

ÚJ EREDMÉNYEK A VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS TERÉN

RÉNYI ALFRÉD lev. tag

Előadta a Matematikai Állandó Bizottság 1951 december 14-én tartott ülésén

A valószínűségszámítás a felszabadulás előtt hazánkban meglehetősen elhanyagolt ága volt a matematikának. *Jordán Károly* értékes és jelentős munkásságot végzett e téren, amelyről e héten a Bolyai János Matematikai Társulat *Jordán Károly* 80. születésnapja alkalmával tartott ünnepi ülésén volt alkalmam beszámolni.¹ Azonban a magyar matematikusok többsége nem igen érdeklődött a valószínűségszámítás iránt. Ennek főbb okai a következők voltak: a valószínűségszámítás terén élenjáró szovjet tudomány eredményei nem voltak kellőképpen ismeretesek hazánkban; hiányzott a matematika gyakorlati alkalmazásai iránti mélyebb érdeklődés, ami a valószínűségszámítási kutatás egyik legfontosabb éltető eleme; végül pedig a magyar matematikusok nem ismerték a dialektikus materializmust, ami a valószínűségszámítás elvi kérdéseiben való helyes tájékozódás előfeltétele. Ez utóbbi hiány különösen azért éreztette hatását, mert éppen erre az időre — a felszabadulás előtti évtizedekre — esik a valószínűségszámítás megalapozása körüli kérdések tisztázása és az egymással ellentétes és egymással éles harcban álló felfogások helyes értékelése csak a dialektikus materializmus alapján lehetséges. A valószínűségszámítás alapjai körüli viták ismertetésére itt nem térhetek ki², csak megemlítem, hogy a valószínűségszámítás szabatos matematikai elméletének megalkotása és a valószínűségszámítással kapcsolatos alapvető ismeretelméleti kérdések tisztázása szovjet matematikusok és elsősorban *A. N. Kolmogorov* érdeme.

A felszabadulás után rövidesen elhárultak a fentemlített akadályok a valószínűségszámítás fejlődése elől hazánkban és megnyílt a fejlődés lehetősége ezen a vonalon is. Ugyanakkor egyre nagyobb mértékben nyilvánult meg a szükséglet a természettudományok, különösen a fizika és technika számos ága részéről a valószínűségszámítás fejlesztése iránt. Ma már elmondhatjuk, hogy a szovjet matematikusok munkásságára támaszkodva és az ő személyes segítségükkel lényegében behoztuk lemaradásunkat ezen a vonalon és a valószínűségszámítás terén hazánkban a tudományos kutatás egyre intenzívebb és már számos eredményt tud felmutatni. Az elméleti kutatásokkal párhuzamosan és azok eredményeire támaszkodva a valószínűségszámítás módszerei egyre szélesebb területen kerülnek gyakorlati alkalmazásra. A valószínűségszámítási kutatások további fejlődése szempontjából nagy jelentősége van, hogy ma már a valószínűségszámítás az egyetemi matematika-oktatás szerves részévé vált. A magyar matematikusok felismerték, hogy a valószínűségszámítás elemeinek

az ismerete a matematikai műveltség fontos alkotóeleme. Különösen ki kell emelni azt az egyre fokozódó érdeklődést, amely a fiatal matematikus generációnál a valószínűségszámítás iránt tapasztalható és ami a további fejlődés biztosítéka. A valószínűségszámítás további fejlődése szempontjából már igen érezhető egy magyar nyelvű korszerű tankönyv hiánya. Ezt a hiányt igyekszik előadó most készülő tankönyvével pótolni.

A valószínűségszámítás terén az elmúlt évben elért eredményeket három csoportra oszthatjuk, a következőképpen: A) elméleti eredmények, B) a matematikai statisztika körébe vágó eredmények, C) a valószínűségszámítás egyéb természettudományi és technikai alkalmazásaira vonatkozó eredmények.

Az első csoportba tartozó eredmények egy nagy része a III. Osztály Osztályközleményeinek sajtó alatt lévő számában fog magyar nyelven megjelenni, ezért ezen eredmények részletes ismertetésére nem térek ki, inkább csak az eredmények felsorolására szorítkozom. A valószínűségszámítás terén ma világszerte az alapok tisztázása után a sztochasztikus folyamatok elméletének fejlesztése áll az érdeklődés előterében. Egy összefüggő és viszonylag teljes elmélet kialakítása a soronkövetkező feladat. Ez irányban előrehaladást jelentett a diszkrét és additív Markov-féle folyamatok elméletének kidolgozása, amelyet az összetett Poisson-féle eloszlások fogalmának bevezetésével és tulajdonságainak tisztázásával *Jánossy Lajos*, *Aczél János* és az előadó egy közös dolgozatukban³ kezdték meg és amelyet előadó három másik dolgozatban^{4,5,6} folytatott. Az összetett Poisson eloszlások elméletének kiépítésénél említett szerzők felhasználták *A. N. Kolmogorovnak* egy értékes útmutatását. Az elmélet felépítése lényegében befejezettnek tekinthető és már eddig is igen sokirányú gyakorlati alkalmazás lehetősége merült fel (rádióaktív bomlás, telefonhálózatok terhelési problémái, ötvözetek fajsúlyának lokális ingadozásai, elektronemisszió, stb.), azonban a gyakorlati alkalmazások köre távolról sincsen kimerítve. A Markov-láncok elméletére vonatkozik *Jánossy Lajos* egy új gondolatokat felvető munkája⁷, amelyben a Laplace-féle transzformáció helyett más, általánosabb transzformáltakat vizsgál, amelyek az illető Markov-lánc sajátosságaihoz vannak szabva. *Takács Lajos* dolgozata⁸ bekövetkezési és koincidencia-jelenségek elméletét tárgyalja, általános feltevések mellett és eredményeit több konkrét esetre alkalmazza, *Gyires Béla* egy dolgozata⁹ egész értékű valószínűségi változók esetében a centrális határértéktételt a részletösszegek mod n eloszlására terjeszti ki: eredményei kapcsolatban állnak a Poincarétól származó „méthode des fonctions arbitraires” néven ismeretes módszerrel. Végül megemlítem előadónak a független függvényekre vonatkozó vizsgálatait, amelyeket akadémiai székfoglaló előadásával indított meg¹⁰, melyben bebizonyította, hogy a valószínűségszámítás centrális határértéktétele az alapul vett valószínűségi mérték abszolút folytonos transzformációjánál érvényben marad, amely eredményét *A. N. Kolmogorov* az I. Magyar Matematikai Kongresszuson tartott előadásában messzemenően általánosította és továbbfejleszt-

tette; előadó ezen vizsgálatainak folytatását képezi az I. Magyar Matematikai Kongresszuson tartott előadása¹¹, amelyben *H. Steinhaus* egy független függvényekre vonatkozó sejtését bizonyította be bizonyos kiegészítő feltevések mellett. Egy újabb dolgozatában¹² előadó kimutatta, hogy *Steinhaus* sejtése általánosságban nem érvényes, ugyanakkor a^{10, 11}-ben szereplő feltételeknél lényegesen kevesebbet kívánó mellékfeltételek mellett mutatta ki a sejtés érvényességét. Ezeknek a vizsgálatoknak a folytatását képezi előadó és *Pukánszky Lajos* közös dolgozata¹³, amely tárgyát illetőleg már a valós függvénytan területére tartozik és amelyről *Szőkefalvi Nagy Béla* tett említést beszámolójában. Ezt az eredményt itt csak azért említem, mert újabb példája annak, hogy a a valószínűségi számítási kutatások ösztönzést adhatnak a matematika más ágainak is. A¹⁰ dolgozattal megindított új kutatási irányba vágó további eredményekről remélem a közeljövőben alkalmam lesz beszámolni. Most csak azt említem meg, hogy ezen az úton lehetségesnek látszik a valószínűségi számítás független valószínűségi változókra vonatkozó alapvető tételeinek gyengén függő változók esetére való kiterjesztése, aminek úgy elméletileg, mint pedig a gyakorlati alkalmazások szempontjából nagy jelentősége van.

Áttérek most a matematikai statisztika körébe vágó eredmények ismertetésére. A matematikai statisztika ma fejlődésének olyan stádiumába került, amikor az eddig alkalmazott módszerek fokozottabb kritikai felülvizsgálata, ugyanakkor pedig teljesen új alapokon nyugvó módszerek kidolgozása van napirenden. Az angol-amerikai matematikai statisztikai iskola, amelynek alapítója és vezetője *R. A. Fischer*, válságba jutott. Ez az iskola a *Bayes*-féle módszer kritikájának jelszavával indult, azonban ezt a módszert nem sikerült jobb és megbízhatóbb módszerrel helyettesíteni, amint ezt *Sz. N. Bernstein* már 1936-ban kimutatta és amire nemrégiben *H. Oderfeld* és *H. Steinhaus* is világosan rámutattak egy konkrét minőségellenőrzési problémával kapcsolatban. A „fiducial probability” (valószínűség) homályos fogalma, amit *Fischer* a *Bayes*-módszer helyettesítésére javasol, csak arra jó, hogy elleplezze, hogy *Fischer* és tanítványai nem voltak képesek a *Bayes*-módszert semmi mással pótolni. Ugyanakkor rá kell mutatni, hogy a nyugati statisztikában az úgynevezett „paraméteres” irányzat uralkodik, amely a gyakorlatban igen durva hibák forrásává válhat, ha azt kritikátlanul és alkalmazhatóságának előzetes gondos vizsgálata nélkül használják fel. Ennek az előzetes vizsgálatnak a szükségességére azonban a nyugati statisztikai irodalom egyáltalán nem fordít gondot, sőt, éppen azzal jellemezhető, hogy ezeket a kérdéseket szinte teljesen elhanyagolja. Ennek nyilvánvalóan társadalmi és ideológiai okai vannak. Az alkalmazhatóság kérdésének alapos tisztázása ugyanis lehetetlenné tenné a matematikai statisztika módszereivel való visszaéléseket, amelyek a burzsoá közgazdaságban és biológiában burjánoznak.

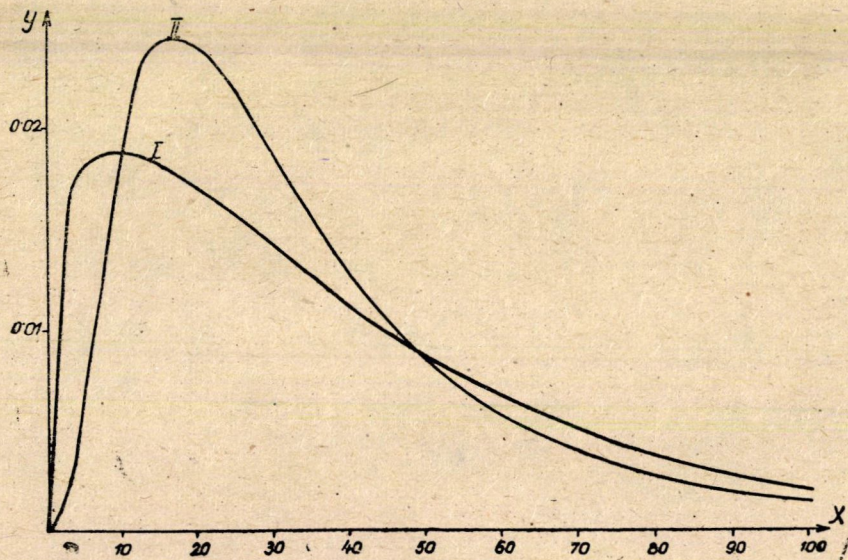
Az angol-amerikai statisztikai iskola irodalmát tehát fenntartással kell olvasnunk és alapos kritikával és óvatossággal kell kihámozni belőle azt,

ami valóban értékes. Ugyanakkor a matematikai statisztika terén az elmúlt évtizedben a Szovjetunióban egy új iskola alakult ki, amely a matematikai statisztika további egészséges fejlődésére nézve irányt mutat. A szovjetunióbeli matematikai statisztikai kutatásokat a következő alapvető vonások jellemzik, amelyek egyben szembeállítják az angol-amerikai iskolával: 1. az elmélet alkalmazhatósági határainak lelkiismeretes és alapos vizsgálata a dialektikus materializmus alapján, 2. a matematikai szabotosság követelményének állandó szem előtt tartása (ezzel szemben áll a nyugati irodalom szembetűnő „közömbössége” a matematikai precizitással szemben), 3. a „nem-paraméteres” problémák és módszerek előnyben részesítése abból a célból, hogy az elmélet gyakorlati alkalmazásait függetlenítse ellenőrizhetetlen és gyakran egyenesen téves hipotézisektől.

A hazai matematikai statisztikai kutatások teljes mértékben a szovjet matematikai statisztikai iskolához csatlakoznak, beleértve a nyugati irányzatok fokozottabb kritikájára való törekvést is. Ez megnyilvánul az Alkalmazott Matematikai Intézet valószínűségszámítási és matematikai statisztikai osztályának mindennapi munkájában, melynek során a konkrét gyakorlati problémák megoldásánál igen jó eredménnyel alkalmaztuk állandóan a szovjet iskola eredményeit, így például a *Kolmogorov—Szmirnov*-féle próbát. Hasonlóképpen szovjet kutatásokhoz csatlakozik előadónak a kötörmelék szemmegoszlására vonatkozó dolgozata¹⁴, amelyben *Kolmogorov* hasonló tárgyú munkájához csatlakozva kimutatja a logaritmikus normális eloszlás érvényességét. Ennek a problémának a kőbányáiparban van gyakorlati jelentősége, így például lehetővé teszi a különböző előírt finomságra való aprításhoz szükséges energia kiszámítását. A kapott elméleti eredményeket az Alkalmazott Matematikai Intézet összehasonlította a megfigyelésekkel és igen jó egyezést kapott. Ugyanakkor meg kell állapítani, hogy *Beke Béla* megállapításai¹⁵, aki azt állítja, hogy a logaritmikus normális eloszlás és a gyakorlatban eddig alkalmazott, minden elméleti alapot nélkülöző empirikus *Rosin—Rammler*-féle eloszlás között az eltérés gyakorlatilag lényegtelen, minden alapot nélkülöznek. Egy konkrét esetben a két eloszlás sűrűségfüggvényeinek eltérését az 1. ábra mutatja. A matematikai statisztika módszereinek alkalmazásánál szükséges körültekintésre mutatott rá előadó egy, az Orvosi Hetilapban megjelent¹⁶, két kutató csoport között hőmunkának a munkás szervezetére gyakorolt hatására vonatkozó megfigyelések kiértékelésével kapcsolatban kialakult vitájához való hozzászólásában, az úgynevezett „szignifikáns differencia” módszerének alkalmazhatóságát illetően.

A matematikai statisztikával kapcsolatban a nyugati irodalomban el van terjedve az a nézet, hogy a matematikai statisztika a valószínűségszámítás ismerete nélkül is elsajátítható és eredményesen alkalmazható. Ez a nézet alapján helytelen és rendkívül veszélyes. Arról van szó, hogy a valószínűségszámítás ismerete nélkül a matematikai statisztika módszerei receptekké

válnak és semmi biztosítéka nincs annak, hogy ezeket a recepteket helyesen és a megfelelő helyen használják-e fel. A matematikai statisztika módszereinek alkalmazhatósági határait csak az ismerheti fel helyesen, aki tisztában van ezeknek a módszereknek az elméleti alapjával, tehát a valószínűség-számítással. A helyzetet a következő hasonlat világítja meg: a valószínűség-számítás és a matematikai statisztika viszonya hasonlít az orvostudomány és a gyógyszer-tan viszonyára és a matematikai statisztika módszereinek a valószínűség-számítás ismerete nélküli alkalmazása ahhoz hasonlítható, mint ha valaki egy ismeretlen betegség esetén közvetlenül gyógyszerészhez fordul, ahelyett, hogy először egy orvossal megvizsgáltatná magát. A hasonlat még abban a vonatkozásban is megállja a helyét, hogy ugyanúgy, amint a legjobb gyógyszer is súlyos kárt okozhat a szervezetben, ha nem az orvosi előírásoknak megfelelő mennyiségben és módon alkalmazzák, hasonlóképpen a legmegbízhatóbb matematikai módszernek is megvannak az alkalmazhatósági határai és a helytelen alkalmazás súlyos hibák forrása lehet.



1. ábra

Mielőtt az eredmények harmadik csoportjára rátérnénk, egy konkrét kérdéstről szeretnénk részletesebben beszélni, amely elvi szempontból is igen érdekes és példa arra, hogy egy statisztikai módszernél milyen körültekintően kell megvizsgálni az alkalmazhatóság feltételeit. *Bodó Zsolt* egy nemrég megjelent dolgozatában¹⁷ egy új módszert közöl, fluoreszcens porok szennyezőanyag-összetételének kísérleti meghatározására. Ez a módszer abban áll, hogy a mikroszkóp különböző beállításai mellett különböző látómezőkben megvizsgálja a megadott nagyság-csoportokba tartozó szemcsék *számarányát* és ebből hatá-

rozza meg a teljes eloszlást. A módszer igen érdekes, mert sok munka megtakarítását teszi lehetővé, de természetesen a pontosság terén tett bizonyos engedmények árán; éppen ezért érdemes a módszer alkalmazhatósági határainak kérdését alaposabban megvizsgálni. Nem fogom itt részletesen ismertetni *Bodó Zalán* módszerét, hanem azt rögtön egy urna-modellre vonatkozó átfogalmazásban mutatom be, ami a kérdés matematikai lényegét tartalmazza.

Matematikailag *Bodó Zalán* módszere a következő eljárással jellemezhető: egy urnában N golyó van, ezek közül Np piros, Nq fehér és Nr kék golyó ($p+q+r=1$); visszatevéssel egy n elemű mintát veszünk; jelentsék x , y és z a mintában lévő piros, fehér és kék golyók számát ($x+y+z=n$).

Bodó módszere azzal jellemezhető, hogy a $\frac{p}{q}$ hányadoszt az $\frac{x}{y}$ tapasztalati értékkel becsüli meg, feltéve, hogy olyan mintáról van szó, amelyben $y > 0$, azaz amely tartalmaz legalább egy fehér golyót; amennyiben a minta nem ilyen, úgy azt nem veszi figyelembe. (Ez a feltétel elengedhetetlen, hiszen egyébként az $\frac{x}{y}$ hányadosról nem beszélhetünk.) Vizsgáljuk meg először, hogy ez a becslés *torzítatlan-e*, másszóval vizsgáljuk meg az $\frac{x}{y}$ valószínűségi változó feltételes várható értékét az $y > 0$ feltétel mellett, amelyet $M_n(p, q)$ -val jelölünk és nézzük meg, hogy ez megegyezik-e $\frac{p}{q}$ -val. (Mint ismeretes, egy statisztikai becslést akkor neveznek torzítatlannak, ha várható értéke egyenlő a megbecsülendő mennyiséggel). Egyszerű számolással adódik, hogy

$$M_n(p, q) = \frac{np}{1-(1-q)^n} \sum_{r=0}^{n-2} (1-q)^r \frac{1-(1-q)^{n-r-1}}{n-r-1} \quad (1)$$

tehát — amint ez várható volt — a becslés nem torzítatlan. Vizsgáljuk meg $M_n(p, q)$ határértékét ha $n \rightarrow \infty$, p és q állandóak. Egyszerűen belátható, hogy ebben az esetben

$$M_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} M_n(p, q) = \frac{p}{q} \quad (2)$$

azaz a becslés határértékben torzítatlan. A konvergencia sebessége is megbecsülhető:

$$M_n(p, q) - \frac{p}{q} = O((1-q)^{\frac{n}{2}} n \log n) + O\left(\frac{1}{nq^2}\right) \quad (3)$$

Tegyük most fel, hogy ugyanakkor, amikor $n \rightarrow \infty$, p és q is változnak, mégpedig úgy, hogy mindkettő 0-hoz konvergál, olymódon, hogy hányadosuk egy határértékhez közeledik: pontosabban tegyük fel, hogy $np \rightarrow \mu$ és $nq \rightarrow \lambda$

akkor a várakozással ellentétben $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n(p, q)$ nem egyenlő $\frac{p}{q}$ -val, hanem

ehelyett a következő határértékkel bír:

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \mu p \rightarrow \mu \\ n q \rightarrow \lambda}} M_n(p, q) = \frac{\mu}{e^\lambda - 1} \int_0^\lambda \frac{e^x - 1}{x} dx. \quad (4)$$

Ha λ nagy, úgy (4) jobboldala közelítőleg $\frac{\mu}{e^\lambda} Li(\lambda)$ -val egyenlő, ahol $Li(x) = \int_1^x \frac{du}{\ln u}$ a törzsszámelméletből jól ismert integrállogaritmus; mivel aszimptotikusan $Li(x) \approx \frac{x}{\ln x}$, tehát ha $\lambda \rightarrow \infty$, úgy (4) jobboldala aszimptotikusan $\frac{\mu}{\lambda}$ -val egyenlő. Ha azonban $\lambda \rightarrow 0$ és μ állandó, úgy (4) jobboldalának határértéke μ , míg ez esetben $\frac{\mu}{\lambda} \rightarrow \infty$.

Ez mutatja, hogy ennek a becslésnek az alkalmazásánál körültekintéssel kell eljárunk: adott p, q és n értékek mellett meg kell becsülni az

$$M_n(p, q) - \frac{p}{q}$$

különbséget és csak ha ez kicsiny, $\frac{p}{q}$ -hoz képest, akkor fogadhatjuk el az $\frac{x}{y}$ becslést (illetőleg az ezzel a becslési eljárással kapott értékek középértékét) megbízhatónak. Ehhez azonban hozzá kell tennünk a módszer „mentségére“, hogy ugyanez a hibája minden más elképzelhető becslésnek is megvan; könnyű belátni ugyanis, hogy az x, y értékekből $\frac{p}{q}$ -ra torzítatlan becslést megadni egyáltalán nem lehetséges. Legyen ugyanis $F(x, y)$ egy tetszőleges függvénye x -nek és y -nak; ha $F(x, y)$ a $\frac{p}{q}$ hányados torzítatlan becslése volna, úgy fennállna az

$$\sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^{n-k} F(k, l) V(x=k; y=l) = \frac{p}{q} \quad (5)$$

reláció, mégpedig p -ben és q -ban identikusan; ez azonban lehetetlen, hiszen ha $q \rightarrow 0$, úgy (5) jobboldala végtelenhez tart, míg a baloldal korlátos marad (ugyanez a helyzet, ha feltételes várható értékkel számolunk $y > 0$ feltétel mellett). Ilyenmódon minden gyakorlati problémában p, q és n nagyságához szabott eljárást kell alkalmazni és nem létezik olyan univerzális „jó“ módszer, amely minden körülmények között alkalmazható. A kérdésre más alkalommal még vissza fogok térni.

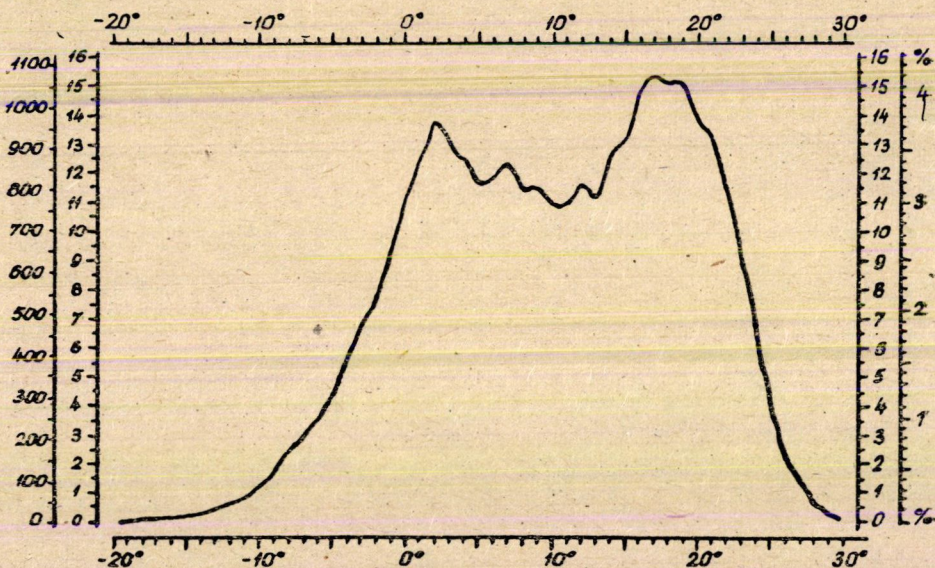
Még csak azt jegyzem meg, hogy a fluoreszcens porok szemmegoszlása jó egyezést mutat a logaritmikus normális eloszlás törvényével.

Áttérek ezek után az eredmények harmadik csoportjára: a valószínűség-számítás és a matematikai statisztika természettudományi és technikai alkal-

mazásaira. Ami a fizikát illeti, első helyen *Jánossy Lajosnak* a láncreakciókra vonatkozó dolgozatát¹⁸ kell megemlíteni.

Ennek a dolgozatnak az érdekességét elsősorban az adja meg, hogy a numerikus számolás szükségletei vezették *Jánossyt* a függvényiteráció fogalmának folytonos paraméter esetére való általánosítására. Ennek lehetősége már a múlt század végén felmerült, a kérdés azonban azóta éppen alkalmazások hiányában feledésbe merült. Az alkalmazások jelentőségére és a kérdés elméleti érdekességére való tekintettel indokoltnak látszik ebben az irányban folytatni a kutatásokat. Ezzel kapcsolatban előadó is ért el bizonyos részleteredményeket, azonban erről más alkalommal számol be.

Megemlítem itt *Fényes Imre* kísérletét a kvantummechanika új felépítésére a valószínűségszámítás segítségével. Elméletének lényege, hogy a Schrödinger-egyenletet a sztochasztikus folyamatok *Kolmogorov*-féle egyenleteiből igyekszik levezetni; *Fényes* kísérlete élénk vitát váltott ki, ami még nincs lezárva és így korai volna értékelést adni, azonban a kísérlet figyelemre méltó.



2. ábra

Részletesebben szeretnék beszámolni a valószínűségszámítás egy meteorológiai alkalmazásáról a napi középhőmérséklet eloszlásfüggvényének elméleti meghatározására vonatkozólag, mely kérdéssel nemrégiben foglalkoztam. Budapest napi középhőmérsékleteit az év minden napjára 70 év (1871—1940) adatai alapján *Takács Lajos* vizsgálta meg¹⁹ és megállapította, hogy felrajzolva a napi középhőmérséklet gyakorisági görbáját, egy-két maximummal bíró (bimodális) görbét kapunk (2. ábra). *Takács* igen helyesen állapítja meg, hogy a két maximum nem véletlenül mutatkozik,

hanem meteorológiai jelentésük van: a két maximum a téli és nyári félév átlagos hőmérsékletének felel meg. Takács azonban — megegyezően *Castrillon*, *Springstube* és mások véleményével — az említett gyakorisági görbét (helyesebben valószínűségi sűrűségfüggvényt) két Gauss-féle gyakorisági görbe (sűrűségfüggvény) összegeként próbálja előállítani. Azonban egy egyszerű valószínűségszámítási megfontolással beláthatjuk, hogy ez elméletileg nem indokolt és a szóbanforgó sűrűségfüggvényt nem két, hanem igen nagyszámú Gauss-féle sűrűségfüggvény összegeként, vagy még inkább Gauss-féle sűrűségfüggvények súlyfüggvénnyel vett integrálközéptételeként kell felfognunk. Ugyanis az a feltevés, hogy a napi középhőmérséklet eloszlásának sűrűségfüggvénye két Gauss-féle sűrűségfüggvény összegére bontható, annak a feltevésnek felelne meg, hogy az év két élesen elkülönülő — nyári és téli — fél-évre osztható, oly módon, hogy a napi középhőmérséklet mindkét félévben egyforma eloszlással ingadozik ugyanazon nyári, ill. téli középtérték körül. Nyilvánvaló, hogy ez a felfogás csak első és igen durva közelítésnek tekinthető és sokkal helyesebb képet kapunk a napi középhőmérséklet eloszlásáról, ha az évet négy évszakra osztva a szóbanforgó gyakorisági görbét négy Gauss-féle görbéből építjük fel; de még pontosabb képet kapunk, ha az egyes hónapoknak megfelelően 12 Gauss-féle görbéből próbáljuk az évi középhőmérséklet gyakorisági görbét előállítani; ezt a felbontást tovább folytatva még pontosabb és realisabb modelljét kapjuk a tényleges hőmérsékletingadozásoknak. Matematikailag a problémát a következőképpen fogalmazhatjuk meg: az évet bontsuk fel n egyenlő hosszú szakaszra és a k -ik szakasz j -ik napjának napi középhőmérsékletét fogjuk fel két tag, mégpedig az illető szakaszra jellemző átlagos középhőmérséklet és az attól való véletlen eltérés összegeként: a k -ik szakaszon az átlagos napi középhőmérséklet legyen x_k , akkor az év k -ik szakaszának j -ik napjának középhőmérsékletét ζ_{kj} -vel jelölve

$$\zeta_{kj} = x_k + \eta_{kj},$$

ahol η_{kj} az x_k -tól a k -ik szakasz j -ik napján tapasztalt véletlen eltérést jelöli. Indokoltnak látszik feltenni, hogy az η_{kj} változók függetlenek és normális eloszlásúak, 0 középtérrel és σ_{kj} szórással. Feltesszük, hogy az év k -ik szakaszán σ_{kj} állandó, azaz csak k -tól függ: jelöljük értékét σ_k -val. Jelentse ξ egy találmásra kiválasztott nap középhőmérsékletét, úgy

$$\zeta = \xi + \eta, \quad (6)$$

ahol a ξ valószínűségi változó rendre $\frac{1}{n}$ valószínűséggel veszi fel az $x_1, x_2, \dots, x_n$ értékeket és az η valószínűségi változó $\xi = x_k$ esetében normális eloszlású 0 középtérrel és σ_k szórással. Ez esetben egyszerű valószínűségszámítási megfontolással következik, hogy ζ valószínűségi sűrűségfüggvénye

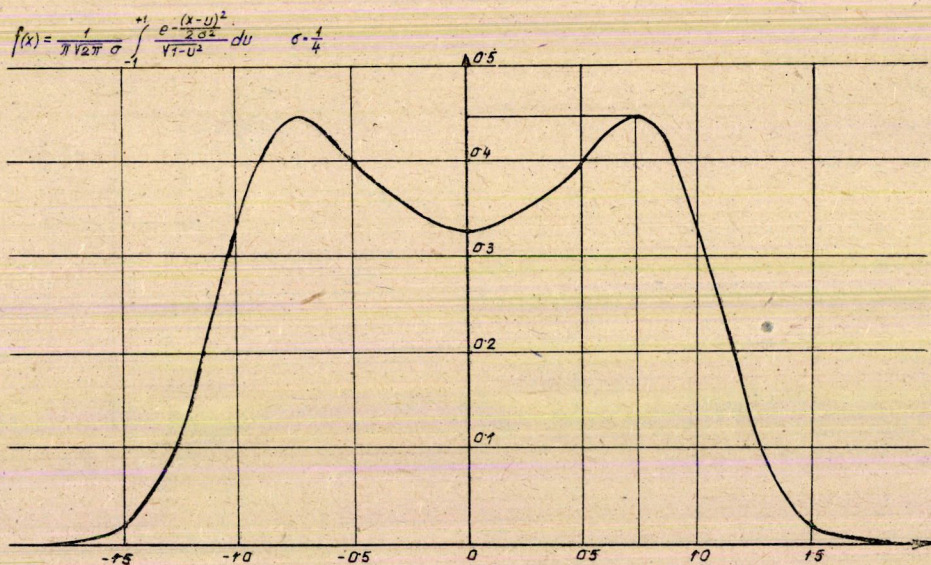
$$\frac{1}{n\sqrt{2\pi}} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sigma_k} e^{-\frac{(x-x_k)^2}{2\sigma_k^2}}. \quad (7)$$

Ha az x_k értéket mint egy $x = x(t)$ ($0 \leq t \leq 1$) függvény értékét, a σ_k értéket pedig mint a $\sigma = \sigma(t)$ ($0 \leq t \leq 1$) függvény értékét fogjuk fel a $t = \frac{k}{n}$ helyen, úgy a (7) összeg felfogható az

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 \frac{1}{\sigma(t)} e^{-\frac{(x-x(t))^2}{2\sigma^2(t)}} dt \quad (8)$$

integrál Riemann-féle közelítő összegének; ilyenmódon tehát a napi középhőmérséklet gyakorisági görbéjének egyenletét a (8) alakban indokolt keresni. Az $x = x(t)$ függvény nyilvánvalóan a napi középhőmérséklet szempontjából vizsgált földrajzi helytől függ; hogy valamilyen képet kapjunk az $y = f(x)$ görbe menetéről, tegyük fel, hogy $\sigma(t) \equiv \sigma$ állandó és $x(t) = a + b \cos 2\pi t$, ebben az esetben a szóbanforgó sűrűségfüggvény:

$$f(x) = \frac{1}{\pi\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{+1} \frac{e^{-\frac{(x-a-bu)^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{1-u^2}} du, \quad (9)$$

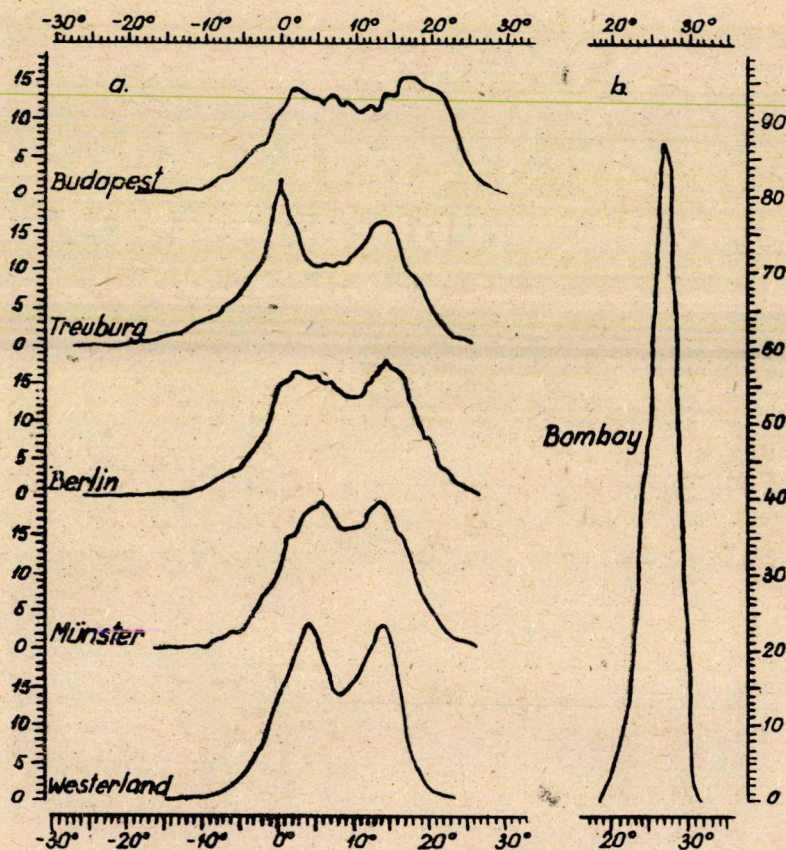


3. ábra

amelynek menetét a 3. ábra mutatja. Megjegyzendő, hogy a föld tetszőleges pontjának megfelelő $x(t)$ függvény meghatározható oly módon, hogy kiszámítjuk minden egyes napra a napi középhőmérséklet *sokévi átlagát*. Hasonlóképpen közelítőleg megállapítható a $\sigma(t)$ függvény is. (Érdeemes megjegyezni, hogy Budapesten a napi középhőmérséklet szórása télen nagyobb, mint nyáron.) A trópusokon $x(t)$ és $\sigma(t)$ első közelítésben állandónak vehetők; ebben az esetben az $f(x)$ függvény egyetlen Gauss-féle görbére redukálódik, a tapaszt-

talatokkal megegyezően (lásd a 4. ábrán, Bombay napi középhőmérsékletének gyakorisági görbáját). Budapesten az $x(t)$ függvény egy eltorzított sinus-hullámhoz hasonlít, amelynek a nyári félévnek megfelelő fele hosszabb és nagyobb amplitudójú. Ilyen $x(t)$ -nek valóban két maximumú $f(x)$ görbe felel meg.

Ilyenmódon tehát a napi középhőmérséklet gyakorisági görbéjének alakjára vonatkozó vázolt elméleti megfontolások számot adnak a napi középhőmérséklet gyakorisági görbéjének alakjának a földrajzi helytől való függéséről.



4. ábra

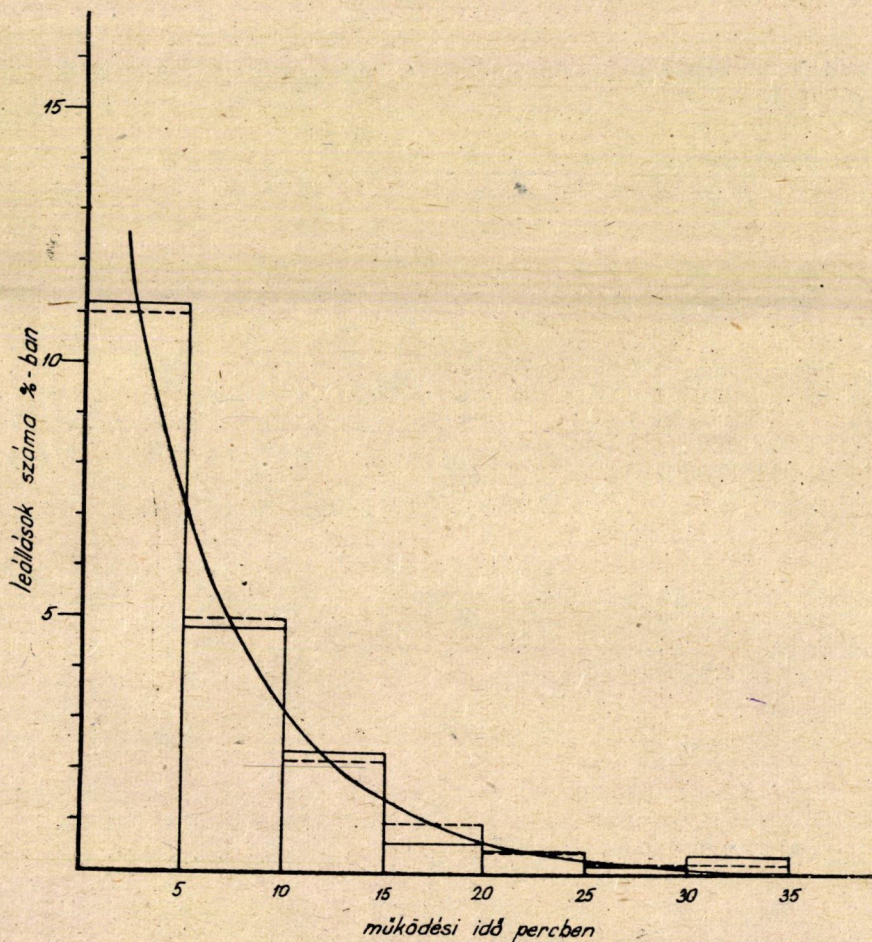
A fenti megfontolásokhoz egy elvi megjegyzést kívánok fűzni: a természettudományokban fellépő tapasztalati görbék képlettel definiált függvénnyel való megközelítésénél a lehetőségekhez képest arra kell törekedni, hogy a szóbanforgó természeti jelenség tényleges lefolyásának többé-kevésbé pontos leírásán alapuló *elméleti megfontolás* eredményeképpen kapott képlettel közelítsünk és ne csupán a görbe *alakjából* kiindulva próbáljuk a tapasztalati görbét egy egyszerű alakú képlettel megközelíteni. Az ilyen eljárás célravezető voltát illusztrálják a napi középhőmérsékletre vonatkozó fenti megjegyzések.

Ami a valószínűségszámítás műszaki alkalmazásait illeti, az Alkalmazott Matematikai Intézet sok ilyen jellegű problémával foglalkozott, ezek közül csak három problémacsoportot emelek ki. Az első csoportba a minőségellenőrzés matematikai módszerei tartoznak. Az Intézet foglalkozott például a gödöllői Ganz Árammérő Gyár felkérésére automata-gépekkel gyártott csavarok gyártásánál a selejt csökkentésének kérdésével és kiszámította, hogy a futóellenőröknek milyen időközökben kell az automatagépek működését ellenőrizni, hogy a selejtszázalék egy előírt értéket ne haladjon meg. A probléma matematikai szempontból igen egyszerű, így ennek részletezésére itt nem térek ki. Matematikai szempontból is újszerű problémák merültek fel törésnek és kopásnak kitett gépalkatrészek tartalékolási és utánrendelési ütemtervének kidolgozásával kapcsolatban. Az erre vonatkozó eredményeinkről más helyütt fogunk beszámolni, azért itt ennek a kérdésnek a részletes ismertetését mellőzöm, csak annyit jegyzek meg, hogy ennek a kérdésnek igen nagy gyakorlati jelentősége van a népgazdaság szempontjából. A kérdés azért is érdekes, mert olyan problémáról van szó, amely a szocialista társadalomban egészen másképpen vetődik fel, mint a kapitalista társadalomban. Arról van szó ugyanis, hogy a tartalékolás és utánrendelés ütemtervének megállapításánál a szocialista iparban szem előtt kell tartani azt a követelményt, hogy egy üzem se tartalékoljon feleslegesen sok alkatrészt, mert a felesleges nagy tartalékot más üzemektől vonja el és így azok tervteljesítését veszélyezteti. Ugyanakkor azonban a tartaléknak elegendőnek kell lenni ahhoz, hogy a véletlen törések által szükségessé tett cserékre mindig legyen készenlétben alkatrész, illetőleg annak a valószínűsége, hogy a gép tartalékalkatrész hiányában ne tudjon termelni, gyakorlatilag elhanyagolhatóan kicsiny legyen.

Csak röviden említem meg a textilgépek optimális fordulatszámának meghatározására irányuló vizsgálatokat is²⁰. A probléma a következő: egy munkás több automata szövőgépet kezel. Ha valamelyik gépen fonalszakadás történik, a gép leáll és a munkás hozzákezd az elszakadt fonal összekötöztetéséhez. Azonban azalatt, amíg dolgozik, újabb gépeken történhet fonalszakadás és így azok addig állnak, amíg a munkás a már előzőleg leállt gépeken el nem végzi a szükséges munkát. Tehát nemcsak a javítás, hanem a javítások alatti gépállás is okoz termeléskiesést. A fordulatszám növelésével növekszik az időegység alatti termelés, de ugyanakkor gyakoribbakká válnak a fonalszakadások, tehát a gépek többet állnak. A feladat tehát az, hogy meghatározzuk azt a fordulatszámot, amely mellett a tényleges termelés maximális. A probléma megoldásához természetesen szükséges annak kísérleti meghatározása, hogy a szakadások gyakorisága hogyan függ a fordulatszámtól. Anélkül, hogy a részletekbe belemennénk, csak azt emelem ki, hogy többszáz szakadásmentes működési idő (azaz a gép beindításától az első fonalszakadásig terjedő időtartam) hosszára vonatkozó, a Kistextben végzett üzemi adatfelvétel teljes mértékben igazolta azt a feltevést, hogy a működési idők exponenciális eloszlást

követnek. Ennek oka nyilvánvalóan abban áll, hogy az, hogy egy bizonyos pillanatban történik-e fonalszakadás, kizárólag az ebben a pillanatban igénybevételnek kitett fonalszakaszok lokális szilárdsági viszonyaitól függ és így annak a valószínűsége, hogy egy bizonyos t időtartam alatt történik-e fonalszakadás, független attól, hogy a szóbanforgó időtartamot megelőzőleg a gép mennyi idő óta volt működésben. Ha tehát $F(t)$ jelenti annak a valószínűségét, hogy a működési idő t -nél hosszabb, úgy fennáll az

$$F(t+s) = F(t)F(s) \quad (10)$$



5. ábra

függvényegyenlet, amiből már következik, hogy $F(t) = e^{-\lambda t}$, ahol $\lambda > 0$ állandó, azaz a működési idők exponenciális eloszlást követnek. Ezt azért emeltem ki, hogy még egy példával rámutassak a tapasztalati alapon felvett görbék elméleti értelmezésére való törekvések jelentőségére. Az 5. ábra a szakadásmentes

működési idők hisztogramját mutatja; a pontozott vonalak az elméletileg számított értékeket, míg a kihúzott vonalak a megfigyelt értékeket jelölik; látható, hogy a megegyezés igen jó. Az exponenciális eloszlás feltevése alapján az optimális fordulatszám meghatározására vonatkozó számítások egyszerűen elvégezhetők.

Úgy hiszem, a fenti néhány kiragadott példa is képet ad arról, milyen nagy jelentősége van a valószínűségszámítás alkalmazásának a műszaki gyakorlatban. A matematika öt éves tudományos tervében ennek megfelelően a valószínűségszámítás gyakorlati alkalmazásainak kérdései súlyponti kérdésként szerepelnek: arra kell törekednünk, hogy megsokszorozva erőfeszítéseinket ezeknek a problémáknak a megoldására, elősegítsük öt éves tervünk sikeres végrehajtását.*

*Magyar Tudományos Akadémia
Alkalmazott Matematikai Intézete.*

IRODALOM

- ¹ Megjelenik a Matematikai Lapokban.
- ² Lásd: Rényi Alfréd: A szovjet matematika 30 éve I. A valószínűségszámítás megalapozásáról, Matematikai Lapok I. 1 (1939) 27—64 és II. A valószínűségszámítás új irányai u. o. I. 2 (1950) 91—137. A valószínűségszámítás elvi kérdéseinek részletesebb kifejtését előadó a közeljövőben megjelenő „Valószínűségszámítás” c. tankönyvében fogja megadni.
- ³ Jánossy L., Rényi A., Aczél J.: Összetett Poisson eloszlásokról I. MTA. III. O. Osztályközleményei I. 2 (1951). 315—328.
- ⁴ Rényi A.: A Poisson eloszlás problémaköréről. MTA. III. O. Osztályközleményei I. 1 (1951) 202—212.
- ⁵ A. Rényi: On some problems concerning Poisson processes. Publicationes Mathematicae 2 (1951) 66—73.
- ⁶ Rényi A.: Összetett Poisson eloszlásokról. II. MTA. III. O. Osztályközleményei. I. 2 (1951), 329—341.
- ⁷ Jánossy L.: A Laplace-transzformáció általánosítása a valószínűségszámításban. MTA. III. O. Osztályközleménye. I. 2 (1951), 343—350.
- ⁸ Takács Lajos: Bekövetkezési és koincidencia jelenségek tárgyalása időtartamban tetszőleges eloszlású történések esetén. MTA. III. Osztályközlemények I. 2 (1951).
- ⁹ Gyires B.: Valószínűségeloszlások egy határértékfeladata. I. Magyar Matematikai Kongresszus közl. (sajtó alatt).
- ¹⁰ Rényi A.: A valószínűségszámítás központi határértéktételének egy új általánosításáról. MTA. III. O. Osztályközleményei I. 2 (1951).
- ¹¹ Rényi A.: Sztochasztikus függetlenség és teljes függvényrendszerek. I. Magyar Matematikai Kongresszus közleményei (sajtó alatt).

* Előadó az elmúlt évben elért alkalmazott matematikai eredmények közül csak a valószínűségszámítás terén elért eredményekről számolt be részletesen. Az egyéb irányú alkalmazott matematikai eredmények közül egyesekre nézve lásd Egerváry Jenő r. tag hozzászólását.

- ¹² A. Rényi: On a conjecture of H. Steinhaus, *Annales de la Société Polonaise de Mathématiques* (sajtó alatt).
- ¹³ L. Pukánszky, A. Rényi: On the approximation of measurable functions. *Publicationes mathematicae*. 2 (1951) 146—150.
- ¹⁴ Rényi A.: Az aprítás matematikai elméletéről, *Építőanyag*, 1950.
- ¹⁵ Beke B.: Aprított anyagalmazok szemszerkezete, *Építőanyag*, (1951), 67—70.
- ¹⁶ Rényi A.: Levél a szerkesztőséghez, *Orvosi Hetilap*, 1951, 29.
- ¹⁷ Z. Bodó: Some optical properties of luminescent powders *Acta Physica*, I. 2, 135—150.
- ¹⁸ Jánossy L.: Egy az elektronsokszorozó elméletében fellépő sztochasztikus folyamatról MTA. III. O. Oszt. Közl. I. 2 (1951), 357—367.
- ¹⁹ Takács L.: Napi hőmérsékletek gyakorisága Budapesten, *Időjárás* 51 (1947) és 54 (1948).
- ²⁰ Ezen vizsgálatok részletes ismertetése a Mérnöki Továbbképző Intézet kiadásában jelenik meg.

HOZZÁSZÓLÁSOK

RÉNYI ALFRÉD ELŐADÁSÁHOZ

EGERVÁRY JENŐ:

Hozzászólásom célja, hogy az Alkalmazott Matematikai Intézet mechanikai és szilárdságtani osztályának legutóbbi évi működéséről összefoglaló képet adjon.

A szilárdságtani természetű kérdések közt szerepeltek a következők: nagyteljesítményű generátorban szerkezeti elemként alkalmazott kúpos héj szilárdságtani vizsgálata; alternáló mozgású gép okozta talajrezgések vizsgálata konkrét alkalmazásban a csőri vízmű gépháza építésénél; két oldalról különböző nyomásnak alávetett lemez átbillenése.

Az osztályhoz számos olyan megbízás érkezett, amely hővezetési és diffúziós problémák tárgyalását tette szükségessé. Teljes elméleti és gyakorlati elintézését nyert a hűtési eljárások kapcsán felmerült következő probléma: egy testnek ismeretes a kezdeti hőmérsékleteloszlása továbbá a testnek felszínére, annak minden pontjában az időben lineárisan változó hőmérséklet van rákényszerítve (a hűtött test egyenletes sebességgel hűlő közegben van elhelyezve). Az ilyen módon körülírt problémát sikerült a Laplace-egyenlet és a hullám-egyenlet megoldására visszavezetni és egyes egyszerű testformák esetében — derékszögű hasáb, csőszerű test — a megoldásban számszerű eredményekig jutni.

FÉNYES IMRE:

Előadó volt szíves az én vizsgálataimról is megemlékezni. Kiegészítésül vázlatosan ismertetem vizsgálataim főbb eredményeit és további célkitűzéseit:

1. A fizikai Markov-folyamatok Fokker-egyenlete és a Kolmogorov egyenletek a fenomenológikus fizika kontinuitási egyenletének a sztochasztikus folyamatok esetére való általánosításaiként tekinthetők. Ez a körülmény alapul szolgál egy általános sztochasztikus sebesség értelmezéséhez. Azonban, míg ilyen módon a sztochasztikus folyamatok kontinuitási egyenlete ismert, a hidrodinamikai mozgásegyenlet analógja a sztochasztikus folyamatok fizikájában ismeretlen. Mivel a mozgásegyenlet volna hivatott arra, hogy a valószínűségi sűrűség és a sztochasztikus sebesség különböző erőhatásokra történő változását figyelembe vegye, e mozgásegyenlet meghatározását elsőrendű feladatnak tartottam. A hidrodinamikai variációs elvnek a Markov-folyamatokra való alkalmazásával olyan variációs elvhez jutottam, amelynek Euler—Lagrange-féle egyenletei közt ott szerepel a Fokker-egyenlet és a Kolmogorov-egyenletek, sőt ezen túlmenően az eddig ismeretlen mozgásegyenlet is.

2. A Markov-folyamatoknak ilyen módon kiszélesített elméletét a diffúzió problémájára alkalmaztam. Tekintve, hogy itt — a feltételektől függően — két, ill. három komplikált térbeli parciális differenciálegyenlet szimultán megoldásáról van szó, említésre méltó, hogy erőmentes térben és homogén erőterben sikerült a feltételeket kielégítő zárt megoldást találni. Az eredmények a tapasztalással egyeznek.

3. Csak kevesek előtt ismeretes *Fürth*nek az az eredménye, hogy az erőmentes térben egyenes mentén mozgó Brown-részecske mozgására vonatkozólag szintén érvényes egy, a Heisenberg-félelvel formailag teljesen egyező, bizonytalansági reláció. Ismerve *Fürth*nek ezt az eredményét, felvetődött a

kérdés: érvényes-e minden Markov-folyamatra vonatkozólag ilyen bizonytalansági reláció? A koordináták és a sztochasztikus sebességek szórására a Schwartz-féle egyenlőtlenséget alkalmazva, közvetlenül kiadódott a keresett reláció, mely a Fürth-félének valamennyi Markov-folyamatra való általánosítása és amely a Fürth által vizsgált speciális esetben is élesebb egyenlőtlenséget szolgáltat. Itt említem meg, hogy a sztochasztikus sebességekhez és koordinátákhoz bizonyos operátorok rendelhetők, melyekre egyszerű felcserélési relációk érvényesek. E felcserélési relációk felhasználásával a bizonytalansági relációk igen egyszerű és szemléletes diszkussziója vált lehetővé.

4. Mind a sztochasztikus folyamatok, mind a statisztikus mechanika szempontjából fontos a kétféle elmélet kapcsolatának ismerete. Sikerült kimutatnom, hogy a statisztikai mechanika a Markov-folyamatok elméletének az a határ-esete, amidőn a Kolmogorov-féle elméletben szereplő *szórástenzor identikusan eltűnik*. Ez a körülmény érthetővé teszi, hogy bizonyos statisztikus fizikai problémák miért nem tárgyalhatók statisztikai mechanikai módszerekkel. Példaként a diffúzióelméletet említem, a diffúziókoeficiens jelenleg is csak félempirikus módszerekkel tudjuk elméletileg meghatározni. Megemlítem még, hogy a kétféle elméletnek ez a kapcsolata érdekes és gyakorlatilag is hasznosítható módon mutat rá a statisztikus mechanikai ergod-elv és a Markov-folyamatok elméletében szereplő ergodikus tulajdonság kapcsolatára.

5. Utoljára említem meg a Markov-folyamatok és a kvantummechanika kapcsolatára vonatkozó vizsgálataimat, melyek szervesen az előbb említett eredményekre épülnek. Ezzel kapcsolatban azokkal a Markov-folyamatokkal foglalkoztam, amelyeknél a stochasztikus sebességnek potenciálja van. Az ilyen folyamatokhoz mindig hozzárendelhető egy valószínűségi amplitudófüggvény, melynek a következő tulajdonságai vannak: az amplitudófüggvény abszolút értékének négyzete a valószínűségi sűrűséggel egyenlő, továbbá a Fokker-egyenlet, ill. a második Kolmogorov-egyenlet ezzel a függvénnyel kifejezve pontosan a hullámmechanikai kontinuitási egyenlet alakját veszi fel. Ebből a tényből nyilvánvalóan következik, hogy a kvantummechanika egész matematikai apparátusa konkrét jelentést nyer az említett potenciális Markov-folyamatok elméletében. Ezzel nemcsak megcáfoltam *Schrödinger* és *Fürth* azon hiedelmét, hogy a Fokker-egyenlet a kvantummechanikában nem érvényes, hanem azt is bebizonyítottam, hogy a kvantummechanika nem egyéb, mint a Markov-folyamatok fizikájának egyik igen egyszerű speciális esete. Első pillanatban úgy tűnik, hogy a kvantummechanikának a Markov-folyamatok elméletébe való beépítésével nem a kvantummechanika válik egyszerűbbé, hanem ennek az elméletnek összes ismeretelméleti nehézségeit bevisszük a Markov-folyamatok elméletébe is. Gondolok itt a bizonytalansági reláció és az elvi mérhetetlenség viszonyára, valamint a rejtett paraméterek lehetetlenségének Neumann-féle bizonyítására, Valójában nem ez a helyzet. T. i. a bizonytalansági relációnak a Fokker egyenletből való származtatása kényszerítő erővel arra a következményre vezet, hogy a relációnak semmi köze sincs a mérés által történő zavaráshoz, hanem kizárólag a statisztikus tárgyalásmód következménye. Ami pedig a rejtett paraméterek lehetetlenségét illeti, szintén a legkedvezőbb megállapításra jutunk. Ugyanis a rejtett paraméternek Neumann-féle értelmezése szerint ezek a paraméterek a hullámfüggvényhez járuló olyan további adatok lennének, amelyek a hullámfüggvénnyel együtt szolgáltatnák a kauzális leírást. Nyilvánvaló, hogy ilyen rejtett paraméter nem lehetséges nemcsak a kvantummechanikában, de semilyen statisztikai diszciplinában, hiszen valószínűségi adatok (a hullámfüggvény

pedig ilyen) nem használhatók fel kauzális-állapothatározókként is. Ugyanez áll pl. a hőmérsékletre is. A hőmérsékletre hiába vesszünk hozzá akárhány paramétert, nem kaphatunk a molekulák mozgására kauzális leírást. Igen egyszerűen kimutatható, hogy Neumann-féle értelemben vett rejtett paraméter a diffúzió elméletében sem lehetséges, ahol egyébként bizonyos rejtett paraméterek létezése nyilvánvaló. Nem akarom a felsorolást tovább folytatni, csupán azt említem meg, hogy a legelőször említett mozgásegyenlet és a Fokker-egyenlet a valószínűségi amplitudófüggvény behelyettesítésével egyetlen egyenletbe megy át, amely egy hullámegyenlet és amelyik a Schrödinger-egyenlettel azonos, ha a szórásenzor skalárisá fajult és értéke $\frac{h}{4\pi m}$.

További vizsgálatok folyamatban vannak. Főleg a második kvantálás valószínűség-számítási értelmezésével és néhány szemléltető példa megadásával kívánok foglalkozni, melyek közvetlenül mutatnák a kauzális tárgyalásmód és valószínűségi hullámok kapcsolatát.

BODÓ ZALÁN:

Mindenekelőtt köszönetet mondok Rényi Alfrédnek, hogy az általam használt módszert komoly matematikai kritika alá vette és egy érdekes hibaforrásra mutatott rá. Két dolgot szeretnék azonban az előadásnak ehhez a részéhez hozzáfűzni.

Először is azt, hogy az említett dolgozatomban egészen más problémával foglalkozik. Ez előbbi módszer csak egy kísérletsorozathoz a kiindulási por körülbéli eloszlásának tájékoztató meghatározására szolgált és csak mellékesen ismerttettem. Azóta azonban többen érdeklődtek nálam e módszer után és úgy látom, hogy a gyakorlati életben (pl. malomiparban) alkalmazást nyerhet.

Ezért másodsorban szeretnék a szemcsenagyság eloszlás meghatározásánál felmerülő problémával részletesebben foglalkozni, mert szerintem itt még sok matematikai feladat rejlik.

Ha egy por szemcsenagysága igen tág határok között változik, (pl. 1 μ -tól 100 μ -ig terjed) a szemcsenagyság eloszlásának meghatározása igen nehéz feladat. Tekintetbe kell venni ugyanis, hogy az eloszlás súlyszázalékok szerint érdekel és pl. 3000 db. 1 μ -os szemcse összsúlya egyetlen 40 μ -os szemcse súlyának mindössze 4,7 %-a.

Mikroszkóp alatt történő közönséges statisztikus felvételnél tehát az a nehézség merül fel, hogy a tömegesen jelentkező kis szemcsék mellett, csak néha-néha tűnnek elő nagy szemcsék, pedig éppen ezek képezik az eloszlásban a lényeges részt. A darabszámra meghatározott eloszlási görbében tehát a szórás okozta hiba e görbe mentén nem egyenletes eloszlású, hanem súlyozva jelentkezik. A pontosság a kis szemcséknél kevésbé lényeges, a nagy szemcséknél pedig fontosabb. Közönséges módszerrel pedig éppen a kis szemcsék eloszlását ismerjük meg pontosabban, minthogy azokból számláltunk meg legtöbbet.

Ezért szerintem, a Rényi Alfréd által megmutatott hibaforrások ellenére is az általam járt út a súlyszázalék szerinti eloszlásról helyesebb képet nyújt, mint a közönségesen készített statisztika. Az utóbbi kijelentésem természetesen úgy értendő, hogy pl. én összesen 900 szemcsét számoltam meg, ezzel az eloszlásról helyesebb képet nyertem, mintha közönséges statisztikával számoltam volna meg 900 szemcsét, amely esetben pl. a dolgozatomban közölt pornál az eloszlás nagy szemcsék felőli részéről semmit sem tudtam volna megállapítani.

Épen ebben látom a megoldandó matematikai problémát. Egyrészt megállapítani, hogy az eredeti eloszlásról az általam alkalmazott módszer mennyiben ad helyesebb képet, mint a közönséges statisztika, tekintetbe véve a hibáknak előbb említett súlyozását is. Másrészt, hogy bizonyos n adott szemcsenagyságmeghatározást hogyan célszerű beosztani úgy, hogy a súlyszázalék szerinti eloszlásról a legpontosabb képet kaphassuk. Ha az utóbbi feladat megoldása esetleg általánosságban 'nem megy, fel lehetne talán tételezni előre, hogy logaritmikus normális eloszlás várható.

Így lehetne meghatározni a „jó” módszert, amelyik e problémának a lehető legkisebb munkával a leggyorsabb megoldását jelentené. Mint már említettem, ennek a gyakorlati élet nagy hasznát venné.

TAKÁCS LAJOS:

Rényi Alfréd előadásának meteorológia vonatkozó állításaihoz és újszerű következtetéseihez, — amelyeket kitűnő példáknak kell elismernünk az elmélet és a gyakorlat termékeny összekapcsolására, — matematikai szempontból semmi hozzátenni valóm nincs, vele mindenben és tökéletesen egyetértek. A gyakorlati élettől való kapcsolat vonalán, meteorológiai szempontból legyen szabad néhány észrevételt tennem.

1. A meteorológus tudatában van annak, hogy pl. a napi középhőmérsékletek egész évi sűrűségfüggvényének két Gauss-féle sűrűségfüggvény összegére való felbontása elméletileg, fizikai és kifogástalan valószínűségszámítási megfontolásokkal nem indokolható. A gyakorlati élet igényeinek szolgálatában azonban mégis sok esetben kénytelen élni és megelégedni a kifogásolthoz hasonló „első és igen durva közelítésnek tekinthető” szétválasztásokkal. Ilyen igény a különféle meteorológiai elemek viselkedésével (középérték, szóródás, stb.) kapcsolatban egyrészt az úgynevezett tenyészidőszakra (nyári félévre), másrészt az ú. n. fűtési időnyre (téli félévre) vonatkozóan lép fel leggyakrabban. A gyakorlati élet nem matematikus vagy meteorológus szakemberét, aki a saját munkaterületén mégis meteorológiai adatok figyelembevételére kényszerül, valószínűségszámítási elmélettel való megterhelés nélkül kell statisztikai adatokkal eligazítanunk. Ilyen esetekben gyakran jobb tájékoztatást nyújt külön a nyári és külön a téli félévre vonatkoztatott adat, mint az egészévi középérték stb. Ez a gyakorlati cél indokolja pl. a fizikai és elméleti szempontból kellően alá nem támasztható kettéválasztást, vagy más — konvencionális (hónapok) vagy attól eltérő — részhalmazra való bontást.

2. Akármilyen rövid szakaszokra bontjuk is a meteorológiai elemek egész évi halmazát, a Gauss-féle sűrűségfüggvényhez való hozzámérés mindig csak „első és durva közelítés” marad, mégpedig azért, mert nem a független valószínűség esetével van itt dolgunk: egyik nap időjárása sem teljesen független attól, milyen volt az előző napokon az időjárás. A mi éghajlatunk alatt (Közép-európában) nincsen egyetlen olyan hely sem, ahol a Gauss-féle sűrűségfüggvényt legjobban megközelítő Bruns-féle sorfejtés esetén a ferdeség és az excessus egyszerre nulla volna. Szemléletesen szólva: nem kapunk a valószínűségfüggvényből szabályos haranggörbét, hanem ferdét (jobbra vagy balra dülő görbét) vagypedig olyant, amely a tetőzés környezetében szélesebb vagy hegyesebb az elméleti harangalaknál.

3. Hogy ennek ellenére több mint 100 éve kísért a meteorológiai elemekkel kapcsolatban az elméleti sűrűségfüggvény erőszakolása, annak kettős oka van.

Az egyik: a nagy számok, a véletlen törvényszerűségei valóban érvényesülnek bizonyos mértékig az időjárási elemek statisztikai számértékeinek halmazában, bár nem maradéktalanul. A másik: a sajátos törvényszerűségek kihüvelyezése az alaktól függetlenül azért nehéz, mert időjárásunk helyben alakuló geofizikai energiák működésének eredménye ugyan, azonban ehhez hozzáadódnak a különböző eredetű és fizikai tulajdonságú légtömegek által szállított energiák is, — sokszor az előbbit lényegesen felülmúló mértékben.

4. Az elvi megjegyzések hatására kiszámoltam az évet 36 szakaszra bontva a σ értékeit az idézett napi középhőmérsékleti adatokból. Budapesten első közelítésben a $\sigma(t)$ szintén torzított szinusz-hullámhoz hasonlít, [akárcsak $x(t)$], azonban fordított fázissal: december közepén jelentkező tetőzéssel és augusztus közepén beálló minimummal. Ebben, hogy a szórás télen nagyobb, mint nyáron, a meteorológus nemcsak statisztikai érdekességet lát, hanem éghajlati sajátosságot, mely finomabb részleteiben további kutatásokra látszik érdemesnek. Az ok a hozzánk érkező légtömegek szabálytalan, bár bizonyos naptári napokat és napcsoportokat mintegy előnyben részesítő „menetrendjében” lelhető fel.