BESZÁMOLÓ A LENGYEL ÁLLAMI MATEMATIKAI INTÉZET TUDOMÁNYOS TEVÉKENYSÉGÉRŐL, KÜLÖNÖSEN A TOPOLÓGIA TERÜLETÉN

K. KURATOWSKI (Varsó), a Lengyel Állami Matematikai Intézet igazgatója

Előadta a Matematikai Állandó Bizottság 1951 december 13-án tartott ülésén

Megragadom az alkalmat mindenekelőtt, hogy kifejezzem afeletti örömömet, hogy résztvehetek a matematikai bizottság munkájában. Mi, lengyel matematikusok, mindig igen nagyra értékeltük a magyar matematikusok munkáját, s nagy örömmel fogadjuk azokat a lehetőségeket, amelyek a két ország matematikusainak kapcsolatait egyre szorosabbakká teszik.

A Lengyel Állami Matematikai Intézet szervezetéről és tudományos munkájáról szeretnék beszélni. Az Intézet éppen most három éve, 1948 decemberében alakult meg, mint az egyetemektől független tudományos intézet. Most, hogy a Lengyel Tudományos Akadémia megkezdi működését, az Intézet annak vezetése alá fog kerülni.

Az Intézet munkája felöleli a matematikának valamennyi ágát, a tiszta és az alkalmazott matematikát egyaránt, s működése kiterjed Lengyelország egész területére. Az Intézet központja Varsóban van, de Wroclawban, Krakkóban, Torunban, Lublinban és Poznańban is vannak csoportjai.

Az Intézet a matematika egyes speciális ágaival foglalkozó 16 csoportra oszlik. Az Intézet alapításakor azt két részre, a tiszta és az alkalmazott matematikával foglalkozó csoportra osztották. Hamarosan kiderült azonban, hogy ez a felosztás mesterséges, így ezt a beosztást megszüntettük, mert meggyőződésünk szerint nincs kétféle, tiszta és alkalmazott matematika, hanem csak egy matematika van és annak alkalmazásai. Az Intézet különböző csoportjai szoros együttműködésben állanak egymással, még látszólag igen távolálló csoportok között is van kapcsolat. Vannak olyan csoportok, melyeknek nincs közvetlen kapcsolatuk az ipar és a fizika problémáival, s közvetve mégis hozzásegítenek az ott felmerült problémák megoldásához. Így például a topológiai csoport különféle szolgálatokat tesz a differenciálegyenletekkel foglalkozó csoportnak, amely viszont közvetlen kapcsolatban áll az iparral.

A 16 csoport munkaterületei és működési helyei a következők:

1. Funkcionál-analízis (Varsó, Poznań).
2. Matematikai műszerek (Varsó).
3. Analitikus függvények (Krakkó, Lublin).
4. Valós függvénytan (Varsó, Wroclaw).
5. Differenciálgeometria (Krakkó, Wroclaw).
6. Geometriai optika (Wroclaw).

7. A matematika alapjai (Varsó, Torun).
8. Integrálegyenletek (Varsó).
9. Differenciálegyenletek (Krakkó).
10. A termelés statisztikai ellenőrzése (Varsó).
11. Matematikai statisztika (Varsó).
12—13. Technikai problémák (Varsó, Wroclaw).
14. Topológia (Varsó, Wroclaw).
15. Matematikai fizika (Varsó).
16. A matematika gyakorlati alkalmazásai általában (Wroclaw).

A 16 csoportban körülbelül 100 tudományos dolgozó van alkalmazva. Ezek részben professzorok, docensek és tudományos segéderők (akik az asszistenseknek felelnek meg), részben pedig olyan dolgozók, akik csak átmenetileg, néhány hónapig dolgoznak az Intézetben. Felmerülhet az a kérdés, hogy szükség van-e egyáltalán arra, hogy a professzorok az egyetemen kívül az Intézetben is dolgozzanak, nem lehetne-e a tudományos kutatás feladatait az egyetemen elvégezni. A tapasztalat azonban azt mutatja, hogy az Intézet tudományos munkája a kutatás színvonalát jelentősen emeli. Figyelembe kell ugyanis venni azt a körülményt, hogy az Intézetben tartott előadások és szemináriumok színvonala lényegesen magasabb lehet, mint az egyetemi előadások színvonala, hiszen ezek nem egyetemi hallgatók, hanem kész kutatók számára készülnek. Szerepelnek az Intézet programmjában olyan témák is, amelyek a szokásos egyetemi tanrendekben nem találhatók meg. Így például a mult évben egy szeminárium *Infeld* és *Mostowski* professzorok vezetésével a kvantumelmélet csoportelméleti kérdéseivel foglalkozott. Vagy Krakkóban a differenciálegyenletek elméletével kapcsolatban a relativitáselmélet problémáival is foglalkoznak s külön előadásokat tartanak olyan mérnökök számára, akik tudásukat el akarják mélyíteni. Olyan előadásokat is tartanak a matematikának egyes ágairól, így például a nomográfiáról, amelyek első sorban technikusokat érdekelnek. Az Intézet előadásain és szemináriumain nemcsak az Intézet tagjai vesznek részt, hanem számos fiatal kutató is, akik tanulmányaikat éppen befejezték. Így az Intézet munkája nagy mértékben hozzájárul a tudományos káderek képzéséhez.

Hogy az Intézet munkáját jobban megismerjék, néhány példát fogok felsorolni az egyes csoportok munkájából. Jelenleg 40 szeminárium folyik különféle témákról. A funkcionál-analízis csoportját *Mazur* professzor vezeti; ő egy szemináriumot vezet, mely lineáris topológikus terekkel foglalkozik. Ugyanezen csoport poznani tagozatában *Alexievicz* és *Orlicz* professzorok az ortogonális függvénysorok elméletéből vezetnek szemináriumot. A matematikai műszerek csoportját *Greniewski* dr. vezeti, itt az elektronikus számológépek, differenciálegyenleteket megoldó gépek, lineáris egyenletrendszereket megoldó gépek és egyéb matematikai műszerek kérdéseivel foglalkoznak. Az analitikus függvényekkel foglalkozó csoportot *Leja* professzor vezeti, a csoport lublini tagozatát pedig *Biernacki* professzor; ez a tagozat a polinomok analitikus elméletével foglalkozik. A valós függvénytani csoportot *Marczewski* professzor vezeti, ő a sztochasztikus folyamatokról, a mérték problémájáról, *Steinhaus* professzorral együtt pedig a valószínűség fogalmáról és az ergodelméletről vezet szemináriumot. Ugyanezen csoport varsói tagozatában Sikorski professzor a majdnem periódikus függvények elméletéről vezet szemináriumot. A differenciálgeometriai csoportot *Golab* professzor vezeti, résztvesz a csoport munkájában *Slebodzinski* professzor is. A matematikai alapjaival foglalkozó csoportot *Mostowski* professzor vezeti Varsóban. Ebben a csoportban *Mazur* professzor is vezet szemináriumot a rekurzív függvények szerepéről az analízisben. A csoport toruni tagozatát *Jaskowski* vezeti. A differenciálegyenletek csoportját *Ważewski* professzor vezeti, itt működik *Krzyżański* professzor is. A két statisztikai csoportot *Lange* és *Gruzewski* professzorok vezetik. A két technikai csoportot *Truski* és *Drobot* professzorok vezetik, *Turski* professzor csoportja első sorban rugalmasságtani alkalmazásokkal foglalkozik. A matematikai fizika csoportját *Rubinowicz* professzor vezeti. Végül az általános alkalmazásokkal foglalkozó csoportot *Steinhaus* professzor vezeti. Itt a matematika különféle, főleg statisztikai alkalmazásai szerepelnek, így például az orvostudománnyal, az Odera folyón való hajózással, a wroclavi villamosközlekedéssel, az antropológiával kapcsolatos kérdések.

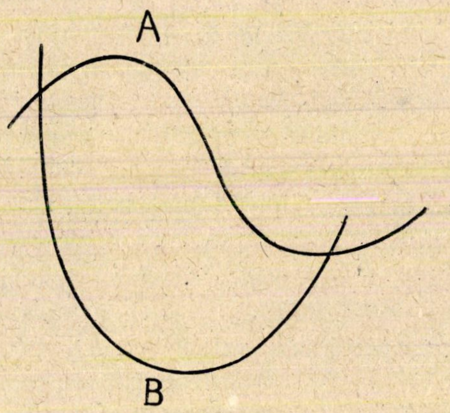
Észrevehették, hogy a matematika bizonyos ágai nem szerepelnek a csoportok munkaterületei között. Ennek oka az, hogy ezekben az ágakban jelenleg nincs Lengyelországban elsőrangú szakember. Így például nincsen algebrai, számelméleti, variációszámítási csoport. A halmazelmélet kérdéseivel viszont a matematika alapjaival foglalkozó csoport foglalkozik.

Az Intézet működése tervszerű. A terv nem túlságosan részletezett, mégis megfelelő módon alá vannak benne húzva azok a területek, amelyekkel az Intézet foglalkozni kíván. Minden csoport elkészíti tudományos tervét, amelyben felsorolja a vizsgálat tárgyává teendő kutatási kérdéseket. Természetesen évközi változások előfordulhatnak. A terv senkit sem gátol meg abban, hogy saját kutatásait folytassa és hogy olyan problémákkal foglalkozzék, amelyeket nem láttak és nem is láthattak előre, de megállapítja, hogy melyek azok a legfontosabb problémák, amelyekkel foglalkozni kell.

Egy külön csoport foglalkozik a matematikai publikációkkal. Elég tekintélyes számú matematikai folyóirat és könyv jelenik meg Lengyelországban, így a Fundamenta Mathematicae, a Studia Mathematica, a Colloquium Mathematicum, az Annales de la Société Polonaise de Mathématique stb. A felsorolt folyóiratokon kívül megjelennek a Monografie Matematyczne sorozatban matematikai monográfiák is. Ebben az irányban sokkal élénkebb most a munka, mint a háború előtt. Akkor körülbelül két kötet jelent meg évenként, az idén pedig már hét jelent meg.

Ilyen nagy matematikai élet irányításához jó szervezésre van szükség, hiszen a háborúban Lengyelország matematikusainak több mint 50%-át elvesztette. Ebben a szervezési munkában a kormánynak, különösen anyagi téren, igen sokat köszönhetünk. A Matematikai Intézet költségvetése forintra átszámítva mintegy két milliót, a Matematikai Társulat költségvetése ezen kívül egy milliót tesz ki.

Ezután rátérek a topológiai csoport munkájának részletesebb ismertetésére. Ezt a csoportot Varsóban *Borsuk* professzor vezeti, továbbá van a csoportnak egy tagozata Wroclawban is, amelyet *Knaster* professzor vezet, s amely halmazelméleti kérdésekkel foglalkozik, végül én magam is vezetek egy szemináriumot a halmazelméleti topológia köréből. Ez jelenleg első sorban a Janiszewski-féle problémával foglalkozik.



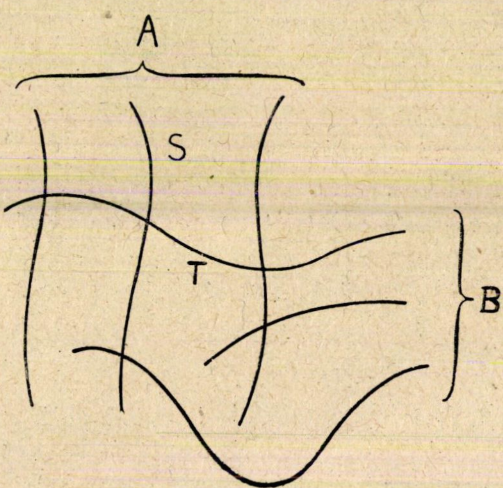
1. ábra

Janiszewski bizonyította be 1913-ban a következő tételt: ha A és B két kontinuum a síkban, s A és B közös része nem összefüggő, akkor A és B egyesítése szétdarabolja a síkot. Más fogalmazásban úgy is ki lehet fejezni ezt a tételt, hogy ha A és B két kontinuum a síkban, melyek egyesítésének kiegészítő halmaza összefüggő, akkor közös részük is összefüggő. Ez a tétel a síknak, illetőleg a gömbfelületnek alapvető tulajdonságát fejezi ki, így magában foglalja a Jordan-tétel egy részét.

Felmerül a kérdés, hogy megvizsgáljuk azokat a topologikus tereket, amelyekben a Janiszewski-tétel érvényes. Ebből a célból kissé megváltoztatjuk a tétel fogalmazását, kontinuum helyett összefüggő zárt halmazt mondunk benne. Tekintsünk azután egy normális topologikus teret, amelyről ezenkívül feltesszük azt is, hogy lokálisan összefüggő. Ez az utóbbi tulajdonság annyit jelent, hogy a tér minden nyílt halmaza előállítható összefüggő nyílt halmazok összegeként. Ilyen például a sík és általában minden euklideszi tér. Euklideszi terek esetében a fellépő nyílt halmazok csak megszámlálható sokan lehetnek, ezt azonban itt nem tesszük fel.

Összefoglalva, tekintsünk tehát egy normális, lokálisan összefüggő topológikus teret, amelyben a Janiszewski-tétel érvényes, azaz amelyben igaz az, hogy ha A és B összefüggő, zárt halmazok, s $A+B$ kiegészítő halmaza összefüggő, akkor AB is összefüggő. Ezt a teret jelöljük 1-gyel. Ha még feltesszük azt is, hogy a tér kompakt és hogy egyetlen pont nem darabolja fel, akkor ez a tér homeomorf a gömbfelülettel. Ez a gömbfelületnek egy topológikus jellemzése. Látható, hogy a Janiszewski-féle tulajdonság nagyon erős tulajdonság, lényegében a gömbfelületet jellemzi.

Legyenek most A és B az 1 tér zárt részhalmazai, S és T pedig legyen A, illetőleg B egy-egy komponense, azaz tovább nem bővíthető összefüggő részhalmaza. Könnyen megmutatható, hogy ha $1-(A+B)$ összefüggő, akkor

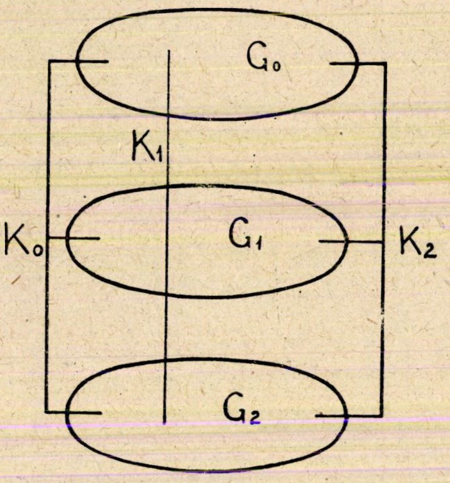


2. ábra

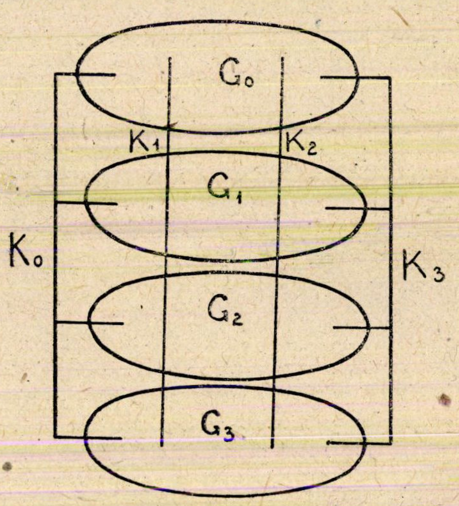
ST is összefüggő, ez a Janiszewski-féle tulajdonságnak egy általánosabb alakja. Érvényes azonban a hasonló állítás akkor is, ha A és B nem zárt, hanem nyílt halmazok. Mindezek a tulajdonságok megfogalmazhatók a Boole-féle algebrák nyelvén is, ha a lezárás műveletét vesszük alapul. Így tehát igen erős síkbeli topológiai tételek származtathatók a Boole-féle algebrák elméletéből, anélkül, hogy a pont fogalmát felhasználnók. Módszertani tekintetből igen érdekes kérdés, hogy meddig lehet eljutni a topológiában a pont fogalmának felhasználása nélkül. Ez az egyik kérdéskör, amellyel a szeminárium foglalkozik.

Zarankiewicz professzor vetette fel a következő kérdést, amely még nincs teljesen megoldva. Tekintsünk a síkban három, páronként közös pont nélküli tartományt, legyenek ezek G_0, G_1, G_2, továbbá tekintsünk három, ugyancsak közös pont nélküli kontinuumot, ezek legyenek K_0, K_1, K_2. Tegyük fel, hogy a három kontinuum mindegyikének van mind a három tartománnyal közös pontja. Akkor, mint az könnyen bebizonyítható, legalább az egyik tartományt az egyik kontinuum szétdarabolja.

Ezt az állítást nem nehéz bebizonyítani, de felmerül a kérdés, hogyan lehet az állítást általánosítani. Tekintsünk például 4 páronként közös pont nélküli tartományt és 4 páronként közös pont nélküli kontinuumot. Feltesszük, hogy mindegyik kontinuumnak van mindegyik tartománnyal közös pontja. Kimutatható, hogy van legalább 4 olyan (i, j) indexpár, hogy az i-edik kontinuum feldarabolja a j-edik tartományt, azaz amelyre $G_j - K_i$ nem összefüggő. Nincs azonban megoldva az a kérdés, hogy mi a helyzet N tartomány és N kontinuum esetén. *Zarankiewicz* professzornak az a sejtése, hogy ekkor legalább $(N-2)^2$ megfelelő tulajdonságú indexpár található, de ennek bizonyítása már az $N=5$ esetben is igen nagy nehézségekbe ütközik. Ez tehát egy egészen elemi eszközökkel megfogalmazható probléma, amelynek megoldása azonban komoly nehézségeket támaszt.



3. ábra



4. ábra

Ezeket a problémákat azzal a célzattal mondottam itt el, mert úgy hiszem, hogy a megoldatlan problémák megvitatása a tudományos kapcsolatoknak igen termékeny formája. Kérem a magyar matematikusokat, hogy hasonló módon közöljék velünk megoldatlan problémáikat, a lengyel matematikusok a legnagyobb készséggel nyujtanak azokban segítséget.