A GEOMETRIAI OBJEKTUMOK ELMÉLETÉHEZ

(I. RÉSZ)

ACZÉL JÁNOS (Debrecen)

BEVEZETÉS

0. 1. § Értelmezések, történet, célkitűzés

1. DEFINÍCIÓ: 1937-ben jelent meg J. A. SCHOUTEN—J. HAANTJES [1] (ld. Irodalomjegyzék) és A. WUNDHEILER [2] cikke, melyek meglevő és részben már így nevezett fogalmakból és eredményekből (ezekre nézve lásd pl. [1], [18], [55]) általánosítva, mai alakjában, precízen definiálják a *geometriai objektum* fogalmát. Ezt mi itt a következő formában ismertetjük (vö. [55]).

Az *n-komponensű*

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

mennyiség, mely az *m-dimenziós* tér egy pontjában van értelmezve, *geometriai objektum*, ha e *tér*

$$\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m\}$$

koordinátarendszerének egy (reguláris)

$$\bar{\xi}^k = \varphi^k(\xi^j), \qquad \left|\frac{\partial \bar{\xi}^k}{\partial \xi^j}\right| \neq 0$$

$j, k = 1, 2, \ldots, m$ *koordinátatranszformációjánál** a

$$\bar{z} = f[z, \varphi^k(\xi^j)]$$

* Részletesen kiírva

$$\begin{aligned} \bar{\xi}^1 &= \varphi^1(\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^m), \\ \bar{\xi}^2 &= \varphi^2(\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^m), \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \bar{\xi}^m &= \varphi^m(\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^m), \end{aligned} \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial \bar{\xi}^1}{\partial \xi^1} & \frac{\partial \bar{\xi}^1}{\partial \xi^2} & \cdots & \frac{\partial \bar{\xi}^1}{\partial \xi^m} \\ \frac{\partial \bar{\xi}^2}{\partial \xi^1} & \frac{\partial \bar{\xi}^2}{\partial \xi^2} & \cdots & \frac{\partial \bar{\xi}^2}{\partial \xi^m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial \bar{\xi}^m}{\partial \xi^1} & \frac{\partial \bar{\xi}^m}{\partial \xi^2} & \cdots & \frac{\partial \bar{\xi}^m}{\partial \xi^m} \end{vmatrix} \neq 0.$$

A következőkben is gyakran fog egy szimbólum az indexek összes megengedett értékeinek behelyettesítésével kapható összesség helyett állni.

transzformációs képlettel transzformálódik, ahol *az f funkcionális alakja* már *független a koordinátarendszertől.* A $\varphi^k(\xi^j)$ függvényekről fel szokták tenni, hogy *analitikusak* (vagy hogy annyiszor folytonosan deriválhatók, ahányadik derivált az adott meggondolásban előfordul). Így $\bar{z}$-nak a $\varphi^k(\xi^j)$ *függvényektől* való függése helyettesíthető *megszámlálhatóan sok paramétertől,* pl. e függvények Taylor sorának együtthatóitól való függéssel.

Ha e $\varphi^k(\xi^j)$ függvényektől való függés már *véges sok* (p darab), ezek által már meghatározott

$$\{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_p\} = \{\sigma_1[\varphi^k(\xi^j)], \sigma_2[\varphi^k(\xi^j)], \ldots, \sigma_p[\varphi^k(\xi^j)]\} = S$$

paramétertől való függéssel leírható:

$$\bar{z} = f(z, S), \tag{1}$$

úgy *speciális geometriai* objektummal van dolgunk. — Így speciális r-ed *osztályú* az objektum, ha

$$S = \{\xi^j, \bar{\xi}^k, A_j^k, A_{j_1 j_2}^k, \ldots, A_{j_1 j_2 \ldots j_r}^k\},$$

ahol

$$A_{j_1 j_2 \ldots j_q}^k = \frac{\partial^q \bar{\xi}^k}{\partial \xi^{j_1} \partial \xi^{j_2} \cdots \partial \xi^{j_q}}\bigg|_{\xi_j = \xi_j^0}, \quad |A_j^k| \neq 0, \quad \begin{matrix} k, j, j_i = 1, 2, \ldots, m \\ q = 1, 2, \ldots, r \end{matrix}$$

$$p = m\left[2 + m + \binom{m+1}{2} + \cdots + \binom{m+r-1}{r}\right] = m\left[\binom{m+r}{r} + 1\right]$$

tehát, ha

$$\bar{z} = f(z, \xi^j, \bar{\xi}^k, A_j^k, A_{j_1 j_2}^k, \ldots, A_{j_1 j_2 \ldots j_r}^k). \tag{2}$$

V. WAGNER [16], S. GOŁĄB [26] és A. NIJENHUIS [55] kimutatták, hogy elég az ún. *tiszta differenciális geometriai* (röviden *differenciális geometriai,* vagy *differenciálgeometriai*) *objektum*okkal foglalkozni, amelyeknél a (2) transzformációs képletben $\xi^j, \bar{\xi}^k$ *nem szerepel:*

$$\bar{z} = f(z, A_j^k, A_{j_1 j_2}^k, \ldots, A_{j_1 j_2 \ldots j_r}^k), \quad \left(p = m\left[\binom{m+r}{r} - 1\right]\right), \tag{3}$$

mert ezekre visszavezethetők a nem tiszta differenciális geometriai objektumok is. A visszavezetés az ekvivalencia fogalma segítségével történik.

Egy y objektum *függvénye* a z objektumnak, ha

$$y = u(z), \tag{4}$$

ahol az u függvény (mely m darab m-változós függvény összességét jelenti) *független a koordinátarendszertől* ([35], [55]). *y ekvivalens* z-vel, ha a (4)-ben szereplő u függvény ezen kívül *egyértelműen megfordítható:*

$$z = u^{-1}(y).$$

A nem tiszta differenciális geometriai objektumok abban az értelemben vezethetők vissza a tiszta differenciálisokra, hogy ha az előbbiekhez a koordinátákat komponensekként hozzávesszük, az így nyert geometriai objektum ekvivalens lesz egy tiszta differenciális geometriai objektumból ugyancsak a koordináták hozzávételével előálló geometriai objektummal. Így mi is csak differenciálgeometriai objektumokkal (a következőkben röviden: objektumokkal) foglalkozunk. Ez annál is előnyösebb, mert míg a koordinátatranszformációk és velük az

$$S=\{\xi^j, \bar{\xi}^k, A_j^k, A_{j_1 j_2}^k, \ldots, A_{j_1 j_2 \ldots j_r}^k\}$$

paraméterek két transzformáció összetételére nézve nem alkotnak csoportot (félcsoportot se) csak ún. gruppoidot [55] (az S-sel jellemzett koordinátatranszformáció után csak akkor végezhető el a

$$T=\{\eta_i^k, \bar{\eta}_i^l, B_k^l, B_{k_1 k_2}^l, \ldots, B_{k_1 k_2 \ldots k_r}^l\}, \qquad \left(B_{k_1 k_2 \ldots k_q}^l = \frac{\partial^q \bar{\eta}_i^l}{\partial \eta_i^{k_1} \partial \eta_i^{k_2} \cdots \partial \eta_i^{k_q}}\bigg|_{\eta^k = \overset{0}{\eta}{}^k}\right.$$

-val jellemzett második koordinátatranszformáció, ha $\eta_i^k = \bar{\xi}^k$), addig a differenciálgeometriai objektumoknál a paraméterek a koordinátatranszformációk összetételére, mint műveletre nézve mindig csoportot alkotnak:

$$S \circ T = \{A_j^k, A_{j_1 j_2}^k, \ldots, A_{j_1 j_2 \ldots j_r}^k\} \circ \{B_k^l, B_{k_1 k_2}^l, \ldots, B_{k_1 k_2 \ldots k_r}^l\} =$$
$$= \{C_j^l, C_{j_1 j_2}^l, \ldots, C_{j_1 j_2 \ldots j_r}^l\},$$

ahol pl.

$$C_j^l = \sum_{k=1}^{m} B_k^l A_j^k = B_k^l A_j^k, \qquad C_{j_1 j_2}^l = B_k^l A_{j_1 j_2}^k + B_{k_1 k_2}^l A_{j_1}^{k_1} A_{j_2}^{k_2}$$

stb. az összetett függvények deriválásának szabálya szerint. (Szorzásban ismételten előforduló indexre nézve mindig összegezünk.) — E csoportnak gyakran *alcsoportjait és az azokhoz tartozó objektumokat* fogjuk vizsgálni.

Abból ugyanis, hogy az (1)-ben (vagy (3)-ban) szereplő f függvény független a koordinátatranszformációtól, és abból, hogy két koordinátatranszformáció egymás után való elvégzése ugyanolyan hatással kell legyen z-re, mint az egyesített koordinátatranszformáció, következik, hogy

$$\bar{\xi}^k = \varphi^k(\xi^j), \quad \bar{\bar{\xi}}^l = \psi^l(\bar{\xi}^k) = \psi^l[\varphi^k(\xi^j)]$$

-nál

$$f[f(z, S), T] = f(z, S \circ T), \tag{5}$$

illetve

$$\begin{aligned} f[f(z, A_j^k, A_{j_1 j_2}^k, \ldots, A_{j_1 j_2 \ldots j_r}^k), B_k^l, B_{k_1 k_2}^l, \ldots, B_{k_1 k_2 \ldots k_r}^l] = \\ = f(z, C_j^l, C_{j_1 j_2}^l, \ldots, C_{j_1 j_2 \ldots j_r}^l) \end{aligned} \tag{6}$$

lesz, ahol

$$A^k_{j_1 j_2 \ldots j_q} = \frac{\partial^q \bar{\xi}^k}{\partial \xi^{j_1} \partial \xi^{j_2} \cdots \partial \xi^{j_q}} \bigg|_{\xi^j = \xi^j_0}, \qquad B^l_{k_1 k_2 \ldots k_q} = \frac{\partial^q \bar{\bar{\xi}}^l}{\partial \bar{\xi}^{k_1} \partial \bar{\xi}^{k_2} \cdots \partial \bar{\xi}^{k_q}} \bigg|_{\bar{\xi}^k = \bar{\xi}^k_0},$$

$$C^l_{j_1 j_2 \ldots j_q} = \frac{\partial^q \bar{\bar{\xi}}^l}{\partial \xi^{j_1} \partial \xi^{j_2} \cdots \partial \xi^{j_q}} \bigg|_{\xi^j = \xi^j_0}, \text{ pl. } C^l_j = B^l_k A^k_j,\ C^l_{j_1 j_2} = B^l_k A^k_{j_1 j_2} + B^l_{k_1 k_2} A^{k_1}_{j_1} A^{k_2}_{j_2}, \ldots$$

Az *egydimenziós* objektumoknál megfelelő jelöléseink a következők lesznek:

(I) $$\bar{\xi} = \varphi(\xi), \qquad \alpha_q = \frac{d^q \bar{\xi}}{(d\xi)^q} \bigg|_{\xi = \xi_0}, \qquad \alpha_1 \neq 0,$$

(7) $$\bar{z} = f(z, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$$

(8) $$f[f(z, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r), \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r] = f(z, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_r),$$

(II) $$\bar{\bar{\xi}} = \psi(\bar{\xi}) = \psi[\varphi(\xi)],\ \beta_q = \frac{d^q \bar{\bar{\xi}}}{(d\bar{\xi})^q} \bigg|_{\bar{\xi} = \bar{\xi}_0},\ \gamma_q = \frac{d^q \bar{\bar{\xi}}}{(d\xi)^q} \bigg|_{\xi = \xi_0},$$

pl. $\gamma_1 = \beta_1 \alpha_1,\ \gamma_2 = \beta_1 \alpha_2 + \beta_2 \alpha_1^2,\ \gamma_3 = \beta_1 \alpha_3 + 3\beta_2 \alpha_1 \alpha_2 + \beta_3 \alpha_1^3, \ldots$

(az összetett függvény differenciálási szabálya szerint).

Látjuk, hogy a többkomponensű z mennyiséget egy (indexnélküli) betűvel jelöltük. Gyakran célszerű lesz a direkt összeg és szorzat

(9) $$y \pm z = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \pm z_1 \\ y_2 \pm z_2 \\ \vdots \\ y_n \pm z_n \end{pmatrix}$$

és

(10) $$y \cdot z = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 z_1 \\ y_2 z_2 \\ \vdots \\ y_n z_n \end{pmatrix}$$

jelöléseit is használnunk.

Azonos komponens-, dimenzió- és osztályszámú geometriai objektumokat gyakran azonos *típusúak*nak fogunk nevezni.

Néha fontosak a *lineáris* geometriai objektumok, amelyeknek transzformációs képletében (pl. (1), (2), (3), (7)-ben) z első fokon szerepel.

Így például a *sűrűségek*, köztük a

$$(\overline{dr}) = (dr)\,|A^k_j| \qquad (j, k = 1, 2, \ldots, m)$$

transzformációs képletű térfogatdifferenciálok egykomponensű m-dimenziós elsőosztályú lineáris (differenciálgeometriai) objektumok; a *vektorok*, köztük a

$$\bar{r}^k = A^k_j r^j \qquad (k = 1, 2, \ldots, m)$$

transzformációs képletű kontravariáns vektorok m-komponensű m-dimenziós elsőosztályú lineáris objektumok; a *tenzorok,* köztük a

$$\bar{a}_{ij} = \bar{A}^k_i \bar{A}^l_j a_{kl} \qquad \left(i, j = 1, 2, \ldots, m;\ \bar{A}^k_i = \frac{\partial \xi^k}{\partial \bar{\xi}^i}\right)$$

transzformációs képletű kétszer kovariáns tenzorok (ilyenek a kvadratikus alakok együtthatói) m^2 — (általában m^n) — komponensű m-dimenziós elsőosztályú lineáris objektumok; *az affin leképezés objektuma* a

$$\bar{\Gamma}^q_{ij} = A^q_n \bar{A}^k_i \bar{A}^l_j \Gamma^n_{kl} + A^q_k \bar{A}^k_{ij} \qquad \left(i, j, q = 1, 2, \ldots, m;\ \bar{A}^k_{ij} = \frac{\partial^2 \xi^k}{\partial \bar{\xi}^i \partial \bar{\xi}^j}\right)$$

transzformációs képlettel (ilyen a másodfajú Christoffel-szimbólum) m^3-komponensű m-dimenziós másodosztályú lineáris objektum; viszont például egy kétdimenziós kontravariáns vektor két komponensének $t = \frac{v^2}{v^1}$ hányadosa a

$$\bar{t} = \frac{A^2_2 t + A^2_1}{A^1_2 t + A^1_1}$$

transzformációs képlet szerint transzformálódik és így egykomponensű kétdimenziós elsőosztályú *nemlineáris* differenciálgeometriai objektum.

2. KLASSZIFIKÁCIÓELMÉLET: Az adott típusú objektumok meghatározásával (ekvivalenciától eltekintve teljes felsorolásával) foglalkozó klasszifikációelmélet a legnagyobb terjedelemben kidolgozott ága a geometriai objektumok elméletének, mégis a tárgyban rejlő rendkívüli nehézségek miatt mindezideig csak igen primitív objektumtípusok teljes felsorolása sikerült.

Így S. GOLĄB [4], [5] meghatározta az ún. *Δ-típusú objektumokat,* melyeknek

$$\bar{z} = f(z, |A^k_j|)$$

a transzformációképlete. Ez lényegében azonos feladat az *egykomponensű, egydimenziós, elsőosztályú objektumok* meghatározásával. S. GOLĄB az f függvényt folytonosan differenciálhatónak tételezte fel.

J. S. DUBNOV [24] és G. PENSOV [19], [38] a (7)-ben szereplő f függvény *analiticitását* feltételezve intézték el az összes *egykomponensű egydimenziós* objektumokat, amennyiben bebizonyították, hogy ezek *legfeljebb harmadosztályúak lehetnek* és meghatározták az *első-, másod- és harmadosztályú* ilyen objektumokat (mindenesetre az elsőosztályúakra adott felsorolásuk nem teljes). Ők V. WAGNER [16], [34] nyomán a problémát a Lie-csoportok elméletére vezették vissza. Mint S. GOLĄB [18], [27], [36] rámutatott, e módszerrel nem is csökkenthető az analiticitás feltétele. Ő direkt módszerével, mely lényegében függvényegyenleteknek differenciálással való megoldásán alapul, elérte és élesítette ugyanezen eredményeket, az f függvényről ismét csak *folytonos* *differenciálhatóságot* tételezve fel ([4], [5], [18], [23], [27]). Így ő is bebizonyította, hogy nincs harmadiknál magasabb osztályú egykomponensű egydimenziós objektum és meghatározta az első-, másod- és harmadosztályúakat. Ezekről kimutatta, hogy a skalárokon és biskalárokon (koordinátatranszformációnál invariáns, ill. sign $|A_j^k|$, speciálisan sign α_1-gyel szorzódó objektumokon) kívül mind ekvivalensek a következő objektumok egyikével:

$$\bar{y} = \frac{y}{\alpha_1} \qquad \textit{(közönséges sűrűség)}, \tag{11}$$

$$\bar{y} = \frac{y}{|\alpha_1|} \qquad \textit{(Weyl-féle sűrűség)}, \tag{12}$$

$$\bar{y} = \frac{y}{\alpha_1} + \frac{\alpha_2}{\alpha_1^2} \qquad \textit{(az affin összefüggés objektuma)}, \tag{13}$$

$$\bar{y} = \frac{y}{\alpha_1} - \frac{3}{2}\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^4} + \frac{\alpha_3}{\alpha_1^3} \qquad \textit{(a projektív összefüggés objektuma)}, \tag{14}$$

amelyek a zárójelben megnevezett ismert lineáris objektumok egykomponensű, egydimenziós esetei.

A jelen dolgozat I. RÉSZében ugyanezeket az eredményeket kapjuk (tehát mind azt, hogy a harmadiknál magasabb osztályú objektumok nem léteznek, mind pedig az első három osztálybeliek felsorolását) a (7)-beli f-re vonatkozó mindennemű *differenciálhatósági feltétel nélkül,* csupán (az első és az utolsó változóban való) *folytonosságot* és azt tételezve fel, hogy $f(z, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$ semelyik z-nél *nem független* α_r*-től.* Amennyiben, mint ez szokásos, feltesszük, hogy bármely z és y-hoz van $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ úgy, hogy $f(z, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r) = y$ (y a z-ből „elérhető") legyen, úgy ez utóbbi feltétel csak azt jelenti (lásd [18], [27]), hogy $f(y, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$ valóban függ α_r-től, tehát objektumaink *pontosan* r-edosztályúak. Itt feltesszük, hogy $f(z, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$ *minden* $\alpha_1 \neq 0, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$-re és $r \geqq 2$ esetén *egy,* $r = 1$ esetén *két intervallumban fekvő* z-kre van definiálva. Amennyiben a fentihez hasonló elérhetőségi feltétel, továbbá folytonosság és az is fel van tételezve, hogy

$$f(z, 1, 0, \ldots, 0) = z$$

(identikus koordinátatranszformációnál az objektum nem változik), úgy ez utóbbi feltevés mindig teljesül ([4], [18]). Érdekes, hogy a jelen dolgozatban követett módszerrel, mely függvényegyenleteknek differenciálás nélkül való megoldásán alapszik, rövidebb, bár gyakran finomabb meggondolásokkal érünk célt. Különösen a harmadiknál magasabb osztályú objektumok nem-létezésének bizonyítása rövidült meg lényegesen [27]-hez képest (vö. [76]). — Három ismételten felhasznált ismert tételt az eredetitől ([27] és [42]) kissé eltérő alakban újra bebizonyítunk a **0. 2** és az **1. 2** paragrafusban.

Az *egykomponensű többdimenziós* objektumok klasszifikációját G. PENSOV [19] végezte el. A *többkomponensű* objektumok közül az ún. *„egyszerű“* objektumokat, melyeknek nincs olyan (4) függvénye, amely alacsonyabb osztályú lenne, mint az eredeti objektum, V. WAGNER [34] határozta meg. G. PENSOV [38] kimutatta, hogy n-komponensű egydimenziós objektum legfeljebb $(2n+1)$-edosztályú lehet, de ezek közül csak (az egy- és) a kétkomponensűeket határozza meg. A *kétkomponensű többdimenziós* objektumokat is feldolgozta [49]. Mindezen munkák *analiticitási* feltevésekkel élnek. S. GOLĄB [21], [36] kétszeri deriválhatóság feltevésével határozta meg az elsőosztályú egykomponensű többdimenziós objektumokat.

A *kétkomponensű egydimenziós* objektumok közül bizonyos *speciális alakúakat* O. E. GHEORGHIU analiticitásnál gyengébb feltételek mellett is meghatároz (pl. [43], [53], [66]), azonban lényegesen többet használ fel, mint amenynyit explicite feltételez.

G. PENSOVnak *kétkomponensű egydimenziós* objektumokra vonatkozó eredményei ([38]) az *első-, másod- és harmadosztályú* esetben azt mondják ki, hogy ezek az objektumok mindig *ekvivalensek vagy olyan objektumokkal, amelyek egykomponensű objektumokra bomlanak fel* (tehát az első komponens külön transzformálódik, mint ugyanolyan, vagy alacsonyabb osztályú egykomponensű objektum és hasonlóan a második komponens is), *vagy a*

$$\bar{y}_1 = \frac{y_1}{\alpha_1}, \quad \bar{y}_2 = \frac{y_2}{\alpha_1^2} + y_1 \frac{\alpha_2}{\alpha_1^3} - \frac{3}{2} \frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^4} + \frac{\alpha_3}{\alpha_1^3} \tag{15}$$

transzformációs képletű *Pensov-féle lineáris objektummal.*

Mi a jelen dolgozat II. RÉSZében, felhasználva egy általunk ([77]) bebizonyitott tételt általános alakú *speciális objektumok* transzformációs képletének alakjáról bizonyos elég szoros megoldhatósági feltételek mellett, bebizonyítjuk, hogy *akárhány komponensű egydimenziós első-, másod- és harmadosztályú objektumok* mindig *ekvivalensek vagy egykomponensű objektumokra felbomló objektumokkal, vagy a Pensov-féle objektummal* (utóbbi természetesen csak a kétkomponensű harmadosztályú egydimenziós objektumoknál fordul elő). Feltevéseink a

$$f\left[\begin{pmatrix} y_0 \\ \varepsilon_1 \end{pmatrix}, \eta_1\right] = x, \text{ ill. } f\left[\begin{pmatrix} y_0 \\ \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix}, \eta_1, \eta_2\right] = x, \text{ ill. } f\left[\begin{pmatrix} y_0 \\ \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{pmatrix}, \eta_1, \eta_2, \eta_3\right] = x, \tag{16}$$

ill.

$$f\left[\begin{pmatrix} \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{pmatrix}, 1, \eta_2, \eta_3\right] = x, \tag{17}$$

ill.

$$f\left[\begin{pmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\end{pmatrix}, \eta_1, 0, \eta_3\right] = x \tag{18}$$

$\{y_0$ $(n-r)$-dimenziójú; ε_1, ε_2, ε_3 konstans) n-komponensű [(17) és (18)-ban $n=2$] egyenletek *egyértelmű megoldhatóságát* követelik meg az

$$y=\begin{pmatrix}y_0\\ \eta_1\end{pmatrix}, \text{ ill. } y=\begin{pmatrix}y_0\\ \eta_1\\ \eta_2\end{pmatrix}, \text{ ill. } y=\begin{pmatrix}y_0\\ \eta_1\\ \eta_2\\ \eta_3\end{pmatrix},$$

$$\text{ill. } y=\begin{pmatrix}\eta_2\\ \eta_3\end{pmatrix}, \text{ ill. } y=\begin{pmatrix}\eta_1\\ \eta_3\end{pmatrix} \qquad (\eta_1 \neq 0)$$

n-komponensű mennyiségekre vonatkozóan. (18) esetén még egy további, pl. egy pontban való differenciálhatóságra vonatkozó feltételre is van szükség (vö. [78]). Bár e feltételek speciálisnak tűnnek, HOSSZÚ M. [80] azóta bebizonyította, hogy minden megoldhatósági feltétel nélkül sem kapunk lényegesen más transzformácios képletű objektumokat.

3. KOVARIÁNS DERIVÁLT: Az egydimenziós ξ mennyiségtől függő z vektor deriváltját

$$z' = z'(\xi) = \frac{dz}{d\xi} = \begin{pmatrix}\frac{dz_1}{d\xi}\\ \vdots\\ \frac{dz_n}{d\xi}\end{pmatrix}$$

-vel jelöljük. Egy

$$y = u(z)$$

vektor-vektorfüggvény deriváltja az

$$u'(z) = \left\|\frac{\partial u_l}{\partial z_k}\right\| \qquad (k, l = 1, 2, \ldots, n)$$

mátrix. Ilyen függvények deriválására hasonló tételek érvényesek, mint közönséges függvényekre (összeg, szorzat, összetett és inverz függvények stb. deriválása). Pl.

$$\begin{gathered}(u^{-1}\{u[z(\xi)]\cdot x(\xi) + y(\xi)\})' = \\ u'(u^{-1}\{u[z(\xi)]\cdot x(\xi) + y(\xi)\})^{-1}\{u'[z(\xi)]z'(\xi)\cdot x(\xi) + u[z(\xi)]\cdot x'(\xi) + y'(\xi)\},\end{gathered} \tag{19}$$

ahol $+$-szal, ill. ponttal a (9)-ben, ill. (10)-ben definiált direkt összeget, ill. szorzatot, pont nélkül egymás mellé írva mátrix vektorral való szorzatát jelöltük. $u^{-1}(y)$ az u függvény inverz függvénye, $u'(z)^{-1}$ az $u'(z)$ mátrix inverze.

Ezek után értelmezhetjük a *kovariáns deriváltat* az egydimenziós térben definiált objektumokra (jelen dolgozatunkban csak erre lesz szükségünk), mint *a z objektumból*, $\frac{dz}{d\xi}$ *deriváltjából és egy eggyel magasabb osztályú y segédobjektumból alkotott*

$$Dz = g\left(z, \frac{dz}{d\xi}, y\right) \tag{20}$$

függvényt, ahol g alakja *a koordinátarendszertől független és* Dz maga is *z-vel azonos típusú objektum.*

A kovariáns deriváltnak szűkebb értelmezését adta J. A. SCHOUTEN (lásd pl. [64]), ilyen általánosságban S. GOLĄB [58], [59] definiálta és megadta *az egykomponensű első- és másodosztályú egydimenziós objektumok kovariáns deriváltját*, ill. az előbbiek közül csak *a* (11)*-gyel ekvivalens objektumokét*, bizonyítás nélkül, az utóbbiakról pedig bebizonyította, hogy *tetszőleges* reguláris koordinátatranszformáció esetén *nincs* kovariáns deriváltja, de meghatározta az $\alpha_1 = 1$, *ill.* $\alpha_1 > 0$ *koordinátatranszformáció-alcsoporthoz tartozó kovariáns deriváltakat*. A (20)-ban szereplő g függvény *differenciálhatóság*át feltételezi.

A jelen dolgozat III. RÉSZében *tetszőleges komponensszámú egydimenziós első- és másodosztályú objektumok kovariáns deriváltját* határozzuk meg, az I. RÉSZben folytonossági, ill. a II. RÉSZben a (16) és (17) megoldhatósági feltételek mellett nyert objektumokat tekintve, *anélkül, hogy a* (20)*-beli g függvényről bármit feltennénk.* Természetesen ezek az eredmények tartalmazzák GOLĄB fenti eredményeit (vö. [79]).

Befejezésül néhány nyílt problémát említünk meg.

Talán ha szokatlan is, de nem lesz érdektelen, hogy az IRODALOMJEGYZÉKben minden általunk ismert, közvetlenül a geometriai objektumok elméletével foglalkozó munka szerepel.

0. 2. § Segédtétel

1. ÖSSZETETT FÜGGVÉNY DERIVÁLTJAI: S. GOLĄB [27] egy lemmáját itt valamivel élesebb alakban bizonyítjuk. Az általunk itt használt

$$\bar{\xi} = \varphi(\xi), \quad \bar{\bar{\xi}} = \psi(\bar{\xi}) = \psi[\varphi(\xi)],$$

$$\frac{d^q\bar{\xi}}{(d\xi)^q} = \alpha_q, \quad \frac{d^q\bar{\bar{\xi}}}{(d\bar{\xi})^q} = \beta_q, \quad \frac{d^q\bar{\bar{\xi}}}{(d\xi)^q} = \gamma_q = \gamma_q(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q; \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q) \tag{21}$$

jelöléssel az összetett függvény differenciálási szabálya szerint

$$\gamma_1 = \beta_1\alpha_1, \quad \gamma_2 = \beta_1\alpha_2 + \beta_2\alpha_1^2, \quad \gamma_3 = \beta_1\alpha_3 + 3\beta_2\alpha_1\alpha_2 + \beta_3\alpha_1^3, \tag{22}$$

$$\gamma_4 = \beta_1\alpha_4 + \beta_4\alpha_1^4 + 4\beta_2\alpha_1\alpha_3 + 6\beta_3\alpha_1^2\alpha_2 + 3\beta_2\alpha_2^2, \ldots \tag{23}$$

Általában érvényes a következő

1. SEGÉDTÉTEL: *A (21) jelöléssel minden $q \geqq 4$-re*

$$\gamma_q = \beta_1\alpha_q + \beta_q\alpha_1^q + q\beta_2\alpha_1\alpha_{q-1} + \binom{q}{2}\beta_{q-1}\alpha_1^{q-2}\alpha_2 + \tag{24}$$
$$+ \tilde{\gamma}_q(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{q-2}; \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{q-2})$$

érvényes, ahol

$$\tilde{\gamma}_q = \alpha_2\delta_2 + \alpha_3\delta_3 + \cdots + \alpha_{q-2}\delta_{q-2} = \beta_2\varepsilon_2 + \beta_3\varepsilon_3 + \cdots + \beta_{q-2}\varepsilon_{q-2} \tag{25}$$

és δ_p az $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{q-2}, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{q-2}$-nek, ε_p pedig az $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{q-2}$-nek polinomja ($p = 2, 3, \ldots, q-2$).

BIZONYÍTÁS: (23) mutatja, hogy az állítás $q = 4$-re igaz. ($\tilde{\gamma}_4 = 3\beta_2\alpha_2^2$). Teljes indukcióval bizonyítunk. Ha (24)—(25) q-ra igaz, úgy deriváljuk (24)-et:

$$\gamma_{q+1} = \gamma_q' = \beta_1\alpha_{q+1} + \beta_2\alpha_1\alpha_q + q\beta_q\alpha_1^{q-1}\alpha_2 + \beta_{q+1}\alpha_1^{q+1} +$$
$$+ q\beta_2\alpha_1\alpha_q + q\beta_2\alpha_2\alpha_{q-1} + q\beta_3\alpha_1^2\alpha_{q-1} + \binom{q}{2}\beta_{q-1}\alpha_1^{q-2}\alpha_3 + \binom{q}{2}(q-2)\beta_{q-1}\alpha_1^{q-3}\alpha_2^2 +$$
$$+ \binom{q}{2}\beta_q\alpha_1^{q-1}\alpha_2 + \tilde{\gamma}_q' = \beta_1\alpha_{q+1} + \beta_{q+1}\alpha_1^{q+1} + (q+1)\beta_2\alpha_1\alpha_q + \binom{q+1}{2}\beta_q\alpha_1^{q-1}\alpha_2 +$$
$$+ \tilde{\gamma}_{q+1}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{q-1}, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{q-1}),$$

ahol

$$\tilde{\gamma}_{q+1}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{q-1}, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{q-1}) =$$
$$= \alpha_2\left[q\beta_2\alpha_{q-1} + \binom{q}{2}(q-2)\beta_{q-1}\alpha_1^{q-3}\alpha_2 + \delta_2'\right] +$$
$$+ \alpha_3\left[\binom{q}{2}\beta_{q-1}\alpha_1^{q-2} + \delta_3' + \delta_2\right] + \cdots + \alpha_{q-2}[\delta_{q-2}' + \delta_{q-3}] + \alpha_{q-1}[q\beta_3\alpha_1^2 + \delta_{q-2}] =$$
$$= \beta_2[q\alpha_2\alpha_{q-1} + \varepsilon_2'] + \beta_3[q\alpha_1^2\alpha_{q-1} + \varepsilon_3' + \alpha_1\varepsilon_2] + \cdots +$$
$$+ \beta_{q-2}[\varepsilon_{q-2}' + \alpha_1\varepsilon_{q-3}] + \beta_{q-1}\left[\binom{q}{2}\alpha_1^{q-2}\alpha_3 + \binom{q}{2}(q-2)\alpha_1^{q-3}\alpha_2^2 + \alpha_1\varepsilon_{q-2}\right]$$

és ezek (24)—(25) alakú képletek, amivel az 1. SEGÉDTÉTELT bebizonyítottuk.

Ebből és (22)-ből folynak a következő

KOROLLÁRIUMOK:

1. Ha egy pontban $\alpha_1 = \beta_1 = 1$, $\alpha_2 = \cdots = \alpha_{r-2} = 0$ $(r \geqq 3)$, akkor ott

$$\gamma_1 = 1,\ \gamma_2 = \beta_2, \ldots, \gamma_{r-2} = \beta_{r-2},\ \gamma_{r-1} = \alpha_{r-1} + \beta_{r-1},\ \gamma_r = \alpha_r + \beta_r + r\beta_2\alpha_{r-1}.$$

2. Ha egy pontban $\alpha_1 = \beta_1 = 1$, $\beta^2 = \cdots = \beta_{r-2} = 0$ $(r \geqq 3)$, akkor ott

$$\gamma_1 = 1,\ \gamma_2 = \alpha_2, \ldots, \gamma_{r-2} = \alpha_{r-2},\ \gamma_{r-1} = \alpha_{r-1} + \beta_{r-1},\ \gamma_r = \alpha_r + \beta_r + \binom{r}{2}\beta_{r-1}\alpha_2.$$

3. Ha egy pontban $\alpha_2 = \alpha_3 = \cdots = \alpha_{r-1} = 0$ $(r \geqq 2)$, akkor ott

$$\gamma_1 = \beta_1\alpha_1,\ \gamma_2 = \beta_2\alpha_1^2, \ldots, \gamma_{r-1} = \beta_{r-1}\alpha_1^{r-1},\ \gamma_r = \beta_1\alpha_r + \beta_r\alpha_1^r.$$

4. Ha egy pontban $\beta_2=\beta_3=\cdots=\beta_{r-1}=0$ $(r\geqq 2)$, akkor ott

$$\gamma_1=\beta_1\alpha_1,\ \gamma_2=\beta_1\alpha_2,\ \ldots,\ \gamma_{r-1}=\beta_1\alpha_{r-1},\ \gamma_r=\beta_1\alpha_r+\beta_r\alpha_1^r.$$

5. Ha egy pontban $\alpha_2=\alpha_3=\cdots=\alpha_{r-1}=\beta_2=\beta_3=\cdots=\beta_{r-1}=0$ $(r\geqq 2)$, akkor ott

$$\gamma_1=\beta_1\alpha_1,\ \gamma_2=\cdots=\gamma_{r-1}=0,\ \gamma_r=\beta_1\alpha_r+\beta_r\alpha_1^r$$

(1 és 2-ben $r=3$ esetén, 3, 4, 5-ben pedig $r=2$ esetén semminek a helyébe nem kell 0-t tennünk).

2. EGYDIMENZIÓS EGY ADDITÍV PARAMÉTERŰ TRANSZFORMÁCIÓSEREG: Az alábbiakban a lehető teljesség kedvéért bizonyítással együtt szerepel a szerző [42]-ben bizonyított tételeiből folyó következő

2. SEGÉDTÉTEL: *Legyen $z\in(a,b)$; $\alpha,\beta\in(-\infty,\infty)$; $g(z,\alpha)\in(a,b)$ (a vagy b vagy mindkettő végtelen is lehet), teljesüljön egy $z=c\in(a,b)$-re*

$$g[g(z,\alpha),\beta]=g(z,\alpha+\beta), \tag{26}$$

legyen továbbá $g(z,\alpha)$ z-ben (minden α-ra) és $g(c,\alpha)$ α-ban folytonos és $g(z,\alpha)$ semelyik $z\in(a,b)$-nél sem konstans α-ban, akkor és csak akkor van oly folytonos és szigorúan monoton $\mu(z)$ függvény, mely (a,b)-t egy-egyértelműen $(-\infty,\infty)$-re képezi le és

$$g(z,\alpha)=\mu^{-1}[\mu(z)+\alpha] \tag{27}$$

(μ^{-1} a μ inverz függvénye). Speciálisan

$$g(z,0)=z. \tag{28}$$

(27) *minden $\alpha\in(-\infty,\infty)$, $z\in(a,b)$-ra is kielégíti* (26)-ot.

BIZONYÍTÁS: Definiáljuk

$$u(\alpha)=g(c,\alpha) \tag{29}$$

-t, akkor (26)-ból $z=c$-vel

$$g[u(\alpha),\beta]=u(\alpha+\beta). \tag{30}$$

Feltevéseink szerint *$u(\alpha)$ folytonos és nem konstans*. Bebizonyítjuk, hogy *szigorúan monoton*. Ha ugyanis volna két $\varepsilon_1<\varepsilon_2$, amelyre

$$u(\varepsilon_1)=u(\varepsilon_2),$$

akkor a folytonosság miatt *egymáshoz tetszőlegesen közel* is volna ilyen. De akkor (30)-ból

$$u[\alpha+(\varepsilon_2-\varepsilon_1)]=g[u(\varepsilon_2),\alpha-\varepsilon_1]=g[u(\varepsilon_1),\alpha-\varepsilon_1]=u(\alpha),$$

tehát *$u(\alpha)$ periodikus a tetszőlegesen kicsiny $(\varepsilon_2-\varepsilon_1)$ periódussal*, vagyis *konstans* volna, feltevésünkkel ellentétben. Tehát $u(\alpha)$ szigorúan monoton.

Bebizonyítjuk továbbá, hogy

$$\lim_{\alpha\to-\infty}u(\alpha)=a,\qquad \lim_{\alpha\to\infty}u(\alpha)=b.$$

Ugyanis, ha pl.

$$\bar{b} \quad \lim_{\alpha\to\infty} u(\alpha) < b$$

az (a, b) intervallumhoz tartozna, akkor (30)-ból $\alpha\to\infty$-nel $g(z, \beta)$ z-ben való folytonossága miatt

$$g(\bar{b}, \beta) = \bar{b}$$

következnék, ellentétben feltevésünkkel, hogy $g(z, \beta)$ semelyik $z \in (a, b)$-nél sem konstans β-ban. Így $\lim\limits_{\alpha\to\infty} u(\alpha) = b$ és hasonlóan $\lim\limits_{\alpha\to-\infty} u(\alpha) = a$ és ezek nem tartoznak az (a, b) intervallumhoz, mely tehát nyílt.

$u(\alpha)$-ról tehát már tudjuk, hogy folytonos, szigorúan monoton és $(-\infty, \infty)$-t egy-egyértelműen leképezi (a, b)-re. Tehát minden $z \in (a, b)$-hez létezik pontosan egy α úgy, hogy $z = u(\alpha)$. Ha $z = u(\alpha)$ inverz függvényét $\alpha = \mu(z)$-vel jelöljük $[u(\alpha) = \mu^{-1}(\alpha)]$, úgy (30)-ból

$$g(z, \beta) = \mu^{-1}[\mu(z) + \beta]$$

lesz, ami (27)-től csak a jelölésben tér el. Fordítva (27) kielégíti feltételeinket és (26)-ot is:

$$g[g(z, \alpha), \beta] = \mu^{-1}\{\mu[g(z, \alpha)] + \beta\} = \mu^{-1}[\mu(z) + \alpha + \beta] = g(z, \alpha + \beta).$$

Végül (27) nyilvánvalóan eleget tesz (28)-nak is, amivel a 2. SEGÉDTÉTELt teljesen bebizonyítottuk.

I. EGYKOMPONENSŰ EGYDIMENZIÓS OBJEKTUMOK

1. 1. § Nincs harmadiknál magasabb osztályú egykomponensű, egydimenziós objektum

1. TÉTEL: *Legyen* $z \in (a, b)$, $\alpha_q \in (-\infty, \infty)$ $(q = 1, 2, \ldots, r)$, $\alpha_1 \neq 0$ *és* $f(z, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r) \in (a, b)$ *folytonos z-ben és* α_r*-ben minden* $\alpha_1 \neq 0, \alpha_2, \ldots, \alpha_{r-1}$ *mellett; továbbá ne legyen olyan y, hogy* $\alpha_1 \neq 0, \alpha_2, \ldots, \alpha_{r-1}$ *minden megválasztásánál* $f(y, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{r-1}, \alpha_r)$ *független* α_r*-től. Akkor a* (I)—(II) *jelölésekkel felírt*

$$(8) \qquad f[f(z, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r), \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r] = f(z, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_r)$$

függvényegyenletnek csak $r \leq 3$ *esetén van megoldása.*

Tehát nincs harmadiknál magasabb osztályú egykomponensű objektum az egydimenziós térben.

A *bizonyítás* itt csakúgy mint a következő tételekben (8) ismételt felhasználásával fokozatosan állapítja meg, hogyan függ f a változóitól. Feltesszük, hogy $r \geq 2$.

Tegyünk először (8)-ba $\alpha_1 = \beta_1 = 1, \alpha_2 = \cdots = \alpha_{r-1} = \beta_2 = \cdots = \beta_{r-1} = 0$-t, akkor az 5. KOROLLÁRIUM szerint

$$f[f(z, 1, 0, \ldots, 0, \alpha_r), 1, 0, \ldots, 0, \beta_r] = f(z, 1, 0, \ldots, 0, \alpha_r + \beta_r).$$

Ez (26) alakú egyenlet és feltevéseink szerint $f(z, 1, 0, \ldots, 0, \alpha)$ folytonos z-ben és α-ban, ha pedig volna oly z, hogy $y = f(z, 1, 0, \ldots, 0, \alpha)$ α-ban konstans volna, úgy $\alpha = -\frac{\alpha_r}{\alpha_1}$ választásával (8)-at és a 3. KOROLLÁRIUMot alkalmazva

$$f(y, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{r-1}, \alpha_r) = f[f(z, 1, 0, \ldots, 0, \alpha), \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{r-1}, \alpha_r] =$$
$$= f(z, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{r-1}, \alpha_1\alpha + \alpha_r) = f(z, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{r-1}, 0)$$

minden $\alpha_1 \neq 0, \alpha_2, \ldots, \alpha_{r-1}$ mellett α_r-ben konstansnak bizonyúlna feltevésünkkel ellentétben.

Tehát alkalmazható a 2. SEGÉDTÉTEL és

$$f(z, 1, 0, \ldots, 0, \alpha) = \mu^{-1}[\mu(z) + \alpha].$$

Ez tehát az $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = \cdots = \alpha_{r-1} = 0$ koordinátatranszformáció alcsoporthoz tartozó objektum transzformációs képlete. Másrészt ebből

(31) $$f(z, 1, 0, \ldots, 0, 0) = z$$

(az identikus koordinátatranszformációnál az objektum nem változik).

Helyettesítsünk most (8)-ba $\alpha_1 = 1$-et és egyrészt

$$\beta_1 = 1, \beta_2 = \cdots = \beta_{r-1} = 0$$

-t, másrészt

$$\alpha_2 = \cdots = \alpha_{r-1} = 0, \quad \alpha_r = -\frac{\beta_r}{\beta_1}$$

-et. A 4., ill. a 3. KOROLLÁRIUM értelmében

(32) $$\mu^{-1}\{\mu[f(z, 1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{r-1}, \alpha_r)] + \beta_r\} = f(z, 1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{r-1}, \alpha_r + \beta_r),$$

ill.

$$f\left\{\mu^{-1}\left[\mu(z) - \frac{\beta_r}{\beta_1}\right], \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{r-1}, \beta_r\right\} = f(z, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{r-1}, 0)$$

lesz az eredmény. Ez utóbbi egyenletbe

$$y = \mu^{-1}\left[\mu(z) - \frac{\beta_r}{\beta_1}\right], \quad z = \mu^{-1}\left[\mu(y) + \frac{\beta_r}{\beta_1}\right],$$

(33) $$\omega(x, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{r-1}) = \mu\{f[\mu^{-1}(x), \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{r-1}, 0]\}$$

-t téve

$$f(y, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{r-1}, \beta_r) = \mu^{-1}\left\{\omega\left[\mu(y) + \frac{\beta_r}{\beta_1}, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{r-1}\right]\right\}$$

-et, tehát

(34) $$f(z, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{r-1}, \alpha_r) = \mu^{-1}\left\{\omega\left[\mu(z) + \frac{\alpha_r}{\alpha_1}, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{r-1}\right]\right\}$$

-et kapunk. Ezzel már fény derült f-nek α_r-től való függésére.

(34)-et $\alpha_1=1$-gyel (32)-be helyettesítve, azt kapjuk, hogy

$$\omega[\mu(z)+\alpha_r, 1, \alpha_2, \dots, \alpha_{r-1}]+\beta_r=\omega[\mu(z)+\alpha_r+\beta_r, 1, \alpha_2, \dots, \alpha_{r-1}],$$

vagy $\mu(z)+\alpha_r=0$, $\beta_r=\zeta$-val

$$\omega(\zeta, 1, \alpha_2, \dots, \alpha_{r-1})=\zeta+\omega(0, 1, \alpha_2, \dots, \alpha_{r-1}).$$

Így végeredményben f-nek z-től való függését tisztáztuk $\alpha_1=1$ esetén. Ezt (34)-be téve

$$f(z, 1, \alpha_2, \dots, \alpha_{r-1}, \alpha_r)=\mu^{-1}[\mu(z)+\alpha_r+\omega(0, 1, \alpha_2, \dots, \alpha_{r-1})].$$

Visszahelyettesítjük (8)-ba $\alpha_1=\beta_1=1$-gyel:

$$\mu(z)+\alpha_r+\omega(0, 1, \alpha_2, \dots, \alpha_{r-1})+\beta_r+\omega(0, 1, \beta_2, \dots, \beta_{r-1})=$$
$$=\mu(z)+\gamma_r+\omega(0, 1, \gamma_2, \dots, \gamma_{r-1}).$$

Most feltesszük, hogy

$$r\geqq 3$$

és $\alpha_2=\dots=\alpha_{r-2}=0$, ill. $\beta_2=\dots=\beta_{r-2}=0$-t helyettesítjük az 1., illetve a 2. KOROLLÁRIUMot alkalmazva:

$$\omega(0, 1, 0, \dots, 0, \alpha_{r-1})+\omega(0, 1, \beta_2, \dots, \beta_{r-1})=r\beta_2\alpha_{r-1}+$$
$$+\omega(0, 1, \beta_2, \dots, \beta_{r-2}, \alpha_{r-1}+\beta_{r-1}),$$

ill.

$$\omega(0, 1, 0, \dots, 0, \beta_{r-1})+\omega(0, 1, \alpha_2, \dots, \alpha_{r-1})=\binom{r}{2}\alpha_2\beta_{r-1}+$$
$$+\omega(0, 1, \alpha_2, \dots, \alpha_{r-2}, \alpha_{r-1}+\beta_{r-1}).$$

Ezen egyenletek összehasonlítása megmutatja, hogy

$$r=\binom{r}{2},$$

tehát

$$r=3,$$

vagyis $r\geqq 4$ nem lehet és ezt kellett bizonyítanunk.

1.2. § A $\bar{\xi}=\varphi(\xi)$, $\varphi'(\xi)\neq 0$, $\varphi''(\xi_0)=\dots=\varphi^{(r-1)}(\xi_0)=0$ koordináta-transzformációalcsoporthoz tartozó r-edosztályú egykomponensű, egydimenziós objektumok

Amit az előző paragrafusban f alakjáról megtudtunk, az ott bebizonyított negatív állításon kívül hozzásegít ahhoz, hogy a legfeljebb harmadosztályú egykomponensű egydimenziós objektumokat (elsősorban a másod- és harmadosztályúakat) meg tudjuk határozni. Erre szolgál a következő

3. SEGÉDTÉTEL: *Legyen* $z\in(a,b)$, $0\neq\alpha_1\in(-\infty,\infty)$, $\alpha_r\in(-\infty,\infty)$ *és* $f(z,\alpha_1,0,\dots,0,\alpha_r)\in(a,b)$ *folytonos* z*-ben* α_r*-ben és nemkonstans* α_r*-ben minden* α_1*-nél. Akkor* $r\geqq 2$ *esetén*

$$(35)\quad f[f(z,\alpha_1,0,\dots,0,\alpha_r),\beta_1,0,\dots,0,\beta_r]=f(z,\beta_1\alpha_1,0,\dots,0,\beta_1\alpha_r+\beta_r\alpha_1^r)$$

általános megoldása

$$(36)\qquad f(z,\alpha_1,0,\dots,0,\alpha_r)=\nu^{-1}\left(\frac{\nu(z)}{\alpha_1^{r-1}}+\frac{\alpha_r}{\alpha_1^r}\right),$$

ahol ν *tetszőleges szigorúan monoton folytonos függvény és* ν^{-1} *az inverze.*

Tehát az $\alpha_1\neq 0,\alpha_2=\dots=\alpha_{r-1}=0$ *koordinátatranszformációalcsoporthoz tartozó r-edosztályú egykomponensű egydimenziós objektumok ekvivalensek az*

$$\bar{y}=\frac{y}{\alpha_1^{r-1}}+\frac{\alpha_r}{\alpha_1^r}\qquad(r\geqq 2)$$

transzformációs képletű objektummal.

Ezt a tételt az f-ről differenciálhatóságot követelve bizonyította be S. GOŁĄB [27].

BIZONYÍTÁS: Az előző paragrafus (34) és (31) képletéből az

$$\omega(\zeta,\alpha_1,0,\dots,0)=\varrho(\zeta,\alpha_1)$$

jelöléssel

$$(37)\qquad f(z,\alpha_1,0,\dots,0,\alpha_r)=\mu^{-1}\left\{\varrho\left[\mu(z)+\frac{\alpha_r}{\alpha_1},\alpha_1\right]\right\}$$

és

$$(38)\qquad \varrho(\zeta,1)=\zeta.$$

(37)-et (35)-be helyettesítve

$$\mu^{-1}\left(\varrho\left\{\varrho\left[\mu(z)+\frac{\alpha_r}{\alpha_1},\alpha_1\right]+\frac{\beta_r}{\beta_1},\beta_1\right\}\right)=\mu^{-1}\left\{\varrho\left[\mu(z)+\frac{\beta_1\alpha_r+\beta_r\alpha_1^r}{\beta_1\alpha_1},\beta_1\alpha_1\right]\right\}$$

-et, vagy $\mu(z)+\frac{\alpha_r}{\alpha_1}=\tau$, $\frac{\beta_r}{\beta_1}=\sigma$, $\alpha_1=\alpha$, $\beta_1=\beta$ jelöléssel

$$(39)\qquad \varrho[\varrho(\tau,\alpha)+\sigma,\beta]=\varrho(\tau+\sigma\alpha^{r-1},\beta\alpha)$$

-et kapunk. Ezt a függvényegyenletet kell megoldanunk. $\tau=0,\beta=1,\sigma\alpha^{r-1}=\zeta$ helyettesítésével (38) miatt

$$(40)\qquad \varrho(\zeta,\alpha)=\varrho(0,\alpha)+\zeta\alpha^{1-r}=\chi(\alpha)+\zeta\alpha^{1-r}$$

-t nyerünk, ami ϱ-nak ζ-tól való függését tisztázza. Visszahelyettesítve (39)-be, lesz

$$[\tau\alpha^{1-r}+\chi(\alpha)+\sigma]\beta^{1-r}+\chi(\beta)=(\tau+\sigma\alpha^{r-1})\alpha^{1-r}\beta^{1-r}+\chi(\alpha\beta),$$

$$\chi(\alpha)\beta^{1-r}+\chi(\beta)=\chi(\alpha\beta)$$

és mivel itt a jobboldal szimmetrikus, a balnak is annak kell lennie:

$$\chi(\alpha)\beta^{1-r}+\chi(\beta)=\chi(\beta)\alpha^{1-r}+\chi(\alpha)$$

$$\frac{\chi(\alpha)}{1-\alpha^{1-r}}=\frac{\chi(\beta)}{1-\beta^{1-r}}=\varkappa \text{ (konstans).}$$

Így

$$\chi(\alpha)=\varkappa(1-\alpha^{1-r})$$

és (40)-ből

$$\varrho(\zeta,\alpha)=(\zeta-\varkappa)\alpha^{1-r}+\varkappa,$$

(37)-ből pedig

$$f(z,\alpha_1,0,\ldots,0,\alpha_r)=\mu^{-1}\{[\mu(z)-\varkappa]\alpha_1^{1-r}+\alpha_r\alpha_1^{-r}+\varkappa\},$$

vagy

$$\mu(z)-\varkappa=\nu(z),\quad \mu^{-1}(\zeta+\varkappa)=\nu^{-1}(\zeta)$$

-val

$$f(z,\alpha_1,0,\ldots,0,\alpha_r)=\nu^{-1}\left[\frac{\nu(z)}{\alpha_1^{r-1}}+\frac{\alpha_r}{\alpha_1^{r}}\right].$$

Ez (36), és mivel (36) mindig kielégíti (35)-öt, a 3. SEGÉDTÉTELt bebizonyítottuk.

1. 3. § Első-, másod- és harmadosztályú egykomponensű, egydimenziós objektumok

1. ELSŐOSZTÁLYÚ OBJEKTUMOK: (8)-ból és (22)-ből $r=1$-re

(41) $$f[f(z,\alpha_1),\beta_1]=f(z,\beta_1\alpha_1),\qquad \alpha_1\neq 0,\ \beta_1\neq 0$$

következik.

Ha ezt $z\in(a,b)$, $\alpha_1\in(0,\infty)$-re vizsgáljuk, úgy a

(42) $$\alpha_1=e^{\alpha},\ \beta_1=e^{\beta},\ f(z,\alpha_1)=f(z,e^{\alpha})=g(z,\alpha)$$

jelöléssel a

(26) $$g[g(z,\alpha),\beta]=g(z,\alpha+\beta)$$

egyenletbe megy át. Ha most $f(z,\alpha_1)$ folytonos z-ben és α_1-ben és semelyik állandó z-nél sem állandó, úgy a 2. SEGÉDTÉTEL értelmében

$$g(z,\alpha)=\mu^{-1}[\mu(z)+\alpha],$$

tehát (42)-vel

(43) $$f(z,\alpha_1)=\nu^{-1}\left(\frac{\nu(z)}{\alpha_1}\right),\ \alpha_1>0,\ f(z,1)=z,$$

ahol

$$\nu(z)=e^{-\mu(z)}>0,\qquad z\in(a,b).$$

Azonban (41)-ben α_1 negatív is lehet (csak 0 nem), azonkívül, mint a BEVEZETÉSben már említettük, z is *két* (esetleg érintkező) *intervallumban helyezkedhet el*, lásd [4], ahol az is szerepel, hogy e két intervallum csak egyszerre zsugorodhat ponttá (a két pont esetleg egybeesik). Az egy, ill. két pontból álló értelmezési tartomány a

$$\bar{z} = z$$

*skalár*okat, ill. az

$$\bar{y} = y \operatorname{sign} \alpha_1$$

-gyel ekvivalens *biskalár*okat (pszeudoskalárokat) adja ([4]). Ezeket itt figyelmen kívül hagyjuk.

A másik, (a_0, b_0)-lal jelölt z-intervallumra is áll a 2. SEGÉDTÉTEL miatt

$$f(z, e^{\alpha}) = g(z, \alpha) = \mu^{-1}[\mu(z) + \alpha].$$

Itt

$$\nu(z) = -e^{-\mu(z)} < 0, \qquad z \in (a_0, b_0)$$

-t írunk és így *pozitív* α_1-ek esetén

$$f(z, \alpha_1) = \nu^{-1}\left(\frac{\nu(z)}{\alpha_1}\right), \quad \alpha_1 > 0, \; f(z, 1) = z \tag{43}$$

mindkét z-intervallumra érvényes $\nu(z) \lesseqgtr 0$-lal aszerint, hogy $z \in \begin{matrix}(a_0, b_0)\\ (a, b).\end{matrix}$

Pozitív α_1-re $f(z, \alpha_1)$ ugyanazon intervallumban fekszik, mint z. Vizsgáljuk most a *negatív* α_1-ek esetét. Az átmenetet pozitív α_1-ekről negatív α_1-ekre az $f(z, -1)$ függvény és (41) alkalmazásával fogjuk megteremteni. (41)-ből és (43)-ból következik

$$f[f(z, -1), -1] = f(z, 1) = z \tag{44}$$

$$\begin{aligned} f(z, \alpha_1) &= f[f(z, -\alpha_1), -1] = f[f(z, -1), -\alpha_1] = \\ &= f\left[\nu^{-1}\left(\frac{\nu(z)}{-\alpha_1}\right), -1\right] = \nu^{-1}\left(\frac{\nu[f(z, -1)]}{-\alpha_1}\right), \qquad \alpha_1 < 0 \end{aligned} \tag{45}$$

vagy a

$$z = c, \quad \nu^{-1}\left(\frac{\nu(c)}{-\alpha_1}\right) = y, \quad \frac{\nu[f(c, -1)]}{\nu(c)} = \delta$$

jelöléssel

$$f(y, -1) = \nu^{-1}[\delta \nu(y)]. \tag{46}$$

Ezt (44)-be téve

$$\nu^{-1}[\delta^2 \nu(z)] = z, \quad \delta^2 \nu(z) = \nu(z), \quad \delta = \pm 1$$

-et kapunk, tehát (45) és (46)-ból következik, hogy *vagy*

$$f(z, \alpha_1) = \nu^{-1}\left(\frac{\nu(z)}{|\alpha_1|}\right) \tag{47}$$

vagy

$$f(z, \alpha_1) = \nu^{-1}\left(\frac{\nu(z)}{\alpha_1}\right). \tag{48}$$

Mindkét képlet $\alpha_1 > 0$ esetén egybeesik (43)-mal, tehát minden $\alpha_1 \neq 0$-ra érvényes. Az is azonnal látható, hogy (47) is, (48) is kielégíti (41)-et. Megemlíthető, hogy az itt fontos szerepet játszott $f(z, -1)$ függvény az (a_0, b_0) és (a, b) intervallumokat az első esetben önmagukra, a második esetben egymásra képezi le.

Eredményünk a következő

2. TÉTEL: *Ha $f(z, \alpha_1)$ z-re nézve (a_0, b_0)-ban és (a, b)-ben, α_1-re nézve pedig $(-\infty, 0)$ és $(0, \infty)$-ben folytonos és nem konstans, úgy* (41) *általános megoldása* (47) *vagy* (48) *alakú, ahol $\nu(z)$ egyértelműen megfordítható függvény. Ha $a_0 = b_0$, $a = b$, úgy f is csak egy $(a_0 = a)$ vagy két $(a_0 \neq a)$ értéket vehet fel.*

Tehát az elsőosztályú egykomponensű egydimenziós objektumok a skalárokon és a biskalárokon kívül vagy az

$$y = \frac{y}{|\alpha_1|} \tag{12}$$

Weyl-féle sűrűséggel, vagy pedig az

$$\bar{y} = \frac{y}{\alpha_1} \tag{11}$$

közönséges sűrűséggel ekvivalens objektumok.

Ez ekvivalens a Δ-típusú objektumokra vonatkozó megfelelő állítással. (BEVEZETÉS **0. 1. § 2.**)

(47), (48)-at néha

$$f(z, \alpha_1) = \mu^{-1}[\mu(z)|\alpha_1|],$$
$$f(z, \alpha_1) = \mu^{-1}[\mu(z)\alpha_1], \qquad \mu(z) = \frac{1}{\nu(z)}$$

vagy

$$f(z, \alpha_1) = \mu^{-1}[\mu(z)\alpha_1^k], \qquad \mu(z) = \nu(z)^{-k}$$

alakba írják (az utóbbi páros $k \neq 0$ esetén (47)-tel, páratlan k esetén (48)-cal ekvivalens).

2. MÁSODOSZTÁLYÚ OBJEKTUMOK: Mint a BEVEZETÉSben említettük, $r \geq 2$-re f-nek z-re vonatkozó értelmezési tartománya *egy* (a, b) intervallumnak vehető ([18]).

A 3. SEGÉDTÉTEL $r = 2$-nél közvetlenül alkalmazható és érvényes a

3. TÉTEL: *Legyen $z \in (a, b)$, $0 \neq \alpha_1 \in (-\infty, \infty)$, $\alpha_2 \in (-\infty, \infty)$ és $f(z, \alpha_1, \alpha_2) \in$ $\in (a, b)$ folytonos z-ben és α_2-ben és nem konstans α_2-ben. Akkor* [(8), (22)]

$$f[f(z, \alpha_1, \alpha_2), \beta_1, \beta_2] = f(z, \beta_1\alpha_1, \beta_1\alpha_2 + \beta_2\alpha_1^2)$$

általános megoldása

$$f(z, \alpha_1, \alpha_2) = \nu^{-1}\left(\frac{\nu(z)}{\alpha_1} + \frac{\alpha_2}{\alpha_1^2}\right),$$

ahol ν tetszőleges folytonos szigorúan monoton függvény a ν^{-1} inverzzel.

Tehát a másodosztályú egykomponensű egydimenziós objektumok mind ekvivalensek az affin leképezés

$$(13) \qquad y = \frac{y'}{\alpha_1} + \frac{\alpha_2}{\alpha_1^2}$$

transzformációs képletű objektumával.

Előfordul az

$$f(z, \alpha_1, \alpha_2) = \mu^{-1}\left(\frac{\mu(z)}{\alpha_1} - \frac{\alpha_2}{\alpha_1^2}\right), \qquad \mu(z) = -\nu(z)$$

írásmód is.

3. HARMADOSZTÁLYÚ OBJEKTUMOK: Ezekre a 3. SEGÉDTÉTELből

$$(49) \qquad f(z, \alpha_1, 0, \alpha_3) = \nu^{-1}\left(\frac{\nu(z)}{\alpha_1^2} + \frac{\alpha_3}{\alpha_1^3}\right).$$

Másrészt (34)-ből $r = 3$-ra

$$\nu(z) = \mu(z) - z, \quad \omega(\zeta + z, \alpha_1, \alpha_2) - z = \varrho(\zeta, \alpha_1, \alpha_2)$$

-vel

$$(50) \qquad f(z, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \nu^{-1}\left\{\varrho\left[\nu(z) + \frac{\alpha_3}{\alpha_1}, \alpha_1, \alpha_2\right]\right\}$$

-et kapunk. E két formulát (8)-nak $r = 3$-ra specializált alakja [(22)]

$$(51) \quad f[f(z, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \beta_1, \beta_2, \beta_3] = f(z, \beta_1\alpha_1, \beta_1\alpha_2 + \beta_2\alpha_1^2, \beta_1\alpha_3 + 3\beta_2\alpha_1\alpha_2 + \beta_3\alpha_1^3)$$

segítségével összekombinálva fogjuk $f(z, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ végleges alakját megkapni.

Valóban, helyettesítsünk (51)-be $\alpha_2 = 0$, ill. $\beta_2 = 0$-t, akkor (49), (50) (és a 3., ill. 4. KOROLLÁRIUM) révén

$$(52) \qquad \varrho\left[\frac{\nu(z)}{\alpha_1^2} + \frac{\alpha_3}{\alpha_1^3} + \frac{\beta_3}{\beta_1}, \beta_1, \beta_2\right] = \varrho\left[\nu(z) + \frac{\beta_1\alpha_3 + \beta_3\alpha_1^3}{\beta_1\alpha_1}, \beta_1\alpha_1, \beta_2\alpha_1^2\right],$$

ill.

$$(53) \qquad \frac{1}{\beta_1^2}\varrho\left[\nu(z) + \frac{\alpha_3}{\alpha_1}, \alpha_1, \alpha_2\right] + \frac{\beta_3}{\beta_1^3} = \varrho\left[\nu(z) + \frac{\beta_1\alpha_3 + \beta_3\alpha_1^3}{\beta_1\alpha_1}, \beta_1\alpha_1, \beta_1\alpha_2\right].$$

Ha mindkét egyenletbe

$$\nu(z) + \frac{\alpha_3}{\alpha_1} = 0, \quad \frac{\beta_3\alpha_1^2}{\beta_1} = \xi, \quad \frac{\beta_3}{\beta_1} = \frac{\xi}{\alpha_1^2} \text{ -t}$$

és (52)-be

$$\beta_1 = 1, \quad \beta_2 \alpha_1^2 = \sigma, \quad \beta_2 = \sigma \alpha_1^{-2}$$

-t, (53)-ba

$$\alpha_2 = \alpha_1^2, \; \beta_1 \alpha_1 = \tau_1, \; \beta_1 \alpha_2 = \beta_1 \alpha_1^2 = \tau_2; \; \alpha_1 = \frac{\tau_2}{\tau_1}, \; \alpha_2 = \left(\frac{\tau_2}{\tau_1}\right)^2, \; \beta_1 = \frac{\tau_1^2}{\tau_2}$$

-t helyettesítünk,

$$\varrho(\zeta, \alpha_1, \sigma) = \varrho\left(\frac{\zeta}{\alpha_1^2}, 1, \frac{\sigma}{\alpha_1^2}\right),$$

ill.

$$\varrho(\zeta, \tau_1, \tau_2) = \frac{\zeta}{\tau_1^2} + \frac{\tau_2^2}{\tau_1^4} \varrho\left[0, \frac{\tau_2}{\tau_1}, \left(\frac{\tau_2}{\tau_1}\right)^2\right] =$$

$$= \frac{\zeta}{\tau_1^2} + \frac{\tau_2^2}{\tau_1^4} \varrho(0, 1, 1) =$$

$$= \frac{\zeta}{\tau_1^2} + \delta \frac{\tau_2^2}{\tau_1^4}$$

-t kapunk (δ konstans). Így (51)-ből

$$f(z, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \nu^{-1}\left(\frac{\nu(z)}{\alpha_1^2} + \delta \frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^4} + \frac{\alpha_3}{\alpha_1^3}\right)$$

lesz.

Hogy a δ konstans értékét meghatározzuk, ezt visszahelyettesítjük (51)-be pl. $\alpha_3 = \beta_3 = 0$-lal:

$$\frac{1}{\beta_1^2}\left(\frac{\nu(z)}{\alpha_1^2} + \delta \frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^4}\right) + \delta \frac{\beta_2^2}{\beta_1^4} = \frac{\nu(z)}{(\beta_1 \alpha_1)^2} + \delta \frac{\beta_1^2 \alpha_2^2 + 2\beta_1 \alpha_2 \beta_2 \alpha_1^2 + \beta_2^2 \alpha_1^4}{(\beta_1 \alpha_1)^4} + \frac{3\beta_2 \alpha_1 \alpha_2}{(\beta_1 \alpha_1)^3}.$$

Így kapunk

$$2\delta + 3 = 0, \qquad \delta = -\frac{3}{2}$$

-t, vagyis

$$f(z, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \nu^{-1}\left(\frac{\nu(z)}{\alpha_1^2} - \frac{3}{2} \frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^4} + \frac{\alpha_3}{\alpha_1^3}\right) \tag{54}$$

-t. (54) minden $z, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$-ra kielégíti (51)-et. — Eredményünk tehát a következő

5. TÉTEL: *Ha* $f(z, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ $[z \in (a, b);\ 0 \neq \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in (-\infty, \infty);$ $f(z, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in (a, b)]$ *folytonos* z*-ben és* α_3*-ban és nem konstans* α_3*-ban, úgy* (51) *általános megoldása* (54) *alakú folytonos és szigorúan monoton* ν*-vel.*

Tehát a harmadosztályú egykomponensű egydimenziós objektumok mind ekvivalensek a projektív leképezés

$$\bar{y} = \frac{y}{\alpha_1^2} - \frac{3}{2} \frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^4} + \frac{\alpha_3}{\alpha_1^3} \tag{14}$$

transzformációs képletű objektumával.

(54) írható az

$$f(z, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \mu^{-1}\left(\frac{\mu(z)}{\alpha_1^2} + \frac{3}{2}\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^4} - \frac{\alpha_3}{\alpha_1^3}\right), \qquad \mu(z) = -\nu(z)$$

alakba is.

IRODALOM

(Nem tartalmazza pl. az objektumok elméletének előtörténetét. Az orosznyelvű cikkek címei — mivel több csak referátumban volt fellelhető — mind „Russ." megjelöléssel más nyelven szerepelnek. Hasonlóan Rum. – román, Holl. – holland. A hiányzó (oldalszám) adatokat nem sikerült megállapítani. A cikkek időrendi sorrendben szerepelnek.)

[1] J. A. Schouten, J. Haantjes: On the theory of the geometric object. *Proceedinges London Math. Soc.*, (2) **42** (1937), 356—376.

[1a] J. A. Schouten, J. Haantjes: Zur Theorie des geometrischen Objektes. *Comptes rendus du Cong. Int. d. Math, Oslo 1936.* II. *Oslo,* 1937, 155–159.

[2] A. Wundheiler: Objekte, Invarianten und Klassifikation der Geometrien. (I. Intern. Konf. f. Tens. Diff. Geo. u. i. Anw., Moskau, 17—23. V. 1934) *Abh. Sem. Vekt.-Tens. An. Mosk.*, **4** (1937) 366—375.

[3] S. Gołąb: Zur Theorie des affinen Zusammenhanges im eindimensionalen Raume. I. *Opusc. Math. A*, **2** (1938) 7–9.

[4] S. Gołąb: Über die Klassifikation der geometrischen Objekte. *mat. Zeitschr.*, **44** (1938) 104—114.

[5] S. Gołąb: Über eine Funktionalgleichung der Theorie der geometrischen Objekte. *Wiadom. Mat.*, **45** (1938), 97—137.

[5a] S. Gołąb: Sur quelques points concernant la notion du comitant. *Annales Soc. Pol. Math.*, **17** (1938) 177—192.

[6] B. Laptev: La théorie de S. Lie des objets géométriques qui dépendent de point et de direction. (Russ.) *Bull. Soc. Ph. Math. Kazan,* (3) **10** (1938) 4—38.

[7] E. T. Davies: Lie-derivation in generalized metric spaces. *Ann. mat. pura appl.*, (4) **18** (1939) 261—274.

[8] S. Gołąb: Über den Begriff der Pseudogruppe von Transformationen. *Math. Ann.*, **116** (1939) 768—780.

[9] A. D. Michal, A. B. Mewborn: Géométrie différentielle projective générale des géodésiques généralisées. *Comptes Rendus, Paris,* **209** (1939) 392—394.

[10] B. Laptev: Une forme invariante de la variation et la dérivée de S. Lie. (Russ.) *Bull. Soc. Ph. Math, Kazan,* (3) **12** (1940) 3—8.

[11] T. C. Doyle: Tensor decomposition with application to the contact and complex groups *Annals of Math.*, (2) 42 (1941) 698—722.

[12] N. Teodorescu: La géométrie de l'équation des ondes. III., IV. *Bull. Math. Soc. Roum. Sci.*, **43** (1941) 59—68; **44** (1942) 71—84.

[13] V. Wagner: The absolute derivative of fields of local geometric objects in a compound manifold. *Dokladi Ak. Nauk,* **40** (1943) 94—97.

[14] T. Nakone: Das geometrische Objekt. *Tensor,* **7** (1944) 1—5.

[15] N. Teodorescu: Équations aux dérivées partielles et objets géométriques. *Disquisitiones Math. Phys.*, **4** (1945) 105—118.

[16] V. Wagner: The theory of geometric objects and the theory of finite and infinite continuous groups of transformations. *Dokladi Ak. Nauk.*, **46** (1945) 347—349.

[17] E. Bompiani: Enti geometrici definiti da sistemi differenziali. *Atti Ac. Naz. Lincei Rend.*, (8) **1** (1946) 887—894.

[18] S. Gołąb: Sur la théorie des objets géométriques. *Annales Soc. Pol. Math.*, **19** (1946) 7—35.

[19] G. Pensov: Classification of differential geometric objects of the class v with one component. *Dokladi Ak. Nauk*, **54** (1946) 563—566.

[20] V. Wagner: Constant fields of local geometric objects in compound manifolds with a linear connection. *Dokladi Ak. Nauk*, **53** (1946) 183—186.

[21] S. Gołąb: Sur la théorie des objets géométriques. (Réduction des objets géométriques spéciaux de première classe aux objets du type Δ). *Annales Soc. Pol. Math.*, **20** (1947) 10—27.

[22] O. E. Gheorghiu: Équations aux dérivées partielles et objets géométriques. *Comptes Rendus, Paris*, **227** (1948) 613—615.; *Bulletin Sci. Techn. Polytechn. Timişoara* **13** (1948) 223—233.

[23] S. Gołąb: Alcuni teoremi della teoria degli oggetti geometrici. *Atti Ac. Naz. Lincei Rend.*, (8) **5** (1948) 120—122.

[23a] S. Gołąb: Sur la notion de dérivée covariante. (Congrès Pol. Math. Wroclaw, 1946) *Colloquium Math.*, **1** (1948) 160.

[24] J. S. Dubnov: Tensoren und geometrische Objekte im eindimensionalen Raum. (Russ.) *Abh. Sem. Vekt. Tens. An. Mosk.*, **7** (1949) 3.

[25] O. E. Gheorghiu: Les lois de transformations des objets géométriques spéciaux linéaires de classe v avec une composante en X_1, *Comptes Rendus, Paris*, **229** (1949) 611—613.

[26] S. Gołąb: Sur les objets géométriques non-différentiels. *Bulletin Int. Ac. Pol. Sci. Cl. Sci. Math. Nat. Ser. A Sci. Math.*, **1949** 67—72.

[27] S. Gołąb: Contribution à la théorie des objets géométriques, *Prace Mat.-Fiz.*, **47** (1949) 1—15.

[28] N. N. Mihaileanu: Objets géométriques en géométrie différentielle. *Bul. Sedentilor*, **3** (1949) 29—30.

[29] P. K. Rasevski: Galois theory in fields of geometric objects. (Russ.) *Abh. Sem. Vekt. Tens. An. Mosk.*, **7** (1949) 167—186.

[30] J. A. Schouten: Lie's differential operator. (Holl.) *Math. Centr. Amsterdam Report Z. W.*, (1949) —010, 1—7.

[30a] K. Yano: Groups of transformations in generalized spaces. *Tokyo*, 1949.

[31] G. Vranceanu: Obiecte geometrice de speta a treia. *Bul. Sedentilor*, **3** (1949) 30—34.

[32] V. V. Wagner: Classification of linear connections in a composite manifold $X_{n+(1)}$ according to their holonomy groups. (Russ.) *Abh. Sem. Vekt. Tens. An. Mosk.*, **7** (1949) 205—226.

[33] V. V. Wagner: Theorie der differentiellen Objekten und Grundlagen der Differentialgeometrie. (Russ.) Nachtrag zur russischen Übersetzung der Arbeit „The foundations of differential geometry. *Cambridge*, 1932." von O. Veblen—J. H. C. Whitehead. *Moskau*, 1949.

[34] V. V. Wagner: Classification of simple differential geometric objects. (Russ.) *Dokladi Ak. Nauk*, **69** (1949) 293—296, *Uspechi Mat. Nauk*, **5** (1950), 1 (35) 213—214.

[35] S. Gołąb: La notion de similitude parmi les objets géométriques. *Bulletin Int. Ac. Pol. Sci. Cl. Sci. Math. Nat. Sér. A Sci. Math.*, **1950** 1—7.

[36] S. Gołąb: Sur les objets géométriques à une composante. *Annales Soc. Pol. Math.*, **23** (1950) 79—89.

[36a] A. E. Liber: On the classification of the affine connection in the two-dimensional space. (Russ.) *Mat. Sbornik*, **27 (69)** (1950) 249—266.

[37] J. E. Pensov: The classification of continuous pseudo-groups of Lie transformations according to their characteristic objects. (Russ.) *Abh. Sem. Vekt. Tens. An. Mosk.*, **8** (1950) 382—413.

[38] J. E. Pensov: On differential geometric objects of class v in X_1. (Russ.) *Mat. Sbornik*, **26 (68)**, (1950) 161—182.

[39] Y. Tashiro: Sur la dérivée de Lie de l'être géométrique et son groupe d'invariance. *Tohoku Math. Journ.*, (2) **2** (1950) 166—181.

[40] V. V. Wagner: On the theory of pseudogroups of transformations. (Russ.) *Dokladi Ak. Nauk*, **72** (1950) 453—456.

[41] V. V. Wagner: The theory of composite manifolds. (Russ.) *Abh. Sem. Vekt. Tens. An. Mosk.*, **8** (1950) 11—72.

[42] J. Aczél, L. Kalmár, J. G. Mikusinski: Sur l'équation de translation. *Studia. Math.*, **12** (1951) 112—116.

[43] O. E. Gheorghiu: Determinarea legii de transformarea obiectelor differential geometrice de clasa a II.-a cu doua componente in X_1. *Com. Ac. R. P. R.*, **1** (1951) 1017—1020.

[44] G. F. Laptev: On fields of geometric objectes on imbedded manifolds. (Russ.) *Dokladi Ak. Nauk*, **78** (1951) 197—200.

[45] A. E. Liber: On comitants of geometric differential objects. (Russ.) *Dokladi Ak. Nauk*, **80** (1951) 529—532.

[46] N. N. Mihaileanu: Objets géométriques en géométrie différentielle. (Rum.) *Stu. Cerc. Mat. Ac. R. P. R. In. Mat.*, **1** (1951) 318—373.

[47] N. N. Mihaileanu: Objets géométriques associés aux espaces à connexion projective. (Rum.) *Com. Ac. R. P. R.*, **1** (1951) 165—170.

[48] M. Neumann: Les objets géométriques associés aux surfaces réglées. (Rum.) *Stu. Cerc. Mat. Ac. R. P. R. In. Mat.*, **2** (1951) 445—462.

[49] J. E. Pensov: The classification of geometric differential objects with two components. (Russ.) *Dokladi Ak. Nauk*, **80** (1951) 537—540.

[50] H. Pidek: Sur les objets géométriques de la classe zéro qui admettent une algèbre. *Annales Soc. Pol. Math.*, **24** (1951) 111—128.

[51] J. A. Schouten: Tensor analysis for physicists. *Oxford*, 1951.

[52] V. V. Wagner: The geometry of the generalized Cartan-spaces and the theory of geometric differential objects. (Russ.) *Dokladi Ak. Nauk*, **77** (1951) 777—780.

[53] O. E. Gheorghiu: Un obiect geometric pseudolinear de clasa 1 cu doua componente. *Com. Ac. R. P. R.*, **2** (1952) 1—4.

[54] O. E. Gheorghiu: Sur la théorie des objets géométriques I., II., III. (Rum.) *Ac. R. P. R. Bul. Sti. Soc. S. Mat.-Fiz.*, **4** (1952) 273—284.

[54a] G. F. Laptev: On a new invariant analytic method of differential geometric investigations. (Russ) 125 years of the non-Eudidean geometry of Lobatschewsky. *Moscow—Leningrad*, 1952, 175—178.

[54b] N. Mihaileanu, Asupra invariantilor proiectivi ai ecuatiei lui Laplace. *Ac. R. P. R. Bul. Sti. Sec. S. Mat.—Fiz.*, **4** (1952) 829—832.

[55] A. Nijenhuis: Theory of the geometric object. *Amsterdam*, 1952.

[56] J. Haantjes, G. Laman: On the definition of geometric objects I., II. *Nederl. Acad. Wetensch. Proc. Ser. A.*, **56** *Indag. Math.*, **15** (1953) 208—215., 216—222.

[56a] G. F. Laptev: Differential geometry of imbedded manifolds. (Russ). *Trudy Mosk. Mat. Obs.*, **2** (1953) 275—382.

[57] O. E. Gheorghiu: Determinarea obiectelor geometrice speciale de clasa II. *Bul. St. Timiş.*, **2** (1954), 37—40.

[58] S. Gołąb: Über den Begriff der kovarianten Ableitung. *Nieuw. Arch. voor Wisk.*, (3) **2** (1954) 134—142.

[59] S. Gołąb: Dérivée covariante des objets géométriques. *Annales Pol. Math.*, **1** (1954) 107—113.

[60] J. Haantjes: On the notion of geometric object. *Convegno Int. di Geom. Diff. Ital., 1953. Roma*, 1954, 77—81.

[61] H. Pidek: Sur un problème de l'algèbre des objets géométriques de classe zéro dans l'espace X_1. *Annales Pol. Math.*, **1** (1954) 114—126.

[62] H. Pidek: Sur un problème de l'algèbre des objets géométriques de classe zéro dans l'espace X_n. *Annales Pol. Math.*, 1 (1954) 127—134.

[63] P. K. Rasevski: Linear differential geometric objects. (Russ.) *Dokladi Ak. Nauk*, **97** (1954) 609—611.

[64] J. A. Schouten: Ricci calculus. An introduction to tensor analysis and its geometrical applications. *Berlin—Göttingen—Heidelberg*, 1954.

[65] K. Yano, Y. Tashiro: Some theorems on geometric objects and their applications. *Nieuw Arch. voor Wisk.*, (3) **2** (1954) 134—142.

[66] O. E. Gheorghiu: Obiecte geometrice diferentiale de clasa I. cu doua componente in X_1. *Stu. s. Cerc. Stiint. Timişoara*, **2** (1955) 21—25.

[67] O. E. Gheorghiu: Determinarea obiectelor geometrice lineara de clasa II-a in X_n. *Stu. s. Cerc. Stiint. Timişoara*, **2** (1955) 37—40.

[68] O. E. Gheorghiu: Obiecte geometrice de lege fractionara. *Bul. St. Baza Cercet. Timişoara Ac. R. P. R.*, **6** (1955) 965—988.

[69] O. E. Gheorghiu: Obiecte geometrice speciale avind legea de transformare proiective. *Consf. Geom. Dif. Timişoara*, 1955, 201—208.

[70] O. E. Gheorghiu: Obiecte geometrice asociate sistemelor de ecuatii cu derivate partiale. *Consf. Geom. Dif. Timişoara*, 1955, 231—237.

[71] S. Gołąb, M. Kucharzewski: Zur Theorie der geometrischen Objekte. *Annales Pol. Math.*, 2 (1955) 250—253.

[72] M. H. Kuyper, K. Yano: On geometric objects and Lie-groups of transformations. *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A*, **58** *Indag. Math.*, **17** (1955) 411—420.

[73] J. E. Pensov: On bundles of one-dimensional geometric objects of class $n \geqq 2$ in X_1^r. (Russ.) *Dokladi Ak. Nauk*, **104** (1955) 356—359.

[74] I. K. Rasevski: Theorie der Spinoren. (Russ.) *Uspechi Mat. Nauk*, **10** (1955), 2 (64) 3—111.

[75] I. K. Rasevski: Mehrdimensionale δ-Funktionen und differentialgeometrische Objekte. (Russ.) *Uspechi Mat. Nauk*, **10** (1955), 4 (66) 145—152.

[76] J. Aczél: Beiträge zur Theorie der geometrischen Objekte. I., II. *Acta Math. Ac. Sci. Hung.*, **7** (1956), 339—354.

[77] J. Aczél, M. Hosszú: On transformations with several parameters and operations in multidimensional spaces. *Acta Math. Ac. Sci. Hung.*, **7** (1956), 327—338.

[77a] O. E. Gheorghiu: Determinarea derivatei covariante a pseudotensorilor. *Bul. Sti. Tehn. Inst. Polit. Timişoara*, **1 (15)** (1956) 27—30.

[78] J. ACZÉL: Beiträge zur Theorie der geometrischen Objekte. III., IV. *Acta Math. Ac. Sci. Hung.*, **8** (1957), 19—52,

[79] J. ACZÉL: Beiträge zur Theorie der geometrischen Objekte. V. *Acta Math. Ac. Sci. Hung.*, **8** (1957), 53—64.

[79a] O. E. GHEORGHIU: Contributions à la théorie des objets géométriques spéciaux non différentiels avec plusieurs composantes dans l'espace X_m. I., II. *Comptes Rendus, Paris*, **245** (1957, 822—824, 887—889.

[79b] S. GOLĄB: Zur Theorie der Übertragungen. *Schriftenreihe d. Inst. f. Math. D. Ak. d. Wiss., Berlin*, 1 (1957) 162—177.

[79c] K. YANO: The theory of Lie-derivatives and its applications. *Amsterdam—Groningen*, 1957.

[79d] S. GOLĄB, H. LOPUSZANSKA-PIDEK: Sur l'algèbre des objets géométriques de première classe à une composante. *Annales Pol. Math.*, 3 (1958).

[80] M. HOSSZÚ: Functional equations and algebraic methods in the theory of geometric objects. *Publ. Math., Debrecen*, 5 (1958).