GRÁFOKKAL KAPCSOLATOS MAXIMUM—MINIMUM TÉTELEK
(II. RÉSZ)

GALLAI TIBOR (Budapest)

6. §.*

6. 1. Tetszőleges zárt láncokra vonatkozó maximum—minimum tétel

(6. 1. 1). A Γ gráf pontjain és alapélein legyenek értelmezve az egész értékű $\varphi(X)$ és $\psi(x)$ függvények. A p pontláncot *á-lefogónak* mondjuk, ha minden (nemcsak pozitív) zárt g láncra $|p, g| \geqq \psi(g)$.

Az *á*-lefogó pozitív pontláncok halmazát $\tilde{P}_l$-vel jelöljük. (4. 1. 13)-hoz hasonlóan kimondhatjuk, hogy $\tilde{P}_l$ nem üres.

Az elférő zárt láncok halmazát $\tilde{G}_e$-vel jelöljük. Ha minden X-re $\varphi(X) \geqq 0$, akkor $g = 0$ elférő volta biztosítja, hogy $\tilde{G}_e$ nem üres.

(6. 1. 2). TÉTEL: *Ha* $\varphi \geqq 0$, *akkor*

$$\max_{g \in \tilde{G}_e} \psi(g) = \min_{p \in \tilde{P}_l} \varphi(p).$$

BIZONYÍTÁS: (I). Γ-ból új alapélek csatolásával egy Γ' gráfot értelmezünk. [Vesd össze [1] 217. o. és [5] 211. o.-lal.] Γ' pontjai azonosak Γ pontjaival. Γ minden alapéle Γ'-nek is alapéle változatlan kezdő- és végponttal. Γ bármely x alapéléhez egy új $\bar{x}$ alapélt rendelünk oly módon, hogy ha x kezdő- és végpontja Y, ill. Z, akkor $\bar{x}$ kezdő- és végpontja Z, ill. Y legyen. Az új alapélek halmazának nincs közös eleme Γ éleinek halmazával, és e két egyenlő számosságú halmaz egyesített halmaza adja Γ' éleinek halmazát.

A ψ függvény értelmét a $\psi(\bar{x}) = -\psi(x)$ egyenlettel az új alapélekre is kiterjesztjük.

* A dolgozat első része a MTA III. Osztálya Közleményei VII/3—4. számában található (305—338. o.). A 35. oldalon terminológiajegyzéket közlünk.

Felhívjuk a figyelmet a **11.** §-t követő „Kiegészítés"-re. Ebben a (4. 1. 16), ill. az (1. 2) TÉTELre az I. részben közöltnél lényegesen egyszerűbb bizonyítást adunk, s egyben utalunk arra is, hogy a **7.**, **8.** és **11.** § tételeinek igazolásai is lényegesen egyszerűsíthetők, ill., hogy e bizonyítások a (4. 1. 16) TÉTELre adott új bizonyítással részben összevonva is elvégezhetők.

Értelmezéseinkből következik, hogy ha $\bar{x}$ a tetszőleges x alapélhez rendelt új élt jelenti és X tetszőleges pont, akkor $(\bar{x}, X) = -(x, X)$ és $|\bar{x}, X| = |x, X|$.

(II). A Γ-hoz tartozó tetszőleges f lánchoz egy Γ'-höz tartozó *pozitív* f' láncot rendelünk: Legyen x Γ-nak tetszőleges alapéle, $\bar{x}$ az ehhez rendelt új él. Ha $f(x) \geq 0$, akkor legyen $f'(x) = f(x)$ és $f'(\bar{x}) = 0$, ha $f(x) < 0$, akkor legyen $f'(x) = 0$ és $f'(\bar{x}) = -f(x)$.

Értelmezésünkből következik, hogy bármely összetartozó x és $\bar{x}$ élpárra és bármelyik X pontra

$$f'(x)\psi(x) + f'(\bar{x})\psi(\bar{x}) = f(x)\psi(x),$$
$$f'(x)(x, X) + f'(\bar{x})(\bar{x}, X) = f(x)(x, X),$$
$$f'(x)|x, X| + f'(\bar{x})|\bar{x}, X| = |f(x)||x, X|.$$

Ezekből az összefüggésekből adódik, hogy $\psi(f') = \psi(f)$, minden X-re $(f', X) = (f, X)$ és $|f', X| = |f, X|$, végül bármilyen p pontláncra (a Γ-hoz tartozó pontláncok Γ'-nek is pontláncai, és megfordítva)

$$|p, f'| = \Sigma |p(X)| |f', X| = \Sigma |p(X)| |f, X| = |p, f|.$$

Ezek szerint, ha f zárt, ill. elférő, akkor f' is az. Az elmondottakból nyilvánvaló, hogy ha P_l'-vel jelöljük a Γ'-höz tartozó pozitív lefogó pontláncok halmazát, akkor ha $p \in P_l'$, úgy $p \in \tilde{P}_l$.

Ha a Γ'-höz tartozó pozitív zárt elférő láncok halmazát G_e'-vel jelöljük, akkor megállapításainkból a következő két egyenlőtlenség írható fel:

$$(*) \qquad \min_{p \in \tilde{P}_l} \varphi(p) \leq \min_{p \in P_l'} \varphi(p), \qquad \max_{g \in \tilde{G}_e} \psi(g) \leq \max_{g' \in G_e'} \psi(g').$$

(III). A Γ'-höz tartozó tetszőleges *pozitív* f' lánchoz egy Γ-hoz tartozó f láncot rendelünk: Legyen x tetszőleges alapéle Γ-nak, $\bar{x}$ pedig az ehhez rendelt új él. Legyen $f(x) = f'(x) - f'(\bar{x})$.

Értelmezésünkből, valamint az (I) alattiakból következik, hogy bármely összetartozó x és $\bar{x}$ élpárra és bármelyik X pontra

$$f(x)\psi(x) = f'(x)\psi(x) + f'(\bar{x})\psi(\bar{x}),$$
$$f(x)(x, X) = f'(x)(x, X) + f'(\bar{x})(\bar{x}, X),$$
$$|f(x)||x, X| \leq |f'(x)||x, X| + |f'(\bar{x})||\bar{x}, X|.$$

Ezekből következik, hogy $\psi(f) = \psi(f')$, minden X-re $(f, X) = (f', X)$ és $|f, X| \leq |f', X|$, végül bármely p pontláncra

$$|p, f| = \Sigma |p(X)| |f, X| \leq \Sigma |p(X)| |f', X| = |p, f'|.$$

E szerint, ha f' zárt, ill. elférő, akkor f is az. Az elmondottakból nyilvánvaló, hogy ha $p \in \tilde{P}_l$, akkor $p \in P_l'$.

Megállapításainkból felírható a következő két egyenlőtlenség:

$$\min_{p\in\tilde{P}_l} \varphi(p) \geqq \min_{p\in P'_l} \varphi(p), \qquad \max_{g\in\tilde{G}_e} \psi(g) \geqq \max_{g'\in G'_e} \psi(g').$$

Ezekből, (*)-ból, valamint a (4. 1. 16) TÉTELből következik a bizonyítandó tétel helyessége.

6. 2. Általánosított körláncok és körrendszerek

(6. 2. 1). Az **5.** §-hoz hasonlóan a (6. 1. 2) TÉTELből általánosabb értelemben vett körláncokra, ill. körrendszerekre vonatkozó tétel nyerhető.

Jelöljük Γ köreinek halmazát $\tilde{K}$-val. Általánosított körláncon, röviden *á-körláncon* bármely, a $\tilde{K}$ halmazon értelmezett nem negatív egész értékű $\tilde{z}(k)$ függvényt értünk. A $|\tilde{z}, X|$, $\psi(\tilde{z})$ jeleket az (5. 1) alattiaknak megfelelően értelmezzük. $\tilde{z}$ elférő, ha minden X-re $|\tilde{z}, X| \leqq \varphi(X)$. Az elférő *á*-körláncok halmazát $\tilde{L}_e$-vel jelöljük.

A p pontlánc *á-körlefogó,* ha $\tilde{K}$ bármely k elemére $|p, k| \geqq \psi(k)$.

Nyilvánvaló, hogy ha p *á*-lefogó, akkor *á*-körlefogó is. (4. 1. 12)-höz hasonlóan belátható ennek fordítottja. Ezek szerint az *á*-körlefogó pontláncok halmaza azonos $\tilde{P}_l$-lel.

Az **5.** §-ban alkalmazott eljárással a (6. 1. 2) TÉTELből a következő tétel adódik:

(6. 2. 2). TÉTEL: *Ha* $\varphi \geqq 0$, *akkor*

$$\max_{\tilde{z}\in\tilde{L}_e} \psi(\tilde{z}) = \min_{p\in\tilde{P}_l} \varphi(p).$$

(6. 2. 3). A (6. 2. 2) TÉTEL, a bevezetésben közölt tételekhez hasonlóan láncfogalom nélkül is kimondható:

A Γ gráfban legyenek értelmezve a $\varphi(X)$ és $\psi(x)$ egész értékű függvények. Γ egy *tetszőleges* irányított k körének $\psi(k)$ értékén az éleihez rendelt ψ értékek megfelelő előjellel vett összegét értjük. Az összegezésnél egy él értékét $+$ vagy $-$ jellel kell venni aszerint, hogy k befutásának iránya a tekintett él irányításával megegyezik, vagy azzal ellentétes.

A köröknek egy $\tilde{z} = (k_1, \ldots, k_n)$ sorozatát *á-körrendszernek* nevezzük. (Ugyanaz a kör többször is szerepelhet; a körök sorrendje mellékes; az üres sorozatot is *á*-körrendszernek tekintjük.)

Egy $\tilde{z}$ *á*-körrendszer $\psi(\tilde{z})$ értékét, valamint $\tilde{z}$ elférő voltát az (1. 1) alattiaknak megfelelően értelmezzük. Egy $\pi = (X_1, \ldots, X_n)$ pontrendszer *á-lefogó,* ha bármely k kört is vizsgálunk, $X_1, \ldots, X_n$ közül a k körön elhelyezkedők száma nagyobb, vagy egyenlő $\psi(k)$-nál.

Az elférő $\tilde{a}$-körrendszerek halmazát $\tilde{\Lambda}_e$-vel, az $\tilde{a}$-lefogó pontrendszerek halmazát $\tilde{\Pi}_l$-lel jelöljük.

Az (5.4) alattiakhoz hasonlóan belátható, hogy a (6.2.2) TÉTEL lényegében azonos a következő tétellel:

(6.2.4). TÉTEL: *Ha* $q \geqq 0$, *akkor*

$$\max_{\tilde{\varkappa} \in \tilde{\Lambda}_e} \psi(\tilde{\varkappa}) = \min_{\pi \in \tilde{\Pi}_l} \varphi(\pi).$$

7. §.

7.1. Lefogó láncok és az ezekkel kapcsolatos kitérők

A **7.1—7.3** pontokban az (1.3) TÉTEL bizonyításához szükséges fogalmakat és segédtételeket tárgyalunk.

(7.1.1). A Γ gráf pontjain legyen értelmezve a $\varphi(X)$ egészértékű függvény. Egy f láncot *lefogónak* nevezünk, ha minden X-re $|f, X| \geqq \varphi(X)$.

Legyen a a **7.1** pontban rögzített tetszőleges lefogó lánc. E szerint minden X-re $|a, X| \geqq \varphi(X)$.

A c láncot φ és a-hoz tartozó *lUV-kitérőnek*, röviden lUV-kitérőnek nevezzük, ha (1) c UV-lánc, (2) $a(a+c) \geqq 0$, (3) minden X-re $|a+c, X| \geqq \varphi(X)-(X, U)-(X, V)$.

Értelmezésünk szerint $c=0$ lUU-kitérő (U tetszőleges pont).

A c láncot φ és a-hoz tartozó *zárt l-kitérőnek*, röviden zárt l-kitérőnek nevezzük, ha (1′) c zárt lánc, (2′) $a(a+c) \geqq 0$, (3′) minden X-re $|a+c, X| \geqq \varphi(X)$.

Értelmezésünk szerint a $c=0$ lánc zárt l-kitérő.

A $\bar{c}$ lánc a c lUV-kitérő *elhagyható része,* ha $\bar{c}$ zárt kitérő, $\bar{c} \neq 0$, $\bar{c} \subset c$, $c-\bar{c}$ lUV-kitérő.

Értelmezésünk szerint, ha a c lUV-kitérő egyben zárt kitérő és $c \neq 0$, akkor maga c is elhagyható része c-nek.

Egy lUV-kitérő *primitív,* ha nincs elhagyható része.

Egy c lUV-kitérő egy *kanonikus* UV-bejárásán c-nek egy olyan $\xi=(X_0 e_1 X_1 \ldots X_{n-1} e_n X_n)$ UV-bejárását értjük, amelyhez tartozó $c_{ij}=\sum_{l=i+1}^{j} e_l$ részlánc lX_iX_j-kitérő minden szóbajövő i, j indexpárra. A $c=0$ lUU-kitérőnél a $\xi=0$ vonalat kanonikus UU-bejárásnak tekintjük.

(7.1.2). LEMMA: *Ha a c lUV-kitérő primitív, akkor létezik kanonikus bejárása.*

A bizonyítást a **3.2** LEMMÁra való visszavezetéssel végezzük el.

(I). Legyen c tetszőleges IUV-kitérő. Tekintsük az $a' = a + c$ és $c' = -c$ láncokat. Ekkor $a = a' + c'$, $c = -c'$.

A gráf pontjainak halmazán egy $\varphi'(X)$ függvényt értelmezünk:

$$(*) \qquad \varphi'(X) = \max\{|a', X|,\ |a' + c', X| - (X, U) - (X, V)\}.$$

Mivel $|a', X| \geq 0$, azért minden X-re $\varphi'(X) \geq 0$.

Minden X-re $|a', X| \leq \varphi'(X)$. Másszóval az a' lánc a φ' függvényt tekintve elférő.

(II). c' a φ' és a'-höz tartozó VU-kitérő.

Állításunk bizonyításához vegyük figyelembe, hogy (2. 5. 7) miatt c' VU-lánc. $a'(a' + c') = (a + c)a \geq 0$. $(*)$ alapján minden X-re $|a' + c', X| \leq \varphi'(X) + (X, U) + (X, V)$.

(III). Ha $\tilde{c}' \subset c'$ és $\tilde{c}'$ φ' és a'-höz tartozó ZY-kitérő, akkor $\tilde{c} = -\tilde{c}'$ IYZ-kitérő és $\tilde{c} \subset c$.

Állításunkat az alábbiakban bizonyitjuk: $\tilde{c} \subset c$, mert $\tilde{c}c = \tilde{c}'c' \geq 0$ és $|\tilde{c}| = |\tilde{c}'| \leq |c'| = |c|$. $\tilde{c}$ YZ-lánc. $a(a + c) \geqq 0$ és $\tilde{c} \subset c$-ből (2. 2. 9) alapján következik, hogy $a(a + \tilde{c}) \leqq 0$.

Igazolnunk kell még, hogy minden X-re $|a + \tilde{c}, X| + (X, Y) + (X, Z) \geqq \varphi(X)$.

Ha az $|a, X| \geq \varphi(X)$, ill. a (7. 1. 1) (3)-ból származó $|a' + c', X| \geq \varphi(X)$, ill. $|a', X| + (X, U) + (X, V) \geq \varphi(X)$ egyenlőtlenségeket figyelembe vesszük, akkor elég igazolni, hogy minden X-re az

$$(1) \qquad |a' + c' - \tilde{c}', X| + (X, Y) + (X, Z) \geq |a' + c', X|,$$

$$(2) \qquad |a' + c' - \tilde{c}', X| + (X, Y) + (X, Z) \geq |a', X| + (X, U) + (X, V)$$

egyenlőtlenségek egyike fennáll. $\tilde{c}'$-re tett kikötéseink miatt minden X-re igaz az alábbi egyenlőtlenségek egyike:

$$(1') \qquad |a' + \tilde{c}', X| - (X, Y) - (X, Z) \leq |a', X|,$$

$$(2') \qquad |a' + \tilde{c}', X| - (X, Y) - (X, Z) \leq |a' + c', X| - (X, U) - (X, V).$$

Mivel (2. 4. 11) szerint

$$|a' + c', X| - |a' + c' - \tilde{c}', X| = |a' + \tilde{c}', X| - |a', X|$$

és

$$|a' + c', X| - |a' + \tilde{c}', X| = |a' + c' - \tilde{c}', X| - |a', X|,$$

azért (1')-ből (1), (2')-ből pedig (2) következik.

(IV). Ha $\tilde{c}' \subset c'$ és $\tilde{c}'$ φ'- és a'-höz tartozó zárt kitérő, akkor $\tilde{c} = -\tilde{c}'$ zárt I-kitérő és $\tilde{c} \subset c$.

Állításunk bizonyitását (III) mintájára végezhetjük el, csak (X, Y) és (X, Z) helyére kell mindenütt zérust tenni.

(V). A (III) és (IV) állításokból könnyen belátható, hogy ha $\tilde{c}'$ c'-nek elhagyható része, akkor $\tilde{c} = -\tilde{c}'$ c-nek elhagyható része. Ebből következik az a megállapítás, hogy ha c primitív, akkor c' is az. (III)-ból azt is könnyen igazolhatjuk, hogy ha $\xi' = (X_0' e_1' X_1' \ldots X_{n-1}' e_n' X_n')$ c'-nek egy kanonikus VU-bejárása, akkor az $X_i = X_{n-i}'$ $(i = 0, \ldots, n)$, $e_i = -e_{n+1-i}'$ $(i = 1, \ldots, n)$ jelöléseket használva $\xi = (X_0 e_1 X_1 \ldots X_{n-1} e_n X_n)$ c-nek egy kanonikus UV-bejárása.

Az elmondottak alapján **3. 2**-ből egyszerűen belátható lemmánk állítása.

7. 2. Általánosított kitérők. Csatolási tételek

(7. 2. 1). A **7. §** további részében feltesszük, hogy az a lánc pozitiv, azaz hogy $a \geqq 0$.

Miután a **7. §** további részében szereplő kitérők mind l-kitérők, éspedig mind b-irányú l-kitérők [(3. 1. 8)], a továbbiakban b-irányú l-kitérő helyett röviden kitérőt mondunk.

Az $a \geq 0$ kikötés miatt az

$$a + c \geq 0 \tag{2''}$$

feltétel egyenértékű az $a(a+c) \geqq 0$ egyenlőtlenség és a c lánc b-irányú voltának egyidejű fennállásával. Egy lánc kitérő voltának igazolásához a következőkben mindig a (7. 1. 1) alatti (1) és (3), ill. (1') és (3'), valamint (2'') fennállását bizonyítjuk.

(7. 2. 2). Egyszerűen belátható a következő állítás:

Ha c UV-kitérő, akkor $c = c' + \sum_{i=1}^{n} c_i$, ahol c' primitív UV-kitérő, c_i pedig zárt kitérő $(i = 1, \ldots, n)$.

A d UV-láncot *általánosított UV-kitérőnek* (röviden ált. UV-kitérő) nevezzük, ha $d = c + \sum_{i=1}^{n} c_i$, ahol c UV-kitérő, c_i pedig zárt kitérő $(i = 1, \ldots, n)$.

Egyszerűen belátható az alábbi két állítás:

Ha d ált. UV-kitérő és c_i zárt kitérő $(i = 1, \ldots, n)$, akkor $d' = d + \sum_{i=1}^{n} c_i$ ált. UV-kitérő.

Ha d ált. UV-kitérő, akkor $d = c' + \sum_{i=1}^{n} c_i$, ahol c' primitív UV-kitérő, c_i zárt kitérő $(i = 1, \ldots, n)$.

(7. 2. 3). *Ha c UV-kitérő és az f $U'U$-pályára $f \neq 0$ és $f \geq 0$, akkor $c' = f + c$ $U'V$-kitérő és $|a + c', U'| = \varphi(U') - (U', V) + 1/2$.*

BIZONYÍTÁS: c' $U'V$-lánc. $a+c' = a+f+c \geqq 0$, mert $a+c \geqq 0$ és $f \geqq 0$. Mivel $|a+c, X| \geqq \varphi(X)-(X, U)-(X, V)$ és $|f, X| \geqq (X, U')+(X, U)$, azért

$$|a+c', X| = |a+c, X|+|f, X| \geqq \varphi(X)-(X, V)+(X, U').$$

Az elmondottakból következik állításunk.

(7. 2. 4). *Ha a c UV-kitérőre $|a+c, U| \geqq \varphi(U)-(U, V)+1/2$, továbbá az $e = U'U$ $\tilde{a}$-élre $(c, e) \leqq 0$, akkor $c' = e+c$ $U'V$-kitérő.*

BIZONYÍTÁS: c' $U'V$-lánc. Ha $e(x) = 0$, akkor $a+c \geqq 0$-ból $a(x)+c'(x) \geqq 0$ következik. Ha x alapéle e-nek, akkor $e(x) = -1$, $a(x) = 1$, $c(x) \geqq 0$, tehát ekkor is $a(x)+c'(x) \geqq 0$. E szerint $a+c' \geqq 0$.

Ha $X \neq U, X \neq U'$, akkor $|a+c', X| = |a+c, X| \geqq \varphi(X)-(X, V)$.

$$|a+c', U'| = |a+c, U'|-\frac{1}{2} \geqq \varphi(U')-(U', V)-(U', U').$$

$$|a+c', U| = |a+c, U|-\frac{1}{2} \geqq \varphi(U)-(U, V).$$

(7. 2. 5). *Ha c primitív UV-kitérő és f olyan $U'U$-pálya, melyre $f \neq 0$ és $f \geqq 0$, továbbá ha $e = U''U'$ egy $\tilde{a}$-él, akkor $d = e+f+c$ ált. $U''V$-kitérő.*

BIZONYÍTÁS: Ha $(c, e) \leqq 0$, akkor (7. 2. 3) és (7. 2. 4) alapján igaz a tétel. Tegyük fel, hogy $(c, e) > 0$. Ekkor $c \neq 0$. Legyen $\xi = (X_0 e_1 X_1 \ldots X_{n-1} e_n X_n)$ c-nek egy kanonikus UV-bejárása. Feltevésünk szerint van olyan k index ($1 \leqq k \leqq n$), melyre $e_k = e$. Ekkor $X_{k-1} = U''$, $X_k = U'$.

c_{0k} UU'-kitérő, s így (7. 2. 3) szerint $\bar{c} = f+c_{0k}$ olyan $U'U'$-kitérő, melyre $|a+\bar{c}, U'| \geqq \varphi(U')-(U', U')+1/2 = \varphi(U')$. E szerint $\bar{c}$ zárt kitérő.

c_{k-1n} $U''V$-kitérő. Ennek alapján látható, hogy

$$d = e_k+f+c_{0k-1}+c_{k-1n} = f+c_{0k}+c_{k-1n} = \bar{c}+c_{k-1n}$$

valóban ált. $U''V$-kitérő.

(7. 2. 6). *Ha c primitív UV-kitérő és $|a, U| \geqq \varphi(U)+1$, akkor $|c, U| \leqq 1/2$ és $|a+c, U| \geqq \varphi(U)+1/2$.*

BIZONYÍTÁS: Tekintsük c-nek egy $\xi = (X_0 e_1 X_1 \ldots X_{n-1} e_n X_n)$ kanonikus UV-bejárását. Ha $|c, U| > 1/2$ volna, akkor van olyan k index, melyre $0 < k \leqq n$ és $X_k = U$. Legyen az ilyen k indexek közül a legkisebbik j. Ekkor $X_j = U$ és $|c_{0j}, U| = 1$. Ezért

$$|a+c_{0j}, U| \geqq |a, U|-|c_{0j}, U| \geqq \varphi(U).$$

A c_{0j} UX_j-kitérő tehát zárt kitérő. c_{jn} kitérő volta, valamint $c_{0j} \neq 0$ miatt c_{0j} c-nek elhagyható része. Ez ellentmond c primitív voltának.

Ha $|c, U| \leqq 1/2$, akkor $|a+c, U| \geqq |a, U|-|c, U| \geqq \varphi(U)+1/2$.

(7. 2. 7). *Ha az a lánc zárt, c primitív UV-kitérő,* $|a, U| > \varphi(U)$ *és* $e = U'U$ *ã-él, akkor* $c' = e + c$ *U' V-kitérő.*

BIZONYÍTÁS: Miután a zárt (2. 5. 4) szerint $|a, U|$ egész szám. Ezért $|a, U| > \varphi(U)$-ból $|a, U| \geqq \varphi(U) + 1$ következik. Alkalmazhatjuk tehát a (7. 2. 6) tételt. E szerint $|c, U| \leqq 1/2$.

Igazoljuk, hogy $(c, e) \leqq 0$. Ha ugyanis $(c, e) > 0$ volna, akkor $c \neq 0$ és c-nek egy $\xi = (X_0 e_1 X_1 \ldots X_{n-1} e_n X_n)$ UV-bejárásánál van olyan k index, melyre $e_k = e = U'U$. Mivel $e_1 = UX_1$, azért látható, hogy $|c, U| \geqq 1$, s ez ellentmond $|c, U| \leqq 1/2$-nek.

(7. 2. 6) szerint $|a + c, U| \geqq \varphi(U) + 1/2$, s így a (7. 2. 4) tételből nyerjük (7. 2. 7) igazolását.

7. 3. Elférő pontláncok

(7. 3. 1). Legyen értelmezve a gráf alapéleinek halmazán egy $\psi(x)$ egész értékű függvény.

A p pontlánc *elférő,* ha bármely pozitív zárt g láncra $|p, g| \leqq \psi(g)$.

Miután minden esetben $|p, g| \geqq 0$, elférő pontlánc csak akkor létezhet, ha minden pozitív zárt g láncra $\psi(g) \geqq 0$. Amennyiben ez a feltétel teljesül a $p = 0$ pontlánc elférő, s ekkor a pozitív elférő pontláncok halmaza — ezt P_e-vel jelöljük — nem üres.

A **2. 6** alattiak segítségével könnyen igazolható a következő három állítás.

(7. 3. 2). *Ha bármely pozitív k körre* $\psi(k) \geqq 0$, *akkor minden pozitív zárt g láncra* $\psi(g) \geqq 0$.

(7. 3. 3). *Ha bármely pozitív k körre* $|p, k| \leqq \psi(k)$, *akkor p elférő.*

(7. 3. 4). *Ahhoz, hogy a lefogó pozitív zárt láncok halmaza — ezt* G_l*-lel jelöljük — ne legyen üres, szükséges és elegendő, hogy minden pozitív értékű ponton át haladjon pozitív (nem azonosan zérus) kör.*

(7. 3. 5). *Ha* $g \in G_l$ *és* $p \in P_e$, *akkor* $\psi(g) \geqq \varphi(p)$.

BIZONYÍTÁS: Mivel $p \geqq 0$, azért $|g, X| \geqq \varphi(X)$-ből $p(X)|g, X| \geqq p(X)\varphi(X)$ következik. Ennélfogva

$$\psi(g) \geqq |p, g| = \Sigma p(X)|g, X| \geqq \Sigma p(X)\varphi(X) = \varphi(p).$$

(7. 3. 5)-ből következik az alábbi állítás:

(7. 3. 6). *Feltéve, hogy* G_l *és* P_e *nem üres*

$$\min_{g \in G_l} \psi(g) \geqq \max_{p \in P_e} \varphi(p).$$

A **7. 4** pontban az alábbi tételt igazoljuk:

(7. 3. 7). TÉTEL: *Feltéve, hogy minden pozitív zárt lánc értéke nem negatív, valamint, hogy G_l nem üres*

$$\min_{g \in G_l} \psi(g) = \max_{p \in P_v} \varphi(p).$$

7. 4. A (7. 3. 7) tétel bizonyítása

(7. 4. 1). A **7. 4** pontban feltesszük, hogy minden pozitív zárt g láncra $\psi(g) \geq 0$, valamint, hogy van pozitív zárt lefogó lánc. Ekkor létezik a

$$\min_{g \in G_l} \psi(g) = \mu$$

érték.

A **7. 4** és **7. 5** pontokban jelentsen a egy olyan pozitív zárt lefogó láncot, melyre $\psi(a) = \mu$.

A (7. 3. 7) TÉTELt bebizonyítjuk, ha kimutatjuk egy olyan elférő q pontlánc létezését, melyre $\varphi(q) = \psi(a)$. Egy ilyen q pontláncot az a lánchoz tartozó kitérők segítségével szerkesztünk meg.

(7. 4. 2). *Ha c zárt kitérő, akkor $\psi(c) \geq 0$.*

BIZONYÍTÁS: Az a lánc és a kitérők értelmezése folytán $a + c \in G_l$. Ezért $\psi(a) + \psi(c) = \psi(a + c) \geq \mu$, tehát $\psi(c) \geq 0$.

A (7. 2. 2) alattiakból és (7. 4. 2)-ből következik az alábbi állítás:

(7. 4. 3). *Ha d ált. UV-kitérő, akkor létezik olyan c primitív UV-kitérő, melyre $\psi(c) \leq \psi(d)$.*

(7. 4. 4). *Az általánosított kitérőkhöz tartozó értékek halmaza alulról korlátos.*

BIZONYÍTÁS: (4. 2. 8) jelöléseit megtartva könnyen belátható, hogy a gráf bármely f ívére (tehát körére is) $|\psi(f)| \leq v_\Gamma \psi_m$.

Bevezetjük a következő jelölést: $\max\limits_{x \in \Psi} a(x) = \alpha$.

Legyen c tetszőleges UV-kitérő. (2. 5. 20) és (2. 5. 19) szerint $c = f + \sum\limits_{i=1}^{n} k_i$, ahol f UV-ív, k_i kör, és $f \subset c$, $k_i \subset c$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Ha k_i pozitív, akkor $\psi(k_i) \geq 0$. Ha k_i nem pozitív, azaz van olyan x, melyre $k_i(x) < 0$, akkor ugyanezen x-re $c(x) < 0$. $a + c \geq 0$-ból egy ilyen x-re $a(x) > 0$ és $|c(x)| \leq |a(x)| \leq \alpha$ következik. Ezekből egyrészt látható, hogy ugyanazon az x alapélen legfeljebb α számú k_i kör vehet fel negatív értéket, másrészt megállapítható, hogy azon x-ek száma, amelyeken valamelyik k_i

negatív, kisebb vagy egyenlő mint a éleinek száma $[r(a)]$. Kimondhatjuk tehát, hogy a nem pozitív k_i körök száma kisebb vagy egyenlő mint $\alpha r(a)$.

A fentiek alapján

$$\psi(c) = \psi(f) + \sum_{i=1}^{n} \psi(k_i) \geqq - r_r \psi_m - \alpha r(a) r_r \psi_m = -\beta.$$

Ha d tetszőleges ált. UV-kitérő, akkor (7. 4. 3) szerint van olyan c UV-kitérő, melyre $\psi(d) \geqq \psi(c)$. Ennélfogva $\psi(d) \geqq -\beta$.

(7. 4. 5). Legyen X egy tetszőleges a-pont és jelöljük $H(X)$-szel valamennyi ált. XV-kitérő halmazát (V tetszőleges). A $c = 0$ XX-kitérőre tekintettel $H(X)$ nem üres. Legyen

$$s(X) = \min_{d \in H(X)} \psi(d).$$

(7. 4. 4) szerint $s(X)$ véges érték. A $c = 0$ kitérőre való tekintettel $s(X) \leqq 0$.

(7. 4. 3)-ból belátható az alábbi állítás:

(7. 4. 6). *Ha X a-pont, úgy létezik olyan c primitív XV-kitevő, melyre $\psi(c) = s(X)$.*

(7. 4. 7). *Ha X és Y a-pontok, és f olyan $X'Y$-pálya, melyre $f \neq 0$ és $f \geqq 0$, továbbá az f' XX'-pálya vagy zérussal, vagy pedig egy $\bar{a}$-éllel azonos, akkor*

$$s(X) \leqq \psi(f') + \psi(f) + s(Y).$$

BIZONYÍTÁS: Van olyan c primitív YV-kitérő, melyre $\psi(c) = s(Y)$. (7. 2. 3) és (7. 2. 5) szerint, ekkor $d = f' + f + c$ ált. XV-kitérő. Ezért $\psi(f') + \psi(f) + \psi(c) = \psi(d) \geqq s(X)$.

A (7. 4. 7) TÉTELből (4. 3. 4) mintájára könnyen belátható a következő állítás.

(7. 4. 8). *Ha $e = XY$ és $e' = XY'$ két a-él, akkor*

$$s(Y) + \psi(e) = s(Y') + \psi(e').$$

(7. 4. 9). A $q(X)$ pontláncot a következőképpen értelmezzük:

(1). Ha X a-pont, akkor (2. 5. 6) szerint van $e = XY$ a-él. Ekkor legyen

$$q(X) = s(Y) - s(X) + \psi(e).$$

(7. 4. 8) szerint $q(X)$ nem függ az e él megválasztásától.

(2). Ha X b-pont, azaz ha $|a, X| = 0$ (ebben az esetben csak $q(X) \leqq 0$ állhat fenn), akkor legyen $q(X) = 0$.

(7. 4. 7)-ből (4. 3. 7) mintájára könnyen igazolható, hogy *a q pontlánc pozitív.*

(7. 4. 9)-ből könnyen belátható az alábbi állítás:

(7. 4. 10). *Legyen az f UV-út egy a-pálya és legyen $\xi = (X_0 e_1 X_1 \ldots \ldots X_{n-1} e_n X_n)$ f-nek UV-bejárása, végül legyen $e = VW$ egy a-él, akkor*

$$\sum_{i=0}^{n} q(X_i) = s(W) - s(U) + \psi(f) + \psi(e).$$

Megjegyzés: A tétel állítása az $f = 0$ esetben is igaz, ha az $f = 0$ lánc egyetlen pontjának az $X_0 = U = V$ a-pontot tekintjük.

(7. 4. 10)-ből (4. 3. 9) mintájára belátható a következő állítás:

(7. 4. 11). *Ha a k kör a-pálya, akkor $|q, k| = \psi(k)$.*

(7. 4. 12). *A q pontlánc elférő.*

BIZONYÍTÁS: (7. 3. 3)-ra való tekintettel elég megmutatni, hogy ha k tetszőleges pozitív kör, akkor $|q, k| \leq \psi(k)$.

Legyen k tetszőleges pozitív kör. (7. 4. 1) szerint $\psi(k) \geq 0$.

(I). Ha k nem tartalmaz a-pontot, akkor minden k-hoz tartozó X pontra $q(X) = 0$, s így $|q, k| = \Sigma q(X) |k, X| = 0 \leq \psi(k)$.

Ha k a-pálya, akkor (7. 4. 11) szerint igaz a bizonyítandó állítás.

(II). Az (I) alatti eseteket kizárva feltehetjük, hogy $k \neq 0$, k tartalmaz a-pontot, és k vagy csupa b-élből áll, vagy tartalmaz a-élt is és b-élt is.

A továbbiakban pontosan a (4. 3. 10) (II) alattiak mintájára járhatunk el, egészen az a_i pontjaihoz tartozó $q(X)$ értékek összegének megadásáig. Most

$$q_i = s(C_i) - s(A_i) + \psi(a_i) + \psi(e_i').$$

Változatlanul fennáll a $|q, k| = \Sigma q_i$ egyenlőség. A $|q, k| \leq \psi(k)$ egyenlőtlenség igazolásához a

$$(*) \qquad \Sigma s(C_i) \leq -\Sigma \psi(e_i') + \Sigma \psi(b_i) + \Sigma s(A_i)$$

egyenlőtlenséget kell bizonyítanunk. Hogy ezt beláthassuk, vegyük tekintetbe, hogy $-e_i' = C_i A_i$ egy $\tilde{a}$-él, továbbá, hogy a b_i $A_i' A_{i+1}$-pályára $b_i \neq 0$ és $b_i \geq 0$. Ezért (7. 4. 7) szerint

$$s(C_i) \leq -\psi(e_i') + \psi(b_i) + s(A_{i+1}).$$

Ha ezeket az egyenlőtlenségeket $i = 1$-től m-ig összegezzük, a $(*)$ egyenlőtlenséghez jutunk. Ezzel (7. 4. 12) bizonyítását befejeztük.

(7. 4. 6) és (7. 2. 7)-ből (4. 3. 11) mintájára igazolható az alábbi állítás:

(7. 4. 13). *Ha X a-pont és $|a, X| > \varphi(X)$, akkor $q(X) = 0$.* Ebből következik:

(7. 4. 14). *Ha X a-pont és $q(X) > 0$, akkor $|a, X| = \varphi(X)$.*

(7. 4. 14) és (7. 4. 11)-ből (4. 3. 13) mintájára igazolható, hogy

$$\varphi(q) = \psi(a).$$

(7. 4. 1) szerint ezzel befejeztük a (7. 3. 7) TÉTEL bizonyítását.

7. 5. Lefogó körláncok

Ebben a pontban az **5. §**-ban foglaltakhoz hasonlóan a (7. 3. 7) TÉTELnek körláncokra, ill. körrendszerekre vonatkozó megfelelőjét bizonyítjuk.

(7. 5. 1). A z körláncot *lefogónak* mondjuk, ha minden X-re $|z, X| \geq \varphi(X)$.

A lefogó körláncok halmazát A_l-lel jelöljük. Nyilvánvaló, hogy A_l és G_l egyidejűleg üresek, ill, nem üresek.

(5. 2) mintájára igazolható, hogy ha A_l és G_l nem üresek, akkor

$$\min_{z \in A_l} \psi(z) = \min_{g \in G_l} \psi(g).$$

Ebből, valamint (7. 3. 2), (7. 3. 3), (7. 3. 4) és (7. 3. 7)-ből következik az alábbi tétel:

(7. 5. 2). TÉTEL: *Ha minden pozitív értékű ponton át halad pozitív nem azonosan zérus kör és minden pozitív k körre* $\psi(k) > 0$, *akkor*

$$\min_{z \in A_l} \psi(z) = \max_{p \in P_r} \varphi(p).$$

Az (5. 4) alattiak mintájára belátható, hogy a (7. 5. 2) TÉTEL lényegében azonos a körrendszerekre kimondott (1. 3) TÉTELlel.

8. §.

8. 1. Véges láncok

A **8. §**-ban végtelen gráfokra terjesztjük ki tételeinket. A végtelen gráfok értelmezése a **2. 1** alatti definíciótól csak annyiban különbözik, hogy a Φ és Ψ halmazok végtelenek is lehetnek.

Pontláncon, élláncon és körláncon végtelen gráfok esetén is csak *véges láncot* értünk, azaz olyan láncot, mely csak véges sok ponthoz, alapélhez, ill. körhöz rendel 0-tól különböző értéket. E megállapodás következtében a láncokkal kapcsolatos $\sum_x$, $\sum_X$ és $\sum_k$ jelek valójában véges összegeket jelölnek, és a **2. §** és **3. §** értelmezései és állításai végtelen gráfok esetén is érvényben maradnak.

8. 2. Végtelen gráfok elférő élláncaira és körláncaira vonatkozó tételek

A **4. 1** pont értelmezései és állításai a (4. 1. 13), (4. 1. 15) és (4. 1. 16) tételek kivételével érvényesek végtelen gráfokra is. Az említett három tétel további kikötések nélkül általában nem érvényes. E pont további részében a (4. 1. 16) TÉTELnek megfelelő alábbi tételt bizonyítjuk:

(8. 2. 1). TÉTEL: *Ha* $\varphi \geqq 0$ *és csak véges sok* 0*-pont van, továbbá, ha* G_t *láncaihoz és a* 0*-pontot tartalmazó pozitív körökhöz tartozó értékek halmaza felülről korlátos, akkor* P_t *nem üres és*

$$\max_{g \in G_e} \psi(g) = \min_{p \in P_t} \varphi(p).$$

A bizonyítást a **4. 2** és **4. 3** pontok lépéseit követve végezzük el. Feltételezve a G_e-hez tartozó g láncok $\psi(g)$ értékeinek korlátosságát, megállapíthatjuk, hogy a **4. 2** pont értelmezései és tételei a (4. 2. 8) tétel kivételével változatlanul érvényben tarthatók (kitérőn φ és a-hoz tartozó b-irányú kitérőt értünk). A (4. 2. 8) tételt a (8. 2. 6) tétellel helyettesítjük. Ennek igazolásához egy fogalmat és néhány tételt előrebocsátunk.

(8. 2. 2). Az X pontból az Y pontot *elérhetőnek* mondjuk, ha létezik egy pozitív 0-pontmentes XY-ív.

Értelmezésünk szerint X-ből X elérhető.

2. 6 alapján látható, hogy ha létezik egy pozitív 0-pontmentes XY-pálya, akkor X-ből Y elérhető. Ebből a megállapításból egyszerűen következik, hogy ha X-ből Y és Y-ból Z elérhető, akkor X-ből Z is elérhető.

(8. 2. 3). *Ha V-ből U elérhető, akkor létezik olyan $\psi(U, V)$ korlát, hogy minden f pozitív elférő UV-ívre (amennyiben ilyen létezik) $\psi(f) \leqq \psi(U, V)$.*

BIZONYÍTÁS: Legyen f egy tetszőleges pozitív elférő UV-ív és legyen $f \neq 0$. Létezik egy f_0 pozitív 0-pontmentes VU-ív. Az $U = V$ esetben legyen $f_0 = 0$, és ekkor tekintsük U-t f_0 pontjának.

$g = f + f_0 \neq 0$ egy zárt pozitív lánc. **2. 6** szerint $g = \sum_{i=1}^{n}{}' k_i$, ahol $n \geqq 1$, k_i pozitív kör, és $0 \neq k_i \subset g$ $(i = 1, \ldots, n)$. Mivel f elférő, nem tartalmazhat 0-pontot, s így g, és ezzel együtt a k_i körök sem tartalmaznak 0-pontot. Ebből következik, hogy a k_i körök mind elférők, s így $\psi(k_i) \leqq \mu$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Bármilyen X pontra $2 \geqq |f, X| + |f_0, X| \geqq |g, X| = \Sigma' |k_i, X|$. Ezért egy X-ponton át legfeljebb két különböző sorszámú k_i kör haladhat keresztül.

Bármelyik k_i tartalmaz f_0-hoz tartozó pontot. Ellenkező esetben ugyanis $k_i \subset f$. Ez azonban csak az $U = V$ esetben állhat fenn, és pedig csak olyan módon, hogy $k_i = f$. Azonban f tartalmazza az f_0-hoz tartozó U pontot.

Ha f_0 pontjainak számát $\lambda(f_0)$-lal jelöljük, akkor az előzőek alapján megállapíthatjuk, hogy $n \leqq 2\lambda(f_0)$. Ebből $\psi(g) = \sum_{i=1}^{n} \psi(k_i) \leqq 2\lambda(f_0)\mu$ és $\psi(f) = \psi(g) - \psi(f_0) \leqq 2\lambda(f_0)\mu - \psi(f_0)$.

Legyen

$$\psi(U, V) = \max\{2\lambda(f_0)\mu - \psi(f_0), 0\}.$$

Ekkor az $f = 0$ esetben is érvényes a $\psi(f) \leqq \psi(U, V)$ egyenlőtlenség.

(8. 2. 4). *Ha U és V a-pontok és V-ből U elérhető, akkor bármely olyan f UV-pályára, amely h-pálya $\psi(f) \leqq \psi(U, V)$.*

Bizonyítás: Ha $f = 0$, vagy ha f egy a-él, akkor (8. 2. 3) szerint igaz állításunk. Ha $f \neq 0$ és f nem a-él, akkor csupa pozitív b-élből áll és belső pontjai b-pontok. Ekkor **2. 6** szerint $f = f' + \sum_{i=1}^{n} k_i$, ahol $0 \neq f' \subset f$, $k_i \subset f$, f' pozitív UV-ív, k_i pozitív kör $(i = 1, \ldots, n)$.

f elférő voltából következik, hogy f' és k_i is elférők $(i = 1, \ldots, n)$.

Miután f h-pálya, $|f, U| \leqq 1$. Ebből és $|f', U| \geqq 1/2$-ből $|k_i, U| = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ következik. Ugyanígy látható be, hogy $|k_i, V| = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$. A k_i körök tehát nem tartalmazhatnak a-pontot, és így elférő voltukból következik, hogy valamennyien zárt kitérők. Ekkor (4. 2. 5) szerint $\psi(k_i) < 0$ $(i = 1, \ldots, n)$.

f'-re alkalmazható a (8. 2. 3) tétel. E szerint

$$\psi(f) = \psi(f') + \sum_{i=1}^{n} \psi(k_i) \leqq \psi(f') \leqq \psi(U, V).$$

(8. 2. 4)-ből és az a-pontok számának véges voltából következik az alábbi állítás:

(8. 2. 5). *Ha $a \neq 0$, akkor létezik egy olyan ψ_a érték, hogy ha U és V tetszőleges olyan a-pontok, hogy V-ből U elérhető és f olyan UV-pálya, amely h-pálya, akkor $\psi(f) \leqq \psi_a$.*

(8. 2. 6). *Ha $a \neq 0$, akkor mindazon általánosított UV-kitérők értékeinek halmaza felülről korlátos, amely kitérőknél U és V a-pontok és V-ből U elérhető.*

Bizonyítás: (4. 2. 7) miatt elég a tételt primitív UV-kitérőkre bizonyítani. Legyenek U és V a-pontok, f_0 egy pozitív 0-pontmentes VU-ív, c egy primitív UV-kitérő és $\xi = (X_0 e_1 X_1 \ldots X_{n-1} e_n X_n)$ c-nek egy kanonikus UV-bejárása. Feltehető, hogy $c \neq 0$, tehát $n \geqq 1$.

(I). Igazoljuk, hogy ha $0 \leqq j < k \leqq n$, akkor X_k-ból X_j elérhető. E célból értelmezzük az f_i $X_{i-1}X_i$-útat a következőképpen: Ha e_i a-él vagy b-él, akkor legyen $f_i = e_i$. Ha e_i egy $\tilde{a}$-él, akkor legyen f_i egy olyan $X_{i-1}X_i$-út, melyre $f_i \subset a$. ((2. 5. 21) szerint ilyen út létezik.) Valamennyi $f_i \geqq 0$, és az $f_{\varrho\sigma} = \sum_{i=\varrho+1}^{\sigma} f_i$ $X_\varrho X_\sigma$-pálya is pozitív ($\varrho < \sigma$, $\varrho, \sigma = 1, \ldots, n$).

a és $a+c$ elférő láncok, s így nem tartalmaznak 0-pontot. Ugyanez áll akkor c-re, valamint az f_i és $f_{\varrho\sigma}$ pályákra is. Az $\tilde{f} = f_{kn} + f_0 + f_{0j}$ lánc tehát pozitív 0-pontmentes X_kX_j-pálya. Ennélfogva X_k-ból X_j valóban elérhető.

(II). Legyenek a $0, 1, \ldots, n$ sorszámok közül azok, amelyekhez tartozó X_i pontok a-pontok, rendre $i_0, i_1, \ldots, i_m$.

$m > 1, 0 = i_0 < \cdots < i_m = n$. Vezessük be az $X_{i_j} = X_j'$ és a $c_{i_{j-1}i_j} = c_j$ rövidítéseket. Ekkor $\sum_{j=1}^{m} c_j = c$, $c_j \subset c$.

(I)-ből következik, hogy X_j'-ből X_{j-1}' elérhető, ξ kanonikus voltából pedig következik, hogy a c_j pályák vagy h-pályák, vagy $\tilde{a}$-élek.

a alapéleinek Ψ_a halmaza véges és nem üres. Ezért létezik a $\max_{x \in \Psi_a} |\psi(x)| = \psi_a'$ érték is. (8. 2. 5)-re való tekintettel felírhatjuk tehát, hogy

$$(*) \qquad \psi(c_j) \leqq \psi_a + \psi_a'.$$

(III). (3. 1. 3) szerint c-nek egy tetszőleges, X-szel jelölt a-ponthoz illeszkedő éleinek száma

$$\nu_X(c) = 2|c, X| \leqq 4\varphi(X) + 2 \leqq 4\varphi_a + 2,$$

ahol φ_a az a-lánc pontjaihoz tartozó φ értékek maximuma.

Egy c_j pálya éleinek és az a-pontoknak illeszkedését vizsgálva, minden j-re pontosan két illeszkedést állapíthatunk meg. Ezért, ha a pontjainak számát $\lambda(a)$-val jelöljük

$$2m \leqq \lambda(a)(4\varphi_a + 2), \quad \text{azaz} \quad m \leqq \lambda(a)(2\varphi_a + 1).$$

Ebből és $(*)$-ból

$$\psi(c) = \sum_{j=1}^{m} \psi(c_j) \leqq \lambda(a)(2\varphi_a + 1)(\psi_a + \psi_a').$$

(8. 2. 7). Legyen X tetszőleges a-pont. (4. 3. 1)-től eltérően most $H(X)$-en azon ált. UX-kitérők halmazát értjük, amelyeknél U egy tetszőleges X-ből elérhető a-pont. A $c = 0$ XX-kitérőre tekintettel most is megállapíthatjuk, hogy $H(X)$ nem üres. Legyen most

$$s(X) = \max_{d \in H(X)} \psi(d).$$

(4. 3. 2) és (4. 3. 3) helyett a következő egyszerűen belátható állításokat szerepeltetjük:

(8. 2. 8). *Ha X a-pont, akkor létezik olyan c primitív UX-kitérő, melynél U egy X-ből elérhető a-pont és $\psi(c) = s(X)$.*

(8. 2. 9). *Ha X és Y a-pontok és Y-ból X elérhető, továbbá, ha az f XY-lánc alternáló, akkor* $s(X)+\psi(f)\leqq s(Y)$.

(4. 3. 4) változatlanul érvényes. Ezt beláthatjuk, ha figyelembe vesszük, hogy ha az $e=UV$ él akár a-él, akár $\bar{a}$-él, U-ból V és V-ből U elérhető [(2. 5. 21)].

A (4. 3. 5) alatt értelmezett ψ_0 létezése abból a feltevésünkből következik, hogy a 0-pontot tartalmazó pozitív körök értékeinek halmaza felülről korlátos.

A (4. 3. 6) értelmezést változatlanul fenntartjuk. Az értelmezett q lánc végessége az a lánc, valamint a 0-pontok számának véges voltából következik.

A (4. 3. 7) tétel érvényességét (8. 2. 9) alapján könnyen beláthatjuk.

(4. 3. 8) és (4. 3. 9) bizonyításukkal együtt változatlanul fenntarthatók.

A (4. 3. 10) tétel is érvényes. A bizonyításhoz most csak azt kell hozzáfűzni, hogy a C_i pontok is a-pontok, és hogy A_{i+1}-ből C_i elérhető. Ez utóbbi megállapítás így látható be: k pozitív 0-pontmentes kör, és így $k-b_i$ egy pozitív 0-pontmentes $A_{i+1}A'_i$-út. $e'_i=A'_iC_i$ a-él. Tehát A_{i+1}-ből A'_i, A'_i-ből C_i elérhető.

A (4. 3. 11) tétel is változatlanul érvényes. A bizonyításhoz csak azt kell hozzáfűzni, hogy U X-ből és Y-ból elérhető a-pont. Az Y-ból való elérhetőség abból következik, hogy U X-ből, és (2. 5. 21) szerint X Y-ból elérhető.

(4. 3. 12) és (4. 3. 13) bizonyításukkal együtt változatlanul érvényesek.

Ezzel beláttuk a (8. 2. 1) TÉTEL helyességét.

A (8. 2. 1) TÉTELből az **5. §**-ban közölt módon belátható az alábbi tétel:

(8. 2. 10). TÉTEL: *Ha $\varphi\geqq 0$ és a 0-pontok száma véges, továbbá ha az elférő körláncokhoz és a 0-pontot tartalmazó pozitív körökhöz tartozó értékek halmaza felülről korlátos, akkor P_l nem üres és*

$$\max_{x\in A_r}\psi(x)=\min_{p\in P_l}\varphi(p).$$

(8. 2. 11). A bevezetés és az (5. 4) pont mintájára a (8. 2. 10) tétel végtelen gráfok véges körrendszereire is megfogalmazható.

A **6. §** eljárásával a (6. 1. 2) tétel az alábbi módosítással terjeszthető ki végtelen gráfokra:

(8. 2. 12). TÉTEL: *Ha $\varphi\geqq 0$ és a 0-pontok száma véges, továbbá $\tilde{G}_r$ láncaihoz és a 0-pontot tartalmazó körökhöz tartozó értékek halmaza felülről korlátos, akkor $\tilde{P}_l$ nem üres és*

$$\max_{g\in\tilde{G}_r}\psi(g)=\min_{p\in\tilde{P}_l}\varphi(p).$$

Hasonló módosításokkal vihetők át az $\acute{a}$-körláncokra és $\acute{a}$-körrendszerekre vonatkozó (6. 2. 2) és (6. 2. 4) TÉTELek is végtelen gráfokra.

8. 3. Végtelen gráfok lefogó él- és körláncaira vonatkozó tételek

(8. 3. 1). *A* (7. 3. 7) TÉTEL *érvényes végtelen gráfokra.*

A **7.** §-beli bizonyítást a **8. 2** alattiakhoz hasonlóan kell módositani. A (7. 4. 3) tételig bezárólag (7. 3. 4) kivételével valamennyi tétel bizonyításával együtt érvényben tartható. A (7. 4. 4) tételt a (8. 3. 3) tétellel helyettesítjük. Ennek bizonyítása végett előrebocsátjuk a következőket:

A **8. 3** pontban az X pontból az Y pontot akkor mondjuk *elérhetőnek*, ha létezik egy pozitív XY-pálya. Itt is igaz, hogy X-ből X elérhető, valamint hogy ha X-ből Y és Y-ból Z elérhető, akkor X-ből Z is elérhető.

(8. 3. 2). *Ha U és V olyan a-pontok, hogy V-ből U elérhető, akkor van $f \neq 0$ pozitív VU-pálya, és bármely d ált. UV-kitérőre* (**8. 3**-ban kitérőn mindig b-irányú l-kitérőt értünk) $\psi(d) \geqq -\psi(f)$.

BIZONYÍTÁS: (I). Ha $V \neq U$, akkor f létezése annak következménye, hogy V-ből U elérhető. Ha $V = U$, akkor **2. 6** szerint $a = \sum_{i=1}^{n} k_i$, k_i pozitív kör, $0 \neq k_i \subset a$ $(i = 1, \ldots, n)$. (Ha U a-pont, akkor $a \neq 0$!) A k_i körök közül valamelyik tartalmazza U-t. Ha k_j az, akkor $f = k_j$ egy pozitív, nem azonosan zérus UU-pálya.

(II). (7. 4. 3) következtében ált. kitérők helyett elegendő kitérőkkel foglalkozni. Legyen c egy UV-kitérő. Igazoljuk, hogy $\tilde{c} = c + f$ zárt kitérő. $\tilde{c}$ zárt lánc. $a + c \geqq 0$ és $f \geqq 0$-ból $a + \tilde{c} \geqq 0$. Minden X-re $|a + c, X| \geqq \varphi(X) - |X, U| - |X, V|$, és $f \neq 0$ miatt $|f, X| \geqq |X, U| + |X, V|$. Ezért minden X-re $|a + \tilde{c}, X| = |a + c, X| + |f, X| \geqq \varphi(X)$.

Ezután (7. 4. 2) alapján megállapíthatjuk, hogy $\psi(c) + \psi(f) = \psi(\tilde{c}) \geqq 0$. Tehát valóban $\psi(c) \geqq -\psi(f)$.

(8. 3. 2)-ből az a lánc véges voltára való tekintettel belátható a következő tétel:

(8. 3. 3). *Ha $a \neq 0$, akkor mindazon ált. UV-kitérők értékeinek halmaza alulról korlátos, mely kitérőknél U és V a-pontok és V-ből U elérhető.*

Ha (7. 4. 5)-től kezdve ugyanolyan természetű változtatásokat hajtunk végre az értelmezéseken és tételeken, mint amilyeneket (8. 2. 7)-től kezdve elvégeztünk, akkor belátjuk, hogy a (7. 3. 7) TÉTEL valóban érvényes végtelen gráfokra.

(8. 3. 4). Miután (7. 3. 4) általában nem érvényes, könnyen belátható, hogy a körláncokra vonatkozó (7. 5. 2) TÉTEL azzal a változtatással érvényes végtelen gráfokra, amely szerint a pozitív értékű pontokon áthaladó pozitív nem azonosan zérus körök létezése helyett Δ nem üres voltát kötjük ki.

Az elmondottak alapján azt is megállapíthatjuk, hogy *az* (1. 3) TÉTEL *változatlan fogalmazásban érvényes végtelen gráfokra.*

9. §.

Ebben a paragrafusban, az előzően bizonyított tételeket speciális véges gráfokra, ill. speciális φ és ψ függvényekre alkalmazva további maximum—minimum tételeket vezetünk le. A tételeket, kettő kivételével, nem láncokra, hanem az (1.2) és (1.3) TÉTELekhez hasonlóan rendszerekre mondjuk ki. Semmi akadálya nincs azonban, hogy megállapításainkat láncokra fogalmazzuk át. Megjegyezzük, hogy rendszerekkel kapcsolatban alapél helyett élt mondunk. A tételeket, további kikötések csatolása révén végtelen gráfokra is kiterjeszthetjük.

9.1. Az (1.2) és (1.3) TÉTEL két különböző irányú általánosítása

(9.1.1). Az első általánosítást oly módon hajtjuk végre, hogy az előző paragrafusokban szereplő, a gráf pontjain értelmezett φ függvény értelmét a gráf éleire is kiterjesztjük. A gráf pontjain és élein értelmezett egész értékű φ esetében egy $\varkappa = (k_1, \ldots, k_n)$ körrendszert akkor nevezünk *elférőnek*, ha bármely X pontot, ill. x élt is vizsgálunk a $k_1, \ldots, k_n$ körök közül az X-en, ill. az x-en átmenők száma kisebb vagy egyenlő $\varphi(X)$-, ill. $\varphi(x)$-nél. Hasonló értelemben definiáljuk most a *lefogó* körrendszer fogalmát is.

A pontrendszerek helyett most *pont-élrendszereket* szerepeltetünk. A $\tau = (X_1, \ldots, X_m, x_1, \ldots, x_n)$ pont-élrendszerből hiányozhatnak a pontok vagy az élek és τ üres is lehet. A felírt τ rendszer értéke: $\varphi(\tau) = \sum_{i=1}^{m} \varphi(X_i) + \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i)$. (Ha pontok, ill. élek nem szerepelnek, akkor az első, ill. a második összeg elmarad. Az üres τ rendszerre $\varphi(\tau) = 0$.)

Egy τ pont-élrendszert *elférőnek*, ill. *lefogónak* mondunk, ha bármely *alapirányú* k kört is vizsgálunk a τ-ban felsorolt elemek közül a k körön elhelyezkedők száma kisebb vagy egyenlő, ill. nagyobb vagy egyenlő $\psi(k)$-nál.

Ha az elférő, ill. a lefogó körrendszerek halmazát továbbra is A_e és A_l-lel, az elférő és lefogó pont-élrendszerek halmazát R_e és R_l-lel jelöljük, akkor érvényesek a következő tételek:

(9.1.2). *Ha* $\varphi \geqq 0$, *akkor*

$$\max_{\varkappa \in A_e} \psi(\varkappa) = \min_{\tau \in R_l} \varphi(\tau).$$

(9.1.3). *Ha minden alapirányú k körre $\psi(k) \geqq 0$, és A_l nem üres, akkor*

$$\min_{\varkappa \in A_l} \psi(\varkappa) = \max_{\tau \in R_e} \varphi(\tau).$$

E tételek bizonyítását az (1.2) és (1.3) TÉTELekből kiindulva, úgy hajthatjuk végre, hogy az eredeti Γ gráfból alkalmas módon egy új Γ' gráfot hozunk létre. Eljárásunk röviden kifejezve a következő: Γ minden élét egy-egy új szögpont felvételével „megfelezzük". Egy él két darabjának irányítása az eredeti él irányításának feleljen meg; a darabokhoz rendelt ψ értékek a teljes él ψ értékének felével legyenek egyenlők. A Γ' gráfban a φ függvényt csak a szögpontokban értelmezzük, éspedig úgy, hogy a régi szögpontokban változatlanul meghagyjuk az eredeti φ értékeket, az új, élfelező pontokhoz pedig mindig a megfelezett él φ értékét rendeljük. Könnyen ellenőrizhető, hogy a Γ'-re kimondott (1. 2) és (1. 3) TÉTELek azonosak a Γ-ra vonatkozó (9. 1. 2) és (9. 1. 3) TÉTELekkel.

A (9. 1. 2) és (9. 1. 3) TÉTELekből egyszerűen juthatunk azokhoz a módosított tételekhez, amelyeknél a φ függvény csak az éleken van értelmezve. Röviden kifejezve azt kell tennünk, hogy a pontokhoz tartozó φ értékek mindegyikét a (9. 1. 2) TÉTELnél ∞-re, a (9. 1. 3) TÉTELnél pedig 0-ra változtatjuk.

Az (1. 2) és (1. 3) TÉTELek általánosításához hasonlóan általánosítható a (6. 2. 4) TÉTEL is.

(9. 1. 4). A másik irányú általánosításnál a ψ függvény értelmét a gráf szögpontjaira terjesztjük ki. A szögpontokon és éleken értelmezett egész értékű ψ függvény esetében egy *alapirányú k* kör *$\psi(k)$ értékén* az éleihez és pontjaihoz rendelt ψ értékek összegét értjük. Egy körrendszer értéke a rendszerhez tartozó körök értékeinek összege. A körrendszerek és pontrendszerek elférő és lefogó voltának (1. 1) alatti értelmezését formálisan megtartjuk, természetesen $\psi(\varkappa)$-nak az előbb adott módosított értelmet tulajdonítjuk. Ezekután megállapítjuk, hogy az (1. 2) és (1. 3) TÉTELek változatlan alakban érvényesek az újfajta ψ függvények esetében is.

A szóbanforgó általánosításokat oly módon vezethetjük vissza az (1. 2) és (1. 3) TÉTELekre, hogy FORD és FULKERSON egy gondolatát felhasználva a Γ gráfhoz egy új Γ' gráfot értelmezünk (vesd öszsze [5] 212. oldallal). Γ' értelmezését röviden így írhatjuk le: Γ minden pontját „kettéhasítjuk", és bármely pontból származó két pont egyikéhez az eredeti pontba befutó, másikához pedig az eredetiből kifutó éleket illesztjük, ezenkívül az előzőleg említett pontból a másikba egy új élt vezetünk. Pontosabban Γ bármelyik X pontjához egy X^- és egy X^+ pontot, és egy új z_X élt veszünk fel. Γ' pontjai az X^- és X^+ pontok, élei pedig Γ valamennyi x éle, valamint az új z_X élek. A pontok és élek illeszkedését így határozzuk meg: Ha $(x, X) = 0$, akkor $(x, X^-) = 0$, $(x, X^+) = 0$. Ha $(x, X) = 1/2$, akkor $(x, X^-) = 1/2$, $(x, X^+) = 0$. Ha $(x, X) = -1/2$, akkor $(x, X^-) = 0$, $(x, X^+) = -1/2$. Végül $(z_X, X^-) = -1/2$, $(z_X, X^+) = 1/2$.

A Γ gráf pontjain értelmezett φ függvény segítségével Γ' pontjaira így értelmezünk egy φ' függvényt: $\varphi'(X^-) = \varphi'(X^+) = \varphi(X)$. A Γ gráf pontjain és élein értelmezett ψ függvényből egy, Γ'-nek csak az élein értelmezett ψ'

függvényt hozunk létre: Γ valamennyi x élén legyen $\psi'(x)=\psi(x)$, az új z_X éleken legyen $\psi'(z_X)=\psi(X)$.

Könnyű megmutatni, hogy ha az ily módon létrehozott Γ' gráfra és a φ' és ψ' függvényekre alkalmazzuk az (1. 2) és (1. 3) TÉTELeket, akkor ezekből az eredeti Γ gráfra vonatkozó, fentebb említett általánosítások levezethetők.

A szóbanforgó általánosított tételekből megint létrehozhatók azok a módosított tételek, amelyekben a ψ függvény csak a gráf pontjaiban van értelmezve. Ehhez nem kell mást tenni, mint valamennyi élhez tartozó ψ értéket 0-nak választani.

A (6. 2. 4) TÉTELből, a ψ függvénynek a szögpontokra való kiterjesztésével adódó általánosítás nem érvényes.

Megjegyzés: Az (1. 2) és (1. 3) TÉTELeknek nehézség nélkül létrehozhatók ama általánosításai, amelyeknél mind a φ, mind a ψ függvény pontokra is, élekre is értelmezve van.

9. 2. Útrendszerek

(9. 2. 1). Legyen Γ véges gráf. Φ_α és Φ_β Γ pontjainak nem üres, közös pont nélküli részhalmazai. A Φ_α, Φ_β és $\Phi-(\Phi_\alpha+\Phi_\beta)$ halmazok (Φ Γ pontjainak halmaza) pontjait rendre α-, β- és *γ-pontoknak* nevezzük. Jelentse a következőkben ϱ és σ az α és β betűk bármelyikét. *Alapirányú úton,* olyan irányított utat értünk ([7] 29. o.), melynek befutási iránya minden érintett élen megegyezik az él irányításával. Egy utat *$\varrho\sigma$-útnak* nevezünk, ha alapirányú és ha kezdőpontja ϱ-pont, végpontja σ-pont és belső pontjai γ-pontok.

Legyen w tetszőleges irányított út, X tetszőleges pont. A $[w, X]$ jel értelmét így határozzuk meg: Ha X akár belső, akár határpontja w-nek, akkor $[w, X]=1$. Ha X nem pontja w-nek, akkor $[w, X]=0$.

Megjegyezzük, hogy $[w, X]$ értéke az út határpontjaiban eltér (éppen kétszerese) a **2.** §-ban egy f útra értelmezett $[f, X]$ értéknek.

Útrendszeren az $\alpha\beta$-utak egy olyan $\omega=(w_1, \ldots, w_n)$ sorozatát értjük, amelyben egy út többször is előfordulhat. Az üres, $\omega=0$-lal jelölt sorozatot is útrendszernek tekintjük. (Csak sorrendben különböző útsorozatokat azonos rendszereknek tekintjük.)

Bevezetjük az $[\omega, X]=\sum_{i=1}^{n}[w_i, X]$ jelet. Ha $\omega=0$, akkor legyen $[\omega, X]=0$. $[\omega, X]$ a $w_1, \ldots, w_n$ sorozat azon útjainak számát jelenti, melyek az X pontot tartalmazzák.

A $\pi=(X_1,\dots,X_n)$ pontrendszerrel és a w úttal kapcsolatban bevezetjük a $[\pi,w]=\sum_{i=1}^{n}[w,X_i]$ jelet. Ha $\pi=0$, akkor legyen $[\pi,w]=0$. $[\pi,w]$ a π rendszer azon pontjainak számát jelenti, melyek a w úton helyezkednek el.

Ha $\pi=(X_1,\dots,X_n)$ és $\omega=(w_1,\dots,w_m)$, akkor legyen

$$[\pi,\omega]=\sum_{i=1}^{m}[\pi,w_i]=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}[w_i,X_j]=\sum_{j=1}^{n}[\omega,X_j].$$

Ha π és ω valamelyike üres, akkor legyen $[\pi,\omega]=0$.

Az $\omega_1,\dots,\omega_n$ útrendszerek útjainak egyesítése révén létrejövő útrendszert $\omega=(\omega_1,\dots,\omega_n)$-nel jelöljük. Nyilvánvaló, hogy ekkor $[\omega,X]=\sum_{i=1}^{n}[\omega_i,X]$ minden X pontra fennáll.

(9.2.2). Legyen értelmezve a gráf pontjain a $\varphi(X)$ egész értékű függvény. Egy ω útrendszer *elférő*, ill. *lefogó*, ha minden X-re $[\omega,X]\leqq\varphi(X)$, ill. $[\omega,X]\geqq\varphi(X)$. Az elférő, ill. a lefogó útrendszerek halmazát Ω_e és Ω_l-lel jelöljük.

(9.2.3). Legyen értelmezve a gráf élein a $\psi(x)$ egész értékű függvény. Az alapirányú w út $\psi(w)$ *értékén* w éleihez tartozó értékek összegét értjük. Ha $\omega=(w_1,\dots,w_n)$, akkor legyen $\psi(\omega)=\sum_{i=1}^{n}\psi(w_i)$. Ha $\omega=0$, akkor legyen $\psi(\omega)=0$. Ha $\omega=(\omega_1,\dots,\omega_n)$, akkor $\psi(\omega)=\sum_{i=1}^{n}\psi(\omega_i)$.

Egy π pontrendszer *útelférő*, ill. *útlefogó*, ha bármely w $\alpha\beta$-útra $[\pi,w]\leqq\psi(w)$, ill. $[\pi,w]\geqq\psi(w)$. Ha nincs $\alpha\beta$-út, akkor tekintsük az üres, $\pi=0$-lal jelölt pontrendszert útlefogónak.

Ha π útelférő, ill. útlefogó, akkor könnyen belátható, hogy bármely ω útrendszerre $[\pi,\omega]\leqq\psi(\omega)$, ill. $[\pi,\omega]\geqq\psi(\omega)$.
Az útelférő, ill. útlefogó pontrendszerek halmazát Σ_e, ill. Σ_l-lel jelöljük.

(9.2.4). Körökkel és körrendszerekkel kapcsolatban használni fogjuk az **5.** §-ban a láncfogalom segítségével értelmezett $|k,X|$ és $|\varkappa,X|$ jeleket. Ezek a láncfogalomtól függetlenül is definiálhatók: $|k,X|=1$, ha X pontja k-nak, $|k,X|=0$, ha X nem pontja k-nak. $|\varkappa,X|$ azon $\varkappa$-hoz tartozó körök száma, melyek X-et tartalmazzák.

A $|\pi,k|$ jelet most vezetjük be. Jelentse ez a π pontrendszerben felsorolt pontok közül azoknak a számát, melyek a k körön helyezkednek el. Ha $\pi=(X_1,\dots,X_n)$, akkor $|\pi,k|=\sum_{i=1}^{n}|k,X_i|$.

9. 3. Elférő útrendszerekre vonatkozó tételek

E pontban a $\varphi(X)$ és $\psi(x)$ függvényekre az alábbi feltevéseket tesszük:

(9. 3. 1). $\varphi \geq 0$.

(9. 3. 2). Minden w útra, mely $\beta\alpha$-, $\alpha\alpha$-, $\beta\beta$-út $\psi(w) \leq 0$, és minden olyan alapirányú k körre, mely nem tartalmaz α-pontot is és β-pontot is $\psi(k) \leq 0$.

(9. 3. 1)-ből, $\omega = 0$-ra tekintettel következik, hogy Ω_r nem üres. Γ végességéből könnyen belátható, hogy Ω_r véges halmaz, és hogy Σ_l nem üres.

(9. 3. 3). TÉTEL: *A* (9. 3. 1) *és* (9. 3. 2) *feltevések fennállása esetén*

$$\max_{\omega \in \Omega_r} \psi(\omega) = \min_{\pi \in \Sigma_l} \varphi(\pi).$$

BIZONYÍTÁS: (I). Feltevésünk szerint $\mu_1 = \max_{\omega \in \Omega_r} \psi(\omega)$ és $\bar{\mu}_1 = \min_{\pi \in \Sigma_l} \varphi(\pi)$ létező, véges értékek. A $\mu_1 = \bar{\mu}_1$ egyenlőséget, egy új Γ' gráf megszerkesztésével az (1. 2) TÉTELre vezetjük vissza. Γ'-t Γ-ból új élek csatolásával hozzuk létre: Γ minden egyes β-pontját minden egyes α-ponttal egy-egy új éllel összekötjük, és az új éleket a β-pontból az α-pont felé irányítjuk. A ψ függvény értéke valamennyi új élen legyen zérus.

(II). Legyen k egy tetszőleges Γ'-höz tartozó alapirányú kör. Megmutatjuk, hogy létezik olyan Γ-hoz tartozó ω_k útrendszer, melyre minden X-nél $[\omega_k, X] \leq [k, X]$ és $\psi(\omega_k) \geq \psi(k)$.

Állításunk igazolásához vegyük először tekintetbe, hogy ha k nem tartalmaz α-pontot is meg β-pontot is, akkor nem tartalmazhat új élt, s így k Γ-nak is köre. (9. 3. 2) miatt $\psi(k) \leq 0$. Ekkor $\omega_k = 0$ kielégíti követeléseinket.

Tegyük fel tehát, hogy k tartalmaz α-pontot is, β-pontot is. Ezek a pontok a k kört a $v_1, \ldots, v_n$ egymáshoz csatlakozó alapirányú utakra bontják ($n \geq 2$). Ezek az utak vagy Γ-hoz tartozó $\varrho\sigma$-utak, vagy egyetlen új élből állnak. (9. 3. 2), valamint ψ-nek az új éleken történt értelmezése szerint $\psi(v_i) > 0$ csak abban az esetben állhat fenn, ha v_i $\alpha\beta$-út. Ha a v_i utak között nincsenek $\alpha\beta$-utak, akkor $\psi(k) = \sum_{i=1}^{n} \psi(v_i) \leq 0$, és ekkor $\omega_k = 0$ kielégíti követeléseinket. Ha a v_i utak között vannak $\alpha\beta$-utak, jelöljük ezeket $w_1, \ldots, w_m$-mel. Megmutatjuk, hogy ekkor $\omega_k = (w_1, \ldots, w_m)$ megfelel kikötéseinknek. Valóban

$$\psi(\omega_k) = \sum_{i=1}^{m} \psi(w_i) \geq \sum_{j=1}^{n} \psi(v_j) = \psi(k),$$

és mivel két w_i-nek nem lehet közös pontja $[\omega_k, X] \leq [k, X]$.

(III). Γ' minden alapirányú k köréhez rendeljük hozzá a (II) alatt értelmezett ω_k útrendszert, és ebből kiindulva minden Γ'-höz tartozó

$\varkappa = (k_1, \ldots, k_n)$ körrendszerhez rendeljük hozzá a Γ-hoz tartozó $\omega_\varkappa = (\omega_{k_1}, \ldots, \omega_{k_n})$ útrendszert. E hozzárendelések segítségével igazoljuk, hogy $\mu_1 \geqq \mu_1'$, ahol $\mu_1' = \max\limits_{\varkappa \in \Lambda_e'} \psi(\varkappa)$ és Λ_e' a Γ'-höz tartozó elférő $\varkappa$ körrendszerek halmazát jelenti.

Valóban, ha $\varkappa = (k_1, \ldots, k_n)$ tetszőleges körrendszere Γ'-nek, akkor

$$\psi(\omega_\varkappa) = \sum_{i=1}^{n} \psi(\omega_{k_i}) \geqq \sum_{i=1}^{n} \psi(k_i) = \psi(\varkappa),$$

és bármilyen X-re

$$[\omega_\varkappa, X] = \sum_{i=1}^{n} [\omega_{k_i}, X] \leqq \sum_{i=1}^{n} [k_i, X] = [\varkappa, X].$$

Ha $\varkappa \in \Lambda_e'$, azaz ha bármely X-re $[\varkappa, X] \leqq \varphi(X)$, akkor minden X-re $[\omega_\varkappa, X] \leqq \varphi(X)$, tehát $\omega_\varkappa \in \Omega_e$.

Az elmondottakból következik állításunk.

(IV). Igazoljuk, hogy $\mu_1 \leqq \mu_1'$.

Bármely Γ-hoz tartozó w $\alpha\beta$-utat, a végpontjából a kezdőpontjába futó új éllel egy Γ'-höz tartozó alapirányú k_w körré egészítünk ki. Nyilvánvalóan fennállnak az alábbi egyenlőségek: $\psi(k_w) = \psi(w)$, minden X-re $[k_w, X] = [w, X]$.

Ha $\omega = (w_1, \ldots, w_n)$ tetszőleges, $\omega = 0$-tól különböző útrendszer, akkor legyen $\varkappa_\omega = (k_{w_1}, \ldots, k_{w_n})$. Ha $\omega = 0$, akkor legyen $\varkappa_\omega = 0$. Fennállnak az alábbi egyenlőségek: $\psi(\varkappa_\omega) = \psi(\omega)$ és minden X-re $[\varkappa_\omega, X] = [\omega, X]$.

Látható, hogy ha $\omega \in \Omega_e$, akkor $\varkappa \in \Lambda_e'$.

Az elmondottakból valóban következik, hogy $\mu_1 \leqq \mu_1'$.

$\mu_1 \leqq \mu_1'$-ből és $\mu_1 \geqq \mu_1'$-ből $\mu_1 = \mu_1'$ folyik.

(V). Jelöljük Π_l'-vel a Γ'-höz tartozó körlefogó pontrendszerek halmazát. Bebizonyítjuk, hogy $\Pi_l' = \Sigma_l$.

Ha $\pi = (X_1, \ldots, X_n) \in \Sigma_l$ és k tetszőleges alapirányú köre Γ'-nek, akkor (II) jelöléseit és megállapításait használva

$$[\pi, k] = \sum_{i=1}^{n} [k, X_i] \geqq \sum_{i=1}^{n} [\omega_k, X_i] = [\pi, \omega_k] \geqq \psi(\omega_k) \geqq \psi(k),$$

tehát $\pi \in \Pi_l'$.

Ha $\pi \in \Pi_l'$ és w tetszőleges $\alpha\beta$-út, akkor (IV) jelöléseit és megállapítását használva:

$$[\pi, w] = \sum_{i=1}^{n} [w, X_i] = \sum_{i=1}^{n} [k_w, X_i] = [\pi, k_w] \geqq \psi(k_w) = \psi(w),$$

tehát $\pi \in \Sigma_l$. Ezzel igazoltuk állításunkat.

Az (1. 2) TÉTELből, valamint $\mu_1 = \mu_1'$ és $\Pi_l' = \Sigma_l$-ből következik a (9. 3. 3) TÉTEL fennállása.

(9. 3. 4). A (9. 3. 3) TÉTEL érvényességét végtelen gráfokra is kiterjeszthetjük a következő kikötések mellett: (1) A 0-pontok száma véges. (2) Az elférő útrendszerek és a 0-pontot tartalmazó $\alpha\beta$-utak ψ értékeinek halmaza felülről korlátos.

Az alábbiakban olyan speciális gráfokat, ill. ψ függvényeket adunk meg, melyekre a (9. 3. 2) kikötések teljesülnek.

(9. 3. 5). A Γ gráfot *aciklikusnak* nevezzük, ha a $k=0$ kört nem tekintve, nem tartalmaz alapirányú kört.

Legyen Γ egy aciklikus gráf és legyenek a Φ_α és Φ_β halmazok oly módon kijelölve, hogy az α-pontokhoz csak kifutó élek, a β-pontokhoz csak befutó élek illeszkedjenek. Ekkor a gráfban nincs $\beta\alpha$-, $\alpha\alpha$-, $\beta\beta$-út, sem pedig alapirányú kör, s így (9. 3. 2) kikötései tetszőleges ψ függvény mellett fennállnak. Ebben az esetben tehát a (9. 3. 3) TÉTEL is bármilyen ψ függvény mellett érvényes.

(9. 3. 6). A (9. 3. 5) alatt tárgyaltak speciális esetével állunk szemben, amidőn Γ minden élének kezdőpontja α-pont, végpontja β-pont. A gráf ekkor *páros körüljárású* ([7] 170. o.), és minden $\alpha\beta$-út egyetlen élre, egy útrendszer pedig egy *élrendszerre* redukálódik. A (9. 3. 3) TÉTEL állítása ebben az esetben irányítás nélküli gráfokra is megfogalmazható.

A Γ *irányítás nélküli* gráf éleinek egy $\varepsilon=(x_1, \ldots, x_n)$ sorozatát *élrendszernek* nevezzük. (Egy él többször is szerepelhet; az élek sorrendje mellékes; az $\varepsilon=0$-lal jelölt üres sorozatot is élrendszernek tekintjük.)

A gráf pontjain, ill. élein legyenek értelmezve a nem negatív egész értékű $\varphi(X)$ és $\psi(x)$ függvények. Legyen $\psi(\varepsilon)=\sum_{i=1}^{n}\psi(x_i)$, és ha $\varepsilon=0$, akkor legyen $\psi(\varepsilon)=0$.

Az ε élrendszer *1-elférő*, ill. *1-lefogó*, ha bármely X ponthoz ε-nak $\varphi(X)$-nél nem több, ill. nem kevesebb éle illeszkedik. A π pontrendszer *1-elférő*, ill. *1-lefogó*, ha bármely x élhez π-nek $\psi(x)$-nél nem több, ill. nem kevesebb pontja illeszkedik.

(9. 3. 3) alapján most a következő tétel mondható ki (vesd össze [5], 214—218. o.):

(9. 3. 7). TÉTEL: *Egy páros körüljárású gráfban az 1-elférő élrendszerek ψ értékeinek maximuma egyenlő az 1-lefogó pontrendszerek φ értékeinek minimumával.*

E tétel a $\varphi=1$ esetben EGERVÁRYnak egy tételét adja meg ([3] 17. o. I.)

(9. 3. 8). Most a gráfra és a Φ_α és Φ_β halmazokra nem teszünk megszorításokat. A $\psi(x)$ függvényre a következőket írjuk elő: Minden olyan x-re, melynek mindkét határpontja α-pont, vagy egyik határpontja sem α-pont

$\psi(x)=0$, minden olyan x-re, melynek csak kezdőpontja, ill. csak végpontja α-pont, $\psi(x)=1$, ill. $\psi(x)=-1$.

Előírásaink következtében az $\alpha\beta$-, $\beta\alpha$-, $\alpha\alpha$-, $\beta\beta$-utak ψ értéke rendre 1, -1, 0, 0. Minden alapirányú k körre $\psi(k)=0$. A $\psi(x)$ függvény tehát eleget tesz a (9. 3. 2) kikötéseknek.

Egy $\omega=(w_1,\dots,w_n)$ útrendszerre $\psi(\omega)=\sum_{i=1}^{n}\psi(w_i)=n$, $\psi(\omega)$ tehát az ω rendszerhez tartozó utak számát adja meg.

Mivel most bármely w $\alpha\beta$-útra $\psi(w)=1$, egy π pontrendszer akkor és csakis akkor útlefogó, ha π-nek van bármely w $\alpha\beta$-úton pontja.

A (9. 3. 3) TÉTEL most a következő alakban mondható ki:

(9. 3. 9). TÉTEL: *Az elférő útrendszerek útjai számának maximuma egyenlő az útlefogó pontrendszerek φ értékeinek minimumával, feltéve, hogy* $\varphi\geqq 0$.

Ez a tétel lényegében azonos a „max-flow min-cut" tétel egyik esetével, ([1], [5]).

Ha $\varphi=1$, akkor (9. 3. 9) a MENGER-féle gráftételt adja irányított gráfokra megfogalmazva ([6] 188. o.).

Megjegyzés: A „max-flow min-cut" tétel többi esete ([1], [4], [5]) a (9. 3. 10) alattiak, a **9. 1** alatt említett általánosítások és a **11.** §-beli kiterjesztések segítségével nyerhető.

(9. 3. 10). A (6. 2. 4) TÉTELből kiindulva a (9. 3. 3) TÉTELhez hasonló tételt nyerhetünk olyan utakra, melyeknek alapirányú voltát nem követeljük meg. A (9. 3. 8) feltételeknek eleget tevő ψ függvényt itt is felhasználhatjuk. Ezen a módon eljuthatunk az irányítás nélküli gráfokra vonatkozó „max-flow min-cut" tételhez, valamint a MENGER-féle gráftételhez ([8] 222. o.).

9. 4. Lefogó útrendszerekre vonatkozó tételek

(9. 4. 1). Feltesszük, hogy Γ aciklikus gráf, valamint, hogy az α-pontokhoz csak kifutó, a β-pontokhoz csak befutó élek illeszkednek.

A ψ függvényről feltesszük, hogy minden w $\alpha\beta$-útra $\psi(w)\geqq 0$.

Az utóbbi feltevésből a $\pi=0$ pontrendszerre való tekintettel következik, hogy Σ_e nem üres.

(9. 4. 2). TÉTEL: *A* (9. 4. 1) *kikötések fennállása esetén, feltéve, hogy* Ω_l *nem üres*

$$\min_{\omega\in\Omega_l}\psi(\omega)=\max_{\pi\in\Sigma_e}\varphi(\pi).$$

A (9. 4. 2) TÉTEL bizonyítása az (1. 3) TÉTEL alapján a (9. 3. 3) TÉTEL bizonyításához hasonlóan végezhető el.

A (9. 4. 2) TÉTELnek két speciális esetét említjük:

(9. 4. 3). Γ-ban csak α- és β-pontok vannak, tehát a gráf páros körüljárású. Ekkor az útrendszerek helyére élrendszerek lépnek, és a tétel állítása, (9. 3. 7)-hez hasonlóan, irányítás nélküli gráfokra is megfogalmazható (vesd össze [5], 214—218. o.):

(9. 4. 4). TÉTEL: *Egy páros körüljárású gráfban az 1-lefogó élrendszerek ψ értékeinek minimuma egyenlő az 1-elférő pontrendszerek φ értékeinek maximumával, feltéve hogy minden x-re* $\psi(x) \geqq 0$.

Megjegyzés: Az 1-lefogó élrendszerek létezése abból a feltevésünkből következik, hogy a gráf minden pontjához illeszkedik él.

A (9. 4. 4) TÉTELnek a $\varphi(X) = 1$ és $\psi(x) = 1$ függvényekhez tartozó esete KÖNIG DÉNEStől származik. [Szóbeli közlés (1932).]

(9. 4. 5). A gráfra a (9. 4. 1) alattiakon kívül további kikötéseket nem teszünk. $\psi(x)$-ről feltesszük, hogy minden α-ponthoz illeszkedő x élre $\psi(x) = 1$, minden más élre pedig $\psi(x) = 0$.

Most minden w $\alpha\beta$-útra $\psi(w) = 1$, és bármely ω útrendszerre $\psi(\omega)$ a rendszerhez tartozó utak számát adja meg. Egy π pontrendszer csak akkor lehet útelférő, ha bármely w $\alpha\beta$-úton a rendszernek legfeljebb egy pontja helyezkedik el.

A (9. 4. 2) TÉTEL most a következő alakban mondható ki:

(9. 4. 6). TÉTEL: *A* (9. 4. 1) *feltételeket kielégítő gráfban a lefogó útrendszerek útjai számának minimuma egyenlő az útelférő pontrendszerek φ értékeinek maximumával, feltéve hogy létezik lefogó útrendszer.*

E tételnek a $\varphi = 1$ függvényhez tartozó esete tartalmazza DILWORTHnak véges, félig rendezett halmazokra vonatkozó egyik tételét ([2] 161. o. 1. 1).

9. 5. További, irányítás nélküli gráfokra vonatkozó maximum-minimum tételek

(9. 5. 1). Legyen Γ irányítás nélküli gráf. Γ X pontjain, ill. x alapélein legyen értelmezve a *nem negatív* egész értékű $\varphi(X)$, ill. $\psi(x)$ függvény. Élláncon, ill. pontláncon most csak *nem negatív* egész értékű $f(x)$, ill. $p(X)$ függvényeket értünk.

(9. 5. 2). Az $e(x)$ éle f-nek, x alapéle f-nek, f éleinek száma, f X-hez illeszkedő éleinek száma, f-hez tartozó pont, f X-beli terhelése fogalmakat, valamint az $|x, X|$, $|f, X|$ jeleket a **2.** §-nak megfelelően értelmezzük.

Ha f X-hez illeszkedő éleinek száma n, és $n \neq 0$, akkor azt fogjuk mondani, hogy *X f-nek n-nedfokú pontja*. E szerint X f-nek páros-, illetve páratlan fokú pontja, ha $|f, X|$ pozitív egész, ill. tört szám. A

$$\sum_X' |f, X| = \sum_X' \sum_x' f(x)(x, X) = \sum_x' f(x) \Big(\sum_X' (x, X)\Big) = \sum_x' f(x)$$

egyenletből megállapíthatjuk, hogy *bármely lánc páratlan fokú pontjainak száma páros.*

Egy láncot most akkor mondunk *zártnak,* ha nincsen páratlan fokú pontja.

Úton olyan f láncot értünk, melyhez van olyan $X_0 x_1 X_1 \ldots X_{n-1} x_n X_n$ ($n \geqq 1$) pont-élsorozat (bejárás), amelyben valamennyi pont különböző, x_i határpontjai X_{i-1} és X_i, $f(x_i) = 1$ ($i = 1, \ldots, n$) és $f(x) = 0$, ha x valamennyi x_i-től különbözik. X_0 és X_n az út határpontjai.

Körön olyan k láncot értünk, melyre vagy $k = 0$, vagy amelyhez található olyan e él, hogy $f = k - e$ út. Értelmezésünk szerint körnek tekintjük azt az egyetlen x' alapélt tartalmazó k láncot is, melyre $k(x') = 2$ és $k(x) = 0$, ha $x \neq x'$.

A lánc éleinek számára vonatkozó indukcióval könnyen belátható a (2. 5. 19) tételnek megfelelő alábbi állítás:

(9. 5. 3). *Minden zárt lánc körök összegeként állítható elő.*

Új élek csatolásával, (2. 5. 20) bizonyításhoz hasonlóan egyszerűen igazolható a következő megállapítás:

(9. 5. 4). *Minden nem zárt lánc előállítható egy zárt lánc és közös határpont nélküli utak összegeként.* (Mindegyik út f-nek két páratlan fokú pontját köti össze.)

(9. 5. 5). Legyen $|p, x| = \sum_X' p(X)(x, X) = \frac{1}{2}(p(Y) + p(Z))$, ahol Y és Z az x alapél határpontjai.

A $|p, f|$, $\varphi(p)$ és $\psi(f)$ jeleket a **4. 1** pontnak megfelelően értelmezzük. f *elférő,* ill. *lefogó,* ha minden X-re $|f, X| \leqq \varphi(X)$, ill. $|f, X| \geqq \varphi(X)$. p *elférő,* ill. *lefogó,* ha minden x-re $|p, x| \leqq \psi(x)$, ill. $|p, x| \geqq \psi(x)$.

Az egyetlen alapélt tartalmazó köröket szem előtt tartva könnyen igazolható, hogy p akkor és csak akkor elférő, ill. lefogó, ha minden k körre $|p, k| \leqq \psi(k)$, ill. $|p, k| \geqq \psi(k)$.

Az elférő, ill. lefogó élláncok halmazát F_e, ill. F_l-lel, az elférő, ill. lefogó zárt láncok halmazát G_e, ill. G_l-lel, az elférő, ill. lefogó pontláncok halmazát P_e és P_l-lel jelöljük. Egyszerűen belátható, hogy a felsorolt hat halmaz egyike sem üres.

(9. 5. 6).
$$\max_{f \in F_e} \psi(f) = \max_{g \in G_e} \psi(g).$$

BIZONYÍTÁS: Elegendő azt igazolni, hogy ha $f \in F_e$, akkor van olyan g, melyre $g \in G_e$ és $\psi(g) \geqq \psi(f)$.

Legyen f tetszőleges eleme F_p-nek. Ha f zárt, akkor nincs mit igazolni. Ha f nem zárt, akkor tekintsük f-nek egy (9. 5. 4) szerinti $f = g' + \sum_{i=1}^{m} f_i$ előállítását (g' zárt, $m \geqq 1$, az f_i-k közös határpont nélküli utak). Az f_i utak mindegyikét egy-egy zárt g_i lánccal fogjuk helyettesíteni. E célból tekintsünk egy f_i utat. Legyen $X_0 x_1 X_1 \dots X_{n-1} x_n X_n$ ennek egy bejárása. Alkossuk meg a

$$\psi_1 = \sum_{j=1}^{r} \psi(x_{2j-1}) \qquad (n-1 \leqq 2r-1 \leqq n)$$

és a

$$\psi_2 = \sum_{j=1}^{s} \psi(x_{2j}) \qquad (n-1 \leqq 2s \leqq n)$$

összeget. A g_i láncot így értelmezzük: Ha $\psi_1 \geqq \psi_2$, akkor legyen $g_i(x_{2j-1}) = 2$ ($j = 1, \dots, r$) és minden más alapélre $g_i(x) = 0$. Ha $\psi_1 < \psi_2$, akkor legyen $g_i(x_{2j}) = 2$ ($j = 1, \dots, s$) és minden más alapélre $g_i(x) = 0$.

Látható, hogy g_i zárt, $\psi(g_i) \geqq \psi(f_i)$, valamint, hogy g_i terhelése X_0 és X_n kivételével minden pontban ugyanakkora mint f_i-é, az X_0 és X_n pontokban pedig ± 1, 2-lel különbözik f_i terhelésétől. Ezek alapján — φ egészértékűségét figyelembe véve — megállapíthatjuk, hogy a $g = g' + \sum_{i=1}^{m} g_i$ lánc eleme G_p-nek, valamint, hogy $\psi(g) \geqq \psi(f)$.

A közölt bizonyításhoz hasonlóan igazolható a következő tétel:

(9. 5. 7). $\min\limits_{f \in F_l} \psi(f) = \min\limits_{g \in G_l} \psi(g)$.

Igazoljuk a következő tételt:

(9. 5. 8). TÉTEL: $\max\limits_{g \in G_p} \psi(g) = \min\limits_{p \in P_l} \varphi(p)$.

BIZONYÍTÁS: Hozzuk létre a Γ gráfból az irányított Γ' gráfot oly módon, hogy Γ minden x éléhez egy olyan új $\bar{x}$ élt veszünk fel, melynek határpontjai azonosak x határpontjaival, majd pedig az x és $\bar{x}$ éleket úgy irányítjuk, hogy az egyiknek kezdőpontja a másiknak végpontja legyen. (Vesd össze: [1], 217. o. és [5], 211. o.) Legyen $\psi(\bar{x}) = \psi(x)$. Könnyen belátható, hogy bármely Γ-beli körnek megfeleltethető egy ugyanazokon a pontokon áthaladó és ugyanakkora ψ értékkel rendelkező Γ'-beli *pozitív* kör, és megfordítva, minden Γ'-beli *pozitív* körhöz hozzárendelhető egy ugyanazokon a pontokon átmenő és ugyanakkora ψ értékű Γ-beli kör. E megfeleltetés, valamint (9. 5. 3), ill. (2. 5. 19) alapján G_p bármely eleméhez megszerkeszthető egy ugyanakkora ψ értékű Γ'-höz tartozó elférő körlánc, és minden Γ'-höz tartozó elférő körlánchoz található G_p-nek egy ugyanakkora ψ értékkel rendelkező eleme.

Ugyancsak egyszerűen ellenőrizhető hogy egy p pontlánc Γ-ban és Γ'-ben egyidejűleg lefogó [(9. 5. 5), (4. 1. 12)].

Az elmondottak alapján megállapítható, hogy ha Γ'-re az (5. 3) TÉTELt alkalmazzuk, akkor megkapjuk a (9. 5. 8) TÉTELt.

A közölt bizonyításhoz hasonlóan látható be (7. 5. 2)-ből a következő tétel:

(9. 5. 9). TÉTEL: $\min_{g \in G_l} \psi(g) = \max_{p \in P_e} \varphi(p).$

Megjegyzés: A (9. 5. 8) és (9. 5. 9) TÉTELek nehézség nélkül átfogalmazhatók körláncokra és körrendszerekre.

(9. 5. 10). A (9. 5. 6)—(9. 5. 9) tételekből élrendszerekre vonatkozó tételeket származtatunk:

Nevezzünk egy $\varepsilon = (x_1, \ldots, x_n)$ élrendszert *2-elférőnek*, ill. *2-lefogónak*, ha bármely X ponthoz illeszkedő élei számának *fele* nem nagyobb, ill. nem kisebb $\varphi(X)$-nél. A π pontrendszert pedig nevezzük *2-elférőnek*, ill. *2-lefogónak*, ha bármely x élhez illeszkedő pontjai számának *fele* nem nagyobb, ill. nem kisebb $\psi(x)$-nél. Ekkor (9. 5. 6) és (9. 5. 8)-ból, ill. (9. 5. 7) és (9. 5. 9)-ből a következő tételek adódnak:

(9. 5. 11). TÉTEL: *A 2-elférő élrendszerek ψ értékeinek maximuma egyenlő a 2-lefogó pontrendszerek φ értékeinek minimumával.*

(9. 5. 12). TÉTEL: *A 2-lefogó élrendszerek ψ értékeinek minimuma egyenlő a 2-elférő pontrendszerek φ értékeinek maximumával.*

Megjegyzés: A (9. 5. 8) és (9. 5. 11), ill. a (9. 5. 9) és (9. 5. 12) TÉTELek a (9. 3. 7), ill. a (9. 4. 4) TÉTELekből is levezethetők.

10. §.

Ebben a paragrafusban a maximum-minimum tételekből *faktorizációs* tételeket vezetünk le.

10. 1. Irányított gráfok 1-faktorai

(10. 1. 1). Egy *irányított* gráf *1-faktorán* az alapirányú körök egy olyan rendszerét értjük, melynél a gráf minden pontján át a rendszernek egyetlen köre halad keresztül ([9] 922. o.)

Egy 1-faktor köreihez tartozó élek száma a gráf pontjainak számával egyenlő.

Értelmezzük a gráf pontjain és élein a φ, ill. a ψ függvényt oly módon, hogy $\varphi(X) = 1$ és $\psi(x) = 1$ legyen. Ebben az esetben egy $\varkappa$ körrendszer akkor elférő, ill. lefogó, ha minden ponton át legfeljebb, ill. legalább egy köre halad a rendszernek, és a $\psi(\varkappa)$ érték a $\varkappa$-hoz tartozó körök élei, ill. szögpontjai számának összegét adja meg. Ezek szerint megállapíthatjuk, hogy a gráfnak akkor és csak akkor van 1-faktora, ha a $\max_{\varkappa \in A_v} \psi(\varkappa)$, vagy a $\min_{\varkappa \in A_l} \psi(\varkappa)$ érték megegyezik a gráf pontjainak számával. Miután $\varphi(\pi)$ a π pontrendszer pontjainak számát jelenti, (1.2) és (1.3) alapján kimondhatjuk a következő — két duális vonatkozású állítást tartalmazó — tételt:

(10.1.2). *Egy irányított gráfnak 1-faktora akkor és csak akkor létezik, ha a (kör)lefogó, ill. a (kör)elférő pontok minimális, ill. maximális száma egyenlő a gráf pontjainak számával.*

Kevesebb fogalmat felhasználó fogalmazásban:

(10.1.3). TÉTEL: *Egy irányított gráfnak 1-faktora akkor és csak akkor létezik, ha a pontoknak minden olyan $X_1, \ldots, X_n$ $(n \geq 1)$ sorozatához (ugyanaz a pont többször is szerepelhet), ahol n kisebb (nagyobb) a gráf pontjainak számánál, létezik olyan alapirányú kör, melyen a felsorolt pontokból a kör pontjainak számánál kevesebb (több) helyezkedik el.*

10.2. Irányítás nélküli gráfok Q-faktorai

(10.2.1). Egy irányítás nélküli gráf *Q-faktorán* köreinek olyan rendszerét értjük, melynél a gráf minden pontján át a rendszernek egyetlen köre halad, és ahol a (9.5.2) alattiaknak megfelelően *kétszögpontú körnek tekintünk egyetlen élt* ([9] 930. o.).

Bármely Q-faktorból létrehozott ama élrendszer, mely a Q-faktor kettőnél több pontot tartalmazó köreinek éleit egyszer, a kétszögpontú köröknek tekintett éleket pedig kétszer tartalmazza, olyan, hogy a gráf minden pontjához az élrendszernek két éle illeszkedik. Megfordítva. bármely olyan élrendszer, amelynek a gráf minden pontjához két éle illeszkedik, egy Q-faktorból a fent leírt módon hozható létre [(9.5.3)]. Azt is megállapíthatjuk, hogy a szóbanforgó élrendszer éleinek száma megegyezik a gráf pontjainak számával.

A gráf pontjain, ill. élein értelmezzük a φ, ill. ψ függvényt megint úgy, hogy $\varphi(X) = 1$ és $\psi(x) = 1$ legyen. Ebben az esetben egy ε élrendszer akkor 2-elférő, ill. 2-lefogó, ha minden ponthoz legfeljebb, ill. legalább *két* éle illeszkedik a rendszernek. A $\psi(\varepsilon)$ érték ε éleinek számát adja meg. Az elmondottakból világos, hogy egy gráfnak akkor és csak akkor van Q-faktora, ha a 2-elférő, ill. 2-lefogó élrendszerek értékeinek maximuma, ill. minimuma megegyezik a gráf pontjainak számával. Mivel a $\varphi(\pi)$ érték π pontjainak számát adja meg, (9.5.11) és (9.5.12) alapján kimondható az alábbi — két duális vonatkozású állítást tartalmazó tétel:

(10.2.2). *Egy irányítás nélküli gráfnak akkor és csak akkor van Q-faktora, ha a 2-lefogó (2-elférő) pontok minimális (maximális) száma megegyezik a gráf pontjainak számával.*

Kevesebb fogalmat felhasználó alakban:

(10. 2. 3). TÉTEL: *Egy irányítás nélküli gráfnak akkor és csak akkor van Q-faktora, ha a pontoknak minden olyan* $X_1, \ldots, X_n$ $(n \geqq 1)$ *sorozatához (ugyanaz a pont többször is szerepelhet), ahol n kisebb (nagyobb) a gráf pontjainak számánál létezik olyan él, melyhez a sorozatnak kettőnél kevesebb (több) pontja illeszkedik.*

(10. 2. 3). Megmutatjuk, hogy a (10. 2. 2) tételből egyszerű módon következik a Q-faktorok létezésének TUTTE által adott feltétele ([9] 930. o.).

Nevezzünk egy gráfot $\bar{Q}$-tulajdonságúnak, ha létezik pontjainak az alább felsorolt feltételeket kielégítő Φ_1 és Φ_2 részhalmaza:

(1) Φ_1 és Φ_2-nek nincs közös pontja.

(2) Φ_1-ben több pont van mint Φ_2-ben.

(3) Minden olyan élnek, melynek egyik határpontja Φ_1-hez tartozik, másik határpontja Φ_2-höz tartozik.

(I). Jelöljük a gráf pontjainak számát λ-val. Tegyük fel, hogy van λ-nál kevesebb pontból álló olyan pontrendszer, melynek pontjai közül a gráf bármelyik éléhez legalább kettő illeszkedik. Megmutatjuk, hogy a gráf ekkor $\bar{Q}$-tulajdonságú.

Legyen $\pi = (X_1, \ldots, X_n)$ λ-nál kevesebb pontból álló olyan pontrendszer, melynek minden élhez legalább két pontja illeszkedik, és tegyük fel, hogy π egy lehető legkevesebb pontból álló ilyen rendszer.

Vannak π-ben nem szereplő pontok. Jelöljük ezeket $U_1, \ldots, U_r$-rel $(r \geqq 1)$. Minden olyan élnek, melynek egyik határpontja egy U_i pont, másik határpontja π-ben legalább kétszer fordul elő. Jelöljük a π-ben többször előforduló pontokat $V_1, \ldots, V_s$-sel, az egyszer előforduló pontok számát t-vel. n minimális voltából következik, hogy π-ben egyetlen pont sem szerepelhet kettőnél többször. Ezért $n = 2s + t$ és így az $n < \lambda$ feltevésből, valamint az $r + s + t = \lambda$ egyenlőségből $s < r$ következik. A $\Phi_1 = (U_1, \ldots, U_r)$ és $\Phi_2 = (V_1, \ldots, V_s)$ halmazok tehát eleget tesznek az (1), (2) és (3) feltételeknek.

(II). Megfordítva, tegyük fel, hogy a gráf $\bar{Q}$-tulajdonságú, és legyen $\Phi_1 = (U_1, \ldots, U_r)$ és $\Phi_2 = (V_1, \ldots, V_s)$ az (1), (2) és (3) tulajdonságokkal rendelkező két halmaz. Jelöljük a gráf Φ_1 és Φ_2-ben elő nem forduló pontjait $X_1, \ldots, X_t$-vel. Ha ilyen pontok nincsenek, akkor legyen $t = 0$. A $\pi = (V_1, \ldots, V_s, V_1, \ldots, V_s, X_1, \ldots, X_t)$ pontrendszer pontjainak száma $n = 2s + t < r + s + t = \lambda$. Nyilvánvaló, hogy a gráf bármely éléhez π-nek legalább két pontja illeszkedik.

(I) és (II)-ból, valamint (10. 2. 3)-ból következik TUTTE említett tétele:

Egy gráfnak akkor és csak akkor van Q-faktora, ha nem $\bar{Q}$-tulajdonságú.

11. §.

Ebben a paragrafusban megmutatjuk, hogy *véges* gráfoknál az előzően tárgyalt tételekből hogyan nyerhetők nemcsak egész értékeket felvevő φ és ψ függvények esetén maximum—minimum tételek. Eljárásunkat a (4. 1. 16) TÉTELlel kapcsolatban mutatjuk meg.

11. 1. A láncfogalom általánosítása. Racionális értékű φ és ψ függvények

(11. 1. 1). A **11.** §-ban, ha más kikötést nem teszünk, pont- és élláncon a gráf pontjain, ill. alapélein értelmezett *tetszőleges valós értékeket* felvevő $p(X)$, ill. $f(x)$ függvényt értünk. A $\varphi(X)$ és $\psi(x)$ függvényekről sem tesszük fel az egészértékűséget, csak azt kötjük ki, hogy valós értékűek legyenek, valamint, hogy *φ a* **11.** *§-ban ne vegyen fel negatív értékeket.* A φ, ill. ψ függvényre vonatkozó mindazon egyenlőségeket és egyenlőtlenségeket, melyekben az argumentum nincs feltüntetve minden X-re, ill. minden x-re fennállónak gondoljuk. Az előző paragrafusokban értelmezett mindazon fogalmakat és jeleket, melyekben az egészértékűség nem játszik szerepet — ha másképp nem rendelkezünk — változatlan definícióval a tetszőleges valós értékű függvények esetében is használni fogjuk. Pl. g zárt lánc, ha minden X-re $(g, X) = \sum_x g(x)(x, X) = 0$. Az előzőekben igazolt tételek közül mindazok, melyekben az egészértékűség mellékes, érvényesek maradnak a nem egész értékű esetekben is. Körön továbbra is egy (2. 5. 16) alatt értelmezett egész értékű $k(x)$ láncot értünk. Kiemeljük, hogy a (2. 5. 17) tétel, bizonyításával együtt változatlanul érvényes tetszőleges valós értékű láncokra is. A (2. 5. 18) tételre, valamint ennek **2. 6** alatti, pozitív láncokra vonatkozó megfelelőjére ugyanezt kimondhatjuk azzal a megjegyzéssel, hogy a λ_i számok egész voltát természetesen nem követeljük meg. Az említett **2. 6** alatti tételből a szóbanforgó módosítással létrehozott tételre a (2. 5. 18a) megjelöléssel fogunk hivatkozni.

A G_r, ill. P_l jellel valamennyi pozitív zárt elférő éllánc, ill. pozitív lefogó pontlánc halmazát jelöljük. Az egész értékű pozitív zárt elférő élláncok, ill. az egész értékű pozitív lefogó pontláncok halmazát G_r^*, ill. P_l^*-gal jelöljük. $G_r^* \subset G_r$, $P_l^* \subset P_l$. A φ-re tett kikötések miatt G_r és G_r^* nem üres. (2. 5. 18a) következtében változatlanul érvényes a (4. 1. 12) tétel, és ebből kifolyólag a (4. 1. 13) tétel is. P_l és P_l^* tehát nem üresek. Kiemeljük, hogy (4. 1. 14)-hez hasonlóan belátható, hogy ha $g \in G_r$ és $p \in P_l$, akkor $\psi(g) \leq \varphi(p)$. Erre a megállapitásra (4. 1. 14a) megjelöléssel fogunk hivatkozni. Bevezetjük a

$$\max_{g \in G_e} \psi(g) = \mu, \quad \min_{p \in P_l} \varphi(p) = \bar{\mu}$$
$$\max_{g \in G_e^*} \psi(g) = \mu^*, \quad \min_{p \in P_l^*} \varphi(p) = \bar{\mu}^*$$

jeleket. A μ^* és $\bar{\mu}^*$ értékek létezése könnyen belátható, μ és $\bar{\mu}$ létezését a későbbiek során bizonyítjuk be.

(11. 1. 2). *Ha φ és ψ egész értékű függvények, akkor μ és $\bar{\mu}$ léteznek, és $\mu = \bar{\mu}$, továbbá van olyan g_0 és p_0, melyekre $g_0 \in G_e^*$, $p_0 \in P_l^*$ és $\psi(g_0) = \mu$, $\varphi(p_0) = \bar{\mu}$.*

BIZONYÍTÁS: Legyenek g_0 és p_0 olyan láncok, melyekre $g_0 \in G_e^*$, $p_0 \in P_l^*$ és $\psi(g_0) = \mu^*$, $\varphi(p_0) = \bar{\mu}^*$. (4. 1. 16) szerint $\psi(g_0) = \varphi(p_0)$. Ha $g \in G_e$ és $p \in P_l$, akkor (4. 1. 14a) miatt $\psi(g) \leqq \varphi(p_0)$ és $\psi(g_0) \leqq \varphi(p)$. Ezekből $\psi(g) \leqq \psi(g_0)$ és $\varphi(p_0) \leqq \varphi(p)$ következik. Megállapíthatjuk tehát, hogy $\mu = \psi(g_0)$ és $\bar{\mu} = \varphi(p_0)$, valamint hogy $\mu = \bar{\mu}$.

(11. 1. 3). *Ha φ és ψ racionális értékű függvények, akkor μ és $\bar{\mu}$ léteznek és $\mu = \bar{\mu}$, továbbá ha n olyan pozitív egész szám, melyre $\varphi' = n\varphi$ és $\psi' = n\psi$ egész értékű függvények, akkor van olyan g_0 és p_0, melyekre $g_0 \in G_e$, $p_0 \in P_l$, ng_0 és np_0 egész értékűek, és $\psi(g_0) = \mu$, $\varphi(p_0) = \bar{\mu}$.*

BIZONYÍTÁS: (11. 1. 2) szerint φ' és ψ'-höz van olyan g_0' és p_0', melyekre $g_0' \in G_e^{*\prime}$, $p_0' \in P_l^{*\prime}$ és $\psi'(g_0') = \mu' = \bar{\mu}' = \varphi'(p_0')$. (A vesszővel megjelölt menynyiségeknek φ' és ψ'-vel kapcsolatban ugyanaz a jelentésük, mint a megfelelő vessző nélküli jeleknek φ és ψ-vel kapcsolatban.) Könnyen belátható, hogy $g_0 = \frac{1}{n} g_0'$ és $p_0 = \frac{1}{n} p_0'$-re $g_0 \in G_e$ és $p_0 \in P_l$. Ugyancsak belátható, hogy ha $g \in G_e$ és $p \in P_l$, akkor $g' = ng$ és $p' = np$-re $g' \in G_e'$ és $p' \in P_l'$.

Fennállnak a $\psi'(g') \leqq \psi'(g_0')$ és $\varphi'(p') \geqq \varphi'(p_0')$ egyenlőtlenségek. Ezekből n^2-tel való osztás révén $\psi(g) \leqq \psi(g_0)$ és $\varphi(p) \geqq \varphi(p_0)$ adódik. E szerint a μ és $\bar{\mu}$ értékek valóban léteznek: $\mu = \psi(g_0) = \frac{1}{n}\mu'$, $\bar{\mu} = \varphi(p_0) = \frac{1}{n}\bar{\mu}'$. Fennáll a $\mu = \bar{\mu}$ egyenlőség, és biztosítva van a kívánt tulajdonságú g_0 és p_0 láncok létezése.

11. 2. Tetszőleges valós értékű φ és ψ függvények esete

Legyenek φ és ψ — a **11. 2** pontban rögzített — tetszőleges valós értékeket felvevő (a $\varphi \geqq 0$ feltételnek eleget tevő) függvények. Megmutatjuk, hogy a μ és $\bar{\mu}$ értékek ekkor is léteznek, valamint hogy $\mu = \bar{\mu}$.

(11. 2. 1). Tartalmazza az $X_1, \ldots, X_\lambda$, ill. az $x_1, \ldots, x_\nu$ sorozat a gráf valamennyi pontját, ill. alapélét, éspedig mindegyiket egyszer. Tekintsünk egy λ és egy ν dimenziós euklideszi teret, és jelöljük ezeket R_λ, ill. R_ν-vel. A $p(X)$ pontláncot meghatározó, $(p(X_1), \ldots, p(X_\lambda))$ értékrendszerhez egy R_λ-beli, az $f(x)$ élláncot meghatározó $(f(x_1), \ldots, f(x_\nu))$ értékrendszerhez egy R_ν-beli pontot rendelünk, melyeket p, ill. f-fel jelölünk. Ezzel a pont-, illetve élláncokat egy-egyértelműen megfeleltettük az R_λ, ill. az R_ν tér pontjanak. A P_l és G_e halmazoknak R_λ és R_ν egy-egy ponthalmaza felel meg, melyeket P_l, ill. G_e-vel jelölünk.

A P_l és G_e halmazok zártak. Ugyanis ha $f_1, f_2, \ldots \to f$, akkor $(f_n, X) \to \to (f, X)$ és $|f_n, X| \to |f, X|$. Ezért ha $f_n \in G_e$ $(n = 1, 2, \ldots)$, akkor $f \in G_e$. Hasonlóan látható be P_l zártsága is.

A G_e halmaz korlátos. Ez abból következik, hogy ha $g \in G_e$, akkor $0 \leqq g \leqq 2\varphi_m$, ahol $\varphi_m = \max(\varphi(X_1), \ldots, \varphi(X_\lambda))$. Miután $\psi(g)$ g-nek folytonos függvénye, $\psi(g)$ a G_e korlátos és zárt halmazon felveszi μ maximumát.

A P_l halmaznak kiválasztjuk egy korlátos zárt részhalmazát. E célból P_l minden egyes p eleméhez hozzárendeljük a $p'(X) = \min(p(X), \psi_K)$ pontláncot, ahol $\psi_K = \max\limits_{k \in K} |\psi(k)|$ (K a pozitív körök halmaza). Látható, hogy $p' \in P_l$ és $\varphi(p') \leqq \varphi(p)$. Jelöljük P_l valamennyi eleméből a fenti hozzárendelés révén megalkotott p' pontláncok halmazát P_l'-vel. P_l'-nek $[P_l']$ lezázása is korlátos és $[P_l'] \subset P_l$. $\varphi(p)$ a p változónak folytonos függvénye. Ez a $[P_l']$ halmazon felveszi minimumát, amely minimum, a hozzárendelés $\varphi(p') \leqq \leqq \varphi(p)$ tulajdonsága miatt egyben φ-nek P_l-beli $\bar{\mu}$ minimumát is jelenti.

(11. 2. 2). $\mu = \bar{\mu}$.

Bizonyítás*: Legyenek $\varphi^{(n)}$ és $\psi^{(n)}$ racionális értékű függvények $(n = 1, 2, \ldots)$, és tegyük fel, hogy

(1) $$\lim_{n \to \infty} \varphi^{(n)} = \varphi, \quad \lim_{n \to \infty} \psi^{(n)} = \psi, \quad \varphi^{(n)} \geqq 0.$$

(Általában jelentsenek a felső (n) indexszel megjelölt mennyiségek $\varphi^{(n)}$ és $\psi^{(n)}$-nel kapcsolatban ugyanazt, mint a megfelelő index nélküliek φ és ψ-vel kapcsolatban.)

(11. 1. 3) és (11. 2. 1) szerint található olyan $g_0^{(n)} \in G_e^{(n)}$ és $p_0^{(n)} \in P_l^{(n)}$, melyekre

(2) $$\psi^{(n)}(g_0^{(n)}) = \varphi^{(n)}(p_0^{(n)})$$

és $(n = 1, 2, \ldots)$

(3) $$p_0^{(n)} \leqq \psi_K^{(n)}.$$

* Az itt közölt — az eredetinél lényegesen rövidebb — bizonyítás Czipszer Jánostól származik.

A $0 \leqq g_0^{(n)} \leqq 2\varphi_m^{(n)}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ egyenlőtlenségekből, valamint (3)- és (1)-ből következik, hogy a $g_0^{(n)}$ és $p_0^{(n)}$ él-, ill. pontláncok halmaza korlátos, és így kiválasztható belőlük egy-egy konvergens részsorozat:

$$g_0^{(i_n)} \to g_0, \quad p_0^{(i_n)} \to p_0.$$

Könnyen belátható, hogy $g_0 \in G_e, p_0 \in P_l$ és $\psi(g_0) = \varphi(p_0)$. Ebből, valamint (4. 1. 14a)-ból következik, hogy $\mu = \bar{\mu}$.

Terminológiajegyzék

(Kiegészítés)

Jelölések

$[w, X]$, $[\omega, X]$, $[\pi, w]$ (9. 2. 1); $|\pi, k|$, $|k, X|$, $|\varkappa, X|$ (9. 2. 4); $|p, X|$ (9. 5. 4). $\tilde{P}_l$, $\tilde{G}_e$ (6. 1. 1); $\tilde{K}$, $\tilde{\Lambda}_e$ (6. 2. 1); $\tilde{\Pi}_l$ (6. 2. 3); G_l (7. 3. 4); P_e (7. 3. 1); Λ_l (7. 5. 1); R_e, R_l (9. 1. 1); Ω_e, Ω_l (9. 2. 2); Σ_e, Σ_l (9. 2. 3); F_e, Q_l (9. 5. 1).

Fogalmak

α-pont (9. 2. 1); aciklikus gráf (9. 3. 5); alapirányú út (9. 2. 1); $\acute{a}$-lefogó (6. 1. 1), (6. 2. 3); $\acute{a}$-körlánc (6. 2. 1); $\acute{a}$-körlefogó (6. 2. 1); $\acute{a}$-körrendszer (6. 2. 3); $\alpha\beta$-út (9, 2. 1); β-pont (9. 2. 1) elférő pontlánc (7. 3. 1); elférő útrendszer (9. 2. 2); 1-elférő (9. 3. 6); 2-elférő (9. 5. 6); elérhető pont (8. 2. 2), (8. 3. 1); élrendszer (9. 3. 6); éllefogó pontlánc (9. 5. 3); 1-faktor (10. 1. 1); Q-faktor (10. 2. 1); lefogó körlánc (7. 5. 1); lefogó lánc (7. 1. 1); lefogó útrendszer (9. 2. 2); 1-lefogó (9. 3. 6); 2-lefogó (9. 5. 6); l-kitérő (7. 1. 1); lUV-kitérő (7. 1. 1); pont-élrendszer (9. 1. 1); útrendszer (9. 2. 1); útelférő (9. 2. 3); útlefogó (9. 2. 3); véges lánc **8. 1**.

Kiegészítés

A **9. 1** részben utaltunk azokra az (1. 2) és (1. 3) TÉTELekből nyerhető tételekre, melyeknél a φ függvényt a gráf *alapélein* értelmezzük. Időközben kiderült, hogy e tételeknek közvetlen, az (1. 2) és (1. 3) TÉTELek bizonyításához hasonló felépítésű igazolása sokkal rövidebben végezhető el, mint maguknak az (1. 2) és (1. 3) TÉTELeknek a bizonyítása. Az éleken értelmezett φ függvénnyel kapcsolatos tételekből azonban egy FORD és FULKERSONtól származó — (9. 1. 4) alatt már alkalmazott — eljárással ([5] 212. o.) igen egyszerűen nyerhetők azok a tételek, melyeknél a φ függvény a pontokban van értelmezve. Ezen az úton az (1. 2) és (1. 3), ill. a (4. 1. 16) és (7. 3. 7) TÉTELeknek a dolgozatunkban közöltnél lényegesen egyszerűbb bizonyításához juthatunk.

A következőkben a (4. 1. 16), ill. az (1. 2) TÉTELlel kapcsolatban közöljük ezt az egyszerűbb bizonyítást. Tárgyalásunk során az előző paragrafusokból csak az alább felsorolt részek egyes fogalmait és tételeit használjuk fel: **1. §**, **2. 1**, (2. 2. 1)—(2. 2. 8), **2. 3**, (2. 4. 1)—(2. 4. 8), **2. 5**, **2. 6**, (3. 1. 1), **4. 1**, **5. §**.

K. 1. Jelentsen $\varphi(x)$ és $\psi(x)$ az irányított Γ gráf x alapélein értelmezett — a **K. 1**, **K. 2** és **K. 3** szakaszokban rögzített — egész értékű függvényeket. Feltesszük, hogy $\varphi \geqq 0$. Azokat az x alapéleket, melyekre $\varphi(x) = 0$ *0-éleknek* nevezzük. Ha $f(x)$ tetszőleges éllánc, akkor $\varphi(f) = \sum_x' f(x)\varphi(x)$ és $\psi(f) = \sum_x' f(x)\psi(x)$.

A $h(x)$ és $f(x)$ *pozitív* láncok illeszkedési rendjén a $|h, f| = \sum_x' h(x)f(x)$ értéket értjük.

Az $f(x)$ láncot φ-re vonatkozóan *elférőnek*, (röviden: elférő) mondjuk, ha minden x-re $|f(x)| \leqq \varphi(x)$, azaz röviden, ha $|f| \leqq \varphi$. G''-vel az elférő pozitív zárt láncok halmazát jelöljük. A $g = 0$ láncra, valamint Γ végességére való tekintettel megállapítható, hogy G'' nem üres véges halmaz.

A **K. 1**, **K. 2** és **K. 3** szakaszokban a $h(x)$ pozitív élláncot *lefogónak*, ill. *körlefogónak* nevezzük, ha minden pozitív zárt g láncra, ill. minden pozitív k körre $|h, g| \geqq \psi(g)$, ill. $|h, k| \geqq \psi(k)$. (4. 1. 12)-hoz hasonlóan belátható, hogy a lefogó és körlefogó pozitív élláncok halmaza egymással azonos. E halmazt H'-lel jelöljük. (4. 1. 13)-hoz hasonlóan belátható, hogy H' nem üres. (4. 1. 14)-hez hasonlóan belátható a következő állítás:

(K. 1. 1). *Ha* $g \in G''$ *és* $h \in H'$, *akkor* $\psi(g) \leqq \varphi(h)$.

A **K. 2** és **K. 3** szakaszokban a (4. 1. 16)-nak megfelelő alábbi tételt igazoljuk:

(K. 1. 2). TÉTEL:

$$\max_{g \in G''} \psi(g) = \min_{h \in H'} \varphi(h).$$

K. 2. A **K. 1**-ben foglaltakból nyilvánvaló, hogy a (K. 1. 2)-ben szereplő szélső értékek léteznek. Legyen $a \in G''$ és legyen $\psi(a) = \max_{g \in G''} \psi(g)$. A **K. 2** és **K. 3** szakaszokban az a láncot rögzítettnek gondoljuk. (K. 1. 1) miatt (K. 1. 2) bizonyításához elegendő egy olyan $h(x)$ láncot szerkeszteni, melyre $h \in H'$ és $\varphi(h) = \psi(a)$. Egy ilyen $h(x)$ szerkesztését több lépésben végezzük el.

(K. 2. 1). Egy $c(x)$ láncot *UV-kitérőnek* nevezünk az $U = V$ esetben, ha $c = 0$, az $U \neq V$ esetben, ha c UV-út és $0 \leqq a + c \leqq \varphi$.

Egy k kört *körkitérőnek* nevezünk, ha $0 \leqq a + k \leqq \varphi$. (A $k = 0$ kör is körkitérő.)

Értelmezésünkből egyszerűen belátható az alábbi három megállapítás:

(K. 2. 2). *A c UV-kitérőt annak egy tetszőleges Z pontja a c_1 UZ-kitérőre és a c_2 ZV-kitérőre bontja szét* ($c_1 + c_2 = c$, $c_1 \subset c$, $c_2 \subset c$).

(K. 2. 3). *Ha c_1 UV-kitérő, c_2 VW-kitérő és a c_1 és c_2 kitérőknek V-n kívül nincs közös pontjuk, akkor $c_1 + c_2$ UW-kitérő.*

(K. 2. 4). *Ha c_1 UV-kitérő, c_2 VU-kitérő és c_1 és c_2-nek U és V-n kívül nincs más közös pontja, akkor $c_1 + c_2$ körkitérő.*

(K. 2. 5). *Ha k körkitérő, akkor $\psi(k) \leqq 0$.*

BIZONYÍTÁS: Ha k körkitérő, akkor $a + k \in G'$, tehát $\psi(a + k) = \psi(a) + \psi(k) \leqq \psi(a)$.

(K. 2. 6). *Ha c UV-kitérő és az $e = VW$ él pedig VW-kitérő, akkor van olyan c' UW-kitérő, melyre $\psi(c) + \psi(e) \leqq \psi(c')$.*

BIZONYÍTÁS: Ha W nem pontja c-nek, akkor (K. 2. 3) szerint $c' = c + e$ megfelelő. Ha W c-nek pontja, akkor (K. 2. 2) szerint W c-t a c_1 UW-kitérőre és a c_2 WV-kitérőre bontja szét. (K. 2. 4) szerint $k = c_2 + e$ körkitérő, tehát (K. 2. 5) alapján $\psi(k) = \psi(c_2) + \psi(e) \leqq 0$. Ezért a $c_1 = c + e - k$ UW-kitérőre $\psi(c_1) = \psi(c) + \psi(e) - \psi(k) \geqq \psi(c) + \psi(e)$.

K. 3. A gráf egy X pontjához tartozó $L(X)$ halmazon valamennyi UX-kitérő halmazát értjük, ahol U a gráf tetszőleges pontja. A $c = 0$ XX-kitérőre, valamint Γ véges voltára való tekintettel megállapítható, hogy $L(X)$ nem üres véges halmaz. E szerint

$$s(X) = \max_{c \in L(X)} \psi(c)$$

minden X pontra létező véges érték.

(K. 3. 1). *Ha az $e = XX'$ él XX'-kitérő, akkor* $s(X) + \psi(e) \leqq s(X')$.

BIZONYÍTÁS: Legyen c olyan UX-kitérő, melyre $\psi(c) = s(X)$. (K. 2. 6) szerint van olyan c' UX'-kitérő, melyre $\psi(c) + \psi(e) \leqq \psi(c')$. Mivel $\psi(c') \leqq s(X')$, azért $s(X) + \psi(e) \leqq s(X')$.

(K. 3. 2). Jelöljük a 0-élt tartalmazó pozitív körök ψ értékeinek maximumát ψ_1^0-gyel, és legyen $\psi^0 = \max(0, \psi_1^0)$.

A $h(x)$ élláncot a következőképpen értelmezzük:

(1) ha $\varphi(x) = 0$, akkor legyen $h(x) = \psi^0$,

(2) ha $\varphi(x) > 0$ és $a(x) = 0$, akkor legyen $h(x) = 0$,

(3) ha $a(x) > 0$, akkor legyen $h(x) = s(X) - s(X') + \psi(x)$, ahol X és X' az x alapél kezdő, ill. végpontja,

(K. 3. 3). $h \geqq 0$.

Bizonyítás: Csak a (K. 3. 2) alatti (3) esettel kell foglalkozni. Legyen x olyan él, melyre $a(x) > 0$. x kezdő és végpontja X és X', és legyen az $e = X'X$ él alapéle x. Ekkor $e(x) = -1$, $\psi(e) = -\psi(x)$. e $X'X$-kitérő, mert $0 \leqq a + e \leqq a \leqq \varphi$. (K. 3. 1) szerint $s(X') + \psi(e) \leqq s(X)$, tehát $h(x) = s(X) - s(X') + \psi(x) \geqq 0$.

(K. 3. 4). *Ha $a(x) < \varphi(x)$, és x kezdő és végpontja X és X', akkor* $s(X) - s(X') + \psi(x) \leqq 0$.

Bizonyítás: Legyen az $e = XX'$ él alapéle x. Ekkor $e(x) = 1$, $\psi(e) = \psi(x)$. e XX'-kitérő, mert $0 \leqq a + e \leqq \varphi$. (K. 3. 1) szerint $s(X) + \psi(e) \leqq s(X')$, tehát $s(X) - s(X') + \psi(x) \leqq 0$.

(K. 3. 4)-ből következik az alábbi két állítás:

(K. 3. 5). *Ha $\varphi(x) > 0$, $a(x) = 0$ és X és X' az x alapél kezdő- és végpontja, akkor* $h(x) \geqq s(X) - s(X') + \psi(x)$.

(K. 3. 6). *Ha $0 < a(x) < \varphi(x)$, akkor $h(x) = 0$.*

(K. 3. 7). *$h(x)$ lefogó.*

Bizonyítás: Elegendő h körlefogó voltát igazolni. Legyen k tetszőleges pozitív kör. A $|h, k| \geqq \psi(k)$ egyenlőtlenséget kell bizonyítanunk. Feltehető, hogy $k \neq 0$.

Ha k tartalmaz egy 0-élt, azaz van z, melyre $k(z) = 1$ és $\varphi(z) = 0$, akkor $|h, k| = \sum\limits_x' h(x) k(x) \geqq h(z) = \psi^{\circ} \geqq \psi(k)$.

Ha k nem tartalmaz 0-élt, akkor legyen k egy bejárása $\xi = (X_0 e_1 X_1 \ldots$ $\ldots X_{n-1} e_n X_n)$ $(X_n = X_0)$. Jelöljük e_i alapélét x_i-vel. (K. 3. 2) és (K. 3. 5) szerint $h(x_i) \geqq s(X_{i-1}) - s(X_i) + \psi(x_i)$. $(i = 1, \ldots, n)$. Ezeket az egyenlőtlenségeket összeadva $|h, k| = \sum\limits_{i=1}^{n}{}' h(x_i) \geqq \sum\limits_{i=1}^{n}{}' \psi(x_i) = \psi(k)$ adódik.

(K. 3. 8). *Ha a k pozitív kör csupa a-élből áll, akkor $|h, k| = \psi(k)$.*

Bizonyítás: Az előző bizonyítás jelöléseit használva $h(x_i) = s(X_{i-1}) - s(X_i) + \psi(x_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$. Ezeket az egyenlőtlenségeket összeadva kapjuk a bizonyítandó állítást.

(K. 3. 9). *$\varphi(h) = \psi(a)$.*

Bizonyítás: Minden x-re $h(x)\varphi(x) = h(x)a(x)$. Ugyanis, ha $h(x) = 0$, akkor nyilvánvaló állításunk, ha $h(x) \neq 0$ és $a(x) = 0$, akkor $\varphi(x) = 0$ miatt igaz, ha $h(x) \neq 0$ és $a(x) \neq 0$, akkor (K. 3. 2) és (K. 3. 6)-ból következik helyessége.

2.6 szerint $a = \sum\limits_{i=1}^{n}{}' k_i$, $k_i \subset a$, k_i pozitív kör $(i = 1, \ldots, n)$. Ebből

(K. 3. 9) bizonyításának és (K. 3. 8) felhasználásával kapjuk, hogy

$$\varphi(h) = \sum_x{}' h(x)\varphi(x) = \sum_x{}' h(x)a(x) = \sum_x{}' h(x)\left(\sum_{i=1}^{n}{}' k_i(x)\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}{}'\left(\sum_x{}' h(x)k_i(x)\right) = \sum_{i=1}^{n}{}' |h, k_i| = \sum_{i=1}^{n}{}' \psi(k_i) = \psi(a).$$

Ezzel a (K. 1. 2) TÉTEL bizonyítását befejeztük.

K. 4. A (4. 1. 16) TÉTEL bizonyítását (K. 1. 2)-re vezetjük vissza. E célból [vö. [5] 212. o. és (9. 1. 4)] Γ-ból oly módon hozunk létre egy új Γ'' gráfot, hogy Γ minden egyes X pontját egy X^- és egy X^+ pontra „hasítjuk ketté", majd X^--hoz illesztjük az eredetileg X-be befutó, X^+-hoz pedig az X-ből kifutó éleket, és egy új, z_X-szel jelölt éllel összekötjük a X^- pontot az X^+ ponttal (z_X-nek X^- a kezdő- és X^+ a végpontja). Γ'' tehát az X^- és X^+ pontokból, a Γ gráf x alapéleiből és az új z_X alapélekből áll. E konstrukció legfontosabb következménye, hogy Γ'' minden pozitív köre egy X^- (ill. X^+) ponttal együtt tartalmazza az X^+ (ill. az X^-) pontot és a z_X élt. Ez lehetővé teszi, hogy Γ és Γ'' pozitív körei (s ezzel együtt pozitív zárt láncai) között egy természetesen adódó kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést létesítsünk. Ugyancsak kézenfekvő megfeleltetés létesíthető Γ pozitív pontláncai és Γ'' azon pozitív élláncai között, melyek csak az új z_X alapéleken vesznek fel pozitív értékeket.

A (4. 1. 16)-ban szereplő — a Γ gráf pontjain, ill. élein értelmezett — $\varphi(X)$ és $\psi(x)$ függvényből egy-egy, a Γ'' élein értelmezett φ' és ψ' függvényt alkotunk meg: az eredeti x éleken $\varphi'(x)$ értékét elegendő nagynak választjuk, pl. legyen $\varphi'(x) = (1+\varphi_m)(1+\mu_1)$ $[\varphi_m = \max_{x\in\Phi} \varphi(X),\ \mu_1 = \min_{p\in P_l} \varphi(p)]$ és legyen $\psi'(x) = \psi(x)$, az új z_X éleken pedig legyen $\varphi'(z_X) = \varphi(X)$ és $\psi'(z_X) = 0$.

Az említett megfeleltetések segítségével könnyen belátható, hogy a Γ'', φ' és ψ'-re alkalmazott (K. 1. 2) TÉTEL a Γ, φ és ψ-re vonatkozó (4. 1. 16) TÉTEL érvényességét igazolja.

K. 5. A (4. 1. 16) TÉTELből az **5.** § szerint nyerjük az (1. 2) TÉTELt.

A fenti eljáráshoz hasonló módon nyerhetünk a (7. 3. 7) és az (1. 3) TÉTELre is egyszerű bizonyítást. (Ez a bizonyítás — alkalmas átalakítással — legnagyobb részében a (K. 1. 2)-re adott bizonyítással összevonva is elvégezhető.)

A (K. 1. 2) TÉTEL érvényessége a **8.** §-ban foglaltakhoz hasonlóan — a bizonyítás egyszerű módosításával — végtelen gráfokra is kiterjeszthető. A bizonyítás más irányú átalakításával pedig elérhető, hogy a tétel fennállása nemcsak egész értékeket felvevő φ, ψ függvényekre és élláncokra is igazolást nyerjen. (Ily módon elkerülhető a **11.** §-ban alkalmazott kiterjesztési eljárás.)

IRODALOM

[1] G. B. DANTZIG and D. R. FULKERSON: On the max-flow min-cut theorem of networks, Linear Inequalities and Related Systems, *Annals of Math. Study*, **38** (1956) 215—221.

[2] R. P. DILWORTH: A decomposition theorem for partially ordered sets, *Annals of Math.*, **51** (1950) 161—166.

[3] EGERVÁRY J.: Matrixok kombinatorikus tulajdonságairól, *Mat. és Fiz. Lapok*, **XXXVIII** (1931) 16—27.

[4] L. R. FORD, JR. and D. R. FULKERSON: Maximal flow through a network, *Canadian J. of Math.*, **VIII** (1956) 399—404.

[5] L. R. FORD, JR. and D. R. FULKERSON: A simple algorithm for finding maximal network flows and an application to the Hitchcock problem, *Canadian J. of Math.*, **IX** (1957) 210—218.

[6] T. GALLAI (GRÜNWALD): Ein neuer Beweis eines Mengerschen Zatzes, *J. of the London Math. Soc.*, **13** (1938) 188—192.

[7] D. KÖNIG: *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen*, Leipzig, (1936).

[8] K. MENGER: *Kurventheorie*, Leipzig und Berlin, (1932) 221—228.

[9] W. T. TUTTE: The 1-factors of oriented graphs, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **4** (1953) 922—931.

(Beérkezett: 1957. IX. 7. A „Kiegészítés" beérkezett: 1957. XII. 23.)