az egységelemből áll. *Szép* a szűkebb értelemben faktorizálható csoportok vizsgálatából indult ki. Mint utólag kiderült, a második világháború alatt már *G. Zappa* és *G. Casadio* olasz matematikusok is foglalkoztak a faktorizálható csoportokkal, és sikerült megadniok egy, a *Schreier*-féle csoportbővítésmélethez hasonló elvi konstrukciót, amely szolgáltatja két adott csoport szűkebb értelemben vett szorzatait, illetve tágabb értelemben vett szorzatait az esetben, ha a két csoport metszete normálosztója a szorzat-csoportnak. Ezen az elvi konstrukción túlmenő szerkezeti eredményeket azonban *Zappa* és *Casadio* nem kapott. *Szép* tőlük függetlenül újra megtalálta ezt a konstrukciót, amely legújabbán egy *Rédei*től eredő és a ferdeszorzatra alapított, már említett tárgyalásban igen világosan áttekinthetővé vált; de *Szép* ezen az u. n. *Zappa*—*Szép*-féle elméleten lényegesen túl is ment, amennyiben sok fontos következményt vont le belőle, elsősorban az egyszerű csoportokra vonatkozólag. Általában azt mondhatjuk, hogy a *Zappa*—*Szép*-féle elmélet konkrét problémák esetében gyakran jobban alkalmazható a *Schreier*-bővítésnél és nagyon kedvezően egészíti ki azt, lévén éppen azokra a problémákra alkalmazható, ahol a *Schreier*-bővítés természeténél fogva hasznavehetetlennek bizonyul. Ezzel a módszerrel *Szép* legújabb dolgozataiban a következő eredményeket nyerte. Megmutatta, hogy bármely törzsszámfokú alternáló csoport szűkebb értelemben faktorizálható, azaz hogy végtelen sok egyszerű csoport van, amely

alkalmas valódi alcsoportjainak Zappa—Szép-féle szorzata. Bebizonyítja továbbá, hogy ha a G véges csoport szűkebb értelemben faktorizálható és faktoraival relatív prím rendűek, akkor G bármely N normálosztója is szűkebb értelemben faktorizálható, s faktoraival normálosztók G megfelelő faktoraiban. Ennek a tételnek következménye, hogy ha G faktoraival egyszerű csoportok, akkor vagy maga G is egyszerű, vagy pedig faktoraival egyike normálosztó G -ben. Egy további, Rédei Lászlóval közös dolgozatában a tágabb értelemben faktorizálható csoportok elméletét dolgozza ki Szép, és pedig úgy, hogy Casaditól eltérően semmi kikötést nem tesz a faktorok metszetére nézve. E dolgozat eredményeiből következik, hogy ha egy csoport tágabb értelemben faktorizálható, és pedig oly módon, hogy az egyik faktor Abel-féle, s a két faktor metszete nem csupán az egységelemből áll, akkor maga a csoport nem egyszerű. További ilyen természetű eredménye Szépnek az, hogy relatív prím rendű Abel-féle csoportok Zappa—Szép-féle szorzata mindig feloldható. Ezt azóta $N. Ito$ és $H. Wielandt$ általánosította. Egyik újabb dolgozatában az összes faktorizálható csoport egyszerűségére ad meg szükséges és elegendő feltételt Szép.

A továbbiakban ismertetendő eredményekkel kapcsolatban R^+ mindig az összes racionális számok additív csoportját, $C(p^\infty)$ pedig a p -hatvány nevezőjű racionális számok mod 1 vett additív csoportját, azaz u. n. Prüfer-féle p^∞ típusú csoportot jelöli. Itt p tetszőleges törzsszám.

Szép István megmutatta, hogy a p elemű csoport és $C(p^\infty)$ az összes olyan Abel-féle csoportok, amelyek bármely nem egyelemű homomorf képe izomorf magával a csoporttal. Ennek az eredménynek mintegy duálisa Szele Tibor következő eredménye: a p elemű csoport és R^+ az összes olyan Abel-féle csoportok, amelyek valamennyi, a nulloperátortól különböző endomorfizmusa automorfizmus. Ezt az utóbbi tételt legújabban $J. P. Serre$ párisi matematikus operátorcsoportokra általánosította. Szép István egy másik dolgozatában megmutatja, hogy $C(p^\infty)$ az egyetlen végtelen Abel-féle csoport, amelynek valamennyi valódi alcsoportja véges. Csaknem biztosra vehető, hogy ez a tétel akkor is igaz, ha nem szorítunk Abel-féle csoportokra, de ekkor már a bizonyítás rendkívül nehéznek ígérkezik. Hogy azonban mégsem reménytelen problémával állunk szemben, azt Fjodorov szovjet matematikus legújabb eredménye mutatja, aki ennek a problémának a duálisát oldotta meg tetszőleges csoportokra, bebizonyítván, hogy ha egy végtelen csoport valamennyi tulajdonképpeni alcsoportja véges indexű, akkor a csoport végtelen ciklikus csoport. Figyelemre méltó, hogy Fjodorov felhasználja bizonyításában $O. Ju. Smidt$ egy igen mély tételét, s mikor $R. Baer$ értesült Fjodorov eredményéről, levélben közölte Szele Tiborral saját bizonyítását e tételre, de Baer is kényszerül egy mély tételt felhasználni, bár bizonyítása egészen más úton halad. Ez azt mutatja, hogy Fjodorov tétele is, valamint Szép István még megoldatlan problémája is súlyos kérdésekkel függ össze.

Egy Szele Tiborral közös dolgozatában azt bizonyítja be Szép István, hogy a törzsszámrendű csoport, $C(p^\infty)$ és R^+ az összes Abel-féle csoportok

közül egyértelműen ki van tüntetve ama tulajdonsága alapján, hogy e csoportokat bármely, a nullooperátortól különböző endomorfizmusuk az egész csoportra képezi le.

Legújabb vizsgálataiban adott gyűrűnek olyan bővítéseivel foglalkozik *Szélpál* amelyben az adott gyűrű nem ideál. Megmutatja, hogy ilyen beágyazás mindig lehetséges.

Szendrei János a gyűrűk egységelemes bővítéseivel kapcsolatban hebizonyította, hogy bármely nullosztómentes gyűrűnek van ugyancsak nullosztómentes egységelemes bővítése. Ha megkívánjuk, hogy a bővítés a lehető legszűkebb legyen, akkor még unicitás is áll fenn. Szendreinek ezt az eredményét legújabban *R. E. Johnson* felhasználta egyik dolgozatában, amelyről alább még lesz szó. *Szendrei* legújabb, *Szele Tiborral* közös dolgozata a kommutatív endomorfizmusgyűrűvel bíró Abel-féle csoportokkal foglalkozik.

Szele Tibor egyik legújabb dolgozatában, amelyet tanítómesterének, *Rédei Lászlónak* ötvenedik születésnapjára dedikált, egy olyan elmélet alapjait dolgozta ki, amely az Abel-féle csoportok struktúra-elméletében ugyanazt a szerepet tölti be, mint a Steinitz-féle testbővítési elmélet a kommutatív testek elméletében. Csoportok algebrai és transzcendens bővítésének értelmezése után megmutatja, hogy egy tetszőleges csoportbővítés mindig megvalósítható egy tiszta transzcendens és egy azt követő algebrai bővítés által. Bármely csoportnak van pontosan egy algebrailag zárt algebrai bővítése. Az algebrailag zárt csoportok ama tulajdonságuknál fogva vannak kitüntetve az összes Abel-féle csoportok közül, hogy bármely őket tartalmazó csoportnak direkt komponensei. Egyébként az összes algebrailag zárt csoportok a

$$\Sigma C(p_r^\infty) + \Sigma R^+$$

direkt összeg alakjában adhatók meg. Ennek az elméletnek egyik eredménye egy új rangfogalom tetszőleges Abel-féle csoportokra, amely az eddigi, *Prüfertől*, illetve *Baertől* származó rangfogalmakat speciális esetként tartalmazza. Több ismert tétel új és részben élesített bizonyítása is adódik ebből az elméletből.

Szele egy további csoportelméleti eredményének megfogalmazása céljából legyen G tetszőleges Abel-féle csoport, H pedig olyan ciklikus alcsoportja G -nek, amelynek rendje a véges r szám. Mármost a tétel azt mondja ki, hogy a H alcsoport akkor és csak akkor direkt komponense G -nek, ha H metszete rG -vel 0 . Ez a tétel speciális eseteként tartalmaz számos csoportelméleti tételt, így pl. a véges Abel-féle csoportok alaptételét, a végesrangú torziócsoporthoz *Kuros-féle* alaptételét, azt a két *Kulikov-féle* eredményt, melyek szerint az összes direkt irreducibilis torziócsoporthoz a ciklikus p -csoportokkal és $C(p^\infty)$ -nel vannak adva, illetve, hogy direkt irreducibilis vegyes csoport nincsen, *Fomin* szintén szovjet matematikusnak korlátos elemrendű torziócsoporthoz bíró vegyes csoportokról szóló tételét, stb.

A nem Abel-féle csoportok elméletében *Szele* legújabb eredményei a következők. Megmutatja, hogy létezik egy és csak egy olyan végtelen csoport, amely

valamennyi véges kvaterniócsoportot alcsoportjaként tartalmazza, s egyúttal a legszűkebb ilyen tulajdonságú csoport. Ez a *Szele* által „végtelen kvaterniócsoportnak“ nevezett csoport olyan, hogy bármely két nem egyelemű alcsoportjának metszete nem egyelemű. Valószínűnek látszik, hogy ez az egyetlen ilyen tulajdonságú végtelen nem-Abel-féle csoport, de ennek bizonyítása eddig még nem sikerült. A másik, ebbe a tárgykörbe tartozó eredmény azt mondja ki, hogy ha egy tetszőleges csoportnak van tökéletes alcsoportja, akkor van tökéletes normálosztója is. Tökéletesnek az olyan csoportokat szokás nevezni, amelyek önmaguk kommutátorcsoportjai.

Gyűrűelméleti téren *Szele* legújabbán azzal a problémakörrel foglalkozott, hogy amennyiben elő van írva egy gyűrű additív csoportja, milyen mértékben van ezzel már determinálva a gyűrű. Nyilvánvaló, hogy a legerősebb mértékben akkor, ha csupán egyetlen olyan gyűrű létezik, amelynek additív csoportja az előírt. Ez esetben a gyűrű szükségképpen u. n. *zérógyűrű*, s az ilyen csoportokat *nilcsoportoknak* nevezi *Szele*. Megadja az összes nil-torziócsoportokat. Ezek éppen az összes algebrailag zárt torziócsoportok, amelyek előállításáról fentebb már volt szó. Megmutatja, hogy vegyes nilcsoport nincsen. A torziómentes nilcsoportok közül tetszőlegesen nagyszámosságú típust tud megadni *Szele*, de az összest még nem ismeri. A következő lépés az összes olyan additív csoport megadása, amelyre pontosan két különböző gyűrűtípus építhető. Egyik legújabb dolgozatában meghatározza *Szele* az összes ilyen csoportot. Érdekes, hogy a torziómentes csoportok közül egyedül a racionális számok additív csoportja ilyen. A további vizsgálatok még folyamatban vannak.

Schreiernek és *Artinnak* kb. 25 esztendővel ezelőtt egy közös dolgozatban sikerült tisztán algebrailag jellemeznie az elrendezhető kommutatív testeket. Eredményük szerint egy test akkor és csak akkor elrendezhető, ha formálisan valós, azaz ha -1 nem eleme a test elemeinek négyzetei által generált additív félcsoportnak. Kétesztendővel ezelőtt *J. P. Serre* általánosította ezt az eredményt, megadván annak szükséges és elegendő feltételét, hogy egy adott elrendezett test adott bővítésére mikor terjeszthető ki az alaptest elrendezése. *Szele* legújabbán ferde testekre általánosította *Schreier*, *Artin* és *Serre* eredményeit, s néhány nappal ezelőtt értesült arról, hogy *R. E. Johnson* az ő eredményét is általánosította nullosztómentes gyűrűk elrendezésének problémájára.

Szele legutóbbi, jelenleg is folyamatban levő vizsgálatai a direkt összeg fogalmának általánosításával állanak kapcsolatban. Ez az általánosítás igen célszerűnek látszik vegyes csoportok szerkezetének vizsgálatánál, különösen a kommutatív endomorfizmusgyűrűvel bíró Abel-féle csoportok, illetve az olyan Abel-féle csoportok leírásánál, amelyek bármely endomorf képe direkt faktor. Eme vizsgálatok eredményei *Szendrei Jánossal*, illetve *Kertész Andrással* közös cikkben jelennek meg, amelyekről fentebb már volt szó.

HOZZÁSZÓLÁS

SZELE TIBOR előadásához

RÉDEI LÁSZLÓ lev. tag:

Szele Tibor elhangzott előadásában kitűnő ismertetést adott az utóbbi években végzett hazai fontosabb algebrai kutatásainkról. Néhány apró, kiegészítő megjegyzésen kívül hozzászóló azt az észrevételt teszi, hogy kutatóink a csoportelméleten kívül az algebra egyéb ágait is szinte hasonló mértékben művelték, így a gyűrűelméletben éppen *Szele Tibornak* is becses kutatásai vannak, s igen jelentősek *Fuchs László* idevágó vizsgálatai. Egyébként pedig sokszor megítélés dolga, hogy egy-egy vizsgálatot hova számítunk, így például *Hajós György* csoportelméleti tétele a gyűrűelméletbe is tartozik. Egyáltalán az algebra fejezetei egymástól alig határolhatók el. Hazánkban az algebra régi, érdemekben gazdag multja van, elég erre nézve *Hunyadi Jenő*, *König Gyula*, *Kürschák József*, *Bauer Mihály* nevét említeni. Mai algebraistáink is jóleső megnyugvással elmondhatják, hogy sikeres munkával ápolták a tradíciókat. Örvendetes idősebb s fiatal algebraistáinknak nagy száma, főleg az elmúlt évtizedekkel való összehasonlításban, amikor ismert különböző okokból sok tudós volt kénytelen kivándorolni az országból. Nem véletlen, hogy a Magyar Tudományos Akadémiának támogatása, s ezen keresztül Népi Demokráciánknak tudománypártoló politikája meghozta áldásos gyümölcsét. Mint mindennemű tudományos kutatóinkat, úgy bennünket algebraistákat is a tudománynak ez a megbecsülése sarkaljon további munkára.