ORTOGONÁLIS POLINOMOK KORLÁTOSSÁGÁRÓL. I.

FREY TAMÁS, Budapest

Bevezetés

Alapvetően fontos kérdés az ortogonális polinomok elméletében, hogy a $w(x) \in L[-1, 1]$ nemnegatív súlyfüggvényhez tartozó $\{\omega_n(x)\}$ ortonormált polinomok sorozata a $[-1, 1]$ intervallum valamely x_0 pontjában milyen feltételek mellett marad korlátos. Számos olyan eredmény ismeretes, amely a súlyfüggvényre vonatkozó globális — azaz az egész alapintervallumot érintő — strukturális feltételek mellett biztosítja bizonyos pontokban az $\{\omega_n(x)\}$ sorozat korlátosságát.

Ezeknek az eredményeknek az alkalmazhatóságát szélesíti KOROUS egy tétele [1], amely így hangzik:

Jelölje $\{\omega_n(x)\}$ a $w(x) \in L[-1, 1]$, és $\{\varpi_n(x)\}$ pedig a $p(x) \in L[-1, 1]$ nemnegatív súlyfüggvényhez tartozó ortonormált polinomok sorozatát, és tegyük fel, hogy a két súlyfüggvény hányadosa kielégíti az alábbi összefüggéseket:

$$0 < C_1 \leq k(x) = \frac{w(x)}{p(x)} \leq C_0; \quad -1 \leq x \leq 1; \tag{1.1}$$

$$|k(x) - k(x_0)| \leq C_2 \cdot |x - x_0|; \quad -1 \leq x \leq 1; \tag{1.2}$$

ahol x_0 a $[-1, 1]$ intervallum valamelyik pontja.

Ez esetben érvényesek a következő becslések:

$$|\omega_n(x_0)| \leq C_3 \sum_{\nu=0}^{1} |\varpi_{n-\nu}(x_0)|, \tag{1.3}$$

ill. $(n = 1, 2, \ldots)$

$$|\varpi_n(x_0)| \leq C_4 \sum_{\nu=0}^{1} |\omega_{n-\nu}(x_0)|, \tag{1.4}$$

ahol $C_0, C_1, \ldots, C_4$ (és a továbbiakban C_5, C_6 stb.) az n indextől ***független állandókat jelölnek.***[1] A tétel lényegében azt fejezi ki, hogy az (1.1) feltételt

[1] Meg kell jegyeznünk, hogy KOROUS tételét ennél kevésbé általános alakban mondotta ki; nevezetesen (1.1) helyett az erősebb

$$k(x) \in \mathrm{Lip}_x\, 1; \qquad -1 \leq x \leq 1,$$

premisszát szerepelteti, s így (1.3), ill. (1.4) az egész intervallumon érvényes. Tételének pl. SZEGŐ könyvében ([2]: Theorem 7.1.3; p. 157) közölt bizonyításából azonban fenti általánosítás közvetlenül leolvasható.

kielégítő súlyfüggvénypárokhoz tartozó ortonormált polinomsorozatok aszimptotikus viselkedése megegyezik azokban a pontokban, ahol a két súlyfüggvény az (1. 2) feltételt kielégíti.

Ebben a dolgozatban azt fogjuk megmutatni, hogy a fenti tételben szereplő (1. 1) és (1. 2) premisszák jelentősen gyengíthetők, anélkül, hogy az (1. 3) és (1. 4) konkluziók tartalmilag lényegesen változnának. Az 1., ill. 2. §-ban ti. igazoljuk, hogy ha a $[-1; 1]$ intervallumon végesszámú olyan pont van, ahol KOROUS tételének (1. 1) premisszája nem teljesül (azaz ahol pl. $k(x)$ nem marad korlátos), e pontok környezetében azonban a két súlyfüggvény mindegyike majorálható, ill. minorálható egy-egy hatványfüggvénnyel úgy, hogy a minoráns és majoráns exponensének különbsége 1-nél (ill. 1/2-nél) kisebb, akkor a Korous-tétel konkluziói érvényesek maradnak azzal a módosítással, hogy az (1. 3) és az (1. 4) képletben is az összegezés nem $\nu=1$-ig, hanem valamilyen, a majoráns, ill. minoráns függvények exponenseitől függő, de n-től független természetes számig történik.

E módosítás legfontosabb következménye, hogy mindazok a tételek, amelyek az egységkörön ortonormált polinomsorozatokra ismeretesek, átvihetők az ugyanilyen struktúrájú súlyfüggvénnyel a $[-1, 1]$ intervallumon ortogonális polinomsorozatokra, éspedig a súlyfüggvényre vonatkozó és annak nagyságrendjét megkötő mellékfeltétel elhagyásával is.[2]

Mielőtt a dolgozatban szereplő további általánosításokat ismertetnők, rá kell mutatnunk arra, hogy KOROUS tétele olyan esetekben is értékes felvilágosítást ad az ortonormált polinomsorozat nagyságrendjéről, amikor az nem marad egyenletesen korlátos. Ha azonban kifejezetten az egyenletes korlátosság kimutatása a célunk, a Korous-tétel (1. 2) premisszája is lényegesen enyhíthető. A 4. §-ban igazoljuk ti., hogy pl. a

$$(1.5)\qquad |\pi_n(x)| \leq C_7; \quad (x_0-\varepsilon_0 \leq x \leq x_0+\varepsilon_0;\ n=1, 2, 3, \ldots)$$

feltétel mellett ($\varepsilon_0>0$) (1. 3) akkor is érvényes marad, ha (1. 2) helyett vagy csak azt követeljük meg, hogy $k(x)$ az $[x_0-\varepsilon_0; x_0+\varepsilon_0]$ intervallumon 1-nél nagyobb exponensű logaritmikus Lipschitz-feltételt (l. a 4. 1. TÉTELt), vagypedig azt, hogy $k(x)$ az x_0 *pontban* 1/2-nél nagyobb exponensű Lipschitz-feltételt elégítsen ki (l. a 4. 3. TÉTELt).

Meg kell említenünk, hogy KOROUS tétele — változatlan formában — érvényes az egységkörön ortonormált polinomok esetén is; ugyanígy az alábbiakban igazolt tételek is. A bizonyítások gondolatmenete — sőt, a formalizmus is — változtatás nélkül vihetők át erre az esetre.

[2] A szóbanforgó megkötés az alkalmazott $x=\cos\vartheta$ transzformáció következtében lép fel és azt követeli meg, hogy ne a $w(x)$ súlyfüggvénye maga, hanem $w(x)\sqrt{1-x^2}$ elégítse ki azokat a strukturális feltételeket, amelyeket az eredeti — az egységkörön értelmezett — súlyfüggvényről tételeztünk fel.

2. §. Korous tétele Jacobi-típusú súlyfüggvények esetén

21. Az alapvető segédtétel. Az első két paragrafus tételeinek igazolásánál alapvető szerepet játszik a

21. 1. LEMMA. *Tegyük fel, hogy a* $w(x) \in L[-1, 1]$ *súlyfüggvény*

(21. 1) $$k(x)(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta} = w(x)$$

alakba írható, ahol

(21. 2) $$0 < k \leq k(x) \leq K, \quad \textit{továbbá} \quad k(x) \in \mathrm{Lip}_{\varkappa} 1, \quad \textit{hacsak} \quad 1-\lambda \leq |x| \leq 1,$$

ahol $\lambda > 0$ *tetszőleges.*

Érvényesek ezesetben az

(21. 3) $$\int_{-1}^{1} \omega_n^2(x) \cdot \frac{w(x)}{(1-x)^{\varepsilon_1}} dx \leq C_8; \; n = 1, 2, 3, \ldots$$

és

$$\int_{-1}^{1} \omega_n^2(x) \frac{w(x)}{(1+x)^{\varepsilon_2}} dx \leq C_9; \; n = 1, 2, 3, \ldots$$

relációk, feltéve, hogy ε_1 *és* ε_2 *kielégítik az*

(21. 4) $$\alpha-\varepsilon_1 > -1; \quad \varepsilon_1 < \frac{1}{2}; \quad \beta-\varepsilon_2 > -1; \quad \varepsilon_2 < \frac{1}{2}$$

egyenlőtlenségeket.

BIZONYÍTÁS: Tételezzük fel először, hogy $k(x)$ az egész $[-1, 1]$ intervallumon Lip 1 osztálybeli függvény. Ezesetben az $\{\omega_n(x)\}$ sorozat aszimptotikus viselkedése — Korous-tételének felhasználásával — kapcsolatba hozható az $(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$ súlyfüggvényre ortonormált $\{p_n^{(\alpha,\beta)}(x)\}$ Jacobi-polinomokéval — amelyeket klasszikus vizsgálatok alapján jól ismerünk — és így a tétel állításait könnyen igazolni tudjuk. Az alábbiakban (21. 3) első integráljának korlátosságát igazoljuk:

(21. 5) $$|\omega_n(x)| \leq C_{10}\{|p_n^{(\alpha,\beta)}(x)| + |p_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x)|\}$$

és így a Schwartz-féle egyenlőtlenség felhasználásával

$$\int_{-1}^{1} \omega_n^2(x) \frac{w(x)}{(1-x)^{\varepsilon_1}} dx \leq K \cdot C_{10}^2 \Bigg\{ \int_{-1}^{1} \langle [p_n^{(\alpha,\beta)}(x)]^2 + [p_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x)]^2 \rangle \frac{(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}}{(1-x)^{\varepsilon_1}} dx +$$

(21. 6)

$$+ 2 \left(\int_{-1}^{1} [p_n^{(\alpha,\beta)}(x)]^2 \frac{(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}}{(1-x)^{\varepsilon_1}} dx \cdot \int_{-1}^{1} [p_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x)]^2 \frac{(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}}{(1-x)^{\varepsilon_1}} \right)^{1/2} \Bigg\}.$$

Az egyenlőtlenség jobboldalán szereplő integrálok korlátosságát a Jacobi-polinomokra vonatkozó alábbi asszimptotikus becslések alapján igazolhatjuk ($\alpha > -1$; $\beta > -1$):

$$(21.7)\qquad p_n^{(\alpha,\beta)}(x) = P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\left\{\frac{2n+\alpha+\beta+1}{2^{\alpha+\beta+1}}\cdot\frac{\Gamma(n+1)\cdot\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)\cdot\Gamma(n+\beta+1)}\right\}^{\frac{1}{2}};$$

ahol

$$(21.8)\qquad \left|P_n^{(\alpha,\beta)}(-1)\right| = \binom{n+\beta}{n};\quad \left|P_n^{(\alpha,\beta)}(1)\right| = \binom{n+\alpha}{n},$$

továbbá

$$(21.9)\qquad P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\vartheta) = \frac{1}{\sqrt{n\pi}}\left(\sin\frac{\vartheta}{2}\right)^{-\alpha-\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\vartheta}{2}\right)^{-\beta-\frac{1}{2}}\left\{\cos(N\vartheta+\gamma)+\frac{O_c(1)}{n\sin\vartheta}\right\},$$

ahol

$$\frac{c}{n}\leqq\vartheta\leqq\pi-\frac{c}{n};\quad N=n+\frac{\alpha+\beta+1}{2};\quad \gamma=-\frac{\alpha+\frac{1}{2}}{2}\pi,$$

azaz összegezve

$$(21.10)\qquad P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\vartheta)=\begin{cases} O(n^{\alpha}) & ;\ 0\leqq\vartheta\leqq\frac{1}{n},\\ \vartheta^{-\alpha-\frac{1}{2}}\,O\!\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) & ;\ \frac{1}{n}\leqq\vartheta\leqq\frac{\pi}{2},\\ (\pi-\vartheta)^{-\beta-\frac{1}{2}}\,O\!\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) & ;\ \frac{\pi}{2}\leqq\vartheta\leqq\pi-\frac{1}{n},\\ O(n^{\beta}) & ;\ \pi-\frac{1}{n}\leqq\vartheta\leqq\pi. \end{cases}$$

{Valamennyi összefüggés megtalálható SZEGŐ könyvében [2]: (21. 7) a 67. oldalon a (4. 3. 4) formulában, (21. 8) az 57—58. oldalakon, a (4. 1. 1) és (4. 1. 4) formulában, (21. 9) a 191—2. oldalon: Theorem 8. 21. 13, végül (21. 10) a 164. oldalon: Theorem 7. 32. 2 alatt.}

Ezek felhasználásával tekintsük pl. az

$$\int_{-1}^{1}[p_n^{(\alpha,\beta)}(x)]^2\,\frac{(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}}{(1-x)^{\varepsilon_1}}\,dx$$

integrált. Nyilván elegendő kimutatnunk, hogy a

$$(21.11)\qquad \int_{0}^{1}[p_n^{(\alpha,\beta)}(x)]^2\,\frac{(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}}{(1-x^2)^{\varepsilon_1}}\,dx$$

integrál, azaz (21. 7), ill. (21. 10) alapján, hogy

$$
\begin{aligned}
&2^{\alpha+\beta}\left\{\frac{2n+\alpha+\beta+1}{2^{\alpha+\beta+1}}\cdot\frac{\Gamma(n+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}\right\}\int_0^{\frac{\pi}{2}}[P_n^{(\alpha,\beta)}\cos\vartheta)]^2\sin^{(1-2\varepsilon_1)}\vartheta\,\cdot \\
&\qquad\cdot\cos^{2\beta}\frac{\vartheta}{2}\cdot\sin^{2\alpha}\frac{\vartheta}{2}\,d\vartheta \qquad (21.\,12)
\end{aligned}
$$

korlátos. Mármost az utóbbiban az integrációs intervallumot felbontva az $\left[\frac{1}{n};\frac{\pi}{2}\right]$, ill. a $\left[0,\frac{1}{n}\right]$ szakaszokra és alkalmazva ott a (21. 10) becslés második, ill. első részét, állításunk közvetlenül adódik. Ugyanez vonatkozik a többi integrálra is.

Mivelhogy KOROUS tétele lokalizált formában is érvényes, a $k(x)$-re vonatkozó általánosabb (21. 2) alatti feltétel mellett is rögtön adódnak a lemma állításai. A $\left[-1;-1+\frac{\lambda}{2}\right]$, ill. az $\left[1-\frac{\lambda}{2};1\right]$ szakaszokon ugyanis a fenti gondolatmenet mindenütt alkalmazható, a $\left[-1+\frac{\lambda}{2};1-\frac{\lambda}{2}\right]$ szakaszon viszont $\frac{1}{(1-x)^{\varepsilon_1}}$ is, $(1+x)^{-\varepsilon_2}$ is két pozitív korlát között marad, s így ott a (21.6); (21. 12) alatti integrálok közvetlenül becsülhetők.

2. 2. Jacobi-típusú súlyfüggvények esete. A 21. 1. LEMMA birtokában KOROUS tételét olyan súlyfüggvényekre is át tudjuk vinni, amelyek az alapintervallum két szélén nem korlátosak, ill., amelyek nincsenek 0-tól elhatárolva. Pontosabban: Felhasználva a bevezetésben szereplő jelöléseket, tegyük fel, hogy a két súlyfüggvény hányadosa kielégíti a

$$0 < C_{11} \leqq k(x) \leqq C_{12}, \quad \text{ha} \quad -1+\lambda \leqq x \leqq 1-\lambda;\ \lambda > 0 \qquad (22.\,1)$$

és

$$|k(x)-k(x_0)| \leqq C_{13}|x-x_0|;\quad -1+2\lambda \leqq x_0-\mu \leqq x \leqq x_0+\mu \leqq 1-2\lambda \qquad (22.\,2)$$

feltételeket, található továbbá 12 olyan állandó, amelyek megfelelnek az alábbi követelményeknek:

$$
\begin{aligned}
&0 < w \leqq W;\ 0 < p \leqq P;\ -1 < a_i \leqq A_i < a_i+\frac{1}{2}; \\
&\qquad -1 < b_i \leqq B_i < b_i+\frac{1}{2};\ (i=1,2)
\end{aligned} \qquad (22.\,3)
$$

és a $-1 \leqq x \leqq 1$ intervallumban

$$
\begin{aligned}
&w(1+x)^{B_1}(1-x)^{A_1} \leqq w(x) \leqq W(1+x)^{b_1}(1-x)^{a_1}, \\
&p(1+x)^{B_2}(1-x)^{A_2} \leqq p(x) \leqq P(1+x)^{b_2}(1-x)^{a_2}.
\end{aligned} \qquad (22.\,4)
$$

22. 1. TÉTEL: *Fenti feltételek mellett a $w(x)$, ill. $p(x)$ súlyfüggvényhez tartozó $\{\omega_n(x)\}$, ill. $\{\pi_n(x)\}$ ortonormált polinomsorozatok x_0-beli értékei között érvényesek a következő egyenlőtlenségek:*

$$(22.5)\qquad \begin{aligned} |\pi_n(x_0)| &\leq C_{14}\sum_{\nu=0}^{s}|\omega_{n-\nu}(x_0)|;\\ |\omega_n(x_0)| &< C_{15}\sum_{\nu=0}^{s}|\pi_{n-\nu}(x_0)|, \end{aligned}$$

ahol s csakis az a_i; A_i; b_i; B_i exponensektől függő természetes szám.

BIZONYÍTÁS: Gondolatmenete lényegében követi KOROUS-ét, csakhogy a két súlyfüggvény közé megfelelő számú Jacobi-típusú súlyt iktatunk be, és igy — a 21. 1. LEMMA felhasználásával — lépésről-lépésre követjük a megfelelő ortonormált polinomok x_0-beli értékének nagyságrendi alakulását. Az alábbi segédsúlyfüggvényeket alkalmazzuk:

$$(22.6)\qquad j_\nu(x) = \begin{cases} C_{16}(1-x)^{\alpha_\nu}(1+x)^{\beta_\nu}; & 1-2\lambda \leq |x| \leq 1\\ w(x) & ; -1+2\lambda \leq x \leq 1-2\lambda \end{cases}$$

$[\nu = 1, 2, \ldots, (s-1)]$, ahol $\alpha_1 = A_1$; $\beta_1 = B_1$; $\alpha_{s-1} = A_2$; $\beta_{s-1} = B_2$,

$$(22.7)\qquad \text{továbbá } |\alpha_\nu - \alpha_{\nu-1}| < \frac{1}{2};\ |\beta_\nu - \beta_{\nu-1}| < \frac{1}{2};\ \nu = 2, 3, \ldots, (s-1).$$

A $j_\nu(x)$ Jacobi-típusú súlyhoz tartozó ortonormált polinomsorozatot $\{J_n^{(\nu)}(x)\}$-szel jelöljük.

Első lépésben igazoljuk az

$$(22.8)\qquad |\omega_n(x_0)| \leq C_{17}\{|J_n^{(1)}(x_0)| + |J_{n-1}^{(1)}(x_0)|\}$$

egyenlőtlenséget. E célból elsősorban megjegyezzük, hogy a definíciók alapján érvényesek a következő becslések:

$$\begin{aligned} &(22.9) && |w(x) - j_1(x)| \leq C_{18}\,w(x)\\ &(22.10) && |w(x) - j_1(x)| \leq C_{19}\,j_1(x)(1-x)^{a_1-\alpha_1}(1+x)^{b_1-\beta_1} \end{aligned} \Bigg\}\quad -1 \leq x \leq 1.$$

Így, a Korous-féle gondolatmenetet felhasználva:

$$\omega_n(x_0) = \int_{-1}^{1}\Big\{\sum_{\mu=0}^{n} J_\mu^{(1)}(x_0)J_\mu^{(1)}(t)\Big\}\,\omega_n(t)\,j_1(t)\,dt = \frac{k_n(w)}{k_n(j_1)}J_n^{(1)}(x_0) +$$

$$+\int_{-1}^{1}\omega_n(t)\{J_n^{(1)}(x_0)J_{n-1}^{(1)}(t) + J_{n-1}^{(1)}(x_0)J_n^{(1)}(t)\}\,\frac{j_1(t)-w(t)}{x_0-t}\,dt,$$

azaz

$$\omega_n(x_0) \le \frac{k_n(w)}{k_n(j_1)} |J_n^{(1)}(x_0)| +$$

$$+\frac{1}{\mu}\left\{\int_{-1}^{-1+2\lambda} + \int_{1-2\lambda}^{1}\right\} |\omega_n(t)| \, [\,|J_n^{(1)}(x_0)|\,|J_{n-1}^{(1)}(t)| + |J_{n-1}^{(1)}(x_0)|\,|J_n^{(1)}(t)|\,]\,|j_1(t)-w(t)|\, dt \le$$

(22.11)
$$\le \frac{k_n(w)}{k_n(j_1)} |J_n^{(1)}(x_0)| + \frac{1}{\mu}\Big\{ |J_n^{(1)}(x_0)| \left[C_{18}\int_{-1}^{1} \omega_n^2(t)\, w(t)\, dt\right]^{1/2} \cdot$$

$$\cdot\left[C_{19}\int_{-1}^{1} \langle J_{n-1}^{(1)}(t)\rangle^2 j_1(t)(1-t)^{a_1-\alpha_1}(1+t)^{b_1-\beta_1}\, dt\right]^{1/2} + |J_{n-1}^{(1)}(x_0)| \left[C_{18}\int_{-1}^{1} \omega_n^2(t)\, w(t)\, dt\right]^{1/2} \cdot$$

$$\cdot\left[C_{19}\int_{-1}^{1} \langle J_n^{(1)}(t)\rangle^2 j_1(t)\,(1-t)^{a_1-\alpha_1}(1+t)^{b_1-\beta_1}\, dt\right]^{1/2} \Big\},$$

ahol

$$\frac{k_n(w)}{k_n(j_1)} = \int_{-1}^{1} \omega_n(t) J_n^{(1)}(t)\, j_1(t)\, dt \le \left\{\int_{-1}^{1} \omega_n^2(t)\, j_1(t)\, dt\right\}^{1/2} \cdot$$

$$\cdot\left\{\int_{-1}^{1} \langle J_n^{(1)}(t)\rangle^2 j_1(t)\, dt\right\}^{1/2} < \left\{\int_{-1}^{1} \omega_n^2(t)\, w(t)\, dt\right\}^{1/2} \left\{\int_{-1}^{1} \langle J_n^{(1)}(t)\rangle^2 j_1(t)\, dt\right\}^{1/2} = 1,$$

továbbá

(22.12)
$$\int_{-1}^{1} \langle J_n^{(1)}(t)\rangle^2 j_1(t)\,(1-t)^{a_1-\alpha_1}(1-t)^{b_1-\beta_1}\, dt =$$

$$= \left\{\int_{-1}^{-1+\lambda} + \int_{1-\lambda}^{1} + \int_{-1+\lambda}^{1-\lambda}\right\} \langle J_n^{(1)}(t)\rangle^2 j_1(t)\,(1-t)^{a_1-\alpha_1}(1+t)^{b_1-\beta_2}\, dt \le C_{20}.$$

Legutolsó relációnkban felhasználtuk KOROUS tételét, amely szerint

(22.13) $|J_n^{(1)}(t)| \le C_{21}\{|p_n^{(\alpha_1,\beta_1)}(t)| + |p_{n-1}^{(\alpha_1,\beta_1)}(t)|\}$, ha $1-\lambda \le |t| \le 1$,

mivelhogy a $j_1(x)$ és az $(1-x)^{\alpha_1}\cdot(1+x)^{\beta_1}$ súlyok kielégítik a (1. 1) és (1. 2) premisszát, továbbá a 21. 1. LEMMÁT, amely szerint

(21. 14)
$$\int_{-1}^{1} [p_{n-i}^{(\alpha_1,\beta_1)}(t)]^2 j_1(t)\,(1-t)^{a_1-\alpha_1}(1+t)^{b_1-\beta_1}\, dt \le C_{22};\ (i=0, 1),$$

minthogy $-\frac{1}{2} < a_1-\alpha_1$; $-\frac{1}{2} < b_1-\beta_1$; $a_1 > -1$; $b_1 > -1$, végül azt a tényt, hogy $[-1+\lambda;\ 1-\lambda]$-ben $|(1-t)^{a_1-\alpha_1}(1+t)^{b_1-\beta_1}|$ korlátos.

A bizonyítás azon részletei, amikor a $j_1(x)$ súlyról $j_2(x)$-re stb, végül $j_{s-2}(x)$-ről $j_{s-1}(x)$-re térünk át, (ill. megfordítva) szóról-szóra egyeznek a fentiekkel.[3]

A bizonyítás utolsó részében, amikor a $j_{s-1}(x)$ súlyról a $p(x)$-re térünk át (azaz a $\{J_m^{(s-1)}(x)\}$ sorozatról $\{\pi_n(x)\}$-re), ismét a fenti gondolatmenetet használjuk. Így adódnak lépésről lépésre a

(22. 15) $$|J_m^{(\nu)}(x_0)| \leq C_{23}\{|J_m^{(\nu-1)}(x_0)| + |J_{m-1}^{(\nu-1)}(x_0)|\},$$

ill. végül a

(22. 16) $$|\pi_m(x_0)| \leq C_{24}\{|J_m^{(s-1)}(x_0)| + |J_{m-1}^{(s-1)}(x_0)|\},$$

relációk, ezek alapján pedig (22. 5) állítás, amit igazolnunk kellett.

3. §. Az eredmények általánosítása

31. Áttérés az egységkörön ortonormált polinomsorozatok esetére. A bevezetésben említettük, hogy KOROUS tétele — bizonyításával együtt — szóról szóra átvihető az egységkörön ortonormált polinomsorozatok esetére is. Ugyanez a helyzet a 2. §-ban megadott általánosítással is. Ez a tény módot ad arra, hogy a súlyfüggvények szinguláris pontjait (ahol tehát $k(x)$-re nem érvényes az (1. 1) feltétel) egyrészt eltólhassuk az ortogonalítási intervallum széléről, hiszen az egységkör kerületén minden további nélkül végezhetünk transzlációt a súlyfüggvénnyel és vele együtt az ortonormált polinomsorozattal; másrészt egy további lépésben növelni is tudjuk e szinguláris pontok számát.

[3] Meg kell jegyeznünk, hogy a (22. 7) alatt szereplő feltételcsoport helyett elegendő lenne az $|\alpha_\nu - \alpha_{\nu-1}| < 1$; $|\beta_\nu - \beta_{\nu-1}| < 1$ feltételeket kikötnünk — így kb. feleannyi lépéssel jutunk el w-től p-ig — amikoris a (22. 10) becslés helyett az alábbi módon járhatunk el (pl. az $\alpha_j < \alpha_{j+1}$; $\beta_j < \beta_{j+1}$ esetben):

$$\int_{-1}^{1} J_m^{(j)}(x) J_m^{(j+1)}(x) \cdot j_j(x)\, dx \leq$$

$$\leq \left[\int_{-1}^{1} \langle J_m^{(j)}(x)\rangle^2 j_j(x)(1-x)^{\frac{\alpha_j+\alpha_{j+1}}{2}} \cdot (1+x)^{\frac{\beta_j+\beta_{j+1}}{2}} dx\right]^{\frac{1}{2}} \cdot$$

$$\cdot \left[\int_{-1}^{1} \langle J_m^{(j+1)}(x)\rangle^2 j_j(x)(1-x)^{\frac{\alpha_{j+1}-\alpha_j}{2}} (1+x)^{\frac{\beta_{j+1}-\beta_j}{2}} dx\right]^{\frac{1}{2}} \leq C.$$

Valóban $-\frac{1}{2} < \frac{\alpha_j - \alpha_{j+1}}{2}$; $-\frac{1}{2} < \frac{\beta_j - \beta_{j+1}}{2}$, továbbá elegendő kicsiny $0 < \vartheta_i < \frac{1}{2}$; $i = 1, 2$ mellett

$$j_j(x)(1-x)^{\frac{\alpha_{j+1}-\alpha_j}{2}}(1+x)^{\frac{\beta_{j+1}-\beta_j}{2}} < j_{j+1}(x)(1-x)^{-\left(\frac{1}{2}-\vartheta_1\right)}(1+x)^{-\left(\frac{1}{2}-\vartheta_2\right)}.$$

Az alapvető tény, amelyre támaszkodunk, egyrészt az, hogy ismeretes az egységkörön a

(31. 1) $$f^{(\gamma,\delta)}(\vartheta)=2^{\gamma+\delta}(1-\cos\vartheta)^{\gamma}\cdot(1+\cos\vartheta)^{\delta}$$

súlyfüggvényre ortonormált $\{\varphi_n^{(\gamma,\delta)}(z)\}$ polinomok összefüggése a Jacobi-polinomokéval (l. [2]: Theorem 11.5; 287—88.):

(31. 2) $$\begin{aligned}\varphi_{2n}^{(\gamma,\delta)}(z)&=z^{n}\{A p_n^{\left(\gamma-\frac{1}{2};\,\delta-\frac{1}{2}\right)}(\cos\vartheta)+B\cdot i\cdot\sin\vartheta\, p_{n-1}^{\left(\gamma+\frac{1}{2};\,\delta+\frac{1}{2}\right)}(\cos\vartheta)\}\\ \varphi_{2n+1}^{(\gamma,\delta)}(z)&=z^{n}\{C p_{n+1}^{\left(\gamma-\frac{1}{2};\,\delta-\frac{1}{2}\right)}(\cos\vartheta)+D\cdot i\cdot\sin\vartheta\, p_{n}^{\left(\gamma+\frac{1}{2};\,\delta+\frac{1}{2}\right)}(\cos\vartheta)\};\ z=e^{i\vartheta},\end{aligned}$$

ahol A, B, C és D valós — n-től és ϑ-tól független — állandók; másrészt viszont az, hogy a *páros* $f(\vartheta)$ súlyra az egységkörön ortonormált $\{\psi_n(z)\}$ polinomsorozat ismeretében explicite is felírhatjuk a $[-1, 1]$ intervallumon a

(31. 3) $$w(x)=f[\arccos x]\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

súlyra ortonormált $\{\omega_n(x)\}$ polinomsorozatot (l. [2], Theorem 11.5):

(31. 4) $$\omega_n(x)=(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\left\{1+\frac{\psi_{2n}(0)}{\varkappa_{2n}}\right\}^{-\frac{1}{2}}\{z^{-n}\psi_{2n}(z)+z^{n}\psi_{2n}(z^{-1})\},$$

ahol $z=e^{i\vartheta}$; $x=\dfrac{z+z^{-1}}{2}$; a $\psi_{2n}(0)$ és $\varkappa_{2n}$ mennyiségekre jó becslések ismeretesek (SZEGŐ [2]).[1] Igen fontos szerepet játszik az alábbi két tény is:

a) z_0-lal jelölve az $e^{i\vartheta_0}$ mennyiséget, az

(31. 5) $$f_e^{(\gamma,\delta)}(\vartheta-\vartheta_0)=2^{\gamma+\delta}[1-\cos(\vartheta-\vartheta_0)]^{\gamma}[1+\cos(\vartheta-\vartheta_0)]^{\delta}$$

súlyfüggvényre ortonormált polinomok sorozata:

(31. 6) $$\psi_{n;e}^{(\gamma,\delta)}(z)=\varphi_n^{(\gamma,\delta)}(z-z_0).$$

b) A (21. 7), ill. (21. 10) és a (31. 1) relációkból leolvasható, hogy

(31. 7) $$|\varphi_n^{(\gamma,\delta)}(\cos\vartheta)|=\begin{cases}O(n^{\gamma}), & \text{ha } 0\leq\vartheta\leq\dfrac{\pi}{n},\\ O(\vartheta^{-\gamma}), & \text{ha } \dfrac{\pi}{n}\leqq\vartheta\leq\dfrac{\pi}{2},\\ O[(\pi-\vartheta)^{-\delta}], & \text{ha } \dfrac{\pi}{2}\leqq\vartheta\leqq\pi-\dfrac{\pi}{n},\\ O(n^{\delta}), & \text{ha } \pi-\dfrac{\pi}{n}\leqq\vartheta\leq\pi,\end{cases}$$

[1] L. pl.: (12. 3. 15) formula, p. 295., ill. (12. 5. 1) formula, p. 297.

és így

$$(31.8)\qquad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\varphi_n^{(\gamma,\delta)}(e^{i\vartheta})|^2 \frac{f^{(\gamma,\delta)}(\vartheta)}{(1-\cos^2\vartheta)^\varepsilon}\, d\vartheta \leq C_{25},$$

$\left(\text{hacsak } \varepsilon < \frac{1}{2};\ \gamma - \varepsilon > -\frac{1}{2};\ \delta - \varepsilon > -\frac{1}{2}\right)$, azaz a 21. 1. LEMMA tartalmilag átvihető az egységkörön Jacobi-típusú súlyra ortonormált polinomsorozatokra, azzal az általánosítással, hogy nemcsak négyzetével integrálható, hanem integrálható hatványfüggvénnyel is megszorozhatjuk az eredeti súlyfüggvényt, a (31. 8) integrál mégis korlátos marad.

32. A 21.1. LEMMA általánosítása. Annak igazolása végett: hogy egyrészt a 21. 1. LEMMA olyan Jacobi-típusú súlyfüggvényekre is érvényes, amelyeknek nem egy (ill. két) szingularitásuk van, hanem tetszőlegesen (véges) sok; másrészt, hogy az egységkör súlyfüggvényeiről vissza tudjunk térni a $[-1, 1]$ intervallum súlyaira, azaz hogy párossá tudjuk tenni az egységkörön értelmezett súlyfüggvényt, anélkül, hogy annak lényeges struktúrális tulajdonságait megváltoztattuk volna, néhány további lemmát fogunk bebizonyitani.

32. 1. LEMMA: *Legyen*

$$(32.1)\qquad -\pi < \vartheta_1 < \vartheta_2 < \cdots < \vartheta_r < \pi;\ -\frac{1}{2} < \gamma_j;\ (j = 1, 2, \ldots r)$$

és jelöljük az

$$(32.2)\qquad f_r^{(\gamma_j)}(\vartheta - \vartheta_j) = 2^{\gamma_j}[1 - \cos(\vartheta - \vartheta_j)]^{\gamma_j}$$

Jacobi-típusú súlyfüggvényhez rendelt, az egységkörön ortonormált polinomsorozatot $\{\varphi_n^{(\gamma_j)}(z)\}$*-vel, az*

$$(32.3)\qquad f_k(\vartheta) = \prod_{j=1}^{k} f_r^{(\gamma_j)}(\vartheta - \vartheta_j)$$

súlyhoz tartozó ortonormált polinomrendszert pedig $\{\varphi_n(z; k)\}$*-val. Ez esetben*

$$(32.4)\qquad |\varphi_n(e^{i\vartheta}; k)| = O[|\varphi_n^{(\gamma_j)}(e^{i\vartheta})|],\quad \text{hacsak}\quad \frac{\vartheta_{j-1}+\vartheta_j}{2} \leq \vartheta \leq \frac{\vartheta_j+\vartheta_{j+1}}{2}.$$

BIZONYÍTÁS: A 22. 1. TÉTELnél követett gondolatmenetet lényegében megismételve, teljes indukciót alkalmazunk: a lemma állítása $k = 1$ (ill. speciális $k = 2$) esetében érvényes, amit leolvashatunk a (31. 7) összefüggésekből. Tegyük fel, hogy $k = K-1$ esetén még igaz az állítás, azaz bárhogy választva a $\vartheta_j^{(K-1)}$ pontokat $(j = 1, 2, \ldots, K-1)$, az $f_{K-1}(\vartheta)$ súlyhoz tartozó $\{\varphi_n(z; K-1)\}$ ortonormált polinomsorozat aszimptotikus viselkedése a $\vartheta_j^{(K-1)}$ pont környezetében $(j = 1, 2, \ldots, K-1)$ megegyezik $\{\varphi_n^{\gamma_j^{(K-1)}}(e^{i\vartheta})\}$-

ával. Igazoljuk, hogy ez esetben az állítás $k = K$ esetén is érvényes. Tekintsük pl. a $\vartheta_m^{(K)}$ pont környezetét. Az igazolásnál felhasználjuk az $(1 \leq \nu \neq m \leq K)$

$$(32.5) \qquad f_{K-1;\nu}(\vartheta) = \prod_{j=1}^{\nu-1} f_{\nu}^{(\gamma_j(K))}(\vartheta - \vartheta_j^{(K)}) \cdot \prod_{j=\nu+1}^{K} f_{\nu}^{(\gamma_j(K))}(\vartheta - \vartheta_j^{(K)})$$

súlyfüggvényt, és a hozzátartozó $\{\varphi_n(e^{i\vartheta}; K-1)\}$ ortonormált polinomsorozatot, amelyre a lemma állításai — feltételeink szerint — teljesülnek. A bizonyítást a $|\gamma_\nu| > \frac{1}{4}$ esetben több lépésben végezzük el, (l. a 22. 1. TÉTEL igazolását) éspedig úgy, hogy $f_{K-1;\nu}$ és f_K közé ez esetben több segédsúlyt iktatunk: $f_{K;\mathrm{I}}$-et, $f_{K;\mathrm{II}}$-t, stb., úgy, hogy egy-egy lépésnél a $\vartheta_\nu^{(K)}$ helyhez tartozó kitevő csak $\frac{1}{4}$-nél kevesebbel változzék. Tegyük tehát fel, hogy azt már igazoltuk, hogy lemmánk állítása érvényes az

$$(32.6) \qquad f_{K;S;\nu}(\vartheta) = f_{K-1;\nu}(\vartheta) \cdot 2^{\gamma_S}[1 - \cos(\vartheta - \vartheta_\nu^{(K)})]^{\gamma_S}$$

súlyfüggvényhez tartozó $\{\varphi_n(z; K; S)\}$ sorozatra, és ennek alapján igazoljuk, hogy érvényes marad az

$$(32.7) \qquad f_{K;S+1;\nu}(\vartheta) = f_{K;S;\nu}(\vartheta) \cdot 2^{\Delta}[1 - \cos(\vartheta - \vartheta_\nu^{(K)})]^{\Delta}$$

súlyfüggvényhez tartozó $\{\varphi_n(z; K; S+1)\}$ polinomsorozatra is, ahol $|\Delta| < \frac{1}{4}$. (A bizonyítás természetesen az első lépést is tartalmazza, ti. a $\gamma_S = 0$ választással).

Feltételeink szerint érvényesek ugyanis a következő becslések, tetszőleges α és β valós számok mellett:

$$(32.8) \qquad |\alpha f_{K;S;\nu}(\vartheta) - \beta f_{K;S+1;\nu}(\vartheta)| \leq \left\{ \begin{array}{l} C_{26} f_{K;S;\nu}(\vartheta) \\ C_{27} f_{K;S+1;\nu}(\vartheta) \end{array} \right\}; \; \vartheta \notin [\vartheta_\nu - \mu; \vartheta_\nu + \mu],$$

$$(32.9) \qquad \begin{aligned} &|\alpha f_{K;S;\nu}(\vartheta) - \beta f_{K;S+1;\nu}(\vartheta)| \leq \\ &\leq \left\{ \begin{array}{l} C_{28}\, f_{K;S;\nu}(\vartheta) \cdot |\vartheta - \vartheta_\nu^{(K)}|^{-2|\Delta|} \\ C_{29}\, f_{K;S+1;\nu}(\vartheta) \cdot |\vartheta - \vartheta_\nu^{(K)}|^{-2|\Delta|} \end{array} \right\}; \quad \vartheta_\nu^{(K)} - \mu \leq \vartheta \leq \vartheta_\nu^{(K)} + \mu. \end{aligned}$$

A 21. 2. TÉTEL gondolatmenetét használva tehát ($z = e^{i\Theta}$; $\vartheta_{m-1} < \Theta < \vartheta_{m+1}$):

$$(32.10) \qquad \begin{aligned} \varphi_n(z; K; S+1) &= \alpha_n \varphi_n(z; K; S) + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(\zeta; K; S+1) \sum_{\varrho=0}^{n-1} \overline{\varphi_\varrho(\zeta; K; S)}\, \varphi_\varrho(z; K; S)\, f_{K;S;\nu}(\vartheta)\, d\vartheta = \\ &= \alpha_n \varphi_n(z; K; S) + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(\zeta; K; S+1) \frac{\overline{\varphi_n^*(\zeta; K; S)}\, \varphi_n^*(z; K; S) - \overline{\varphi_n(\zeta; K; S)}\varphi_n(z; K; S)}{1 - \bar{\zeta} z} \cdot \\ &\cdot [f_{K;S}(\vartheta) - \beta f_{K;S+1}(\vartheta)]\, d\vartheta; \; (\zeta = e^{i\vartheta}), \end{aligned}$$

ahol $\alpha_n = \dfrac{\varkappa_n[\varphi_n(z; K; S+1)]}{\varkappa_n[\varphi_n(z; K; S)]} = O(1)$; $\varphi_n^*(\zeta) = \zeta^n \cdot \overline{\varphi_n(\zeta^{-1})}$, és így $|\varphi_n^*(e^{i\vartheta})| =$ $= |\varphi_n(e^{i\vartheta})|$; β-t pedig úgy választottuk, hogy $[f_{K;S;\nu}(\Theta) - \beta f_{K;S+1;\nu}(\Theta)] = 0$ legyen. Ennek alapján:

$$|\varphi_n(z; K; S+1)| \leqq |\alpha_n|\,|\varphi_n(z; K; S)| +$$

$$+\frac{1}{2\pi}|\varphi_n^*(z; K; S)| \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi_n(\zeta; K; S+1)|\,|\varphi_n^*(\zeta; K; S)| \frac{|f_{K;S;\nu}(\vartheta) - \beta f_{K;S+1;\nu}(\vartheta)|}{|1-\bar{\zeta}z|} d\vartheta +$$

(32. 11)

$$+\frac{1}{2\pi}|\varphi_n(z; K; S)| \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi_n(\zeta; K; S+1)|\,|\varphi_n(\zeta; K; S)| \frac{|f_{K;S;\nu}(\vartheta) - \beta f_{K;S+1;\nu}(\vartheta)|}{|1-\bar{\zeta}z|} d\vartheta.$$

Azt kell csak igazolnunk, hogy az itt szereplő integrálok korlátosak. Felbontva az integrálokat 3 részre, az $\frac{1}{2}(\vartheta_{m-1} + \vartheta_m) \leqq \vartheta \leqq \frac{\vartheta_m + \vartheta_{m+1}}{2}$ szakaszon

$$\text{(32. 12)} \qquad \frac{1}{|1-\bar{\zeta}z|} \left| 1 - \beta \frac{f_{K;S+1;\nu}(\vartheta)}{f_{K;S;\nu}(\vartheta)} \right| \leqq C_{30};$$

emellett itt érvényes a (31. 8) egyenlőtlenség is, és így felhasználva a Schwartz-egyenlőtlenséget:

$$\int_{\frac{1}{2}(\vartheta_{m-1}+\vartheta_m)}^{\frac{1}{2}(\vartheta_m+\vartheta_{m+1})} |\varphi_n(\zeta; K; S+1)|\,|\varphi_n(\zeta; K; S)|\, f_{K;S;\nu}(\vartheta) \cdot \frac{\left| 1 - \beta \dfrac{f_{K;S+1;\nu}(\vartheta)}{f_{K;S;\nu}(\vartheta)} \right|}{|1-\bar{\zeta}z|} d\vartheta \leqq$$

$$\leqq C_{30} \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi_n(\zeta; K; S)|^2 f_{K;S;\nu}(\vartheta)\, d\vartheta \right\}^{1/2} \cdot$$

$$\text{(32. 13)} \qquad \cdot \left\{ \int_{\frac{1}{2}(\vartheta_{m-1}+\vartheta_m)}^{\frac{1}{2}(\vartheta_m+\vartheta_{m+1})} |\varphi_n(\zeta; K; S+1)|^2 f_{K;S;\nu}(\vartheta)\, d\vartheta \right\}^{1/2} \leqq$$

$$\leqq C_{30} \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi_n(\zeta; K; S)|^2 f_{K;S;\nu}(\vartheta)\, d\vartheta \right\}^{1/2} \cdot$$

$$\cdot \sqrt{C_{27}} \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi_n(\zeta; K; S+1)|^2 f_{K;S+1;\nu}(\vartheta)\, d\vartheta \right\}^{1/2} \leqq C_{30} \cdot \sqrt{C_{27}} \leqq C_{31}.$$

A $\left[-\pi, \frac{\vartheta_{m-1} + \vartheta_m}{2}\right]$, ill. a $\left[\frac{\vartheta_m + \vartheta_{m+1}}{2}; \pi\right]$ szakaszokon viszont a (32. 9) képletet, továbbá azt a feltételt használjuk fel, hogy $f_{K;S;\nu}(\vartheta)$-val kapcsolatosan igaz lemmánk állítása. Ezenkívül hivatkozunk a (31. 8) becslésre és végül arra, hogy

$$\frac{1}{|1-\bar{\zeta}z|} \leqq C_{32}, \text{ ha } \vartheta \notin \left[\frac{\vartheta_{m-1}+\vartheta_m}{2}; \frac{\vartheta_m+\vartheta_{m+1}}{2}\right]. \tag{32. 14}$$

Így

$$\left\{\int_{\pi}^{\frac{1}{2}(\vartheta_{m-1}+\vartheta_m)} + \int_{\frac{1}{2}(\vartheta_m+\vartheta_{m+1})}^{\pi}\right\} |\varphi_n(\zeta; K; S+1)|$$

$$|\varphi_n(\zeta; K; S)| \frac{|f_{k;s;\nu}(\vartheta)-f_{k;s+1;\nu}(\vartheta)\cdot\beta|}{1-\bar{\zeta}z)} d\vartheta \leqq$$

$$\leqq C_{32}\left\{\int_{-\pi}^{\pi} |\varphi_n(\zeta; K; S+1)|^2 f_{K;S+1;\nu}(\vartheta)d\vartheta\right\}^{1/2} \cdot \tag{32. 15}$$

$$\cdot\left\{\int_{\pi}^{\pi} |\varphi_n(\zeta; K; S)|^2 \cdot f_{K;S;\nu}(\vartheta)\cdot|\vartheta-\vartheta_\nu|^{-4|\Delta|}d\vartheta\right\}^{1/2} \leqq C_{32}\cdot C_{25}\cdot C_{33},$$

amivel lemmánk állítását is igazoltuk.

E lemma alapján, KOROUS tételét felhasználva, azonnal adódik a 21. 1. LEMMA általánosítása:

32. 2. LEMMA. *Legyen* $-\pi \leqq \vartheta_1 < \vartheta_2 < \cdots < \vartheta_s < \pi$ *és*

$$f(\vartheta) = k(\vartheta)\prod_{j=1}^{s}|\vartheta-\vartheta_j|^{\gamma_j}, \tag{32. 16}$$

ahol

$$0 < k \leqq k(\vartheta) \leqq K, \quad -\pi \leqq \vartheta \leqq \pi, \tag{32. 17}$$

$$k(\vartheta) \in \mathrm{Lip}_\times 1, \text{ ha } \vartheta_j-\lambda_j \leqq \vartheta \leqq \vartheta_j+\lambda_j;\ \lambda_j > 0;\ j=1, 2, \ldots, s; \tag{32.18}$$

végül $-1 < \gamma_j$ $(j=1, 2, \ldots, s)$ *és* $\{\varphi_n(z)\}$ *az* $f(\vartheta)$ *súlyhoz tartozó, az egységkörön ortonormált polinomrendszer. Ez esetben*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\varphi_n(e^{i\vartheta})|^2 f(\vartheta)\cdot\frac{1}{\prod_{j=1}^{s}|\vartheta-\vartheta_j|^{\beta_j}} d\vartheta \leqq C_{34}, \tag{32. 19}$$

hacsak

$$-1 < \gamma_j-\beta_j \text{ és } \beta_j < 1 \ (j = 1, 2, \ldots, s).$$

A kapott eredményt közvetlenül átvihetjük a $[-1, 1]$ intervallumon ortonormált polinomrendszerekre is, a (31. 3)—(31. 4) transzformációs formulák alapján; könnyen párossá tudjuk ugyanis tenni a $(0, \pi)$ intervallumban szingularitásokkal rendelkező súlyfüggvényt, ti. ugyanilyen szingularitásokat veszünk fel a $(-\pi, 0]$ intervallumon is: a 32. 1. lemma értelmében a $[0, \pi)$ intervallumon az aszimptotikus viselkedése ezzel nem változik.

32. 3. LEMMA: *Legyen* $-1 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{s-1} < x_s = 1$, *és*

$$w(x) = k(x) \prod_{j=0}^{s} |x - x_j|^{\alpha_j}, \tag{32.20}$$

ahol

$$0 < k \leq k(x) \leq K; \; -1 \leq x \leq 1, \tag{32.21}$$

$$k(x) \in \mathrm{Lip}_\varkappa 1, \text{ ha } x \in \begin{cases} [-1; -1+\lambda_0] \\ [x_j - \lambda_j; x_j + \lambda_j]; j = 1, 2, \ldots, s-1, \\ [1 - \lambda_s; 1], \end{cases} \tag{32.22}$$

végül $-1 < \alpha_j$ $(j = 0, 1, 2, \ldots, s)$ *és* $\{\omega_n(x)\}$ a w-re *ortonormált polinomrendszer. Ez esetben*

$$\int_{-1}^{1} \omega_n^2(x) \cdot w(x) \frac{dx}{\prod_{j=0}^{s} |x - x_j|^{\beta_j}} \leq C_{35}, \tag{32.23}$$

ha

$$-1 < \alpha_j - \beta_j; \; j = 0, 1, 2, \ldots, s; \; \beta_j < 1 \text{ (ha } j = 1, 2, \ldots, s-1); \tag{32.24}$$
$$\beta_j < \frac{1}{2} \text{ (ha } j = 0, s).$$

33. Korous tételének további általánosítása. A 32. 3. lemma birtokában a 22. 1. TÉTELt tovább általánosíthatjuk, éspedig pontosan ugyanazon gondolatmenetet alkalmazva, mint a 22. 1. TÉTELben:

33. 1. TÉTEL: *Legyen* $w(x) \in L[-1, 1]; p(x) \in L[-1, 1]$;

$$x_{-1} = -1 = x_0 < x_1 < \cdots < x_j < \xi < x_{j+1} < \cdots < x_s = 1 = x_{s+1}; \; (j+1 < s), \tag{33.1}$$

legyen továbbá található a

$$\begin{aligned} &0 < p \leq P; 0 < w \leq W; -1 < a_\nu \leq A_\nu < a_\nu + 1 \; (\nu = 1, 2, \ldots, s-1), \\ &\qquad -1 < b_\nu \leq B_\nu < b_\nu + 1 \; (\nu = 1, 2, \ldots, s-1), \end{aligned} \tag{33.2}$$

ill.

$$-1 < a_\nu \leq A_\nu < a_\nu + \frac{1}{2}; \; -1 < b_\nu \leq B_\nu < b_\nu + \frac{1}{2}; \; (\nu = 0; s),$$

feltételeket kielégítő állandók olyan csoportja, amellyel kielégülnek a

$$(33.3)\qquad \left.\begin{aligned} p|x-x_j|^{A_j} \leqq p(x) \leqq P|x-x_j|^{a_j} \\ w|x-x_j|^{B_j} \leqq w(x) \leqq W|x-x_j|^{b_j} \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\textit{ha } \frac{x_j+x_{j-1}}{2} \leqq x \leqq \frac{x_j+x_{j+1}}{2}, \\ &\textit{ahol } j=0,1,2,\ldots,s; \end{aligned}$$

egyenlőtlenségek. Legyen végül

$$(33.4)\qquad \frac{w(x)}{p(x)} = k(x) \in \mathrm{Lip}\, 1,\ \textit{ha } \frac{x_j+\xi}{2} \leqq x \leqq \frac{\xi+x_{j+1}}{2}.$$

Ez esetben

$$(33.5)\qquad |\omega_n(\xi)| \leqq C_{36} \sum_{\mu=0}^{S} |\pi_{n-\mu}(\xi)|;\quad |\pi_n(\xi)| \leqq C_{37} \sum_{\mu=0}^{S} |\omega_{n-\mu}(\xi)|,$$

ahol S csak s-től, továbbá az a_j, b_j, A_j, B_j exponensektől függ.

Ezt a tételt tovább élesíthetjük, nevezetesen megengedhetjük pl. a

$$(33.6)\qquad \xi = x_{j+1}$$

egyenlőtlenséget is, amikor persze a (33.4) feltételt az $\left[\frac{x_j+\xi}{2}; \frac{\xi+x_{j+2}}{2}\right]$ szakaszra kell kikötnünk. E célból először a 32.1 LEMMÁT kell általánosítanunk:

33.2. LEMMA: *Legyen $f(\vartheta) \in L_{2\pi}$ az alábbi alakban írható:*

$$(33.7)\qquad f(\vartheta) = \sigma(\vartheta) \prod_{j=1}^{s} |\vartheta-\vartheta_j|^{\alpha_j},$$

ahol

$$(33.8)\qquad -\pi \leqq \vartheta_1 < \vartheta_2 < \cdots < \vartheta_j < \vartheta_0 < \vartheta_{j+1} < \cdots < \vartheta_s \leqq \pi;$$
$$\alpha_j > -1;\ (j=1,2,\ldots,s)$$

és

$$(33.9)\qquad 0 < \sigma_1 |\vartheta-\vartheta_0|^{\alpha_0} \leqq \sigma(\vartheta) \leqq \sigma_2 |\vartheta-\vartheta_0|^{\beta_0};\qquad -1 < \beta_0 \leqq \alpha_0 < \beta_0+1$$

továbbá

$$(33.10)\qquad \sigma(\vartheta) \in \mathrm{Lip}\, 1,\ \textit{ha } \vartheta \notin \left(\frac{\vartheta_j+\vartheta_0}{2}; \frac{\vartheta_0+\vartheta_{j+1}}{2}\right).$$

Ez esetben az $f(\vartheta)$ súlyra az egységkörön ortonormált $\{\Phi_n(z)\}$ polinomsorozat a $z_\nu = e^{i\vartheta_\nu}$ pontok ($\nu = 1, 2, \ldots, s$) kis környezetében ugyanolyan aszimtotikával rendelkezik, mint az

$$(33.11)\qquad f^{(\alpha_\nu)}(\vartheta) = 2^{\frac{\alpha_\nu}{2}} [1-\cos(\vartheta-\vartheta_\nu)]^{\frac{\alpha_\nu}{2}}$$

súlyra az egységkörön ortonormált $\{\varphi_n(z;\nu)\}$ polinomsorozat, azaz

$$(33.12)\qquad |\Phi_n(e^{i\vartheta})| = O[|\varphi_n(e^{i\vartheta};\nu)|],$$

$$(33.13)\ \textit{ha}\quad \vartheta \in \left[\frac{1}{2}(\vartheta_{\nu-1}+\vartheta_\nu); \frac{1}{2}(\vartheta_\nu+\vartheta_{\nu+1})\right]\quad \textit{de}\quad \vartheta \notin \left(\frac{\vartheta_j+\vartheta_0}{2}; \frac{\vartheta_0+\vartheta_{j+1}}{2}\right).$$

A lemma bizonyítása a 32. 1 és 32. 2. LEMMÁra támaszkodva, a 21. 2. TÉTEL gondolatmenetével analóg módon történik, nevezetesen az $f(\vartheta)$-ra ortonormált polinomokat (32. 10) mintájára az

(33. 14) $$f^*(\vartheta)=f(\vartheta)2^{\frac{\alpha_\nu}{2}}[1-\cos(\vartheta-\vartheta_\nu)]^{\frac{\alpha_\nu}{2}}$$

súlyra ortonormált polinomsorozattal fejezzük ki.

A 33. 2. LEMMÁra támaszkodva azonnal adódik a

33. 3. TÉTEL is: *A* 33. 1. TÉTEL *konkluziói érvényesek maradnak, ha megengedjük a*

$$\xi=x_{j+1}$$

esetet, feltéve, hogy a (33. 4) *feltételt így módosítjuk:*

$$k(\xi)=k(x_{j+1})>0;\quad k(x)\in \mathrm{Lip}\,1,\ ha\ \frac{x_j+\xi}{2}\leqq x\leqq\frac{\xi+x_{j+2}}{2}.$$

4. §. A Lipschitz-feltétel exponensének csökkentéséről

Az alábbiakban a Korous-tételben szereplő (1. 2) feltétel enyhítésével foglalkozunk. Tételeinket az egységkörön értelmezett, nemnegatív súlyfüggvényekre vonatkozóan mondjuk ki és bizonyítjuk be, amelyeknek viszonya 0-tól elhatárolt és korlátos, ezek alapján azonban — a 2. és 3. § eredményeire támaszkodva — a [—1. 1] intervallumon értelmezett és globálisan sokkal általánosabb struktúrájú súlyfüggvényekre vonatkozó korolláriumokat is megadunk.

A tételekben szereplő két súlyfüggvény: $\varphi(\vartheta)\in L_{2\pi}$ és $\psi(\vartheta)\in L_{2\pi}$; hányadosuk:

(4. 1) $$\varkappa(\vartheta)=\frac{\varphi(\vartheta)}{\psi(\vartheta)};\ \log\varphi\in L_{2\pi};\ \text{emellett}\ \log\psi\in L_{2\pi};\ \psi(\vartheta)\leqq\Psi.$$

A hányados folytonossági modulusát jelölje $\omega(\delta)=\omega(\delta;\varkappa)$. $\varkappa$ elégítse ki a

(4. 2) $$0<\varkappa_1\leqq\varkappa(\vartheta)\leqq\varkappa_2\quad(-\pi\leqq\vartheta\leqq\pi)$$

feltételt. Az egységkörön ortonormált polinomok sorozatát jelöljük $\{\Phi_n(z)\}$, ill. $\{\Psi_n(z)\}$-vel.[5]

A 4. §-ban az alábbi tételeket fogjuk bizonyítani:

4. 1. TÉTEL: *Tegyük fel, hogy a* (4. 1) *és* (4. 2) *feltételek mellett érvényesek az alábbi premisszák:*

(4. 3) $$\int_0^1\frac{\omega(\delta;\varkappa)}{\delta}\,d\delta=C_{38}<\infty;$$

(4. 4) $$|\Phi_n(e^{i\vartheta})|\leqq C_{39};\ (n=1,2,\ldots;\quad-\pi\leqq\vartheta\leqq\pi).$$

[5] Az eddig megadott jelölések, ill. premisszák valamennyi tételben szerepelnek.

Egyenletesen korlátos az egységkörön ez esetben a $\{|\Psi_n(z)|\}$ *sorozat is:*

(4. 5) $$|\Psi_n(e^{i\vartheta})| \leqq C_{40};\ -\pi \leqq \vartheta \leqq \pi.$$

4. 2. TÉTEL: *Legyen*

(4. 6) $$|\varphi(\vartheta)-\varphi(\vartheta_0)| \leqq C_{41}\sqrt{|\vartheta-\vartheta_0|}\, g(|\vartheta-\vartheta_0|);$$

$$\text{ha } |\vartheta-\vartheta| \leqq C_{42}, \text{ ahol}$$

(4. 7) $$\int_0^{C_{42}} \frac{g^2(t)}{t}\, dt = C_{43} < \infty.$$

Ez esetben

(4. 8) $$|\Phi_n(e^{i\vartheta_0})| \leqq C_{44}\ (n=1,2,\ldots).$$

4. 3. TÉTEL: *Tegyük fel, hogy* (4. 2) *feltétel mellett érvényesek az alábbi premisszák:* $\varkappa(\vartheta)$ *a* ϑ_0 *pontban kielégít egy* (4. 6)—(4. 7) *típusú egyenlőtlenséget, továbbá*

(4. 9) $$|\Phi_n(e^{i\vartheta})| \leqq C_{45},\ \text{ha } \vartheta_0-C_{46} \leqq \vartheta \leqq \vartheta_0+C_{46}.$$

Ez esetben

(4. 10) $$|\Psi_n(e^{i\vartheta_0})| \leqq C_{47};\ n=1,2,\ldots.$$

Először a 4. 1. TÉTELt bizonyítjuk. E célból felhasználjuk a $\{\Psi_n(z)\}$ sorozat alábbi előállítását:

(4. 11) $$\Psi_n(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Psi_n(\zeta) \sum_{\nu=0}^{n} \overline{\Phi_\nu(\zeta)}\, \Phi_\nu(z)\, \varphi(t)\, dt =$$
$$= \alpha_n\, \Phi(z) + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Psi_n(\zeta)\{\overline{\Phi_n^*(\zeta)}\, \Phi_n^*(z) -$$
$$-\overline{\Phi_n(\zeta)}\, \Phi_n(z)\}\, \psi(t)\, \frac{\varkappa(t)-\varkappa(\vartheta)}{1-\bar{\zeta} z}\, dt,$$

ahol

(4. 12) $$z=e^{i\vartheta};\ \zeta=e^{it};\ \alpha_n=O(1);\ \Phi_n^*(z)=z^n\, \overline{\Phi_n\left(\frac{1}{\bar z}\right)},$$

és a (4. 2) feltétel következtében tetszőleges μ és ν mellett:

(4. 13) $$|\mu\varphi-\nu\psi| \leqq \begin{cases} C_{48}\,\varphi, \\ C_{49}\,\psi, \end{cases} \quad \text{ha} \quad -\pi \leqq \delta \leqq \pi.$$

Jelölje mármost M_n a $|\Psi_n(e^{i\vartheta})|$ maximumát, és $z_0^{(n)}=e^{i\vartheta_0^{(n)}}$ egy olyan helyet, ahol $|\Psi_n|$ e maximumot felveszi:

(4. 14) $$M_n = |\Psi_n(e^{i\vartheta_0^{(n)}})| \geqq |\Psi_n(e^{i\vartheta})|.$$

A fent szereplő integrált így becsülhetjük:

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Psi_n(\zeta)\{\overline{\Phi_n^*(\zeta)}\,\Phi_n^*(z)-\overline{\Phi_n(\zeta)}\,\Phi_n(z)\}\,\psi(t)\,\frac{\varkappa(t)-\varkappa(\vartheta)}{1-\bar\zeta z}\,dt\right|\leqq$$

$$(4.15)\qquad \leqq\frac{1}{2\pi}\left[\left(\int_{-\pi}^{\vartheta-\lambda}+\int_{\vartheta+\lambda}^{\pi}\right)+\int_{\vartheta-\lambda}^{\vartheta+\lambda}\right]\cdot|\Psi_n(\zeta)|\,\{|\overline{\Phi_n^*(\zeta)}|\,|\Phi_n^*(z)|+$$

$$+|\overline{\Phi_n(\zeta)}|\,|\Phi_n(z)|\}\,\psi(t)\left|\frac{\varkappa(t)-\varkappa(\vartheta)}{t-\vartheta}\right|\cdot\frac{\pi}{2}\,dt\leqq$$

$$\leqq\frac{1}{4}\cdot\max_{t\in[-\pi,\pi]}|\Phi_n(e^{it})|\cdot\frac{1}{\lambda}\,2\varkappa_2\cdot 2\Big\}\int_{-\pi}^{\pi}|\Psi_n(\zeta)|^2\psi(t)\,dt\Big\}^{1/2}\cdot\sqrt{\frac{\varkappa_2}{\varkappa_1}}\Big\}\int_{-\pi}^{\pi}|\Phi_n(\zeta)|^2\varphi(t)\,dt\Big\}^{1/2}+$$

(4.16)

$$+2\max_{\vartheta-\lambda\leqq t\leqq\vartheta+\lambda}|\Psi_n(e^{it})|\cdot\frac{1}{4}\cdot\max_{t\in[-\pi,\pi]}|\Phi_n(e^{it})|^2\cdot\max_{\vartheta-\lambda\leqq t\leqq\vartheta+\lambda}\psi(t)\cdot\int_{-\lambda}^{\lambda}\frac{\omega(\delta;\varkappa)}{\delta}\,d\delta.$$

Így a (4. 4); (4. 3); (4. 12), ill. (4. 11) és (4. 15—16) összefüggések alapján

$$(4.17)\qquad |\Psi_n(z)|\leqq O(1)+O(1)+2\cdot\frac{M_n}{4}\,C_{39}^2\cdot\Psi\int_{-\lambda}^{\lambda}\frac{\omega(\delta;\varkappa)}{\delta}\,d\delta.$$

Könnyen belátható, hogy λ választható olyan kicsinyre, hogy az

$$(4.18)\qquad \int_{\lambda}^{\lambda}\frac{\omega(\delta;\varkappa)}{\delta}\,d\delta\leqq\frac{1}{C_{39}^2\cdot\Psi}$$

egyenlőtlenség érvényes legyen. Ugyanis a (4. 3) egyenlőségből

$$(4.19)\qquad C_{38}=\lim_{\lambda\to 0}\int_{\lambda}^{1}\frac{\omega(\delta;\varkappa)}{\delta}\,d\delta=C_{38}-\lim_{\lambda\to 0}\int_{0}^{\lambda}\frac{\omega(\delta;\varkappa)}{\delta}\,d\delta$$

s így az utóbbi integrál tetszőlegesen kicsiny, ha λ elegendően kicsiny, pl. kisebb, mint $\lambda_0(C_{39};\psi)$. Ennek alapján a (4. 17) egyenlőtlenségből, felhasználva a (4. 18) és (4. 14) kifejezéseket, az

$$(4.20)\qquad M_n\leqq O(1)+\frac{1}{2}M_n$$

egyenlőtlenség adódik, aminek az

$$(4.21)\qquad M_n=O(1)$$

közvetlen következménye. Ezzel tételünket igazoltuk.

Ezekután áttérünk a 4. 3. TÉTEL bizonyítására, amelynek gondolatmenete lényegében a 4. 1. TÉTELét követi. A (4. 11) értelmében

$$(4.22)\qquad \begin{aligned}|\Psi_n(e^{i\vartheta_0})| \leqq |a_n \Phi_n(e^{i\vartheta_0})| + \frac{1}{2\pi}\Bigg\{\Bigg[\int_{-\pi}^{\vartheta_0-\lambda} + \int_{\vartheta_0+\lambda}^{\pi}\Bigg] + \int_{\vartheta_0-\lambda}^{\vartheta_0+\lambda}\Bigg\}\big[|\overline{\Phi_n^*(\zeta)}|\,|\Phi_n^*(z_0)| + \\ + |\overline{\Phi_n(\zeta)}|\,|\Phi_n(z_0)|\big]\,|\Psi_n(\zeta)|\psi(t)\left|\frac{\varkappa(t)-\varkappa(\vartheta_0)}{t-\vartheta_0}\right|\frac{\pi}{2}\,dt.\end{aligned}$$

Minthogy a $-\pi \leqq t \leqq \vartheta_0-\lambda$, ill. $\vartheta_0+\lambda \leqq t \leqq \pi$ intervallumokban

$$(4.23)\qquad \left|\frac{\varkappa(t)-\varkappa(\vartheta_0)}{t-\vartheta_0}\right| \leqq 2\frac{1}{\lambda}\varkappa_2, \quad \varphi(t) \leqq \varkappa_2\psi(t),$$

azért

$$(4.24)\qquad \begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\Bigg[\int_{-\pi}^{\vartheta_0-\lambda} + \int_{\vartheta_0+\lambda}^{\pi}\Bigg]|\Phi_n^*(\zeta)\,\Phi_n^*(z_0) - \overline{\Phi_n(\zeta)}\,\Phi_n(z_0)||\Psi_n(\zeta)|\psi(t)\frac{|\varkappa(t)-\varkappa(\vartheta_0)|}{|1-\bar\zeta z_0|}\,dt \leqq \\ \leqq \frac{1}{4}\cdot 2.2\frac{1}{\lambda}\varkappa_2\sqrt{\varkappa_2}C_{45}\Bigg\{\int_{-\pi}^{\pi}|\Phi_n(e^{it})|^2\varphi(t)\,dt\Bigg\}^{1/2}\Bigg\{\int_{-\pi}^{\pi}|\Psi_n(e^{it})|^2\psi(t)\,dt\Bigg\}^{1/2} \leqq C_{50},\end{aligned}$$

tekintve, hogy az egységkörön $|\Phi_n^*(z)| = |\Phi_n(z)|$.

A (4. 22) harmadik integrálját, a 4. 3. TÉTEL feltételeit figyelembevéve, így becsülhetjük: $(0 < \lambda < C_{46};\ \lambda \leqq C_{42})$

$$(4.25)\qquad \begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{\vartheta_0-\lambda}^{\vartheta_0+\lambda}|\Psi_n(e^{it})||\overline{\Phi_n^*(\zeta)}\,\Phi_n^*(z_0) - \overline{\Phi_n(\zeta)}\,\Phi_n(z_0)|\,\psi(t)\frac{|\varkappa(t)-\varkappa(\vartheta_0)|}{|1-\bar\zeta z_0|}\,dt \leqq \\ < \frac{1}{4}\cdot 2\cdot C_{45}\Bigg\{\int_{-\pi}^{\pi}|\Psi_n(e^{it})|^2\psi(t)\,dt\Bigg\}^{1/2}\cdot\sqrt{\Psi}\cdot\Bigg\{\int_{-\lambda}^{\lambda}\frac{g^2(t)}{t}\,dt\Bigg\}^{1/2} \leqq C_{51}.\end{aligned}$$

A (4. 1) feltétel alapján $a_n = O(1)$. Így a (4. 22); (4. 9) és (4. 25) összefüggések alapján következik a 4. 3. TÉTEL. A 4. 2. TÉTEL a 4. 3. TÉTEL speciális esete.

E tételek alapján — felhasználva a 2. és 3. § eredményeit — a következő korolláriumokat adjuk meg: legyen

$$(4.26)\qquad x_0 = -1 = x_1 < x_2 < \cdots < x_j < x_{j+1} < \cdots < x_s = 1 = x_{s+1}$$

és

$$(4.27)\qquad x_{j^*} < x_0 < x_{j^*+1}; \qquad (j^* = 1, 2, \ldots, s-1),$$

legyen továbbá található a

$$-1 < a_j \leqq A_j < a_j + 1\,; \quad -1 < b_j \leqq B_j < b_j + 1\,; \quad (j = 2, 3, \ldots, s-1)$$

$$(4.28) \quad -1 < a_j \leqq A_j < a_j + \frac{1}{2}\,; -1 < b_j \leqq B_j < b_j + \frac{1}{2}\,; (j = 1, s);$$

$$0 < w \leqq W; 0 < p \leqq P$$

állandók olyan csoportja, amelyekre teljesülnek a

$$(4.29) \quad \left.\begin{array}{l} w|x-x_j|^{A_j} \leqq w(x) \leqq W|x-x_j|^{a_j} \\ \\ p|x-x_j|^{B_j} \leqq p(x) \leqq P\,|x-x_j|^{b_j} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{, ha } \frac{x_{j-1}+x_j}{2} \leqq x \leqq \frac{x_j+x_{j+1}}{2}; \\ j = 1, 2, \ldots, s; j \neq j^*, \\ \text{ill. } \frac{x_{j^*-1}+x_{j^*}}{2} \leqq x \leqq \frac{x_{j^*}+x_0}{2}; \\ \text{ill. } \frac{x_0+x_{j^*+1}}{2} \leqq x \leqq \frac{x_{j^*+1}+x_{j^*+2}}{2}, \end{array}$$

feltételek. Legyen található emellett egy olyan

$$(4.30) \qquad -1 \leqq a_0 \leqq A_0 < a_0 + 1\,; \quad -1 \leqq b_0 \leqq B_0 < b_0 + 1$$

kitevőpár, amelyekkel a

$$(4.31) \quad \left.\begin{array}{l} w|x-x_0|^{A_0} \leqq w(x) \leqq W|x-x_0|^{a_0} \\ p|x-x_0|^{B_0} \leqq p(x) \leqq P\,|x-x_0|^{b_0} \end{array}\right\} \frac{x_{j^*}+x_0}{2} \leqq x \leqq \frac{x_0+x_{j^*+1}}{2}$$

egyenlőtlenség is teljesül. Jelölje $\{\omega_n(x)\}$, ill. $\{\pi_n(x)\}$ a $w(x) \in L[-1, 1]$, ill. $p(x) \in L[-1, 1]$ súlyra a $[-1, 1]$ intervallumon ortonormált polinomok sorozatát és tegyük fel, hogy

$$(4.32) \qquad |\omega_n(x)| \leqq C_{52}, \quad \text{ha} \quad x_0 - \lambda \leqq x \leqq x_0 + \lambda \qquad (\lambda > 0, \text{ tetszőleges}).$$

I. KOROLLÁRIUM: *Megtartjuk a* (4.26)—(4.32) *alatti jelöléseket és premisszákat, emellett a* $w(x)$ *és* $p(x)$ *súlyfüggvények* $k(x) = \frac{w(x)}{p(x)}$ *hányadosáról feltesszük, hogy*

$$(4.33) \qquad |k(x) - k(x_0)| \leqq \sqrt{|x-x_0|} \cdot g(|x-x_0|), \quad \text{ha} \quad x_0 - \lambda \leqq x \leqq x_0 + \lambda,$$

ahol

$$(4.34) \qquad k(x_0) > 0\,; \qquad \int_0^\lambda \frac{g^2(t)}{t}\,dt \leqq C_{53} < \infty.$$

Ez esetben

$$(4.35) \qquad |\pi_n(x_0)| \leqq C_{54}; \quad n = 1, 2, \ldots$$

II. KOROLLÁRIUM: *Megtartjuk a* (4. 26)—(4. 32) *alatti jelöléseket és premisszákat, emellett a w és p súlyok* $k(x)$ *hányadosának* $[x_0-\lambda; x_0+\lambda]$*-beli* $\omega(\delta)=\omega(\delta; x_0-\lambda, x_0+\lambda)$ *folytonossági modulusáról feltesszük, hogy*

$$k(x_0)>0; \quad \int_0^\lambda \frac{\omega(\delta)}{\delta} d\delta \leq C_{55} < \infty.$$

Ez esetben is érvényes a (4. 35) *becslés.*

IRODALOMJEGYZÉK

[1] Korous, J.: O rozvoji funkcí jedné reálné proměnné v řadu jistých ortogonálních polynomů. *Rozpravy Česke Ak.*, 48, 1938, pp. 12.

[2] Szegö, G.: *Orthogonal polynomials.* Am. Math. Soc. Coll. Publ. Vol. **XXIII.**, 1939.

(Beérkezett: 1957. VI. 10.)