

EÖTVÖS CSAVARÁSI MÉRLEGÉNEK ELEMI ELMÉLETE

SELÉNYI PÁL lev. tag

Előadta az 1951. február 19-én tartott osztályülésein

1. Bevezetés

Eötvös Loránd az ő csavarási mérlegének elméletét két dolgozatában fejtette ki. Először 1896 évi általánosan ismeretes „Vizsgálatok a gravitáció és a mágnesség köréből” című alapvető, klasszikus dolgozatában^{1,2} a potenciálmélet és felsőbb mennyiségtan szokásos eszközeinek felhasználásával, elég szűkszavúan és a közbenső számítások kihagyásával. Természetesen egy ilyen dolgozat csakis a fizikusok szűkebb körében találhat megértésre. Evvel ellentétben a tágabb értelemben vett szakemberek nagyobb körének szánta *Eötvös* a torziós mérleg elméletének azt a kifejezését, amelyet a Balatonon végzett méréseiről szóló dolgozatában közöl,^{3,4} s amelyben csupán a potenciálmélet elemeit és elemi matematikai eszközöket vesz igénybe. Ez a nálunk is kevésbé ismert dolgozata a szakember számára valóságos üdítő csemege: Az olvasónak az az érzése, hogy egy türelmes, gondos vezető kényelmes kanyarokon vezet fel a magaslatra, amelyet vezetője nehezebb utakon már régebben megjárta és ahol a terep minden zegét-zugát jól ismeri. Természetesen a felsőbb mennyiségtan mellőzése a matematikai fejtegetéseket hosszadalmasabbá teszi; amellet az egész elmélet kiinduló pontja, hogy t. i. a nehézségerőnek a nivófelület érintősíkjába eső komponensei a koordináták lineáris függvényei, a matematikailag nem képzett olvasó számára nem egészen magától értetődő. — Az elméletnek idegen tollból eredő kifejtéseiben semmi újat nem találunk, sőt például *K. Jung*nak a Handb. d. Experimentalphysik XXV/3 kötete 52—67. oldalán közölt tárgyalása felesleges sallangjaival: a nehézségerő „nem hatásos” összetevőinek részletezésével inkább megnehezíti, mintsem megkönnyíti a megértést.

Ennek előrebocsátása után és az imént használt hasonlattal élve, meg szeretném mutatni, hogy igenis van egy utacska, amely fáradság nélkül, könnyen és egyenesen vezet a célhoz; másszóval, hogy *Eötvös* csavarási mérlegét a legrövidebb idő alatt mindenkivel meg lehet értetni, aki a fizika elemeiben járatos. Remélem, hogy az igényesebb olvasó az ehhez igazodó tárgyalási módot elnézéssel fogja követni.

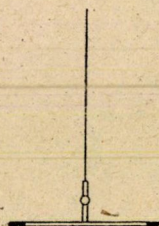
2. A görbületi variometer

Ismeretes, hogy *Eötvös* gravitációs vizsgálataihoz kétféle csavarási mérleget szerkesztett. Az egyik, az ú. n. görbületi variometer alakjára azonos a *Coulomb*-mérleggel, vagyis vékony fémhuzalon függő vízszintes rúdból és

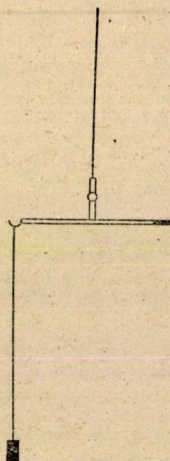
ennek végeire erősített két egyforma tömegeből, pl. platina-súlyból áll (l. az 1. ábrát). — A másik, az ú. n. horizontális variometer, ettől abban különbözik, hogy az egyik súly a rúd végén, a másik a rúd végére erősített huzal végén, tehát mélyebben van elhelyezve (l. a 2. ábrát).

Meggondolásainkat a görbületi variometerrel kezdjük. Ez — hogy egy szóval kimondjuk — a Föld alakjának a gömbtől való eltérését mutatja ki és méri meg. Ehhez az eredményhez a következő úton jutunk el. Tegyük fel, hogy a Föld (a tenger színe) szigorúan gömbalakú s helyezzük el a Föld bármely pontjára mérlegrudunkat, vagyis két végén két egyenlő tömeget hordozó rudacsokát, amely azonban nincs huzalra függesztve, hanem — iránytű módjára — a közepén csúcsra van helyezve és akörül súrlódás nélkül foroghat (l. a 3. ábrát). Miután eközben a súly a Földtől állandóan egy magasságban marad, vagyis a nehézségerő sem pozitív, sem negatív munkát az elfordulásakor nem végez, világos, hogy a rúd bármely azimutba állítva, ott marad: szerkezetünk a gömbalakú Földön közömbös egyensúlyi állapotban van.

Vizsgáljuk meg most szerkezetünk viselkedését a valóságos Földön, amely nem gömbalakú, hanem belapult, amint azt a szemléletesség kedvéért igen erősen túlzott mértékben a 4. ábrán feltüntettük. Világos, hogy az északi vagy a déli sarkon egyensúlyi állapota ugyancsak közömbös lesz; elfordulás közben a súlyok se nem közelednek a Földhöz, se nem távolodnak attól, mivel a belapult Föld meridiánjai is egybevágók, más szóval, mivel a két sarok a forgási ellipszoidnak ú. n. szférikus pontja, vagyis minden normálmetszet görbületi sugara ugyanakkora (R_p). — Másként áll azonban a dolog az egyenlítőn. Ott a meridián görbületi sugara (R_M) kisebb, mint az egyenlítőé (R_A) a kettő viszonya ábránkon kb. 1:2. Már pedig a súlyoknak a Föld felszínétől való távolságát éppen a görbületi sugár szabja meg, nevezetesen a távolság annál kisebb, minél nagyobb a görbületi sugár, amint ezt az 5. ábra külön is szemlélteti. Ennélfogva ha a rúd az észak-déli irányból a kelet-nyugati irány felé fordul el, a nehézségerő *pozitív* munkát végez: szerkezetünk az egyenlítőn nem lesz *közömbös* egyensúlyi állapotban, hanem a meridiánmenti *labilis* helyzetből igyekszik beállani az egyenlítő irányába, ahol az egyensúly *stabilis*. — Ha a mérlegkar nincsen súrlódásmentesen alátámasztva, hanem bármilyen finom, de mégis bizonyos csavarási, — irányítónyomatékkal rendelkező szálla van felfüggesztve, akkor a mérlegkar természetesen nem tud az egyenlítő irányába vagy általában, a nagyobb görbületű főmetszet irányába beállani, hanem ahhoz



1. ábra
A görbületi
variometer

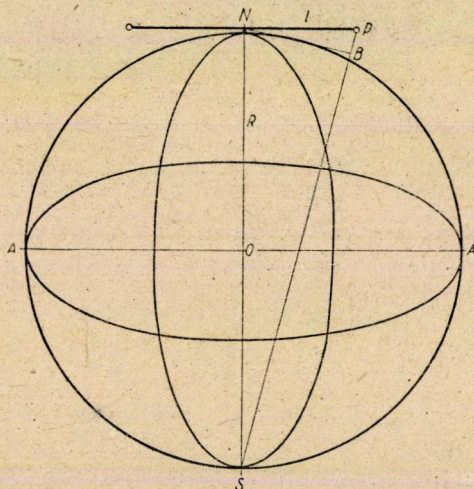


2. ábra
A horizontális
variometer

közeledni igyekszik addig, míg a nehézségerő okozta forgatónyomaték a huzal megcsavarodásából eredő, ellenkező irányú csavarási nyomatékkal egyensúlyba nem jut.

Ez a görbületi variometernek egyszerű magyarázata, talán szabad állítanom: fizikai lényege. Nehéz elképzelni, hogyan maradhatott ez rejtve Eötvös mélyen járó analízáló elméje előtt; tény azonban, hogy e magyarázatot sem nála, sem más szerző írásaiban nem találtam.*

A fenti gondolatmenetet tovább fűzve, könnyű dolog a görbületi variometer elméletét kvantitativé is kifejtteni. Legyen (l. a 3. ábrát) l a mérlegkar félhossza, R a Föld sugara (pontosabban: a nivófelület szóbanforgó normálmetszetének görbületi sugara), akkor a mérlegrúd P végpontjának a Földtől való távolsága (magassága)



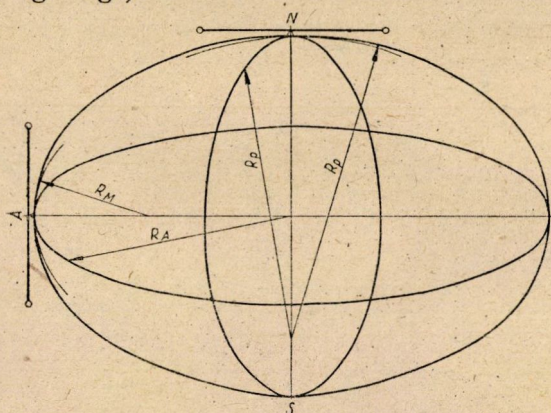
3. ábra. A gömbalakú földön az N csúcs körül szabadon forgó l mérlegkar közömbös egyensúlyban van

$$h = l^2/2R. \quad (1)$$

(Ez következik az NBP és az SNP háromszögek hasonlóságából, ahol az NB ívet az NB húrral azonosíthatjuk.) Eszerint a mérlegkar két végén lévő $2m$ tömeg súlyánál fogva

$$U = mgh = mgl^2/R \quad (2)$$

helyzeti energiával rendelkezik. Látnivaló, hogy ez annál kisebb, minél nagyobb R . Miután pedig minden mechanikai rendszer a kisebb ener-



4. ábra. A belapult Föld északi és déli sarkán a mérlegkar közömbös egyensúlyban van; az egyenlítőn ennek síkjába törekszik befordulni

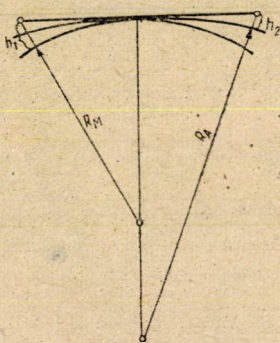
* Ez a magyarázat lényegében azonos azzal, amit még 1948-ban az egyetemen, később „Az Eötvös-mérleg fizikája és matematikája” címen az Eötvös Loránd Fizikai Társulatban előadtam és Eötvös összegyűjtött munkáinak nyomás alatt álló kiadásában két rövid lábjegyzet formájában közöltem, azzal a különbséggel, hogy akkor fejtegetésemben a nehézségerő nivófelületének fogalmából indultam ki. Közben rájöttem, hogy még erre sincs szükség; elegendő, ha egyszerűen a Föld „alakjáról” beszélünk. Ezt mindenki megérti, másrészt a hozzáértő úgyis tudja, hogy ezen a nehézségerő ekvipotenciális felülete (nivófelülete) értendő.

giájú állapot felé igyekszik, ebből következik, hogy a mérlegrúd valóban a legnagyobb görbületi sugarú (legkisebb görbületű) irányba, tehát pl. a valószínűs, belapult Föld egyenlítőjén a meridionális helyzetből a kelet-nyugati irányba igyekszik befordulni. A nehézségerő eközben (2) értelmében

$$L = U_2 - U_1 = mgl^2(1/R_M - 1/R_A) \quad (3)$$

munkát végez. Ebből az $\bar{F}$ közepes forgatónyomatékat a mechanika elemi szabálya értelmében megkapjuk, ha a munkát az elfordulás szögével osztjuk, vagyis

$$\bar{F} = \frac{2}{\pi} mgl^2(1/R_M - 1/R_A) = \frac{K}{\pi} g(1/R_M - 1/R_A), \quad (4)$$



5. ábra. A súlyok közelebb kerülnek a Földhöz, (a h_1 távolság h_2 -re csökken) ha a kar a nagyobb, R_M görbületű irányból a kisebb R_A görbületűbe fordul el. (Az utóbbit a papír síkjára merőlegesnek kell elképzelnünk.)

ahol $K = 2ml^2$ a mérlegrúd tétlenségi nyomatékát jelenti. Ekkora forgatónyomaték hat a rúdra valahol a két említett helyzet közötti közepes állásban. Más helyzetben természetesen a forgatónyomaték is más és más és Eötvös balatoni dolgozatának lényeges tartalma éppen az, hogy a forgatónyomatéknak az azimuttal való változását csupán elemi matematikai segédeszközök felhasználásával állapítja meg. Az analitikai mechanika és felsőbb mennyiségtan elemeit is igénybe véve, természetesen hamarabb célhoz jutunk:

Legyen α a rúd pillanatnyi azimutja, akkor a rá ható forgató nyomaték

$$F = - \frac{dU}{d\alpha} = - mgl^2 \frac{d}{d\alpha} (1/R). \quad (5)$$

Legyen továbbá r_1 és r_2 a vízfelület illetve pontjának két főgörbületi sugara, akkor Euler közismert tétele szerint

$$1/R^2 = \cos^2 \alpha / r_1 + \sin^2 \alpha / r_2 \quad (6)$$

s ezt (5)-be téve és a differenciálást elvégezve, rögtön nyerjük Eötvös balatoni dolgozata (11) képletével egyezésben, hogy

$$F = - mgl^2(1/r_1 - 1/r_2) \sin 2\alpha = \frac{1}{2} KR \sin 2\alpha, \quad (7)$$

ahol α a mérlegkar azimutja, azonban nem tetszésszerűen iránytól, hanem a kisebb görbületű főiránytól számítva, $R = g(1/r_1 - 1/r_2)$ pedig az Eötvös által vízszintes irányítóképességnek nevezett mennyiség.

E képlet értelmében tehát a forgatónyomaték a mérlegrúd azimutjának változtatásakor egyszerű sinus-törvény szerint, nevezetesen az elforgatási szög kétszeresének sinusa szerint változik: egy teljes körülforgás alatt tehát kétszer, t. i. a két főgörbületi irányban zérus lesz s azokon áthaladva előjelét változtatja.

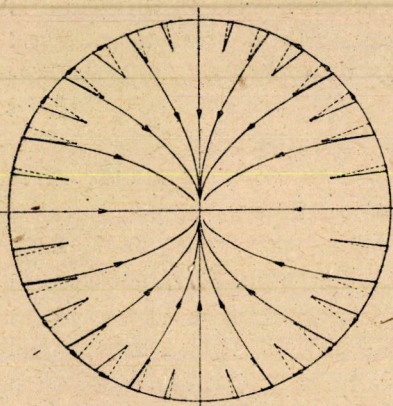
Nevezetes dolog már most, hogy ehhez a tisztán *fizikai-energetikai* meggondolásból nyert eredményhez tisztán *matematikai* meggondolással is el lehet jutni. A felületelméletből ismeretes ugyanis, hogy ha egy felület valamely pontjának normálisán (a főnormálisán) át különböző irányú normálmetszeteket fektetünk és egy-egy ilyen metszetben a főnormálistól jobbra-balra normálisokat emelünk, e normális-párok közül csupán kettő, nevezetesen a két főirány mentén emelt egy-egy pár fekszik benn *egy* síkban, t. i. éppen a főirányok síkjában. Minden egyéb irányban e két átellenes normális nem fekszik bent a normálmetszet síkjában, hanem abból előre-hátra kilép, vagyis egy-egy kitérő egyenespárt alkot. Ha a szóbanforgó felületen a nehézségi erő nivófelületeit értjük, akkor a felületi normálisok — hosszúságukat a mindenkor g -vel egyenlőnek téve — a nehézségerőt képviselik. Az említett két átellenes normális tehát a rúd két végére ható nehézségerőt, vagyis a rúdra ható erőpárt jelenti és a normális-párokra vonatkozó fenti *geometria*i tételből rögtön következik a fenti *fizikai* megállapítás, hogy a rúdra ható forgatónyomaték zérus a két főirányban, valamint — részletesebb felületelméleti meggondolások szerint az is, hogy e forgatónyomaték $\sin 2\alpha$ szerint változik és olyan irányú, hogy a rudat a kisebb görbületű főirányba igyekszik beforgatni.⁵ Egyúttal azonban megértjük azt is, amire a fenti *energetikai* meggondolás nem ad felvilágosítást, hogy t. i. honnan erednek, mik azok a vízszintes erők, amelyek a mérlegrudat forgatják? Nem egyebek ezek, mint a rúd két végére ható nehézségerőnek a *főérintősík*ra való vetületei, amik — a fentiek értelmében — a két főirányban magába a rúdnak irányába esnek, — tehát forgatónyomatékuk zérus, — minden más irányban azonban egy-egy, a rúdra merőleges összetevőt is tartalmaznak, vagyis egy-egy vízszintes erőpárt hoznak létre.

Eötvös balatoni dolgozatában éppen a nehézségerőnek ezekből a vízszintes síkban — az érintősíkban — fellépő komponenseiből indul ki. A számajóvő területen — a két arasnyi mérlegrúd mozgási területén belül ez erőket egyenletesen változóknak feltételezve, az észak-déli, illetve a kelet-nyugati összetevőt $X = ax + a_1y$ és $Y = by + b_1x$ alakban írja fel s e feltevésből azután egyszerű fizikai meggondolásokkal és csupán az elemi matematika felhasználásával magát az Euler-tételt is és a (7) egyenletet is levezeti, s végül a szóbanforgó erőkomponenseket, amelyek a vízszintes síkban lépnek fel és a rúd elfordulását létrehozzák, az erővonalak felrajzolásával is szemlélteti.

A következő 6. ábra azonos *Eötvös* idézett dolgozatának 12. ábrájával — csupán az erők irányát jelző nyilakkal egészítettük ki —, és arra az esetre vonatkozik, midőn a nehézségerő nivófelületének két főgörbületi sugara nem egyenlő. A mérlegrúd középpontját (a felfüggesztő szálat) a kör középpontjába kell gondolnunk; a kar végein lévő két súly tehát a kör kerületének két átellenes pontjában foglal helyet. Mint látható, a két főirányban az erővonalak a központ felé irányuló egyenesek; minden egyéb irányban azonban parabolaszerű görbék, úgy, hogy a két súlyra ható erőknek van egy érintőlegesen össze-

tevője, amely legnagyobb a kar 45° -os azimutjában és minden helyzetben olyan irányú, hogy a kart a kisebb görbületű főirányba igyekszik beforgatni. Ha a két főgörbületi sugár — s velük együtt természetesen a többi is — mind egyenlő, akkor az erővonalak mind sugármenti egyenesek, mivel — mint azt könnyű belátni — a mindenhelyi nehézségerőnek az érintősíkra való vetületei mind a központ felé irányulnak, tehát érintőleges komponens nincs és a mérlegkarra nem hat forgatónyomaték.

A fentiekben feltételeztük, hogy a főgörbületek *iránya* ismeretes; hiszen α az attól mért azimutot jelenti. A valóságban ez persze nem áll, azonban a



6. ábra. Erővonalak a nehézségerő
nívófelületének érintősíkjaiban, ha a
két főgörbületi sugár egymástól kü-
lönöző nagyságú

határozására szolgál. A nívófelületet jellemző R és λ mennyiségek ezekkel a következő kapcsolatban állanak:

$$R = g(1/r_1 - 1/r_2) = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \quad (8)$$

$$\operatorname{tg} 2\lambda = 2 \frac{\frac{\partial^3 U}{\partial x \partial y}}{\frac{\partial^3 U}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 U}{\partial y^3}} \quad (9)$$

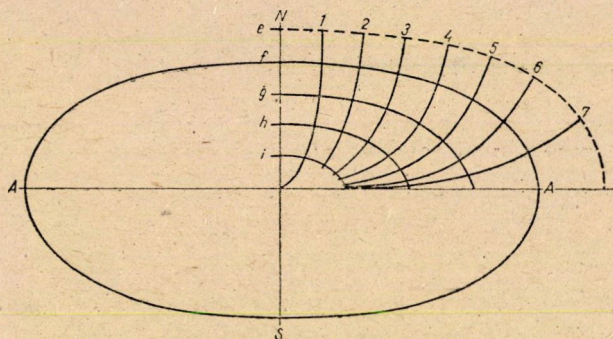
3. A horizontális variometer

A belapult Földön a nehézségi erőviszonyok a gömbalakú Földétől abban is különböznek, hogy míg az utóbbin a nehézségerő *nagysága* mindenütt ugyanaz, addig az előbbin a g értéke csupán egy-egy párhuzamos kör mentén állandó, ellenben az egyenlítőtől a sarkok felé haladva, egy-egy meridián mentén értéke állandóan *növekszik*. Ez a növekedés két okból származik: A nehézségerő, a testek súlya, a Föld vonzásának és a Föld forgásából származó

centrifugális erőnek eredője; a sarkok felé haladva egyrészt nő a vonzóerő, mivel közelebb jutunk a belapult Föld középpontjához, másrészt csökken a centrifugális erő egészben is és még külön is annak a vonzással ellentétes irányú összetevője. Azonban az egész változás igen csekély; g „normális” értéke az egyenlítőn 978 CGS, a sarkokon 983,2 CGS és a centiméterenkénti változás, a *grádiens* pl. a 45° szélesség táján mindössze $8,1 \cdot 10^{-9}$ dyn/cm, vagyis a g -nek kerekén 10^{-11} -ed része. Eszerint ha pl. a 20 cm hosszú mérlegrudat észak-déli irányba állítva, 180° -kal elforgatjuk, a rúd két végén lévő tömeg súlyának mindössze $2 \cdot 10^{-10}$ -ed részével lesz könnyebb illetve nehezebb, mint az első állásban volt. Ilyen nagyságrendű *súlyváltozás*nak kimutatása egészen reménytelen feladatnak látszik. Ennek ellenére a horizontális variometer éppen ennek a nívófelület mentén jelentkező rendkívül csekély grádiensnek kimutatására és mérésére szolgál.

A meghatározás, illetve a horizontális variometer szerkezete Eötvösnek azon az *alapvető* felismerésen alapszik, hogy a nehézségerő *nagyságának* a nívófelület mentén való változása elválaszthatatlanul össze van kötve az erő *irányának*, tehát a „függőleges” (és a „vízszintes”) iránynak változásával a nívófelületre *merőleges* haladási irányban. Más szóval: *inhomogén* erőternek mind a nívófelületei, mind pedig az erővonalai *görbék*, amint ezt a 7. ábra szemlélteti. Itt f jelenti a Föld felületét, mint nívófelületet, g, h, i és e pedig a nehézségerő nívófelületeit a Föld belsejében, illetve afelett, 1, 2, 3, ... stb. pedig az erővonalaknak a nívófelületekre merőleges rendszerét. Látni való, hogy a nívófelületek a sarkoktól az egyenlítő felé haladva egymástól fokozatosan távolodnak, ami következik a potenciál definíciójából eredő $g \cdot h = g' \cdot h'$ egyenlőségből (ahol g és g' a nehézségerő értéke a nívófelület két pontjában, h és h' ugyanott a két szomszédos nívófelület egymástól való távolsága), az erővonalak pedig ennek következtében a Föld középpontjából kifelé haladva a Föld tengelye felé hajlanak el.

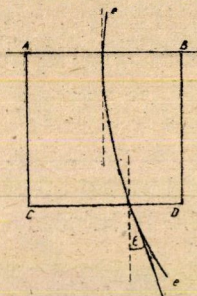
Gondoljuk már most a horizontális variometert pl. a 45° szélesség táján, rúdjával a kelet-nyugati irányban, vagyis a papiros síkjára merőlegesen



7. ábra. A belapult Föld nívófelületei és erővonalai

elhelyezve úgy, hogy a rúd *végén* lévő platina-henger az $e-3$ pontban, a lelógó henger pedig az $f-3$ pontban (helyesebben 20 cm-rel, a rúd hosszával, előtte) legyen. Látni való, hogy a két hengerre ható nehézségerők *iránya* különböző — lévén a 3 erővonal görbe, — ennél fogva a rúdra forgatónyomaték fog hatni, amely a rudat az észak-déli irányba igyekszik beforgatni. Eötvös gondolatmenetét követve, az erőviszonyokat még másképpen is lehet kifejezni: Ha pl. az e nivófelületen 1 cm-rel *vízszintesen* odébb haladva 4-ből 3-ba megyünk, a nehézségerő *nagysága* a fenti egyenlőség értelmében megnő — lévén az $f3$ távolság kisebb az $f4$ -nél, — vagyis a g nehézségerőhöz egy *függőleges* komponens, a *grádiens* (Eötvös jelölése szerint: $Gr(g)$) járul hozzá. Ez azonban olyan kicsiny, hogy mint *súlyváltozást* kimutatni lehetetlen. Ha ugyanott 1 cm-rel *lefelé* haladva az e nivófelületről az f -re megyünk át, a nehézségerő *iránya* változik meg igen kicsiny ε szöggel, ami egyértelmű azzal, hogy az $e3$ -ban működő g erőhöz egy északnak irányított $g \cdot \varepsilon$ nagyságú *vízszintes* összetevő járult hozzá. Ezt azonban megmérhetjük, hiszen vízszintes erőkre a csavarási mérleg hihetetlenül érzékeny. Amellett a szóbanforgó két erőnövekmény között a legegyszerűbb kapcsolat áll fenn: a kettő számértéke egymással egyenlő.

Ezt Eötvös idézett balatoni értekezésében az ottani 4. ábra segélyével, amelynek az itt közölt 8. ábra hű másolata, a következőképpen mutatja ki:



8. ábra

Eötvös balatoni értekezésének 4. ábrája a $Gr(g) = g \cdot \varepsilon$ egyenlőség levezetéséhez

„Jelentse egy függőleges átmetszetet előtűntető rajzunkban A és B a nivófelületeknek a gradiens irányába eső két pontját (4. ábra). Legyen e pontok egymástóli távolsága 1 centiméter és a nehézség A-ban $=g$ s így B-ben $=g + Gr(g)$. Alkossuk az ABCD derékszögű négyzetet s húzzuk meg az $e-e$ erővonalat, mely görbe lévén ha AB-t merőlegesen metszi, úgy CD-én át e merőlegestől ε -nal eltérő szöglet alatt halad. Eszerint az erőnek vetülete AB út mentén nulla, CD út mentén azonban $g \varepsilon$ lesz s a tömeg egység elmozdulásánál végzett munka A-tól B-ig s onnét D-ig

$$g + Gr(g),$$

ellenben a megfelelő munka A-tól C-ig s onnét D-ig

$$g + g \varepsilon.$$

Tudva, hogy a munka független az úttól,

$$g + Gr(g) = g + g \varepsilon \quad (10)$$

s így

$$Gr(g) = g \varepsilon. \quad (11)$$

Azaz: a nehézség gradiense valamely nivófelületben egyenlő az egy centiméterrel alatta fekvő pont nehézségének vetületével e nivófelületre, vagy pontosabban szólva, annak érintő síkjára.”

Ez a bizonyítás, ámbár hibátlan és helyes eredményhez vezet, fizikai szemléletünket még sem elégíti ki. Mi a fizikai jelentése az $ABCD$ négyzetnek? Ha AB a *nívófelület* egy darabja, akkor a reá *merőleges* AC és BD egyenesdarabokat jóhiszeműen *erővonalaknak* és a mindkettőre merőleges CD -t a szomszédos *nívófelület* egy darabjának véljük. Azonban ez nincs így, hiszen az $e-e$ erővonal nem merőleges CD -re. Továbbá: miért ábrázolhatjuk a nívófelület 1 cm hosszú darabját az AB egyenessel, holott az ugyancsak 1 cm hosszú ee erővonalat *görbe* vonallal ábrázoljuk. Ezeknek az ellentmondásoknak az a megoldása, hogy ha egy görbesereg *görbületi viszonyait* kívánjuk taglalni, akkor az illető görbék figyelembe vett legkisebb darabjait *körívekkel* és nem *egyenes* darabokkal kell ábrázolni. Ennek értelmében a fenti ábrát úgy kell árajzolni, amint az a 9. ábrán látható. Az ábrán, amelyen a görbületi viszonyokat a szemléletesség kedvéért igen-igen túlozva tüntettük fel, az O_1 középpont körül rajzolt AB ív és az O_2 középpont körül rajzolt CD ív a nehézségerő két szomszédos nívófelületének egy-egy elemi darabja; AC és BD a reájuk merőleges két szomszédos erővonal. A papíros síkja legyen az a sík, amelyben a nehézségerő fentebb említett vízszintes gradiense fekszik (tehát a forgási ellipszoid alakú Föld esetén valamelyik délkör) s legyen $AB=BD=1$ cm. Ha az A pontban a nehézségerő értéke g , akkor B -ben az értéke $g+Gr(g)$. Ha viszont A -ból 1 cm-rel lejjebb, a C pontba megyünk, az erő *iránya* változik meg az igen kicsiny ε szöggel, úgy hogy g -nek AB -re való vetülete, vagyis a g -hez járuló *vízszintes összetevő* értéke $g\varepsilon$ (l. a 9. ábrát). Rajzoljuk meg a CD -vel párhuzamos BE ívet; a kettő közti szög ugyancsak ε (minthogy $AB \perp AP$ -re és $CD \perp CR$) továbbá az $AE=\Delta$ jelölést bevezetve és Eötvös bizonyítását követve írjuk fel, hogy a nehézségerő munkája az $A-B-D$ úton és az $A-C-D$ úton ugyanakkora. Lesz:

$$0 + 1 \cdot (g + Gr(g)) = (1 + \Delta) \cdot g + 0, \quad (12)$$

s ebből

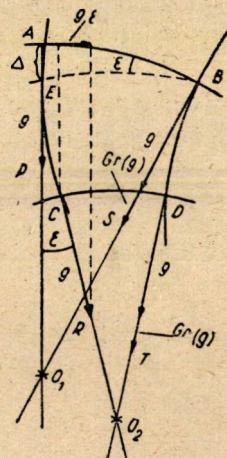
$$1 \cdot Gr(g) = \Delta \cdot g \quad (13)$$

vagyis

$$Gr(g) = g \cdot \frac{\Delta}{1}. \quad (14)$$

Azonban az ábra szerint $\frac{\Delta}{1} = \tan \varepsilon = \sin \varepsilon = \varepsilon$, tehát

$$Gr(g) = g \cdot \varepsilon, \quad (15)$$



9. ábra. Inhomogén nehézségi-tér kicsiny része és azon az erőviszonyok

ami bebizonyítandó volt. E szerint, ha a csavarási mérlegen az egyik súlyt H cm-rel mélyebbre helyezzük, a rúdra a fenti F forgatónyomatékon kívül még egy, a H -val és $Gr(g)$ -vel arányos F' forgatónyomaték is fog működni. Ez a horizontális variometer elvének lényege. Legyen G_x és G_y a $Gr(g)$ vektor két összetevője és α a mérlegrúd azimutja, vagyis az X tengellyel bezárt szöge, akkor e forgatónyomaték:

$$F' = -mHIG_x \sin \alpha + mHIG_y \cos \alpha, \quad (16)$$

és a rúdra ható egész forgatónyomaték $\Phi = F + F'$. Miután F' -ben kettő az ismeretlenek száma, ennél fogva a mérésnél úgy kell eljárunk, hogy az eszközt 5 különböző azimutba állítjuk, a rúdra ható forgatónyomatékokat a drót elcsavarodásából meghatározzuk s ebből mind R -t és λ -t, mind pedig a gradiens nagyságát és irányát is kiszámíthatjuk.

A potenciálelméletre gondolván, a G_x és G_y mennyiségek jelentése is közvetlenül világos. Nem mások ezek mint az U nehézségi potenciál második differenciálhányadosai, nevezetesen

$$G_x = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} \quad \text{és} \quad G_y = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z}.$$

Azonban

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right) \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

S ha ehhez még hozzáfűzzük, hogy $\frac{\partial U}{\partial z} = g$, akkor a $\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}$, $\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z}$ mennyiségek e kétféle alakja is értelmezést nyer. A felsőbb mennyiségtan nyelvén a (17) alatti egyenletek egyszerűen a differenciálás sorrendjének felcserélhetőségét fejezik ki, potenciálelméleti vonatkozásban pedig Eötvösnek azt az alapvető felismerését tartalmazzák, hogy a *függőleges* erő nagyságának, a g -nek a *vízszintes* irány mentén jelentkező mérhetetlenül kicsiny változása helyett, vagyis a $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)$ és $\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)$ helyett mérhetjük a nívófelület érintő síkjában fellépő *vízszintes* komponensnek változását a *függőleges* mentén, vagyis a velük egyenlő $\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)$ és $\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)$ mennyiségeket. Így lett Eötvös kezében a matematikából fizika. Azonban a $Gr(g) = g\epsilon$ egyenlőségnek Eötvöstől származó fenti elemi levezetése klasszikus példa arra is, hogy egy fizikai elvből, a munkának az úttól való függetlenségéből, hogyan lehet egy matematikai tételt, a differenciálások sorrendjének felcserélhetőségét leszármaztatni. A matematikának és fizikának erre az egymásba fonódására már fentebb is rámutattunk, midőn a görbületi variometernek Eötvöstől eredő elemi tárgyalását ismertettük.

Azt is mondhatnók, hogy *Eötvös* csavarási mérlege sajátos „matematikai-fizikai” műszer: működése a differenciálszámítás és a differenciál-geometria néhány egyszerű tételén alapszik. S talán nem tévedünk, ha részben ebben keressük az *Eötvös*-mérleg sajátos varázsát, aminek *Eötvös* a varázsvesszőről szóló hasonlatában olyan költői kifejezést ad és aminek a hatása alól senki, aki ez eszközzel csak egyszer is dolgozott, magát kivonni nem tudja.

Az *Eötvös*-mérleg további tárgyalása, nevezetesen annak ismertetése, hogy a mérések által szolgáltatott nyers adatokat hogyan kell a helyi befolyásoktól megszabadítani és a gyakorlati geofizikai kutatások számára értékesíteni, mind ennek tárgyalása meghaladná e dolgozat kereteit. E tekintetben elegendő az *Eötvös* emlékfüzetre illetve az *Eötvös*-emlékkönyvre és az ott közölt irodalmi forrásokra utalnunk.

*Budapesti Eötvös Loránd Tudományegyetem
Fizikai Intézete.*

IRODALOM

¹ Mat. és Term. Tud. Ért. 14 (1896), 221.

² Ann. d. Phys. u. Chem. Neue Folge 59 (1896), 354. Ezekkel tartalmilag majdnem azonos, viszont az elmélet kifejtésében még szűkszavúbb, de már laboratóriumon kívül, nevezetesen a Sághegyen végzett mérésekről is beszámol franciayelvű [Congrès Internat. de Physique, Paris, 1900 t. III] és az evvel egyező magyaryelvű (Mat. és Fiz. Lapok, 9 (1900), 361.) dolgozata.

³ A Balaton nivófelületei s azon a nehézség változásai. A Balaton tudományos tanulmányozásának eredményei, I. 1. Geofizikai függelék, 1908. Kilián F., bizománya.

⁴ U. e. németül: Resultate der wissenschaftlichen Erforschung des Balaton I. I Geophysikalischer Anhang, Wien, 1908, in Commission von Ed. Hözlzel.

⁵ Utólag jöttem rá, hogy e magyarázat már *Tangl Károlynak* az *Eötvös*-emlékfüzetben irt „Vizsgálatok a gravitációról” c. cikkében [Mat. és Fiz. Lapok 27 (1918), 136—146. fellelhető.