AZ ANALÍZIS EGY MÓDSZERÉNEK ÚJABB ALKALMAZÁSAIRÓL

TURÁN PÁL lev. tag

Előadta a Matematikai Állandó Bizottság 1951 december 14-én tartott ülésén

Az elmúlt években, kiindulva az úgynevezett Riemann-sejtés vizsgálatából, azt vettem észre, hogy általam erre a célra bevezetett módszer igen különböző fajta kérdések vizsgálatára alkalmazható. Ezekről már négy ízben volt szerencsém az Akadémián beszámolnom, ezen alkalmazások a primszámformula maradéktagjára, illetőleg a zéta-függvény gyökeinek ezidőszerinti bizonyos értelemben legerősebb becslésére vonatkoztak, a múltévi akadémiai nagyhéten pedig az algebrai egyenletek közelítő megoldására. Most három újabb alkalmazásról szeretnék röviden beszámolni, melyeket e módszerről szóló, rövidesen megjelenendő könyvem megírása közben vettem észre; a második alkalmazás lehetőségét egy speciális esetben már 1949-ben a prágai matematikai kongresszuson tartott előadásomban jeleztem.

Mielőtt ezen alkalmazásokra rátérnék, néhány szót kell szólnom magáról a módszerről. Ismeretes Kronecker klasszikus tétele, amely szerint, ha $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda$ lineárisan függetlenek, akkor tetszőleges kis pozitív ε és tetszőleges valós $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ számokhoz található valós t úgy, hogy megfelelő racionális egész $x_1, x_2, \ldots, x_k$ számokkal

$$|t\lambda_\nu - \alpha_\nu - x_\nu| \leqq \varepsilon, \qquad \nu = 1, 2, \ldots, k. \tag{1}$$

Ismeretes az is, hogy 1910 óta, mióta e tételt *Harald Bohr* az analízis területén alkalmazta, milyen sok felhasználást nyert az ott. Ezek lényegileg azon alapszanak, hogy Kronecker tétele *ekvivalens* azzal, hogy tetszőleges b_ν és lineárisan független arkuszú z_ν komplex számokhoz és tetszőleges kis pozitív ε-hoz van oly valós y, hogy

$$\frac{\left|\sum_{\nu=1}^{n} b_\nu z_\nu^y\right|}{\sum_{\nu=1}^{n} |b_\nu||z_\nu|^y} > 1 - \varepsilon. \tag{2}$$

Itt a jobboldal nem függ sem a z_ν-ktől, sem a b_ν-ktől; viszont a (2)-t realizáló y érték, melyet nyilvánvaló okokból egyenirányító értéknek nevezhetünk, egyáltalán nem lokalizálható. Ugyancsak *Bohr* vette észre, hogy ha a b_ν együtthatók pozitívok, akkor Kronecker tétele helyett Dirichlet tételét alkalmazva adódik, hogy még tetszőleges arkuszú z_ν számok mellett is található bármely $\eta \geqq 1$ értékhez olyan y, melyre

$$\eta \leqq y \leqq \eta 5^n \tag{3}$$

és

$$\frac{\left|\sum\limits_{\nu=1}^{n} b_\nu z_\nu^y\right|}{\sum\limits_{\nu=1}^{n} |b_\nu|\,|z_\nu|^y} > \cos\frac{2\pi}{5}. \tag{4}$$

A jobboldal tehát itt sem függ a z_ν-ktől és a b_ν-ktől, de a kapott „közel egyenirányító" y már valamelyest lokalizálva van. Mint ismeretes, ezen ténynek is sok nevezetes következménye van az analízisben. A további alkalmazásoknál az az akadály, hogy e lokalizáció még mindig nagyon gyenge. Azt lehetne hinni, hogy a (3) egyenlőtlenség alapjául szolgáló Dirichlet-tételben lehetne a lokalizációt szűkíteni. Mint azonban *Hajós György* egy elegáns példával megmutatta, ezen lokalizáció lényegileg nem szűkíthető. Már most a szóbanforgó új módszer alapgondolata az, hogy igen sok további alkalmazásnál nem szükséges az

$$f(y) = \sum_{\nu=1}^{n} b_\nu z_\nu^y$$

kifejezést az

$$\sum_{\nu=1}^{n} |b_\nu|\,|z_\nu|^y$$

összeggel összehasonlítani, úgyhogy a hányados sem a z_ν-től, sem a b_ν-től ne függjön; megfelel a célnak

$$\frac{|f(y)|}{\min\limits_j |z_j|^y}$$

illetőleg

$$\frac{|f(y)|}{\max\limits_j |z_j|^y}$$

tört ilyen becslése. Még az sem lényeges, hogy ezen alsó becslés a b_j-ktől független legyen; lényeges csak az, hogy a z_j-k konfigurációjától ne függjön. Meglepő módon kiderült, hogy az ilyen becslések nem túl gyengék és — ami a fődolog — a megfelelő „gyengén egyenirányító" y-értékek a (3) alattinál lényegesen jobban lokalizálhatók. Pontosabban szólva fennáll a következő két tétel.

I. Ha $m \geqq 0$ és $z_1, \ldots, z_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ adottak úgy, hogy

$$|z_1| \geqq |z_2| \geqq \cdots \geqq |z_n|$$

akkor ezekhez található oly egész ν, hogy

$$m \leqq \nu \leqq m+n$$

és

$$\frac{|b_1 z_1^\nu + \cdots + b_n z_n^\nu|}{|z_n|^\nu} \geqq |b_1 + \cdots + b_n| \left(\frac{n}{2e(m+n)}\right)^n.$$

II. Ha ismét $m \geqq 0$ és $z_1, \ldots, z_n, b_1, \ldots, b_n$ adottak és

$$|z_1| \geqq \cdots \geqq |z_n|,$$

akkor van oly egész ν, hogy

$$m \leqq \nu \leqq m+n$$

és

$$\frac{|b_1 z_1^\nu + \cdots + b_n z_n^\nu|}{|z_1|^\nu} \geqq \left(\frac{n}{24e^2(m+2n)}\right)^n \min_j |b_1 + \cdots + b_j|.$$

A lényeges ezen alsó becslésekben tehát a z_j-k konfigurációjától való függetlenség és a ν-érték jó lokalizációja. Ami bennük nem kielégítő, az az alsó becslésnek a b_j-ktől való függése, különösen a második főtételnél; ennek alkalmazásai éppen ezért eddig lényegileg a

$$b_1 = b_2 = \cdots = b_n$$

esetre szorítkoztak. Az alkalmazások szempontjából hasznos volna e tételeknek egy oly alakja, mely fenti előnyök mellett még azzal is bír, hogy a b_j együtthatóktól az alsó becslés

$$c(m, n) \max_j |b_j|$$

alakban függ. Ilyen azonban általában nem várható, mert ha a z_j-k konfigurációja tetszőlegesen van adva és

$$f(x) = \sum_{\nu=1}^{n} \{b_\nu z_\nu^x + (-b_\nu) z_\nu^x\},$$

akkor

$$f(x) \equiv 0,$$

bármilyenek is a b_j-együtthatók.

A I. tételből a z_j-értékek megfelelő specializálásával rögtön nyerhető, hogy ha

$$\Re \alpha_\nu \geqq 0 \qquad \nu = 1, 2, \ldots, n,$$

akkor

$$\max_{a \leqq x \leqq a+d} \left| \sum_{\nu=1}^{n} b_\nu e^{\alpha_\nu x} \right| \geqq |b_1 + \cdots + b_n| \left(\frac{d}{2e(a+d)}\right)^n. \tag{5}$$

Ezen előzetes megjegyzések után rátérek az említett újabb alkalmazásokra. Ezek elsője lineáris differenciálegyenlet-rendszerekre vonatkozik. Legyen

$$\frac{dx_\nu(t)}{dt} = \sum_{\mu=1}^{n} f_{\nu\mu}(t)\, x_\mu(t), \qquad \nu = 1, 2, \ldots, n \tag{6a}$$

a vizsgálandó rendszer, ahol

$$x_\nu(0) = a_\nu, \qquad \nu = 1, 2, \ldots, n. \tag{6b}$$

Egy ilyen rendszer explicit megoldása igen ritkán sikerül; mivel a fizikai problémák legtöbbje ilyen rendszerek vizsgálatára vezet, más utakat kellett keresni a megoldás tanulmányozására. Az ilyen módon nyert eredmények általában a megoldásnak egy szinguláris hely környezetében való qualitatív viselkedésére, vagy annak $t \to +\infty$-re vonatkozó aszimptotikus viselkedésére vonatkoznak. Utóbbi típusúak között karakterisztikusak azon Poincaré által kezdeményezett vizsgálatok, melyek azon esetre vonatkoznak, mikor a (6a) alatti rendszer együtthatófüggvényeire

$$\lim_{t \to +\infty} f_{\nu\mu}(t) = a_{\nu\mu}, \qquad 1 \leqq \nu, \mu \leqq n. \tag{7}$$

Ez esetben a, teljes általánosságban először *Perron* által bebizonyított, tétele szerint a megoldások viselkedése $t \to +\infty$ mellett az

$$\begin{vmatrix} (a_{11}-\lambda) & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & (a_{22}-\lambda) & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & (a_{nn}-\lambda) \end{vmatrix} = 0 \tag{8}$$

karakterisztikus egyenlet gyökeitől függ; ha ezek $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, akkor minden $(x_1, \ldots, x_n)$ megoldásrendszerre

$$\overline{\lim_{t \to +\infty}} \frac{1}{t} \log(|x_1| + \cdots + |x_n|) = R\lambda_\nu, \tag{9}$$

ahol $1 \leqq \nu \leqq n$ és fordítva, minden $1 \leqq \nu \leqq n$-hez van oly $(x_1, \ldots, x_n)$ megoldás, melyre (9) teljesül. Ezek segítségével rögtön eldönthető, mi történik, ha a (6a)—(6b) rendszerben a kezdeti értékeket egy kissé megváltoztatjuk. Ha *minden* ν-re $R\lambda_\nu < 0$, akkor ezen változtatás a megoldást a további t-időpontokban is csak kissé változtatja meg, mikoris $(x_1, \ldots, x_n)$-et az n-dimenziós tér egy pontjaként felfogva stabilis mozgásról beszélünk. Ha *minden* ν-re $R\lambda_\nu > 0$, akkor épp ellenkezőleg, a kezdeti értékeket tetszőleges kevéssé megváltoztatva a megoldás „végül" nagyon megváltozik, azaz előbbi értelemben labilis mozgásról beszélhetünk; minden egyéb esetben megválaszthatók a kezdeti értékek megváltozásai úgy, hogy előírt kicsinyek legyenek és az új mozgás az eredetihez az előbbi értelemben „közel", ill. „távol" legyen. E vizsgálatokat *Poincaré, Ljapunov* és azóta sokan mások kiterjesztették nem-lineáris rendszerekre; jelentőségük, különösen a stabilitásra vonatkozóké, a velük foglalkozó irodalom méreteiben is kifejezésre jut. Megjegyezhetjük azonban, hogy a labilitás esetét sem kell figyelmen kívül hagyni. Ha pl. egy fizikai vagy csillagászati hipotézist sikerül (6a)—(6b)-alakú rendszerrel kifejezni, akkor a hipotézis biztosan helytelen, ha a mérési eredmények ellentétben állanak a rendszerből levont valamilyen matematikai következtetéssel. Mérési eredmények viszont csak *véges* t-értékekre vonatkozhatnak; tehát célszerűnek látszik megpróbálni (9)-et úgy módosítani, hogy $\overline{\lim}$ helyett egy *véges* intervallumra vonatkozó abszolútérték-maximum alsó becslése szerepeljen. Ezek tehát a Poincaré—Perron-féle tételek végesített formáit jelentik. Ha az $f_{\nu\mu}(t)$ együtthatófüggvényekre (7) helyett $a \leqq t \leqq a+d$-ben

$$f_{\nu\mu}(t) \equiv a_{\nu\mu} \qquad 1 \leqq \nu, \mu \leqq n \tag{10}$$

áll, akkor, mint ismert és rögtön látható, $a \leqq t \leqq a+d$-re és $\nu = 1, \ldots, n$ mellett

$$x_\nu(t) = \sum_{j=1}^{n} c_{\nu j} e^{\lambda_j t}$$

alakú, ha a (8) alatt értelmezett λ_j-számok mind különbözők. Ha tehát

$$\min_j R\lambda_j = l,$$

akkor

$$x_\nu(t)\, e^{-lt} = \sum_{j=1}^{n} c_{\nu j}\, e^{(\lambda_j - l)t}$$

kifejezésre (5) alkalmazható; azaz ez esetben $\nu = 1, 2, \ldots, n$-re

$$\max_{a \leqq t \leqq a+d} |x_\nu(t)|\, e^{-lt} \geqq |x_\nu(0)| \left(\frac{d}{2e(a+d)} \right)^n.$$

Egy egyszerű határátmenet rögtön adja, hogy ez áll azon esetben is, mikor a λ_j-k között egyenlők is vannak. Ebből, ha k egy oly index, melyre

$$|x_k(0)|^2 \geqq \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} |x_\nu(0)|^2,$$

rögtön adódik, hogy

$$\max_{a \leqq t \leqq a+d} \sum_{\nu=1}^{n} |x_\nu(t)|^2 \geqq \frac{e^{2la}}{n} \left(\frac{d}{2e(a+d)} \right)^{2n} \sum_{\nu=1}^{n} |x_\nu(0)|^2.$$

Ha már most a (6a) alatti rendszer együtthatói „majdnem“ állandók $a \leqq t \leqq a+d$-re, akkor kimutatható, hogy „lényegileg“ ugyanazon alsó becslés érvényes. Pontosabban szólva igaz a következő tétel.

Ha a (6a)-alatti rendszer együtthatófüggvényei $a \leqq t \leqq a+d$ közben folytonosak,

$$\max_{\nu, \mu} |f_{\nu\mu}(a)| = B,$$

az

$$\begin{vmatrix} f_{11}(a) - \lambda & f_{12}(a) & \cdots & f_{1n}(a) \\ f_{21}(a) & f_{22}(a) - \lambda & \cdots & f_{2n}(a) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{n1}(a) & f_{n2}(a) & \cdots & f_{nn}(a) - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

egyenlet gyökeinek valós része $\geqq l > 0$ és

$$\max_{a \leqq t \leqq a+d} \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{n} |f_{\nu\mu}(t) - f_{\nu\mu}(a)|^2 \leqq \frac{1}{4n^2 d^2} \left(\frac{d}{2e(a+d)} \right)^{2n} e^{2(l-nB-n)a-2nd(2B+1)} \leqq 1, \tag{11}$$

akkor

$$\max_{a \leqq t \leqq a+d} \sum_{\nu=1}^{n} |x_\nu(t)|^2 \geqq \frac{e^{2la}}{4n^2 d^2} \left(\frac{d}{2e(a+d)} \right)^{2n} \sum_{\nu=1}^{n} |x_n(0)|^2. \tag{12}$$

E tétel bizonyára lényegesen javítható lesz (11)-et illetőleg, de — különösen kis d értékekre — így sem érdektelen. Ha pl. $d = e^{-\frac{l}{2n}a}$, akkor (11) teljesül, ha az $f_{\nu\mu}(t)$ együtthatófüggvények $x=a$-ban „elég magas rendben" érintik a megfelelő $y=f_{\nu\mu}(a)$ egyeneseket. Érdekes a tételt egybevetni *Perron* azon tételével, mely tudomásom szerint az egyetlen eredmény ezirányban és mely szerint, ha a (6a) rendszer együtthatófüggvényeire $0 \leqq t \leqq T$-ben

$$|f_{\nu\mu}(t)| \leqq C, \tag{13}$$

akkor $0 \leqq t \leqq T$-re

$$\sum_{\nu=1}^{n} |x_\nu(t)|^2 = \varphi(t)$$

jelöléssel

$$\varphi(0)e^{-2nCt} \leqq \varphi(t) \leqq \varphi(0)e^{2nCt}. \tag{14}$$

Itt a (13) praemissa gyengébb (11)-nél, viszont (14) jóval gyengébb (12)-nél. (12) nyilván (9)-nek abban az esetben való végesítése, ha ott azon λ_ν-t tekintjük, melyre $R\lambda_j$ a legkisebb; a felső becslés (12)-ben hiányzik. A (14)-ben szereplő felső becslés nem tekinthető (9) végesített formájának, mert nC általában nagyobb a $R\lambda_\nu$ számok maximumánál.

Ezután térjünk rá az új alkalmazások egy másik csoportjára, mely transzcendens egész függvényekre vonatkozik. Mint *Borel* felfedezte, ha egy $|z|>R$ esetén konvergens, $f(z)=\sum_{0}^{\infty} a_\nu z^{-\nu-1}$ alakban írt hatványsorhoz hozzárendeli az $F(z)=\sum_{0}^{\infty} \frac{a_\nu}{\nu!} z^\nu$ függvényt, akkor megfelelő pozitív a-val

$$|F(z)|e^{-a|z|} \tag{15}$$

korlátos marad az egész síkon és $f(z)$ szinguláris helyei a konvergencia-körön összefüggenek $F(z)$-nek az origóból kinduló különböző félsugarakon való növekvésével. Legyen

$$\overline{\lim_{v\to\infty}} \frac{1}{r} \log|F(re^{i\varphi})| = h(\varphi);$$

ezen $h(\varphi)$ függvény φ-nek folytonos és 2π szerint periodikus függvénye, éspedig, mint *Pólya* észrevette, az $r=h(\varphi)$ görbe egy konvex tartományt határol. Ekkor *Borel* észrevétele, *Pólya* által precizírozott formájában, azt mondja ki, hogy ha e konvex görbét a valós tengelyre tükrözzük, akkor a $\varphi=\varphi_0$-hoz tartozó félsugár akkor és csak akkor metszi a konvergencia-kört $f(z)$ egy szinguláris pontjában, ha a tükrözött görbét annak egy extrémpontjában metszi, azaz egy olyanban, mely *nem* belső pontja egy egyenes szakasznak. De ekkor a Fabry-féle hézagos-hatvány-sor tétel biztosan be lenne bizonyítva, ha igaz lenne a (15) alatti speciális függvényosztályra, hogy, hacsak

$$\frac{\lambda_\nu}{\nu} \to \infty, \tag{16}$$

akkor rendje és típusa minden kis szögtérben ugyanaz, mint az egész síkra vonatkozólag. Ugyanis ekkor az előbbi konvex görbe és tükörképe is kör, azaz minden pont extrémpont. *Pólya* vetette fel azon merész kérdést, hogy vajjon (16) mellett nem igaz-e ez *minden* transzcendens egész függvényre és ki is mutatta-e sejtés helyességét. Ezen formájában a tétel csak végesrendű egész függvényekre bír igazi értelemmel; a tételt *Mandelbrojt* és *Laurent Schwarz* oly módon terjesztették ki, hogy ha

$$M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$$

és $0 \leqq \alpha < \beta \leqq 2\pi$-re

$$M(r, \alpha, \beta) = \max_{\substack{|z|=r \\ \alpha \leqq \operatorname{arc} z \leqq \beta}} |f(z)|,$$

akkor (16) mellett tetszőleges kis pozitív ε, η és δ-ra és $r > r_0(f, \varepsilon, \delta, \eta)$ mellett

$$M(r(1-\varepsilon)) < M(r, \alpha, \alpha+\delta)^{1+\eta}. \tag{17}$$

Az I. tétel (5) alatti alakjában módot ad *Pólya* tételének kétirányú általánosítására. Az első abban áll, hogy minden $0 < \varepsilon \leqq \frac{1}{2}, 0 \leqq \alpha < \beta \leqq 2\pi$-re, hacsak $r > r_1(f, \varepsilon, \beta-\alpha)$, fennáll az

$$M(r) \leqq \frac{16e\pi}{\beta-\alpha} M(2r)^{\varepsilon} M(r, \alpha, \beta) \tag{18}$$

egyenlőtlenség. Hogy ez véges rendű normáltípusú egész függvények esetén *Pólya* tételét tartalmazza, az onnan világos, hogy ez esetben az $M(2r)^{\varepsilon}$ tényező nem befolyásolja sem a rendet, sem a típust. Ez esetben azonban a (18) alatti egyenlőtlenség jóval többet is ad. Legyen megadva egy, az origóból kiinduló tetszőleges l görbe, mely a végtelenbe fut és melynek poláregyenlete $\vartheta = F(r)$. A (18) alatti egyenlőtlenségből rögtön következik, hogy már a

$$|\vartheta - F(r)| \leqq \frac{1}{M(r)^{\varepsilon}}$$

tartományban $f(z)$ rendje és típusa egyezik a teljes síkra vonatkozó renddel és típussal. Ha $f(z)$ nagyon erősen nő, akkor (18) semmitmondóvá lesz az $M(2r)^{\varepsilon}$ faktor miatt, de nem volna nehéz (18)-at úgy módosítani, hogy (17)-et kiadja.

A másik általánosítás

$$h(r, x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} r^{\lambda_\nu}(a_\nu \cos \lambda_\nu x + b_\nu \sin \lambda_\nu x) \tag{19}$$

alakú végtelen harmonikus kifejtésekre vonatkozik, melyek az egész síkon konvergálnak és melyekre szintén megköveteljük a (16) alatti Fabry-feltétel fennállását. Míg általában hatványsorok és harmonikus kifejtések elmélete parallel haladt, addig érdekes módon a (19) alatti lakunáris harmonikus kifejtések csupán *N. Wiener* és *Zygmund* egyes dolgozataiban léptek fel. Sőt talán a harmonikus kifejtés rendjének definiciója sem szerepel explicit az irodalomban.

Kézenfekvő $h(r, x)$ rendjét, α-t, ha

$$\max_x |h(r, x)| = M_1(r),$$

akkor az

$$\alpha = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log\log M_1(r)}{\log r}$$

formulával értelmezni. Ha ismét

$$\max_{\alpha\leqq x\leqq\beta} |h(r, x)| = M_1(r, \alpha, \beta),$$

akkor a használt módszer kiadja (18) teljes analogonját, tehát azt, hogy $0 < \varepsilon \leqq \frac{1}{2}, 0 \leqq \alpha < \beta \leqq 2\pi$-re

$$M_1(r) \leqq 8\left(\frac{8e\pi}{\beta-\alpha}\right)^4 M_1(2r)^\varepsilon M_1(r, \alpha, \beta), \tag{20}$$

hacsak $r > r_2(f, \varepsilon, \beta-\alpha)$.

Az új alkalmazások harmadik csoportja, melyekre csak még rövidebben térek ki, az

$$F(z) = \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu f(\tau_\nu z)$$

alakú kifejezésekre vonatkozik. Ismeretes az a szerep, melyet valós $f(x)$, valós c_ν-k és τ_ν-k esetén e kifejezésekkel való approximáció, *N. Wiener* nevezetes elméletében játszik. Komplex változóra térve ezen témakörbe tartozik egy félsíkban reguláris függvény approximációja

$$\sum_1^n c_\nu e^{\tau_\nu z}$$

alakú polinomokkal. A (21) alatti általános kifejezésekkel való approximálhatóság kérdését, ha $f(z)$ egész függvény, *A. O. Gelfond* tárgyalta igen általános feltételek mellett. Ezen approximáció egyértelműségének vizsgálata természetszerűleg vezet a (21)-alatti kifejezések koncentrikus körökön való abszolút maximumának alsó becslésére. Így merül fel azon kérdés, mely önmagában is érdekes, hogy a (21) alatti függvényekre milyen egyszerű feltételek mellett áll, hogy ugyanolyan rendűek, mint $f(z)$. Itt persze, nem úgy mint előbb — mindenütt az egész síkra vonatkozó rend, ill. típus értendő. Hogy $f(z)$-re bizonyos kirovások szükségesek, azt az approximációs tételre vonatkozólag *Gelfond* már megállapította. Éspedig azt, hogy

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$$

sorfejtésben

$$a_\nu \neq 0 \qquad \nu = 0, 1, \ldots \tag{22}$$

kell hogy legyen. Hogy ez a fenti kérdés tárgyalásához is szükséges, azt pl.

$$f(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{\nu!}z^{5\nu+1},\quad c_j=1,\ \varepsilon_j=e^{\frac{2j\pi i}{5}}\quad j=1,2,3,4,5$$

példa mutatja, mikoris $f(z)\equiv 0$. (22)-nél többet követelve fix n és numerikus pozitív ω mellett tekintsük azon $f(z)$-ket, melyekre $m>m_0(\omega)$ mellett

$$\max_{m\leqq\mu,\nu\leqq m+n}\left|\frac{a_\mu}{a_\nu}\right|>m^{-n\omega}$$

E feltétel pl. $f(z)=e^z$-re teljesül. Ekkor a fenti kérdésekre vonatkozólag I. és II. tételekből több felelet adódik. Ezek közül csupán azt említem meg, hogy már $F(0)\neq 0$ adja azt, hogy $F(z)$ rendje nem kisebb, mint $f(z)$-é. E tételek bizonyítása azonban mélyebb, és így ezekre sem terjeszkedem ki.

Budapesti Eötvös Lóránd Tudományegyetem
Matematikai Intézete.