ENERGIAELOSZLÁS A FÜGGŐLEGES LÉGOSZLOPBAN

AUJESZKY LÁSZLÓ

Bemutatta Jordan Károly r. tag az 1952. március 3-án tartott felolvasó ülésen

I.

Az energetikai vizsgálatok szerepe a meteorológiában

A légkör bonyolult fizikai folyamatait (az ú. n. időjárási folyamatokat) azáltal lehet viszonylag legkönnyebben feltárni, ha a bennük dolgozó energiamennyiségeket számszerűen megállapítjuk.

Ugyanis, a légkör nagy anyagtömegeiben igen tetemes energiamennyiségek vannak jelen különféle energiafajták alakjában, és pedig főképen mint hőenergia, szélenergia, nehézségi potenciális energia, a levegő vízgőzében foglalt halmazállapoti energia, továbbá a napsugárzásban fellépő elektromágneses sugárzó energia. Ezek az energiafajták a légkörben minduntalan átalakulnak egymásba. Az időjárás összes fontosabb eseményeiben (mint pl. a szélbetörésekben, a lehülési és felmelegedési folyamatokban, a felhők és csapadékok keletkezésében) nagyszabású energiaátalakulások játszódnak le a légkör felsorolt energiakészletei között. Általában ezek képviselik az összes *időváltozások* energetikai hátterét.

Ezekből a tényekből következik, hogy *a légköri jelenségek energiamérlegének vizsgálatát ma a meteorológiai kutatás egyik fontos heurisztikus módszerének kell tekinteni.* Az energetikai vizsgálatok a meteorológia szövevényes jelenségeinek tisztázásában éppen olyan kitünő eszköznek bizonyulnak, mint a fizikának bármely más olyan ágában, ahol bonyolult jelenségek felett kell világos áttekintést biztosítanunk.

II.

A légkör függőleges energiaeloszlásának alaptényei

A légkör energetikájának *alapfeladata* a következő: megállapítandó, hogy a légkör egy megadott részében, egy megadott időpontban, mennyi van jelen a különféle energiafajtákból (és pedig főképen a legnagyobb mennyiségben fellépő két energiafajtából: a hőenergiából és a nehézségi potenciális energiából).

A feladat megoldása végett a légkört felosztjuk egységnyi alapterületű függőleges légoszlopokba és egy-egy ilyen légoszlop energiaviszonyait külön vizsgáljuk meg. Ebben a dolgozatban — amely egy folyamatban levő nagyobb energetikai vizsgálat-sorozat első láncszemét alkotja, — a légkörből kimetszett egységalapú függőleges légoszlop hőenergiájának és nehézségi potenciális energiájának a különböző magassági szintek közti megoszlásával foglalkozunk.

A levegő — a légkörben előforduló természetes viszonyok között — igen jó közelítéssel *ideális gázok elegyének* tekinthető és így számításainkban az ideális állapotegyenletet fogjuk használni. Vizsgálatunk alapjául szolgál a dinamikus meteorológia elemeiből adódó két képlet, amelyek kifejezik a térfogategységnyi levegőben lévő hőenergiát illetőleg a bennelévő nehézségi potenciális energiát a légoszlop tetszésszerinti magassági szintjében: Ha az energiasűrűséget a hőenergia esetében δ_Q-val, a nehézségi energia esetében δ_g-vel jelöljük,

$$\delta_Q = \frac{\varphi}{2} P \qquad (1)$$

$$\delta_g = DG, \qquad (2)$$

ahol φ jelenti a levegőt alkotó molekulák szabadsági fokainak átlagos számát, P és D a légkör kérdéses pontjában fennálló légnyomást illetőleg légsűrűséget, végül G a nehézségi tér potenciálját (az ú. n. geopotenciált) a légkör szóbanlévő pontjában.*

Az (1) képlettel kapcsolatban megjegyezzük a következőket. A levegőt alkotó gázok túlnyomó többsége *kétatomos* molekulákból áll, tehát olyan molekulákból, amelyek szabadsági fokainak száma 5. Ezenkívül a háromatomos összetevők közül a széndioxidnak szintén 5 szabadsági foka van. Ezért az (1) képletben $\varphi/2$ helyébe igen jó közelítéssel 2,5 iktatható**.

* Minthogy az (1) képlet az irodalomban ritkán fordul elő, bemutatjuk az ideális gázok kinetikus elméletéből adódó levezetését.

A gázelmélet elemeiből ismeretes, hogy a T absz. hőmérsékletű gáz 1 molnyi mennyiségben lévő hőenergia a következő:

$$\frac{\varphi}{2} R T,$$

ahol R a Regnault-féle egyetemes állandó; következéskép a térfogategységben lévő D tömegű gáz δ_Q hőenergiája:

$$\delta_Q = \frac{D}{M} \frac{\varphi}{2} R T,$$

ahol M a gáz mulekulasúlyát (gázelegyeknél az elegy látszólagos molekulasúlyát) jelenti.

Ámde az ideális állapotegyenlet szerint

$$\frac{R}{M} D T = P,$$

aminek figyelembevételével megelőző képletünk $\frac{\varphi}{2} P$-be megy át, úgy amint állítottuk.

** A levegő elegyösszetevői közül csak néhány alárendelt jelentőségű anyag van, amelyeknél a szabadsági fokok száma *5-től különböző*; ilyenek egyrészt a *nemes gázok* (szabadsági fokaik száma 3), másrészt a *vízgőz* (szabadsági fokainak száma 6); ezeknek az anyagoknak a mennyisége azonban nem csak nagyon csekély a levegőben, hanem a vízgőz mennyisége átlagos időviszonyok közt majdnem egyenlő is a nemes gázok összes mennyiségével (1% körüli vízgőztartalom és 1% körüli argontartalom). Ezért a gázelegyben lévő molekulák szabadsági fokainak *átlagát* kiszámítva, a nemes gázok és a vízgőz jelenlétének hatása nagyrészben lerontja egymást, és így még kisebbé válik az a hiba, amit elkövetünk, ha φ-t 5-tel tekintjük egyenlőnek.

A (2) képlet használatánál kiaknázzuk azt a tényt, hogy a légkör aránylag vékony gömbhéjnak számít a Földgömb méreteihez képest; ennek megfelelően a légkör legfontosabb rétegein belül a nehézségi gyorsulás felfelé való csökkenése elhanyagolhatóan kicsi, vagyis az egész függélyes légoszlop minden pontjában a következő közelítéssel élhetünk:

$$G \sim gh,$$

ahol g a légoszlop alján fennálló nehézségi gyorsulás, és h az illető pont magassága a légoszlop aljától számítva, amit a potenciál 0-szintjének választunk.

A most előadott két közelítő feltevés alapján a légoszlop tetszőleges h magasságban fennálló energiasűrűségek a következők:

$$\delta_Q = 2{,}5P \qquad (3)$$

$$\delta_g = Dgh, \qquad (4)$$

Az energiasűrűségek képletei felvilágosítást adnak arról, hogy ez a két energiakészlet (a hőenergia és a nehézségi potenciális energia) miként oszlik meg a légoszlop különféle magassági színtjei között.

A hőenergia függélyes eloszlását a (3) képlet szabja meg, amennyiben kimondja, hogy a hőenergia sűrűsége minden magasságban arányos az ottani légnyomással. Minthogy a légoszlopban felfelé haladva, a P légnyomás *monoton csökken*, és a légkör felső határán 0-vá válik, azért ugyanilyen függőleges eloszlást állapíthatunk meg a hőenergia sűrűségéről is: a légkör hőkészletei főkép az alsó légszíntekben vannak felhalmozva. *Annak ellenére tehát, hogy a légkör felsőbb rétegeiben igen magas hőmérsékletek állnak fenn* (pl. az ozonoszféra felső szélén, 70 km tengerszínfeletti magasságban, átlagosan 70° C; még magasabban az ionoszférában pedig néhány ezer Celsius-fok) *mégis a légkör hőenergiakészletének nagyrésze az alsó légrétegekben található.* Ennek az a magyarázata, hogy az említett magas rétegekben, bár a *hőmérséklet* igen magas, de az ottani csekély légsűrűségnek megfelelően a jelenlévő levegő tömege már nagyon kevés.

Még kevésbbé triviális az a tanulság, amelyet a (4) képlet szolgáltat a légoszlop nehézségi potenciális energiájának a különböző magasságok közti eloszlásáról. A képletből mindenekelőtt az tűnik ki, hogy a nehézségi potenciális energiánál az energiasűrűség a talajon zérus, felfelé haladva pedig *eleinte* meglehetősen sebesen növekedik a magassággal: mindaddig, amíg a D légsűrűségnek a felfelé való csökkenését elhanyagolhatjuk, addig a δ_g energiasűrűség a h magassággal arányosan fog növekedni. Viszont azt is mutatja a képlet, hogy a légkör felső határán δ_g ismét zérussá lesz (ott $D = 0$, h pedig véges érték). Már ebből is kitűnik, hogy *a függélyes légoszlopnak létezik legalább egy olyan közbeeső magassági színtje, amelynek maximális potenciális energiája van.*

Dolgozatunkban olyan tételeket fogunk felállítani, amelyek kimondják, hogy a nehézségi potenciális energiának pontosan *egy* maximuma van a függélyes légoszlopban; továbbá megadják, hogy ez a maximum milyen magasságban fekszik, (éspedig, hogy a maximális helyzeti energiájú színt milyen eltolódásokat szenved az időváltozások alkalmával, illetőleg milyen különbségeket mutat a Földnek a különböző éghajlatú vidékein).

III.

Számítási alapok

Feladatunk megoldásához a (4) egyenlet az esetben vezet el bennünket, ha a benne előforduló D légsűrűséget meg tudjuk adni a légoszlop tetszőleges h magasságú pontjában.

Ismeretes, hogy a légsűrűségnek a légoszlopban való változása nem fejezhető ki *egyetlen* explicit képlettel, minthogy a légkör egymás felett fekvő tartományokból van összetéve (troposzféra, sztratoszféra, ozonoszféra stb.), amelyek abban is különböznek egymástól, hogy az állapotjelzők mindegyik magassági tartományban más és más függvényei a magasságnak. Ezért a függélyes légoszlopot energetikai vizsgálatokban annyi szakaszból állónak kell tekinteni, ahány magassági tartományból áll a légkör. Ezeken a szakaszokon belül a légsűrűség tudvalévően előállítható, mint a magasságnak az explicit függvénye, éspedig a következőképpen.

A légkör egymás felett következő tartományait az alábbi két csoportba oszthatjuk be:

a) *Függőleges hőváltozási tartományok*, amelyekben a levegő T abszolut hőfoka jelentékenyen változik a magassággal, és a változás az egész tartományon át egyenletesen megy végbe*:

$$T = T_n - \gamma_n z \tag{5a}$$

ahol z az illető tartomány kezdőszíntjétől kezdve számított magasságot jelenti, tehát

$$z = h - h_n \tag{6}$$

és γ_n a magasságtól független együttható (az illető hőváltozási tartomány ú. n. függőleges hőcsökkenési együtthatója).

* Összes képleteinkben a következő egységes jelölésmódot fogjuk használni:

Az állapotjelzőknek a kiválasztott légoszlop tetszőleges h magasságú színtjében felvett értékeit indexnélküli betűkkel (T, P, D) jelöljük. Ezek tehát a légoszlopban változó mennyiségek, amelyek a h paraméter függvényei.

Ezzel szemben a légkör alulról számított n-edik tartományának kezdőmagasságát h_n-nel és az állapotjelzőknek ebben a színtben felvett értékeit T_n, P_n és D_n-nel fogjuk jelölni. Az összes indexes mennyiségek tehát függetlenek a h kurrens magasságtól, és h szerinti differenciálhányadosaik mind eltünnek.

Bár vizsgálatainkban a h magasság számít független paraméternek, mégis teljesség végett megjegyezzük, hogy az indexes mennyiségek az *idő* folyamán nem konstansok, pl. időváltozások alkalmával a h_n magasságok (amelyek az egyes légköri tartományok vastagságát szabják meg) tudvalévően elég jelentékeny változásokat szenvedhetnek.

b) *Azonos hőfokú tartományok* (izoterm tartományok vagy sztratoszférák), amelyekben a hőmérséklet minden magasságban ugyanannyinak tekinthető, mint az illető tartománynak az alján:

$$T = T_n \tag{5b}$$

A meteorológia elemeiből ismeretes, hogy az a) tipusú tartományokban a légnyomás és a légsűrűség következő függvényei a tartomány aljától számitott z magasságnak:

$$P = P_n\left(1 - \frac{\gamma_n}{T_n} z\right)^{\frac{f}{\gamma_n}} \tag{7a}$$

$$D = D_n\left(1 - \frac{\gamma_n}{T_n} z\right)^{\frac{f}{\gamma_n}-1} \tag{8a}$$

ahol az ujonnan használt betű, f, az időváltozásoktól független következő állandót jelent:

$$f = g\frac{M}{R} \tag{9}$$

(M a levegő látszólagos molekulasúlya, h az egyetemes gázállandó; középeurópai nehézségi gyorsulás esetén $f \sim 3{,}4 \cdot 10^{-4} C/cm$).

Hasonlókép ismeretes a meteorológiának az a két alapképlete, amely szerint a b) tipusú légköri tartományokban (pl. a legalsó sztratoszférában) a légnyomás illetőleg a légsűrűség következő függvényei a tartomány kezdőszíntjétől számított magasságnak:

$$P = P_n e^{-\frac{f}{T_n} z} \tag{7b}$$

$$D = D_n e^{-\frac{f}{T_n} z} \tag{8b}$$

A (8a) és (8b) légsűrűségi képleteket behelyettesítve (5)-be, olyan képleteket kapunk, amelyek a légoszlop egy-egy függőleges tartományában a δ_g energiasűrűséget megadják, mint a magasság explicit függvényét. Ha még (6)-ot is figyelembevesszük, kapjuk:

a) A függőleges hőváltozási tartományokban

$$\delta_g = D_n\left(1 - \gamma_n \frac{h - h_n}{T_n}\right)^{\frac{f}{\gamma_n}-1} gh \tag{10a}$$

b) A sztratoszférai tartományokban

$$\delta_g = D_n e^{-f\frac{h-h_n}{T_n}} gh \tag{10b}$$

IV.

A δ_g energiasűrűség értékváltozásai a függőleges mentén

A (10a) és (10b) képletek lehetővé teszik, hogy a légkör minden egyes függőleges tartományában külön-külön megvizsgálhassuk, vajjon a légoszlopban felfelé haladva, a nehézségi potenciális energia δ_g energiasűrűsége növekedni fog-e, vagy csökkenni. A két egyenlet jobb oldalán ugyanis a konstansokon kívül csak a h független változó lép fel, tehát elő tudjuk belőlük állítani δ_g-nek h utáni differenciálhányadosát, amelynek előjele a felvetett kérdést eldönti.

* * *

a) Ha a vizsgált n-edik légköri tartomány a hőváltozási tartományok közé tartozik, akkor a hőváltozási tartományokban érvényes (10a) képlet zárójeles tagja helyébe (5a) alapján T/T_n-t helyettesítve, az energiasűrűség differenciálhányadosának előjelvizsgálata következőképen alakul:

$$sg\frac{d\delta_g}{dh}=sg\frac{d}{dh}\left\{D_n\left(\frac{T}{T_n}\right)^{\frac{f}{\gamma_n}-1}gh\right\}=sg\frac{d}{dh}\left\{\left(\frac{T}{T_n}\right)^{\frac{f}{\gamma_n}-1}h\right\}$$

ahol a hatványkitevő *pozitív*, mert az aerológiai észlelésekből ismeretes, hogy γ_n mindig lényegesen kisebb az f értéknél. Ezért a differenciálás így folyik le:

$$sg\frac{d\delta_g}{dh}=sg\left\{\left(\frac{f}{\gamma_n}-1\right)\left(\frac{T}{T_n}\right)^{\frac{f}{\gamma_n}-2}\frac{1}{T_n}\frac{dT}{dh}h+\left(\frac{T}{T_n}\right)^{\frac{f}{\gamma_n}-1}\right\}.$$

Ámde (5a) szerint

$$\frac{dT}{dh}=-\gamma_n$$

továbbá a végig kiemelhető

$$\left(\frac{T}{T_n}\right)^{\frac{f}{\gamma_n}-2}$$

tényező bizonyosan pozitív (mert abszolút hőmérsékletek hányadosainak a hatványa), tehát

$$sg\frac{d\delta_g}{dh}=sg\left\{-\left(\frac{f}{\gamma_n}-1\right)\frac{1}{T_n}\gamma_n h+\frac{T}{T_n}\right\}=sg\left\{-\left(\frac{f}{\gamma_n}-1\right)\gamma_n h+T\right\}$$

amibe T értékét (5a) és (6) alapján ujból behelyettesítve,

$$sg\frac{d\delta_g}{dh}=sg\left\{-\left(\frac{f}{\gamma_n}-1\right)\gamma_n h+T_n-\gamma_n h+\gamma_n h_n\right\}=sg\left\{-fh+T_n+\gamma_n h_n\right\}$$

A legutóbb kapott zárójeles kifejezés aszerint lesz pozitív, zérus vagy negatív, hogy

$$h\lesseqgtr\frac{T_n+\gamma_n h_n}{f}$$

A jobboldali mennyiség az illető a) tipusú tartománynak egy jellemző állandója, amelynek hosszúság-dimenziója van, tehát egy kiváltságos magassági értéket jelöl ki. Ezt a magasságot jelöljük röviden A_n-nel:

$$A_n = \frac{T_n + \gamma_n h_n}{f} \tag{11a}$$

Levezetésünkkel bebizonyítottuk, hogy az a) tipusú légköri tartományoknak valamely tetszőleges h talajfeletti magasságú szintjében a nehézségi potenciális energia δ_g energiasűrűsége *aszerint* fog felfelé nőni vagy csökkenni, hogy h kisebb vagy nagyobb-e, mint a (11a) képlettel megadott A_n mennyiség. Itt a következő három alesetet kell megkülönböztetni:

a/1. eset: Előfordulhat, hogy az illető légköri tartományoknak a kezdőmagassága, h_n, maga is nagyobb, mint A_n. Ebben az esetben a tartományba eső összes h értékekre *a fortiori*

$$h > A_n$$

tehát a vizsgált differenciálhányados ezuttal a tartomány minden pontjában negatív lesz, vagyis ebben az esetben a potenciális energiának az energiasűrűsége az egész tartományon át felfelé *monoton csökken.*

a/2. eset: Hasonlókép előfordulhat olyan légköri tartomány is, amelynél még a tartomány felső határának magassága (h_{n+1}) is kisebb A_n-nél. Ekkor a tartomány összes szintjeire

$$h < A_n$$

tehát a vizsgált differenciálhányados a mondottak szerint a tartomány minden pontjában pozitív, vagyis δ_g az egész tartományon át felfelé *monoton növekedik.*

a/3. eset: Végül lehetséges az az eset, hogy

$$h_n < A_n < h_{n+1}$$

vagyis a tartományba *beleesik* a kiváltságos A_n magassági szint, amelynek az a tulajdonsága van, hogy δ_g eddig a magasságig növekedik, innen felfelé pedig csökken, tehát ebben az esetben *az energiasűrűségnek egy maximuma van ebben a kiváltságos magasságban.**

* * *

b) Teljesen analóg gondolatmenetet végzünk abban az esetben is, ha a függőleges légoszlopnak az n-edik szakasza egy b) tipusú tartományba (sztratoszférába) esik bele.

Az ilyen tartományokban a δ_g energiasűrűséget a (10b) képlet szolgáltatja. Ennek h szerinti differenciálása útján azt találjuk, hogy az ilyen tartományok h magasságú szintjében δ_g-nek felfelé való növekedése vagy csökkenése

* Pillanatnyilag elintézetlenül maradtak az $A_n = h_n$ és $A_n = h_{n+1}$ különleges esetek. Ezen a két szinguláris helyen eddigi gondolatmenetünk nem alkalmazható, mert itt δ_g elveszíti a differenciálhatóságát, amire alább még visszatérünk.

a következő feltételen múlik: δ_g felfelé nő, vagy nem változik, vagy csökken *aszerint*, hogy

$$h \lesseqgtr \frac{T_n}{f}$$

A következőkben kényelmi okokból és az analógia kidomborítása végett ezt a jelölést fogjuk használni:

$$B_n = \frac{T_n}{f} \tag{11b}$$

aminek bevezetésével ahhoz a tételhez jutottunk, hogy a sztratoszférai tartományok számára is megadható egy hosszúság-dimenziójú mennyiség, B_n, amely eldönti, hogy a δ_g energiasűrűség az illető tartományon belül miként viselkedik a függőleges mentén. Ha a (11b) képlettel megadott B_n kisebb, mint a tartomány alsó határának magassága (b/1. aleset) akkor δ_g az egész tartományon át felfelé monoton fogy; ha B_n nagyobb, mint a tartomány felső határának magassága (b/2. aleset) akkor δ_g az egész tartományon át felfelé monoton nő; végül, ha B_n *beleesik* magába a tartományba (b/3. aleset), vagyis, ha

$$h_n < B_n < h_{n+1}$$

akkor ebben a kiváltságos magasságban az energiasűrűségnek egy maximuma található.

A δ_g energiasűrűség differenciálhányadosának előjelén alapuló eddigi vizsgálataink természetesen érvényüket veszítik a következő néhány szinguláris magasságban:

$$h_1, h_2, h_3, \ldots$$

amelyek a légkör egymásfeletti tartományainak az elhatároló magasságai. Ugyanis ezek a h_n helyek a δ_g függvénynek szakadási helyei, ahol δ_g ugrásszerűen megy át a (10a) és (10b) képletek közül az egyikből a másikba. Ezért δ_g ezeken a szinguláris helyeken nem differenciálható. Következéskép eddigi meggondolásaink csak a légköri tartományok *belsejére* érvényesek, de a h_n határmagasságokra nézve nincsen bizonyító erejük. Ennekfolytán az eddigiek még nem zárják ki azt a lehetőséget, hogy a δ_g energiasűrűségnek további maximumai lehessenek (a légköri tartományok belsejében A_n illetőleg B_n magasságban fekvő szinteken *kívül*) esetleg még a h_n elválasztószintek valamelyikében is.

Eddigi eredményeink tehát annak kimondására jogosítanak, hogy a függőleges légoszlopban a nehézségi potenciális energiának *legfeljebb kétszerannyi számú* maximumhelye lehet, mint ahány egymásfeletti tartományból a légkör összetevődik. Ugyanis minden tartomány *belsejében* lehet legfeljebb egy maximum (éspedig a hőváltozási tartományokban A_n magasságban és a sztratoszférákban B_n magasságban, feltéve, hogy az A_n illetőleg B_n magasság tényleg beleesik a tartomány belsejébe); továbbá esetleg még lehet maximuma δ_g-nek a h_n elválasztó magasságokban is.

A továbbiakban azonban kimutatjuk, hogy ezekből a lehetséges maximumokból minden időjárási helyzetben *egy és csakis egy* valósul meg; továbbá kimutatjuk, hogy a nehézségi potenciális energiának ez a maximumszintje mindig a légkör két legalsó tartománya közül az egyikbe esik bele (mégpedig legtöbbször a troposzférába).

V.

Alkalmazás a légkör két legalsó tartományára: a troposzférára és sztratoszférára

Minthogy az időjárás legfontosabb folyamatai a légkör két legalsó tartományában játszódnak le (a troposzférában és a legalsó sztratoszférában), azért a meteorológiai energetikában ez a két tartomány követel meg legnagyobb figyelmet. Kiemelkedő fontosságú speciális eseteit képviselik tehát a IV. alatt kifejtett tételnek azok, amelyek a troposzférában ($n = 1$) és a közvetlenül felette következő első sztratoszférában ($n = 2$) adják meg a δ_g energiasűrűség függőleges viselkedését.

A troposzféra esetében a (11a) képlet annyiban egyszerűsödik, hogy a h_1 kezdőmagasság a légkör alsó szélével esik egybe: $h_1 = 0$, és így a troposzféra számára

$$A_1 = \frac{T_1}{f} \qquad (12a)$$

miáltal a tételünk a következő speciális alakot ölti:

A δ_g energiasűrűségnek maximuma van a troposzféra belsejében a (12a) képlettel megadott A_1 magasságban* *abban és csakis abban az esetben*, ha az A_1 magasság még beleesik a troposzféra belsejébe, (ami lényegében azt a feltételt jelenti, hogy

$$\frac{T_1}{f} < h_2 \qquad (13a)$$

legyen, ahol h_2 a troposzféra és sztratoszféra közti határfelületnek, az ú. n. *tropopauzának* a magassága); továbbá pedig maximuma van az első sztratoszféra belsejében a

$$B_2 = \frac{T_2}{f} \qquad (12b)$$

magasságban *abban és csakis abban az esetben*, ha ez a magassági szint nincs többé benne a troposzférában, hanem a sztratoszféra belsejébe esik

* Az A_1 magasságot az irodalomban „a homogén sűrűségű légkör magasságának" szokás nevezni, mert könnyen kimutatható, hogy *ha* az egész légkör egyetlen troposzférából állna, amelynek függélyes hőcsökkenési együtthatója $\gamma = f$, abban az esetben a légsűrűség (8a) képletéből a h magasság kiesik, a légsűrűség tehát minden magasságban ugyanaz lenne; továbbá könnyű kimutatni, hogy ebben a légkörben a (7a) képlettel megadott légnyomás A_1 magasságban zérussá válik, tehát A_1 ennek a légkörnek a magasságával egyenlő.

bele, (ami lényegében azt a feltételt jelenti, hogy

$$\frac{T_2}{f} > h_2 \tag{13b}$$

legyen.)*

Ez a tétel könnyen áttekinthető helyzetet teremtene abban az esetben, ha h_2 az időváltozások alkalmával nem változna meg. Ismeretes azonban, hogy a tropopauza magassági fekvése az idő folyamán nagy eltolódásokat szenved. Ha rendszeresen végzett aerológiai megfigyelésekből pl. naponként vagy félnaponként megállapítjuk h_2 és B_2, valamint talajmenti észlelésekből A_1 értékét, azt találjuk, hogy h_2 az esetek egy részében nagyobb A_1 és B_2-nél, máskor pedig kisebb náluk, vagy a két érték közé esik. Eszerint a (13a) feltételi egyenlőtlenség bizonyos időjárási helyzetekben beteljesül, más időjárási helyzetekben ellenben nincs kielégítve. Hasonlókép a (13b) feltételi egyenlőtlenség is az időjárás ingadozásai szerint hol beteljesül egy megadott légoszlopban, hol pedig nem.

Közelebbről a megfigyelési anyag azt mutatja, hogy az időjárási helyzetek többségében (13a) teljesítve van, vagyis a nehézségi potenciális energiának *többnyire* van maximuma a troposzféra belsejében. Az időjárási helyzetek egy sokkal kisebb részében ellenben (13b) teljesül be, vagyis *aránylag kevés* olyan időjárási helyzet lép fel, amelyben a nehézségi potenciális energiának van maximuma a sztratoszféra belsejében.

A két feltétel azonban nem teljesülhet egyidejűleg,** és így sohasem fordulhat elő, hogy a δ_g energiasűrűségnek egyidejűleg lehessen maximuma a troposzféra belsejében is és a sztratoszféra belsejében is.

* Szigorúan véve a feltételi egyenlőtlenségek így hangzanának:

A troposzféra belsejébe eső maximum létének szükséges és elegendő feltétele, hogy

$$h_1 < \frac{T_1}{f} < h_2$$

a sztratoszféra belsejébe eső maximum létének feltétele pedig

$$h_2 < \frac{T_2}{f} < h_3$$

Tekintettel azonban arra, hogy $h_1 = 0$, az első egyenlőtlenség első része triviálisan teljesül; hasonlókép h_3, a sztratoszféra felső határának magassága olyan nagy (átlagosan $3{,}5 \cdot 10^6$ cm) az előforduló T_2/f értékekhez képest, hogy a második egyenlőtlenség második fele is triviálisan teljesülőnek tekinthető; így a feltételi egyenlőtlenségek *lényeges részei* a (13a) és (13b) alakra zsugorodnak össze.

** Ugyanis a (12a) és (12b) definiciós egyenletek különbségét képezve,

$$A_1 - B_2 = \frac{T_1 - T_2}{f}$$

ahol a jobb oldal bizonyosan pozitív, mert a T_1 talajmenti hőmérséklet mindig lényegesen magasabb, mint a sztratoszféra T_2 hőmérséklete. Eszerint

$$A_1 > B_2$$

amiből következik, hogy a (13a) és (13b) egyenlőtlenségek ellentmondanak egymásnak: a két feltételi egyenlőtlenség közül minden adott időpontban legfeljebb az egyik teljesülhet be.

Előfordulhat ellenben olyan időjárási helyzet, amelyben a (13a) és (13b) egyenlőtlenségek közül *egyik sem* teljesül be, vagyis A_1 a tropopauza *fölé* esik és B_2 a tropopauza *alá* esik:

$$A_1 > h_2 > B_2 \tag{14}$$

illetőleg A_1 és B_2 explicit értékeit behelyettesítve

$$T_1 > h_2 f > T_2$$

Ebben az esetben a troposzférában minden h magasság kisebb A_1-nél (tehát a δ_g energiasűrűség a IV. pont értelmében az egész troposzférán át felfelé monoton növekedni fog); egyuttal azonban a sztratoszférában minden h magasság nagyobb B_2-nél (tehát δ_g az egész sztratoszférán át monoton csökkenni fog). Ennek a két eredménynek az egybevetéséből következik, hogy a szóbanlévő esetben δ_g-nek a troposzféra és sztratoszféra elválasztó felületében (a h_2 magasságban) van maximuma.

Ezek alapján a δ_g energiasűrűségnek a troposzférában és sztratoszférában való függélyes viselkedését következőkben foglalhatjuk össze. A δ_g energiasűrűség a troposzféra alján zérus; innen felfelé növekedik és bizonyos magasságban maximumot ér el; mégpedig a maximum a következő magasságok valamelyikében áll be:

vagy az A_1 magasságban [éspedig azokban a légoszlopokban, amelyeknél ez a magasság benne fekszik a troposzféra belsejében, vagyis amelyekre a (13a) feltétel beteljesül];

vagy a B_2 magasságban [éspedig azokban a légoszlopokban, amelyeknél ez a magasság benne fekszik a sztratoszféra belsejében, vagyis amelyekre a (13b) feltétel beteljesül];

vagypedig a tropopauzában [éspedig azokban a légoszlopokban, amelyeknél A_1 felül fekszik a troposzférán és B_2 alul fekszik a sztratoszférán, vagyis amelyekre a (14) feltétel beteljesül].

Eszerint a δ_g energiasűrűségnek a légkör két legalsó tartományában mindig létezik *egy és csakis egy* maximuma, éspedig a maximális energiasűrűségű szint mindig a következő két magassági szint közé esik:

$$\frac{T_2}{f} \text{ és } \frac{T_1}{f}$$

Azt is megállapíthatjuk, hogy a most kijelölt magassági sáv, amely a maximális potenciális energiájú szintet okvetlen magában foglalja, *meglehetősen vékony* a troposzférának és sztratoszférának az egész vastagságához képest. Ugyanis az aerológiai mérésekből kiolvasható, hogy az $A_1 - B_2$ magasságkülönbség általában csak 1-2 km-t tesz ki, ellenben a troposzféra átlagos vastagsága nálunk 11 km, a sztratoszféráé pedig több, mint 20 km.

Eszerint ez a két kiváltságos magassági szint (amelyek az energiasűrűségi maximumnak a lehetséges legalsó és legfelső helyzetét jelölik ki az illető légoszlopban) viszonylag közel esik egymáshoz. Másszóval, a maximális potenciális energiájú szint minden megadott légoszlopban egy meglehetősen szűk magassági intervallumba esik bele és sohasem fekszik távol a tropopauzától; időváltozások alkalmával azonban a tropopauza magasságával együtt lényeges eltolódásoknak lehet alávetve.

VI.

A δ_g energiasűrűség viselkedése a légkör felsőbb tartományaiban

Hogy a IV. pontban felállított tételt a légkör többi tartományaiban ($n > 2$) is alkalmazzuk, avégből táblázatban összeállítottuk ezeknek a tartományoknak az átlagos magassági és légállapoti adatait.*

I. TÁBLÁZAT

A légkör felsőbb tartományainak átlagos magassági és légállapoti adatai

Sorszám n	A légköri taromány neve	Jellege	Átlagos kezdőmagassága km	Hőmérs. a kezdőszintben K°	Az a) tipusú tartományoknál		A b) tipusú tartományoknál
					γ_n C/cm	A_n km	B_n km
3	alsó ozonoszféra	a) tipusú	35	220	$-6 \cdot 10^{-5}$	0,3	—
4	ozonosztratoszféra	b) „	55	340	—	—	10,0
5	második troposzféra	a) „	70	340	$5 \cdot 10^{-5}$	20,2	—
6	harmadik sztratoszf.	b) „	85	270	—	—	7,8

Egybevetve a táblázat h_n oszlopában álló adatokat az A_n illetőleg B_n oszlopokban látható adatokkal, egyöntetűen megállapíthatjuk, hogy a táblázatban szereplő minden egyes tartománynak a kezdőmagassága *nagyobb*, mint az illető tartományhoz tartozó A_n és B_n érték. Ez pedig a IV. alatti tétel értelmében annyit tesz, hogy a δ_g energiasűrűség ezeknek a légköri tartományoknak a belsejében mindenütt monoton csökken a h magasság növekedésével.

VII.

A δ_g energiasűrűség függőleges változásának teljes áttekintése

Összefoglalva az V. és VI. pontban bebizonyított tételeket, következőkép jellemezhetjük a nehézségi potenciális energiának a légkör különféle magassági szintjei között való megoszlását.

1) A nehézségi potenciális energiának az energiasűrűsége, δ_g, a légkör alján zérus; innen felfelé eleinte sebesen növekedik; feljebb — a légsűrűség csökkenése következtében — a növekedés meglassul, és az energiasűrűség egy maximumot ér el oly magasságban, amely az időváltozások alkalmával bizonyos ingadozásokat mutat.

* V. ö.: *Aujeszky:* A légkör függőleges tagozódása egymás felett következő troposzférákba és sztratoszférákra, Időjárás, *54,* (1950.) 74-79.

2) A δ_g energiasűrűség maximuma az időjárási helyzetek többségében a troposzféra belsejének felső rétegeibe esik (éspedig A_1 magasságba). Bizonyos ritkábban előforduló időjárási helyzetekben azonban a maximum a troposzféra felső határára esik (h_2 magasságba), vagy a sztratoszféra belsejének alsó rétegeibe esik (B_2 magasságba).

3) A függélyes légoszlopnak abban a részében, amely a 2) alatt leírt kiváltságos szinten felül fekszik, a δ_g energiasűrűség felfelé sehol sem növekedik, vagyis δ_g-nek a 2) alatti maximumon kívül nincsen több relatív maximuma a légoszlopban.

4) Ellenben nem zárható ki az a lehetőség, hogy a δ_g függélyes változását ábrázoló görbének inflexiós pontjai lehessenek az egyes légköri tartományok elválasztó szintjeiben (a h_n-nel jelölt magasságokban).

5) Ezektől a szinguláris helyektől eltekintve, a δ_g energiasűrűség felfelé *monoton csökken* a sztratoszférának a legnagyobb részében és a felette lévő összes légköri tartományokban.

6) A 2) alatt mondottak azt is megadják, hogy a maximális potenciális energiájú szint magassági fekvése miként változik meg az *időváltozások* alkalmával, továbbá, hogy milyen fekvésbeli különbségek mutatkoznak a földnek a külünböző *éghajlatai* alatt. A meleg légtömegekben és a föld meleg éghajlatai alatt magasabban fekszik, a hideg légtömegekben és hideg éghajlatok alatt alacsonyabban található meg.

VIII.

A talált eredmények értékelése, különös tekintettel folyamatbanlévő további vizsgálatokra

A fentiekben közölt eredmények élesen megmutatják, hogy a hőenergiának és a nehézségi potenciális energiának a függőleges eloszlása nagyonis eltérő: a hőenergiánál az energiasűrűség a legnagyobb a talajon és felfelé monoton csökken a légkör felső határáig; a nehézségi potenciális energiánál ellenben az energiasűrűség zérusból kiindulva felfelé eleinte nő, azután ismét zérusig csökken.

Eszerint a légoszlop valamely h magasságában a δ_Q energiasűrűség értéke igen különböző lehet a δ_g energiasűrűség értékétől. Időváltozások alkalmával az egyik vagy mindkét energiasűrűség értéke megváltozhat, de a két változás értéke nagyon különböző lehet.

Képezzük a két energiasűrűség integráljait az egész légoszlopon át. Az egyik integrál egyenlő a (egységnyi alapterületű) légoszlop egész hőenergiájával (E_Q), a másik a légoszlop egész nehézségi potenciális energiájával (E_g):

$$E_Q = \int_{h=0}^{H} \delta_Q dh, \qquad E_g = \int_{h=0}^{H} \delta_g dh$$

ahol H a légkör felső határának magasságát jelenti.

Az időváltozások alkalmával a légoszlop E_Q és E_g energiakészletei nyilván megváltoznak. Mivel azonban már maguknak az integranduszoknak a változásai is egymástól igen különbözők lehetnek, azt várhatjuk, hogy az E_Q és E_g integrálok értékváltozásai közt nincsen semmiféle szorosabb kapcsolat. Másszóval valószínűnek látszik, hogy a légoszlop hőenergiájának és nehézségi potenciális energiájának a megváltozása — az időváltozások alkalmával — egymástól függetlenül történik.

Ennek ellenére ki fogjuk mutatni egy következő dolgozatban, hogy a légoszlopnak ez a két energiakészlete csak egy állandó tényezőben különbözik egymástól:

$$E_Q = 2{,}5 E_g. \tag{15}$$

Ez a tétel többek között a légkörnek azt a meglepő energetikai tulajdonságát fedi fel, hogy a kétféle energiakészlet mindig csak *együtt* és mindig *egymással arányosan* változhat meg. Ez annál érdekesebb, mert a hőenergia, mint kifejtettük, mindig elsősorban a légkör alsó rétegeiben van jelen, ellenben a potenciális energia nagyrésze a közepes magasságú rétegekben. A különböző szintekben székelő energiakészletek megváltozása azonban mégis mindig úgy folyik le, hogy az egész légoszlop hőenergiája arányos marad a légoszlop nehézségi potenciális energiájával.

A most előzetes közlésként felemlített (15) tétel bizonyításával és messzemenő meteorológiai következményeivel részletesen foglalkozunk előkészületben lévő dolgozatunkban.

IX.

A hőenergia és a nehézségi potenciális energia együttes mennyisége a légkör különféle magassági szintjeiben

Az előző pontokban külön-külön vizsgáltuk ennek a két energiafajtának a függőleges mentén való eloszlását a légkörben (ami a δ_Q és δ_g energiasűrűségek magasságszerinti differenciálhányadosaival jellemezhető); befejezésül viszont a két energiakészlet *összegét* vizsgáljuk meg ebből a szempontból (amihez a $\delta_Q + \delta_g$ összeg differenciálhányadosának taglalása nyitja meg az utat).

Az előzők alapján ugyanis módunkban van még ennek az energiaösszegnek a függélyes viselkedésére nézve is egy érdekes tételt felállítani.

A légkörben felfelé haladva, a $\delta_Q + \delta_g$ összeg első tagja monoton fogy, a második tag viszont eleinte lényegesen növekedik. *Állítjuk azonban, hogy az első tag csökkenése mindenkor felülmúlja a második tag növekedését, úgy hogy a két energiasűrűségnek az összege már a föld felszínétől kezdve monoton csökken felfelé.*

A $\delta_Q + \delta_g$ mennyiség ezen tulajdonságának igazolása végett felhasználjuk azt a fentebbi megállapításunkat, hogy a két energiasűrűség *differenciálható függvénye* a magasságnak a függőleges légoszlop összes egymásfeletti tartományainak a belsejében (és csak az egyes övezetek elválasztó szintjeiben veszti el a differenciálhatóságát). Eszerint a h_n-nel jelölt szinguláris helyek kivételével mindenütt létezik a

$$\frac{d}{dh}(\delta_Q + \delta_g) \tag{16}$$

differenciálhányados, és azt kell bizonyítanunk, hogy ez a differenciálhányados *mindenütt negatív.*

Ennek elérése végett a δ_Q energiasűrűség (3) alatti képletét differenciáljuk a h magasság szerint és figyelembevesszük a légkör jólismert sztatikus alapegyenletét, amely szerint

$$\frac{dP}{dh} = -gD$$

miáltal (3)-ból kapjuk:

$$\frac{d\delta_Q}{dh} = -2{\cdot}5gD$$

és így a vizsgálandó (16) kifejezést következőkép írhatjuk:

$$\frac{d}{dh}(\delta_Q + \delta_g) = -2{,}5gD + \frac{d\delta_g}{dh}$$

vagy (4) felhasználásával

$$\frac{d}{dh}(\delta_Q + \delta_g) = -2{,}5gD + g\left(\frac{dD}{dh}h + D\right) \tag{17}$$

Hogy ez a kifejezés a légoszlop összes egymásfeletti tartományainak a belsejében tényleg mindenütt negatív, azt külön-külön kell igazolnunk a troposzférára, a sztratoszférára és a sztratoszféra feletti többi tartományokra.

a) Tételünknek a troposzférára vonatkozó része következőkép igazolható:

A troposzféra a légkör függőleges tartományai közül a legalsó, és a III. pontban kifejtett osztályozás szerint a légköri tartományok a) tipusába tartozik. Ezért a (17) képletben szereplő D légsűrűséget a troposzférában úgy kapjuk meg, hogy az a) tipusú tartományokban érvényes (8a) légsűrűségi képletnek az $n=1$ speciális esetét vesszük. Figyelembevéve még, hogy a troposzférában a tartomány kezdőszintje egybeesik az egész légkör kezdőszintjével, z helyébe h-t írhatunk és így kapjuk:

$$D = D_1\left(1 - \frac{\gamma_1}{T_1}h\right)^{\frac{f}{\gamma_1}-1}$$

illetőleg f/γ_1-et röviden a_1-nek nevezve, és az (5a) kapcsolatot figyelembevéve, a légsűrűség jólismert troposzférai képletéhez jutunk:

$$D = D_1\left(\frac{T}{T_1}\right)^{a_1-1} \tag{18}$$

Ujból kihasználva, hogy $f>\gamma_1$ és így $a_1-1 \neq 0$, a D légsűrűség differenciálása következőkép alakul:

$$\frac{dD}{dh}=\frac{D_1}{T_1^{a_1-1}}\frac{d}{dh}T^{a_1-1}=\frac{D_1}{T_1^{a_1-1}}(a_1-1)\,T^{a_1-2}\frac{dT}{dh}$$

ami (18) alkalmazásával így írható:

$$\frac{dD}{dh}=(a_1-1)\frac{D}{T}\frac{dT}{dh}$$

ahol az utolsó tényező (5a) alapján $=-\gamma_1$, tehát

$$\frac{dD}{dh}=-(a_1-1)\gamma_1\frac{D}{T} \tag{19}$$

A (18) és (19) kifejezéseket (17)-be helyettesítve, végig kiemelhető a gD pozitív mennyiség, amelynek a kifejezés előjelére nincsen kihatása, tehát elhagyható:

$$\mathrm{sg}\frac{d}{dh}(\delta_Q+\delta_g)=\mathrm{sg}\left\{-2{,}5-\gamma_1(a_1-1)\frac{h}{T}+1\right\}=$$

$$=\mathrm{sg}\left\{-1{,}5-\gamma_1(a_1-1)\frac{h}{T}\right\}$$

Minthogy γ_1, a_1-1, h és T mind pozitívek, a jobboldali kifejezés mindíg negatív, úgy amint állítottuk.

b) Állításunknak a sztratoszférára vonatkozó részét úgy igazoljuk, hogy (17)-be a légsűrűség sztratoszférai képletét helyettesítjük be. Ezt a (8b) képlet $n=2$ speciális esete szolgáltatja:

$$D=D_2e^{-\frac{f}{T_2}z} \tag{20}$$

ahol (6) értelmében

$$z=h-h_2$$

tehát

$$\frac{dD}{dh}=\frac{dD}{dz}=-\frac{f}{T_2}D$$

Ezt (17)-be behelyettesítve és az előjel szempontjából közömbös gD pozitív mennyiséggel kiosztva, kapjuk, hogy a sztratoszférában

$$\mathrm{sg}\frac{d}{dh}(\delta_Q+\delta_g)=\mathrm{sg}\left\{-1{,}5-\frac{f}{T_2}h\right\}$$

vagyis a differenciálhányados itt is negatívnak bizonyul.

c) A sztratoszféra feletti összes tartományok belsejére nézve a $\delta_Q+\delta_g$ összeg függőleges csökkenése *triviális állítás,* mert ezekben a tartományokban a δ_Q-n kívül már δ_g is (mint a VI. pontban kimutattuk) felfelé monoton csökken.

Az a), b) és c) alatti részbizonyítások együttvéve állításunknak az egész függőleges légoszlopban való helyességét igazolják, kivéve a h_n-nel jelölt választószinteket, mert ezeken a szinguláris helyeken — a differenciálhányadosok hiányzása miatt — nem zárható ki az a lehetőség, hogy a $\delta_Q + \delta_g$-t ábrázoló görbének inflexiós pontja fordulhasson elő.

X.

A felállított energetikai tételek összefoglalása

A dolgozatunk keretében kimondott és igazolt meteorológiai-energetikai tételek lényegét a következőkben összegezzük.

Egy függőleges légoszlop hőenergiája és nehézségi potenciális energiája úgy oszlik meg a különböző magassági szintek között, hogy a *hőenergiának* az energiasűrűsége az egész légoszlopban felfelé monoton csökken; a *nehézségi potenciális energiának* az energiasűrűsége felfelé eleinte nő és maximumot ér el olyan magassságban, amely a tropopauza közelében fekszik, innen kezdve pedig a légkör felső határáig monoton csökken; *a két energiasűrűség összege* pedig az egész légoszlopon át felfelé monoton csökken.*

Az Országos Meteorológiai Intézet
Budapest.

* A kisszámú szinguláris szintet figyelmen kívül hagyva, ahol csökkenés helyett változatlanság is fennállhat.