# ÚJABB EREDMÉNYEK A GEOMETRIA TERÜLETÉN

HAJÓS GYÖRGY lev. tag

*Előadta a Matematikai Állandó Bizottság 1951 december 14-én tartott ülésén*

A geometria olyan sok s annyira eltérő jellegű fejezetet ölel fel, hogy a magyar matematikusok által az elmúlt évben elért eredményekről beszámolva nem is várható, hogy ezek a geometria valamennyi fejezetét felölelik. Mégis megállapítható, hogy a mondott eredmények a geometria számos fejezetét gazdagították. Az érintett fejezetek közé tartozik az elemi geometria, projektív geometria, geometriai szélsőértékek fejezete, analitikus geometria, integrálgeometria, gráfelmélet, differenciálgeometria, többdimenziós terek geometriája és az általános terek differenciálgeometriája.

Az előadás kerete nem engedi meg, hogy az említett munkák részletes ismertetésébe bocsátkozzunk. Megelégszünk azzal, hogy minden dolgozatnál a legfontosabb, ill. legjellegzetesebb eredményt közöljük, vagy éppen — ahol több egyenrangú eredmény szerepel — az eredmények valamelyikének kiragadásával adjunk képet a dolgozat jellegéről.

*Vincze István* a súlyvonalakról írt dolgozatában egy konvex idomnak egy pontra, ill. irányra vonatkozó súlyvonalait definiálja. Mértani helye ez az adott ponton át, ill. az adott irányban haladó húrok felezőpontjainak. Kimutatja többek között, hogy egy ilyen súlyvonal hossza az idom kerületének felét nem haladhatja meg.

*Sós Vera,* a legifjabb generációból, egy pontra, ill. irányra nézve konvex görbékkel foglalkozik, amelyeket t. i. minden az adott ponton áthaladó, ill. az adott iránnyal párhuzamos szelő legfeljebb 2 pontban metsz. Megállapítja, hogy ha a görbe teljes szögváltozása $4\pi$-nél kisebb, akkor van olyan pont s egyben olyan irány, melyre nézve a görbe konvex. A felületekre vonatkozó megfelelő vizsgálatainál a teljes szögváltozás helyett a Gauss-féle görbület abszolút értékének felszíni integrálja lép fel.

*Szőkefalvi-Nagy Gyula* egy rövid dolgozatban kimutatta, hogy a háromszög körülírt köre középpontjának a csúcspontoktól mért távolságait ismerve, s hogy a beírt kör középpontjának az oldalaktól mért távolságait ismerve a háromszög körzővel és vonalzóval nem szerkeszthető meg.

*Vincze István* és *Szüsz Péter* közös dolgozatban kimutatták, hogy bármely konvex test előállítható egy gömbből olyan leképezéssel, mely minden pontpár távolságát csökkenti.

*Kárteszi Ferenc* egy torznégyszög oldalérintő gömbjeivel foglalkozott. Kimutatta, hogy az általános esetben, midőn 8 érintő gömb van, a gömbök középpontjai egy Moebius-féle tetraéderpárt tűznek ki.

Egy másik dolgozatában *Kárteszi Ferenc* az axiálisan szimmetrikus Moebius-féle tetraéderpárokról ír. A témát projektív általánosításban vizsgálja: axiális szimmetria helyett biaxiális involúciót tekint, amely egy torzegyenespár felvétele mellett a tér adott pontjához az egyenespár e ponton áthaladó szelőjén az adott pontnak a torzegyenesek metszéspontjaira vonatkozó harmonikus társát rendeli. Foglalkozik a szerző avval a kérdéssel, hogy adott tetraéderhez hogyan kell a torzegyenespárt felvenni avégből, hogy a biaxiális involúció Moebius-helyzetben levő tetraédert szolgáltasson. Bizonyítja, hogy ebben az esetben a torzegyenesek olyan hiperboloid alkotói, melynek az adott tetraéder polártetraédere.

*Fejes Tóth László* több dolgozatban lefedésekkel kapcsolatos szélsőérték-feladatokkal foglalkozik. Egyik dolgozatában azt a kérdést tárgyalja, hogy ha $n$-féle sugarú köröket használhatunk s ezeket a síkban úgy helyezzük el, hogy egymást ne fedjék, akkor — durván szólva — a síknak hanyadrészét fedhetjük le. Pontosabban úgy adódik a kérdés, hogy a síknak egyre nagyobb darabjait tekintjük s azt vizsgáljuk, hogy e darabok lefedettségét kifejező törtszám mihez tart.

Egy másik dolgozatban *Fejes Tóth László* a gömb felületén elhelyezett egybevágó s egymást nem fedő gömbsüvegeknek telített rendszerét tekinti, vagyis olyat, hogy további egybevágó s a többit nem fedő gömbsüveg már nem helyezhető el a gömbön. Kiemeljük azt az eredményét, hogy az ilyen telített rendszerek a gömb felületének legalább $(1-1/\sqrt{2})$-szeresét fedik le.

Ismét másik dolgozatban *Fejes Tóth László* azt a kérdést vizsgálja, hogy a síknak hanyadrésze fedhető le, ha adott tartománysorozatot használunk s e tartományok mindegyikét $k$ darabokra vághatjuk fel. Becslést ad arra az esetre, midőn az adott tartományok konvexek és mindegyikük elhelyezhető ugyanazon kör belsejében s egyben mindegyiküknek belsejében elhelyezhető ugyanazon kör.

*Egerváry Jenő* egyszerű ívekkel foglalkozó dolgozata kimutatja, hogy ha egy ívnek nincs 4 pontja egy síkban, akkor az ív húrjai az ív konvex burkát egyszeresen kimerítik. Ez az eredmény lehetőséget ad arra, hogy — az egyszerű ívek osztályán belül maradva — adott hosszúságú ívek közül a legnagyobb köbtartalmú konvex burokkal rendelkezőt megtalálja. Így egy csavarvonalnak egy teljes menetéhez jut.

*Rédei László* és *Szőkefalvi-Nagy Béla* közös dolgozatukban a Heron-formula általánosításaként két síkbeli poligon területének szorzatát csúcspárjaik távolságaival fejezik ki. Ha a két poligon megegyezik, e poligon területét átló- és oldalhosszaival kifejező formulához jutnak.

*Rédei László* egy dolgozatában két egymáshoz rendelt háromszög által megszabott affinitást tekint. Analitikus feltételét adja annak, hogy ennél az affinitásnál minden távolság csökkenjen. Kapcsolatban áll ez a dolgozatban tárgyalt ama kérdéssel, hogy a háromszögek egyikét forgatva a két háromszög Minkowski-féle kevert területe milyen relatív szélsőértéket vesz fel.

*Szőkefalvi-Nagy Gyula* két dolgozatban foglalkozik azokkal a síkbeli és térbeli alakzatokkal, amelyeknek egyenlete multipoláris koordinátákban lineáris. Az egyik dolgozat csak azokat a konvex alakzatokat tekinti, amelyeknek egyenletében csupa pozitív együttható szerepel, a másik dolgozat az általános esetről szól. Eredményei az egyenlet állandójának változtatásával adódó alakzatsorozatokra, az alakzatok érintőire és több részletkérdésre vonatkoznak.

Hasonló tárgyú *Szőkefalvi-Nagy Gyulának* azon pontok mértani helyeivel foglalkozó dolgozata, amelyeknek adott síkoktól mért távolságai egy lineáris összefüggést elégítenek ki. E mértani hely általában poliéderfelület, kivételes esetekben azonban test is lehet.

*Fejes Tóth László* az izoperimetrikus egyenlőtlenség Santaló-féle integrálgeometriai bizonyítását írta át elemi geometriai tárgyalássá. Bizonyítása teljesen elemi s nem szorítkozik konvex idomokra.

Az integrálgeometria kiterjesztéséről szól *Varga Ottó* dolgozata, amely az integrálgeometriai módszereket közvetlenül a Finsler-féle terekre alkalmazza. Motiválja ezt az általánosítást az a tény, hogy a Finsler-féle tér legszemléletesebb modellje az inhomogén anizontrop optikai közeg s az optika pedig szoros kapcsolatban áll az integrálgeometriával.

A gráfok fektorizációjának problémakörét dolgozza föl *Gallai Tibor* dolgozata. A gráfnak egy részgráfját $k$-adrendű faktornak nevezzük, ha ennek éppen $k$ darab éle indul ki az eredeti gráf minden szögpontjából. A szerző e témakör számos korábbi eredményét közös forrásból vezeti le. Bizonyítja, hogy ha az eredeti gráf $(p+q)$-adrendű és egyetlen páratlan szögpontú részgráfjából sem indul ki $(1+p/q)$-nál s egyben $(1+q/p)$-nél kevesebb, nem a részgráf szögpontjába torkolló él (ha továbbá páratlan $p$ és $q$ esetén a gráf szögpontjainak száma páros), akkor van a gráfnak $p$-edrendű faktora.

*Medgyessy Pál* bebizonyította, hogy ha egy harmadrendű gráf elsőrendű faktorát tekintjük, található olyan út, amelynek minden második éle tartozik e faktorhoz s amelyben e faktornak minden éle kétszer, a gráf többi éle pedig egyszer szerepel.

*Hajós György* az $n$ színnel kiszínezhetetlen gráfokkal foglalkozott, vagyis azokkal, amelyeknek szögpontjai nem sorolhatók $n$ osztályba úgy, hogy minden él különböző osztályba tartozó szögpontokat kössön össze. A teljes $(n+1)$-szögből kiindulva effektív konstrukciót ad, mely minden $n$ színnel kiszínezhetetlen gráfhoz elvezet.

A differenciálgeometria legismertebb bevezető fejezetére vonatkozik *Egerváry Jenő* dolgozata, melyben a térgörbék görbületének és torziójának képletét vezeti le megdöbbentő rövidséggel anélkül, hogy a Frenet-féle képletekre támaszkodnék.

*Fejes Tóth László* a síkgörbék affín ívhosszára, a görbület köbgyökének ívhossz szerinti integráljára adott eleminek mondható definíciót. Ha egy ívbe úgy írunk egy $n$ oldalú töröttvonalat, hogy a görbe és a töröttvonal által közrefogott terület minimális legyen, akkor e terület $n^2$-szerese $n$ növelésekor az affín ívhossz köbének tizenkettedéhez tart. Ez a definíció több, az affín ívhosszal kapcsolatos szélsőértékfeladat megoldását teszi lehetővé.

*Egerváry Jenő* többdimenziós ortocentrikus szimplexekre vonatkozólag definiálta a Feuerbach-gömbök sorozatát. E gömbök egyike a szimplex $k$-dimenziós határszimplexeinek súlypontjait és magasságpontjait tartalmazza (egy él magasságpontjaként a teljes szimplex magasságpontjának az élre vetett vetülete szerepeltetendő). Tárgyalja e gömbök viszonylagos elhelyezkedését és a síkban és térben ismert tulajdonságok megfelelőit. Tárgyalása az ortocentrikus szimplexre vonatkoztatott baricentrikus koordinátákat használ. E tárgyalásmódot a Ptolomaeus-tétel térbeli általánosításának bizonyítására is felhasználta.

A Feuerbach-gömbökre vonatkozó mondott eredményeket *Hajós György* is bizonyította, s azokat némileg kiegészítette. Bizonyításánál elemi vektorszámításra támaszkodik, amihez az alapgondolatot *Szele Tibornak* a Feuerbach-körre adott vektoriális tárgyalása szolgáltatta.

*Varga Ottó* és *Gyires Béla* közös dolgozatukban az $n$-dimenziós tér $n$ vektora által meghatározott $\binom{n}{p}$ darab $p$-vektorral foglalkoznak. Geometriai úton jutnak így algebrai tételekhez, hogy pl. a mondott $p$-vektorok koordinátáinak mátrixa akkor és csak akkor ortogonális, ha az eredeti $n$ darab vektor koordinátáinak mátrixa ortogonális volt.

*Gyarmathy László* a többdimenziós Apollonius-féle feladat megoldását tárgyalja. Megoldása azáltal válik lehetővé, hogy a ciklografikus ábrázolást megfelelően általánosítja s a *Maurin* által adott többdimenziós ábrázoló eljárást alkalmazza.

*Varga Ottó* több dolgozatában foglalkozik a Finsler-féle terekkel. Egyik dolgozatában a skaláris, ill. állandó görbületű Finsler-féle terekre ad geometriai kritériumot. E tereket az jellemzi, hogy egy ívelemen átfektetett síkhoz tartozó görbület nem függ a sík megválasztásától, ill. csak az ívelem kezdőpontjának megválasztásától függ. A szerző által adott kritérium egy parallelogramma mentén körülvezetett vektor megváltozását tekinti. A tér jellegére abból tud következtetni, hogy e különbségvektor irányának határhelyzete a parallelogramma (síkjának megtartása mellett való) csökkentésekor a parallelogramma és kezdővektor terébe, ill. a parallelogramma síkjába esik-e s hogy a különbségvektor iránya a határhelyzethez a parallelogramma területének csökkentésével együtt milyen erősen konvergál.

Másik dolgozatában *Varga Ottó* egymásra izometrikusan leképezhető Finsler-féle terekről ír. Megadja a terek görbületi tenzorai közötti ama összefüggést, amely az ilyen leképzés lehetőségét biztosítja.

Végül egy dolgozatában *Varga Ottó* affin összefüggő vonalelemsokaságok teljes differenciálinvariáns-rendszerének tárgyalását adja. E dolgozatával a *Veblen* által pontsokaságokra adott tárgyalást általánosítja. Tárgyalásánál megfelelő normálkoordinátarendszer bevezetését használja segédeszközként.

Az előadottak bőven alátámasztják a témák gazdagságáról a bevezetésben mondottakat. Mégis sajnálattal kell megállapítani, hogy a geometriának egyes fejezetei nem szerepelnek ebben a felsorolásban. Így pl. a topológia csak a vitathatóan odatartozó gráfelmélet révén áll az elmondottakkal kapcsolatban. A magyar geometriai iskolának tehát bőven van tennivalója: ehhez anyagot nyujt gazdag témaköre s eddig elhanyagolt fejezetek bekapcsolása is.

*Magyar Tudományos Akadémia*
*Alkalmazott Matematikai Intézete.*