A TELEFON-FORGALOM ELMÉLETÉNEK NÉHÁNY VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁSI KÉRDÉSÉRŐL

TAKÁCS LAJOS

A. K. Erlang születésének 80-adik évfordulójára, 1958. január 1-ére ajánlva

Bevezetés

Tekintsük egy telefonközpont működését a $0 \leqq t < \infty$ időközben. Tegyük fel, hogy a $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n, \ldots$ véletlen időpontokban hívások érkeznek a központba $(0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots < \tau_n < \cdots)$. Egyelőre a τ_1 tetszőleges pozitív valószínűségű lehet. A $\tau_{n+1} - \tau_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ időkülönbségekről feltesszük, hogy egyforma eloszlású, kölcsönösen független, pozitív valószínűségi változók, amelyek függetlenek a τ_1 változótól is. Jelölje közös eloszlásfüggvényüket $F(x)$, azaz $\mathbf{P}\{\tau_{n+1} - \tau_n \leqq x\} = F(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Legyen továbbá

(1)
$$\alpha = \int_0^\infty x\, dF(x)$$

és

(2)
$$\varphi(s) = \int_0^\infty e^{-sx}\, dF(x).$$

Megjegyezzük, hogy az a szokásos feltevés, hogy a hívások időpontjainak $\{\tau_n\}$ sorozata λ eseménysűrűségű *Poisson-folyamatot* alkot, a fenti feltevésnek azt a speciális esetét képezi, midőn $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, ha $x \geqq 0$ és τ_1 eloszlásfüggvénye is $F(x)$. A fent említett általános feltételeknek megfelelő $\{\tau_n\}$ sorozatot a következőkben *rekurrens folyamatnak* fogjuk nevezni. Ha speciálisan fennáll, hogy $\alpha < \infty$ és τ_1 eloszlásfüggvénye

$$F^*(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha} \displaystyle\int_0^x [1 - F(y)]\, dy, & \text{ha} \quad x \geqq 0, \\ 0, & \text{ha} \quad x < 0, \end{cases}$$

akkor a $\{\tau_n\}$ sorozatot *stacionárius rekurrens folyamatnak* fogjuk nevezni. Eszerint a Poisson-folyamat a stacionárius rekurrens folyamat speciális eseteként fogható fel. Megemlítjük még a stacionárius rekurrens folyamatok egy nevezetes tulajdonságát. Ha $\zeta(t)$ valószínűségi változó jelöli a t időpontnak a legközelebbi utána következő hívástól vett távolságát, akkor fennáll, hogy $\mathbf{P}\{\zeta(t) \leqq x\} = F^*(x)$ valamennyi t értékre.

A következőkben háromféle telefon-rendszer vizsgálatával foglalkozunk:

I. A veszteségi rendszer. A központban m vonal áll a hívások rendelkezésére: Ha egy hívás beérkezési időpontjában van szabad vonal, akkor létrejön kapcsolat (beszélgetés). Ha a hívás pillanatában valamennyi vonal foglalt, akkor a hívás minden következmény nélkül elvész.

II. A várakozási rendszer. A központban m vonal áll a hívások rendelkezésére. Ha egy hívás beérkezési időpontjában van szabad vonal, akkor létrejön kapcsolat. Ha a hívás pillanatában valamennyi vonal foglalt, akkor a hívás mindaddig várakozik, ameddig szabad vonal nem áll rendelkezésére és csak ezután valósul meg a kapcsolat.

III. Az egyesített várakozási és veszteségi rendszer. A központban m vonal áll a hívások rendelkezésére és a várakozó hívások maximális száma w lehet. Ha egy hívás beérkezési időpontjában van szabad vonal, akkor létrejön kapcsolat. Ha a hívás pillanatában valamennyi vonal foglalt és a várakozó hívások száma kisebb, mint w, akkor a hívás mindaddig várakozik, amíg szabad vonal nem áll rendelkezésre. Ha az összes vonal foglalt és a várakozó hívások száma w, akkor a hívás minden következmény nélkül elvész.

A következőkben a fent említett három telefon-rendszert röviden I., II. és III. modellnek nevezzük. Nyilvánvalóan a III. modell a legáltalánosabb és az I. modell ennek az a speciális esete, midőn $w=0$ és a II. modell pedig a $w=\infty$ esetnek felel meg.

Valamennyi esetben feltesszük, hogy a kapcsolatok időtartamai, az úgynevezett tartási idők, egyforma eloszlású független pozitív valószínűségi változók, amelyek függetlenek a $\{\tau_n\}$ időpontoktól is. Közös eloszlásfüggvényük legyen

$$H(x)=\begin{cases} 1-e^{-\mu x}, & \text{ha } x\geqq 0,\\ 0 \quad , & \text{ha } x<0. \end{cases} \tag{3}$$

A telefon-forgalom elméletében a beszélgetési idők eloszlására vonatkozóan általában a fenti (3) feltevéssel szokás élni. Mindazonáltal érdekes lenne általánosabb $H(x)$ eloszlásfüggvények esetét is vizsgálat tárgyává tenni, amely esetre vonatkozóan eddig nem sok eredménnyel rendelkezünk.

A fenti három rendszer egyikénél sem teszünk kikötést arra vonatkozóan, hogy a szabad vonalak melyikén jön létre a kapcsolat. Ennek semmiféle szerepe sem lesz tárgyalásunkban és ezért bármilyen kiszolgálási rendszer megengedhető. Általában azzal a feltevéssel sem élünk, hogy a várakozó hívások érkezési sorrendben lesznek kiszolgálva. Egyedül a várakozási idő eloszlásának meghatározásánál tesszük fel, hogy a kapcsolások érkezési sorrendben történnek.

Jelölések. Jelölje mindhárom esetben $\eta(t)$ a t időpontban folyamatban levő kapcsolatok (foglalt vonalak) és várakozó hívások együttes számát. Általában megengedjük, hogy $\eta(0)$ tetszőleges olyan nem-negatív egész értékeket felvevő valószínűségi változó legyen, amely független a hívások időpontjaitól és a kapcsolatok időtartamaitól.

Az I. modellnél $\eta(t) \leqq m$ és $\eta(t)$ a foglalt vonalak számát jelöli. A II. modellnél, ha $\eta(t) \leqq m$, akkor $\eta(t)$ vonal foglalt és nincs várakozó hívás, míg ha $\eta(t) > m$, akkor m vonal foglalt és $\eta(t) - m$ hívás várakozik. A III. modellnél $\eta(t) \leqq m+w$. Ha $\eta(t) \leqq m$, akkor $\eta(t)$ vonal foglalt és nincs várakozó hívás, ellenben, ha $m < \eta(t) \leqq m+w$, akkor mind az m vonal foglalt és $\eta(t) - m$ hívás várakozik.

Vezessük be továbbá az $\eta_n = \eta(\tau_n - 0)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ valószínűségi változókat. Az η_n jelöli az n-edik hívás érkezési időpontjában a foglalt vonalak és várakozó hívások együttes számát.

Megállapodunk továbbá abban, hogy E_k állapotról beszélünk, ha a foglalt vonalak és várakozó hívások együttes száma k.

Végül jelölje $\zeta(t)$ a t időpontnak a közvetlen utána következő hívástól vett távolságát. Nyilvánvalóan $\zeta(0) = \tau_1$.

Könnyen látható, hogy az $\{\eta(t), \zeta(t)\}$ $(0 \leqq t < \infty)$ változópárral jellemzett folyamat Markov-féle. Megjegyezzük azonban, hogy a Markov-jelleg csakis abban az esetben érvényes, ha a beszélgetési időtartamok eloszlása a (3) alatti $H(x)$ függvény.

Az eredmények összefoglalása. Dolgozatunkban a telefon-forgalomra vonatkozóan a korábban részletezett következő feltevésekkel élünk: a hívások időpontjainak $\{\tau_n\}$ sorozata rekurrens folyamat, a központ az I., II., illetve III. modell szerint működik, a kapcsolatok időtartamai egyforma eloszlású független valószínűségi változók a (3) alatti eloszlásfüggvénnyel. A kezdeti állapotra, amelyet az $\eta(0)$ és τ_1 változók jellemeznek, először semmilyen megszorítást sem teszünk és megvizsgáljuk az $\{\eta_n\}$ és az $\{\eta(t)\}$ változósorozat határeloszlását, midőn $n \to \infty$, illetve $t \to \infty$. Ezután az $\{\eta(0), \tau_1\}$ változó-pár eloszlásának speciális megválasztásával értelmezzük a stacionárius $\{\eta(t), \zeta(t)\}$ folyamat fogalmát és erre nézve meghatározzuk annak a valószínűségét, hogy egy hívás elvész, illetve a hívások várakozási idejének eloszlásfüggvényét abban az esetben, ha a hívások kiszolgálása érkezési sorrendben történik.

Részletesebben szólva: Kimutatjuk, hogy a $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{P}\{\eta_n = k\} = P_k$ határértékek léteznek és függetlenek a kezdeti állapottól. Az I. és III. modell esetén $\{P_k\}$ mindig valószínűségeloszlás, a II. modell esetén csak akkor, ha $m\alpha\mu > 1$. Mindhárom modell esetén explicit alakban meghatározzuk a $\{P_k\}$ valószínűségeloszlást. Ezután megmutatjuk, hogy ha $\alpha < \infty$ és $F(x)$ nem-rácsos eloszlásfüggvény, akkor a $\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\{\eta(t)=k\}=P_k^*$ határértékek léteznek és függetlenek a kezdeti állapottól. Az I. és III. modell esetén $\{P_k^*\}$ mindig valószínűségeloszlás, a II. modell esetén csak akkor, ha $m\alpha\mu>1$ feltétel is teljesül. Mindhárom esetben megadjuk, hogy a P_k^* valószínűségek miként fejezhetők ki a P_k valószínűségek segítségével. Ezt követően a stacionárius $\{\eta(t), \zeta(t)\}$ folyamat fogalmát definiáljuk. Erre nézve minden t időpontban érvényes, hogy $\mathbf{P}\{\eta(t)=k\}=P_k^*$ és $\mathbf{P}\{\zeta(t)\leqq x\}=F^*(x)$. Meghatározzuk stacionárius folyamat esetében egy tetszőleges hívás várakozási idejének $G^*(x)$ eloszlásfüggvényét a II. és III. modell esetén, és egy tetszőleges hívás elveszésének a valószínűségét az I. és III. modell esetén. Továbbá az I. modell esetét az $m=\infty$ határesetben tárgyaljuk és ebben az esetben tárgyalásunkat kiterjesztjük a (3)-nál általánosabb $H(x)$ eloszlásfüggvényekre is. Ezenkívül néhány rokon kérdésről is teszünk említést.

A szakirodalom áttekintése. Az eddigiekben mind a három modellt részletesen tárgyalták abban a speciális esetben, midőn a $\{\tau_n\}$ sorozat λ eseménysűrűségű Poisson-folyamat. Ebben az esetben a $\{P_k\}$ és $\{P_k^*\}$ valószínűségeloszlás megegyezik egymással. Az említett Poisson-folyamat esetén a $\{P_k^*\}$ eloszlást az I. modellre A. K. ERLANG [9], a II. modellre A. K. ERLANG [9], E. C. MOLINA [32] és A. N. KOLMOGOROV [23], a III. modellre A. K. ERLANG (vö. A. JENSEN [5] pp. 84—90) és L. KOSTEN [26] határozta meg. (Vö. még TH. FRY [15] könyvét.) Azt az esetet, midőn $\{\tau_n\}$ a fentiekben értelmezett rekurrens folyamat, régebben nem vizsgálták meg ilyen részletességgel. Az I. modellt korábban C. PALM [35] és F. POLLACZEK [38] tárgyalták, de ők csak a veszteség valószínűségét (P_m-et) határozták meg. A II. esetet korábban D. G. KENDALL [21] vizsgálta. KENDALL megadta a $\{P_k\}$ eloszlás létezésének feltételét és megmutatta, hogy a $P_m, P_{m+1}, P_{m+2}, \ldots$ valószínűségek geometriai sort alkotnak. Továbbá meghatározta a várakozási idő eloszlásfüggvényét egy ismeretlen paraméter erejéig. Szerző nem régi [52], [54], [55] munkáiban mind a három modell esetében meghatározta a $\{P_k\}$ és $\{P_k^*\}$ valószínűségeloszlások explicit alakját. Továbbá J. W. COHEN [6] megjelenő dolgozatában ugyancsak meghatározta az I. modell esetén a $\{P_k\}$ és $\{P_k^*\}$ eloszlások explicit alakját. Jelen dolgozat legnagyobb része szerző [52], [53], [54], [55] munkáinak eredményeit tartalmazza.

MEGJEGYZÉS. A fent vázolt I. és II. modell esetét $m=1$ vonal esetén tetszőleges $H(x)$ eloszlásfüggvényre is részletesen megvizsgálták. Ez az eset azonban a telefon-forgalom szempontjából nem bír gyakorlati jelentőséggel. Az I. modell $m=1$ esetben a Geiger—Müller számlálóval történő részecskeszámlálásnál lép fel (vö. [49]). A II. modell $m=1$ esetben várakozási idő problémák tárgyalásánál lép fel. Azt az esetet, midőn $\{\tau_n\}$ Poisson-folyamat,

F. POLLACZEK [36], A. J. HINCSIN [16] és mások tárgyalták (vö. még [48]), azt az esetet pedig, midőn $\{\tau_n\}$ rekurrens folyamat, D. V. LINDLEY [30], W. L. SMITH [42], D. M. G. WISHART [60] és mások tárgyalták. A II. modellt $m>1$ esetén, $\{\tau_n\}$ Poisson-folyamatra és tetszőleges $H(x)$-re várakozási idő problémákkal kapcsolatban F. POLLACZEK [36], D. G. KENDALL [21], J. KIEFER és J. WOLFOWITZ [22] és mások tárgyalták. Továbbá az I. modellt $\{\tau_n\}$ Poisson-folyamat esetére és tetszőleges $H(x)$-re F. POLLACZEK [37], C. PALM [34], L. KOSTEN [25], B. A. SZEVASZTJANOV [41] és mások tárgyalták.

További jelölések. Előrebocsátjuk, hogy dolgozatunk folyamán mindvégig használni fogjuk a következő jelöléseket:

$$\varphi_j = \varphi(j\mu) = \int_0^\infty e^{-j\mu x}\,dF(x) \qquad (j=0,1,2,\ldots) \tag{4}$$

és

$$C_j = \prod_{i=1}^{j} \frac{\varphi_i}{1-\varphi_i} \qquad (j=0,1,2,\ldots), \tag{5}$$

ahol $C_0 = 1$. Továbbá legyen

$$\mathbf{P}\{\eta(t)=k\} = P_k(t).$$

Végül legyen a $\{P_k\}$ valószínűségeloszlás r-edik binomiális momentuma

$$B_r = \sum_{k=r}^{\infty} \binom{k}{r} P_k$$

és a $\{P_k^*\}$ eloszlás r-edik binomiális momentuma

$$B_r^* = \sum_{k=r}^{\infty} \binom{k}{r} P_k^*.$$

Köszönetnyilvánítás. Köszönetemet fejezem ki J. W. COHEN (Delft), A. JENSEN (Koppenhága) és R. SYSKI (Harrow-on-the-Hill) uraknak, akik számos szakirodalom megadásával, különlenyomatok és kéziratok rendelkezésemre bocsátásával nagy segítséget nyújtottak jelen cikk megírásához.

1. §. A $\{P_k\}$ valószínűségeloszlás meghatározása

I. A VESZTESÉGI RENDSZER

1. TÉTEL: *A $\{P_k\}$ valószínűségeloszlás mindig létezik és független az $\{\eta(0), \zeta(0)\}$ változó-pár kezdeti eloszlásától. Fennáll, hogy*

$$P_k = \sum_{r=k}^{m} (-1)^{r-k} \binom{r}{k} B_r \qquad (k=0, 1, \ldots, m), \tag{6}$$

ahol

$$B_r = C_r \frac{\sum_{j=r}^{m} \binom{m}{j} \frac{1}{C_j}}{\sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} \frac{1}{C_j}} \qquad (r=0, 1, \ldots, m) \tag{7}$$

a $\{P_k\}$ valószínűségeloszlás r-edik binomiális momentuma.

BIZONYÍTÁS: Mindenekelőtt észrevesszük, hogy az $\{\eta_n\}$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$ valószínűségi változók sorozata homogén Markov-láncot alkot a $\mathbf{P}\{\eta_{n+1}=k \mid \eta_n=j\} = p_{jk}$ átmenet-valószínűségekkel, ahol

$$p_{jk} = \binom{j+1}{k} \int_0^\infty e^{-k\mu x}(1-e^{-\mu x})^{j+1-k}\, dF(x) \qquad (j=0, 1, \ldots, m-1) \tag{8}$$

és

$$p_{m,k} = p_{m-1,k}. \tag{9}$$

Ha a hívások közötti $\tau_{n+1}-\tau_n$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$ időtartamok ugyanazon x állandóval egyenlők, akkor ezen feltétel mellett jelölje $\pi_{jk}(x)$ az átmenet-valószínűségeket. Ekkor az általános esetben

$$p_{jk} = \int_0^\infty \pi_{jk}(x)\, dF(x).$$

Könnyen belátható, hogy az $\{\eta_n\}$ Markov-lánc irreducibilis és nem periodikus. Mivel az állapotok száma véges, tehát ergodikus is. Következőleg a $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\{\eta_n=k\} = P_k$ $(k=0, 1, \ldots, m)$ határ-valószínűségek léteznek és függetlenek az η_1 változó eloszlásától és így természetesen az $\{\eta(0), \tau_1\}$ változó-pár kezdeti eloszlásától is. A $\{P_k\}$ valószínűségeloszlás egyértelműen meghatározható az alábbi egyenletrendszer megoldásával

$$P_k = \sum_{j=k-1}^{m} p_{jk} P_j \qquad (k=0, 1, \ldots, m), \tag{10}$$

ahol

$$\sum_{k=0}^{m} P_k = 1. \tag{11}$$

(Vö. W. FELLER [10] p. 325.)

A (10) egyenletrendszer megoldására vezessük be az

$$U(z)=\sum_{k=0}^{m} P_k z^k \tag{12}$$

generátorfüggvényt. A (10) egyenletek alapján az $U(z)$ generátorfüggvényre a következő integrálegyenlet adódik:

$$\begin{aligned} U(z)=&\int_0^\infty (1-e^{-\mu x}+ze^{-\mu x})\,U(1-e^{-\mu x}+ze^{-\mu x})\,dF(x)+ \\ &+(1-z)P_m\int_0^\infty e^{-\mu x}(1-e^{-\mu x}+ze^{-\mu x})^m\,dF(x). \end{aligned} \tag{13}$$

Ezután jelölje B_r $(r=0,1,\ldots,m)$ a $\{P_k\}$ eloszlás r-edik binomiális momentumát, azaz legyen

$$B_r=\sum_{k=r}^{m}\binom{k}{r}P_k. \tag{14}$$

Nyilvánvalóan fennáll, hogy

$$B_r=\frac{1}{r!}\left(\frac{d^r U(z)}{dz^r}\right)_{z=1}. \tag{15}$$

Mint látni fogjuk, a B_r $(r=0,1,\ldots,m)$ binomiális momentumok egyértelműen meghatározzák a $\{P_k\}$ valószínűségeloszlást és így a feladat visszavezethető az ismeretlen B_r-ek meghatározására. (11) szerint $B_0=1$. A (13) z-szerinti j-szeres differenciálásával és $z=1$ helyettesítéssel pedig azt kapjuk, hogy

$$B_j=\left[B_j+B_{j-1}-\binom{m}{j-1}P_m\right]\varphi_j, \qquad (j=1,2,\ldots,m),$$

vagyis

$$B_j=\frac{\varphi_j}{1-\varphi_j}\left[B_{j-1}-\binom{m}{j-1}B_m\right], \qquad (j=1,2,\ldots,m), \tag{16}$$

mivel hogy (14) szerint $P_m=B_m$.

Ha B_m-et először adottnak tételezzük fel, akkor (16) a B_j $(j=1,2,\ldots,m)$ ismeretlenekre elsőrendű lineáris differenciaegyenlet, amely könnyen megoldható (vö. CH. JORDAN [20] p. 583). Osszuk el a (16) egyenlet mindkét oldalát az (5) alatt értelmezett C_j mennyiséggel, akkor azt nyerjük, hogy

$$\frac{B_j}{C_j}=\frac{B_{j-1}}{C_{j-1}}-\binom{m}{j-1}\frac{B_m}{C_{j-1}} \qquad (j=1,2,\ldots,m).$$

Ezen egyenleteket $j=1,2,\ldots,r$ értékekre összegezve

$$\frac{B_r}{C_r}=1-B_m\sum_{j=0}^{r-1}\binom{m}{j}\frac{1}{C_j},$$

ugyanis $B_0 = C_0 = 1$. Ha most a fenti egyenletben az $r = m$, akkor innen B_m is meghatározható és azt nyerjük, hogy

$$B_m = \frac{1}{\sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} \frac{1}{C_j}}.$$

Így végül is

$$B_r = C_r \frac{\sum_{j=r}^{m} \binom{m}{j} \frac{1}{C_j}}{\sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} \frac{1}{C_j}}, \tag{17}$$

amivel a (7) képletet igazoltuk.

A B_r $(r = 0, 1, \ldots, m)$ binomiális momentumok ismeretében a P_k valószínűségek közvetlenül felírhatók JORDAN KÁROLY alábbi képlete segítségével

$$P_k = \sum_{r=k}^{m} (-1)^{r-k} \binom{r}{k} B_r, \tag{18}$$

amivel a (6) állítást is igazoltuk.

Megjegyezzük, hogy a (18) képlet a B_r binomiális momentum (14) definíciójából is következik. Szorozzuk meg ugyanis (14) mindkét oldalát $(-1)^{r-k} \binom{r}{k}$-val és összegezzük a kapott egyenleteket $r = k, k+1, \ldots, m$-re, akkor tekintetbe véve, hogy

$$\sum_{r=k}^{\nu} (-1)^{r-k} \binom{r}{k} \binom{\nu}{r} = \begin{cases} 1, & \text{ha} \quad \nu = k, \\ 0, & \text{ha} \quad \nu \neq k, \end{cases}$$

megkapjuk (18)-at.

(18) egy más bizonyítása a Taylor-képlet felhasználásával történik. Vegyük tekintetbe, hogy (12) szerint

$$P_k = \frac{1}{k!} \left(\frac{d^k U(z)}{dz^k} \right)_{z=0} \qquad (k = 0, 1, \ldots, m)$$

és mint említettük

$$B_r = \frac{1}{r!} \left(\frac{d^r U(z)}{dz^r} \right)_{z=1} \qquad (r = 0, 1, \ldots, m).$$

Ha $U(z)$ deriváltjai a $z = 1$ helyen ismeretesek, akkor ezek segítségével $U(z)$ deriváltjai a $z = 0$ helyen is kifejezhetők. Ugyanis a Taylor-képlet szerint

$$U(z) = \sum_{r=0}^{m} \frac{1}{r!} \left(\frac{d^r U(z)}{dz^r} \right)_{z=1} (z-1)^r$$

és innen

$$\left(\frac{d^k U(z)}{dz^k}\right)_{z=0} = \sum_{r=k}^{m} \frac{(-1)^{r-k}}{(r-k)!} \left(\frac{d^r U(z)}{dz^r}\right)_{z=1},$$

ahonnan (18) már egyszerűen következik.

II. A VÁRAKOZÁSI RENDSZER

2. TÉTEL: *Ha* $m\alpha\mu > 1$, *akkor a* $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{P}\{\eta_n = k\} = P_k$ $(k=0, 1, 2, \ldots)$ *határeloszlás létezik és független az* $\{\eta(0), \zeta(0)\}$ *változó-pár kezdeti eloszlásától. Fennáll, hogy*

$$(19) \qquad P_k = \begin{cases} \sum\limits_{r=k}^{m-1} (-1)^{r-k} \binom{r}{k} U_r & (k=0, 1, \ldots, m-1) \\ A\,\omega^{k-m} & (k=m, m+1, \ldots), \end{cases}$$

ahol ω *az*

$$(20) \qquad \int_0^\infty e^{-m\mu(1-\omega)x}\, dF(x) = \omega$$

egyenletnek egyetlen, a (0, 1) *intervallumba eső valós gyöke és*

$$(21) \qquad U_r = A C_r \sum_{j=r+1}^{m} \frac{\binom{m}{j}}{C_j(1-\varphi_j)} \left[\frac{m(1-\varphi_j)-j}{m(1-\omega)-j}\right],$$

ahol

$$(22) \qquad A = \frac{1}{\dfrac{1}{1-\omega} + \sum\limits_{j=1}^{m} \dfrac{\binom{m}{j}}{C_j(1-\varphi_j)} \left[\dfrac{m(1-\varphi_j)-j}{m(1-\omega)-j}\right]}.$$

A $\{P_k\}$ *valószínűségeloszlás r-edik binomiális momentumára,*

$$(23) \qquad B_r = \sum_{k=r}^{\infty} \binom{k}{r} P_k$$

-ra fennáll, hogy

$$(24) \qquad B_r = \begin{cases} U_r + \dfrac{A}{1-\omega} \sum\limits_{j=0}^{r} \binom{m}{j} \left(\dfrac{\omega}{1-\omega}\right)^{r-j}, & \textit{ha} \quad r < m, \\ A\,\dfrac{\omega^{r-m}}{(1-\omega)^{r+1}}, & \textit{ha} \quad r \geqq m. \end{cases}$$

Megjegyezzük, hogy ha $m\alpha\mu \leqq 1$, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{P}\{\eta_n = k\} = 0$ $(k=0,1,2,\ldots)$ az $\eta(0)$ változó kezdeti eloszlásától függetlenül. Ennek a ténynek bizonyításával azonban nem foglalkozunk.

BIZONYÍTÁS: Könnyen meggyőződhetünk arról, hogy az $\{\eta_n\}$ $(n=1,2,3,\ldots)$ valószínűségi változók sorozata homogén Markov-láncot alkot az alábbiakban megadott $\mathbf{P}\{\eta_{n+1}=k\,|\,\eta_n=j\}=p_{jk}$ átmenet-valószínűségekkel

$$(25)\quad \begin{aligned} p_{jk}&=\binom{j+1}{k}\int_0^\infty e^{-k\mu x}(1-e^{-\mu x})^{j+1-k}\,dF(x), \quad \text{ha } j<m \\ p_{jk}&=\binom{m}{k}\int_0^\infty e^{-k\mu x}\left[\int_0^x \frac{(m\mu y)^{j-m}}{(j-m)!}(e^{-\mu y}-e^{-\mu x})^{m-k}\,m\mu\,dy\right]dF(x), \text{ha } j\geqq m \text{ és } k<m \\ p_{jk}&=\int_0^\infty e^{-m\mu x}\frac{(m\mu x)^{j+1-k}}{(j+1-k)!}\,dF(x), \quad \text{ha } j\geqq m \text{ és } k\geqq m. \end{aligned}$$

Jelölje ismét $\pi_{jk}(x)$ az átmenet-valószínűségeket azon feltétel mellett, hogy a hívások közötti $\tau_{n+1}-\tau_n$ $(n=1,2,3,\ldots)$ időtartamok ugyanazon x állandóval egyenlők. Ekkor az általános esetben

$$(26)\qquad p_{jk}=\int_0^\infty \pi_{jk}(x)\,dF(x).$$

Könnyen belátható, hogy az $\{\eta_n\}$ Markov-lánc irreducibilis és nem periodikus. D. G. KENDALL [21] munkájában kimutatta, hogy ha $m\alpha\mu>1$, akkor az állapotok ergodikusak és így a $\lim\limits_{n\to\infty}\mathbf{P}\{\eta_n=k\}=P_k$ $(k=0,1,2,\ldots)$ határvalószínűségek léteznek és függetlenek az η_1 változó kezdeti eloszlásától és következőleg az $\{\eta(0),\tau_1\}$ eloszlásától is. Ebben az esetben a $\{P_k\}$ határeloszlás egyértelműen meghatározható a

$$(27)\qquad P_k=\sum_{j=k-1}^{\infty}p_{jk}P_j \qquad (k=0,1,2,\ldots)$$

egyenletrendszer megoldásával, ahol

$$(28)\qquad \sum_{k=0}^{\infty}P_k=1$$

(vö. W. FELLER [10], p. 325).

Megjegyezzük, hogy az a tény, hogy az $\{\eta_n\}$ Markov-lánc állapotai $m\alpha\mu>1$ esetén ergodikusak, könnyen igazolható F. G. FOSTER [14] tétele, illetve ennek egy változata segítségével, amelyet M. D. MOUSTAFA [33] mondott ki. Ennek a tételnek alkalmazásához elegendő csupán annyit megjegyezni, mint azt később látni is fogjuk, hogy $P_k=A\omega^{k-m}$, ahol $0<\omega<1$, $k\geqq m$ esetén kielégíti a (27) egyenletrendszert.

Ha $m\alpha\mu\leqq 1$, akkor a rendszer állapotai nem ergodikusak és fennáll $\lim\limits_{n\to\infty}\mathbf{P}\{\eta_n=k\}=0$ $(k=0,1,2,\ldots)$ függetlenül az η_1 változó kezdeti eloszlásától és így az $\eta(0)$ eloszlásától is. Ezzel az esettel azonban jelenleg nem foglalkozunk.

Következő feladatunk a (27) egyenletrendszer megoldása. KENDALLt követve tekintsük először a (27) egyenletrendszert $k \geqq m$-re. Ekkor fennáll, hogy

$$P_k = \sum_{\nu=0}^{\infty} P_{\nu+k-1} \int_0^{\infty} e^{-m\mu x} \frac{(m\mu x)^{\nu}}{\nu!} dF(x) \qquad (k \geqq m). \tag{29}$$

Válasszuk meg a pozitív valós $\omega \neq 1$ számot úgy, hogy

$$\varphi(m\mu(1-\omega)) = \omega$$

legyen. Ha $m\alpha\mu > 1$, akkor egyetlen ilyen ω van és $0 < \omega < 1$. Ugyanis $\varphi(0) = 1, \varphi'(0) = -\alpha$, $\varphi(\infty) = 0$ és növekvő s értékekre $\varphi(s)$ monoton csökken, ha $0 \leqq s < \infty$.

Ha feltesszük, hogy

$$P_k = A\omega^{k-m}, \qquad (k \geqq m), \tag{30}$$

akkor láthatjuk, hogy (29) ki van elégítve, ha $k > m$, és ha $k = m$, akkor (29)-ből azt kapjuk, hogy $P_{m-1} = A/\omega$. Innen $A = \omega P_{m-1}$ és következőleg csak a $P_0, P_1, \ldots, P_{m-1}$ ismeretlenek meghatározása marad hátra. (Megjegyezzük, hogy az $m = 1$ speciális esetben a fentiek szerint a $\sum_{k=0}^{\infty} P_k = 1$ követelmény már egyértelműen meghatározza a $\{P_k\}$ valószínűségeloszlást, mégpedig érvényes, hogy $P_k = (1-\omega)\omega^k$.) A $P_0, P_1, \ldots, P_{m-1}$ valószínűségek kiszámítására tekintsük a (27) egyenletrendszert a $k = 0, 1, \ldots, m-1$ értékekre. Vezessük be az

$$U(z) = \sum_{k=0}^{m-1} P_k z^k \tag{31}$$

generátorfüggvényt. Erre (27) szerint fennáll, hogy

$$\begin{aligned} U(z) = & \int_0^{\infty} (1-e^{-\mu x} + z e^{-\mu x}) U(1-e^{-\mu x} + z e^{-\mu x}) dF(x) + \\ & + A \int_0^{\infty} \left[\int_0^{x} e^{m\mu\omega y} (e^{-\mu y} - e^{-\mu x} + z e^{-\mu x})^m m\mu\, dy \right] dF(x) - A z^m. \end{aligned} \tag{32}$$

Továbbá legyen

$$U_j = \frac{1}{j!} \left(\frac{d^j U(z)}{dz^j} \right)_{z=1} \qquad (j = 0, 1, \ldots, m-1). \tag{33}$$

Ekkor (30) tekintetbevételével

$$U_0 = U(1) = \sum_{k=0}^{m-1} P_k = 1 - \sum_{k=m}^{\infty} P_k = 1 - \frac{A}{1-\omega}. \tag{34}$$

A többi U_j mennyiség meghatározására differenciáljuk a (32) kifejezést j-szer és végezzük el a $z=1$ helyettesítést. Ily módon eljárva azt kapjuk, hogy

$$U_j = U_j\varphi_j + U_{j-1}\varphi_j - A\binom{m}{j}\frac{m(1-\varphi_j)-j}{m(1-\omega)-j},$$

ahol már tekintetbe vettük, hogy $\varphi(m\mu(1-\omega))=\omega$. Innen

$$(35)\qquad U_j = \frac{\varphi_j}{1-\varphi_j}U_{j-1} - \frac{A\binom{m}{j}}{(1-\varphi_j)}\left[\frac{m(1-\varphi_j)-j}{m(1-\omega)-j}\right] \qquad (j=1,2,\ldots,m-1).$$

A (35) egyenletrendszer az U_j ismeretlenekre elsőrendű lineáris differencia-egyenlet, amely könnyen megoldható. Osszuk el a (35) egyenlet mindkét oldalát az (5) alatti C_j mennyiséggel, akkor

$$\frac{U_j}{C_j} = \frac{U_{j-1}}{C_{j-1}} - \frac{A\binom{m}{j}}{C_j(1-\varphi_j)}\left[\frac{m(1-\varphi_j)-j}{m(1-\omega)-j}\right].$$

Összegezzük a fenti egyenleteket $j=r+1, r+2, \ldots, m-1$-re és vegyük tekintetbe, hogy $U_{m-1}=P_{m-1}=A/\omega$, akkor azt kapjuk, hogy

$$(36)\qquad \frac{U_r}{C_r} = A\sum_{j=r+1}^{m}\frac{\binom{m}{j}}{C_j(1-\varphi_j)}\left[\frac{m(1-\varphi_j)-j}{m(1-\omega)-j}\right] \qquad (r=0,1,\ldots,m-1).$$

Az ismeretlen A a következőképpen határozható meg. Egyrészt (34) szerint $\frac{U_0}{C_0}=1-\frac{A}{1-\omega}$, másrészt számítsuk ki $\frac{U_0}{C_0}$-t a (36) képlet alapján, $r=0$ helyettesítéssel, és azonosítsuk a két kifejezést egymással. Így az adódik, hogy

$$(37)\qquad A = \frac{1}{\dfrac{1}{1-\omega} + \displaystyle\sum_{j=1}^{m}\frac{\binom{m}{j}}{C_j(1-\varphi_j)}\left[\frac{m(1-\varphi_j)-j}{m(1-\omega)-j}\right]}$$

A fenti (36) és (37) képletek által az $U_0, U_1, \ldots, U_{m-1}$ mennyiségek meg vannak határozva. Ezek viszont az $U(z)$ polinomot is meghatározzák. Az ismeretlen P_k $(k=0,1,\ldots,m-1)$ valószínűségek $U(z)$ segítségével (31) szerint a következőképpen fejezhetők ki:

$$P_k = \frac{1}{k!}\left(\frac{d^k U(z)}{dz^k}\right)_{z=0}.$$

Minthogy fennáll

$$\left(\frac{d^k U(z)}{dz^k}\right)_{z=0} = \sum_{r=k}^{m-1}\frac{(-1)^{r-k}}{(r-k)!}\left(\frac{d^r U(z)}{dz^r}\right)_{z=1},$$

tehát innen következik, hogy

$$(38) \qquad P_k = \sum_{r=k}^{m-1} (-1)^{r-k} \binom{r}{k} U_r \qquad (k=0,1,\dots,m-1).$$

A fentiek szerint a $\{P_k\}$ valószínűségeloszlást a (30), (36), (37) és (38) képletek teljesen meghatározzák.

A B_r $(r=0,1.2,\dots)$ binomiális momentumok a következő generátorfüggvény segítségével határozhatók meg:

$$(39) \qquad U^*(z) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k z^k = U(z) + \frac{Az^m}{1-\omega z},$$

amely konvergens, ha $|z| < 1/\omega$ és itt $0 < \omega < 1$. Mivel

$$B_r = \sum_{k=r}^{\infty} \binom{k}{r} P_k = \frac{1}{r!} \left(\frac{d^r U^*(z)}{dz^r} \right)_{z=1},$$

tehát

$$(40) \qquad B_r = U_r + \frac{A}{1-\omega} \sum_{j=0}^{r} \binom{m}{j} \left(\frac{\omega}{1-\omega} \right)^{r-j},$$

ahol $U_r = 0$, ha $r \geqq m$. Ezzel a (24) képlet is igazolást nyert.

III. AZ EGYESÍTETT VÁRAKOZÁSI ÉS VESZTESÉGI RENDSZER

A korábban bevezetett jelölések mellett vezessük be az alábbi rövidítéseket is:

$$(41) \qquad p_j = \int_0^{\infty} e^{-m\mu x} \frac{(m\mu x)^j}{j!} dF(x).$$

Továbbá a $q_0 = 1, q_1, q_2, \dots$ számokat értelmezzük a következő rekurzív képlet segítségével:

$$(42) \qquad q_k = p_0 q_{k+1} + p_1 q_k + \cdots + p_k q_1 + p_k q_0 \qquad (k=0,1,2,\dots).$$

Könnyen adódik (42) alapján, hogy a $\{q_k\}$ számsorozat generátorfüggvénye

$$(43) \qquad \sum_{k=0}^{\infty} q_k z^k = \frac{(1-z)\varphi(m\mu(1-z))}{\varphi(m\mu(1-z)) - z}$$

(vö. [48] p. 566.). A (43) generátorfüggvényből z szerinti differenciálással a q_k mennyiségek explicit alakban is meghatározhatók. A differenciálhányadosok az összetett függvények magasabbrendű deriváltjaira vonatkozó FAA DI BRUNO-féle képlet (vö. CH. JORDAN [20], E. LUKÁCS [31]) segítségével állíthatók elő.

Végül legyen

$$S_r = \binom{m}{r}\Bigg\{\sum_{j=1}^{w+1} q_j p_{w+1-j} - \varphi_r \sum_{j=1}^{w} q_j \left(\frac{m}{m-r}\right)^{w-j+1} + \sum_{j=1}^{w} q_j \sum_{\nu=0}^{w} p_\nu \left(\frac{m}{m-r}\right)^{w-j+1-\nu} +$$

$$(44) \qquad + p_w - \varphi_r \left(\frac{m}{m-r}\right)^{w} + \sum_{\nu=0}^{w-1} p_\nu \left(\frac{m}{m-r}\right)^{w-\nu}\Bigg\} \qquad (r=0,1,\ldots,m-1)$$

és

$$(45) \qquad S_m = p_0 q_{w+1}.$$

3. TÉTEL: *A* $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\{\eta_n = k\} = P_k$ $(k=0,1,\ldots,m+w)$ *határeloszlás mindig létezik és független az* $\{\eta(0), \zeta(0)\}$ *változó-pár kezdeti eloszlásától. Fennáll, hogy*

$$(46) \qquad P_k = \begin{cases} \sum_{r=k}^{m-1} (-1)^{r-k} \binom{r}{k} U_r & (k=0,1,\ldots,m-1) \\ A q_{m+w-k} & (k=m, m+1, \ldots, m+w), \end{cases}$$

ahol

$$(47) \qquad U_r = A C_r \sum_{j=r+1}^{m} \frac{S_j}{(1-\varphi_j) C_j}$$

és

$$(48) \qquad A = \frac{1}{\sum_{j=0}^{w} q_j + \sum_{j=1}^{m} \frac{S_j}{(1-\varphi_j) C_j}}.$$

A $\{P_k\}$ *valószínűségeloszlás*

$$(49) \qquad B_r = \sum_{k=r}^{m+w} \binom{k}{r} P_k \qquad (k=0,1,\ldots,m+w)$$

binomiális momentumaira fennáll, hogy

$$(50) \qquad B_r = U_r + A \sum_{k=m}^{m+w} \binom{k}{r} q_{m+w-k},$$

ahol $U_r = 0$, *ha* $r \leqq m$.

BIZONYÍTÁS: Az előző két modellhez hasonlóan most is könnyen meggyőződhetünk arról, hogy az $\{\eta_n\}$ $(n=1,2,3,\ldots)$ valószínűségi változók sorozata homogén Markov-láncot alkot $\mathbf{P}\{\eta_{n+1}=k \mid \eta_n = j\} = p_{jk}$ átmenet-valószínűségekkel, ahol

$$p_{jk} = \binom{j+1}{k} \int_0^\infty e^{-k\mu x}(1-e^{-\mu x})^{j+1-k} dF(x), \quad \text{ha} \quad j < m,$$

$$(51) \qquad p_{jk} = \binom{m}{k} \int_0^\infty e^{-k\mu x} \left[\int_0^x \frac{(m\mu y)^{j-m}}{(j-m)!} (e^{-\mu y} - e^{-\mu x})^{m-k} m\mu\, dy \right] dF(x),$$

ha $m \leqq j < m+w$ és $k < m$,

$$p_{jk} = \int_0^\infty e^{-m\mu x} \frac{(m\mu x)^{j+1-k}}{(j+1-k)!} dF(x), \quad \text{ha} \quad m \leqq j < m+w \text{ és } m \leqq k \leqq m+w,$$

$$p_{m+w,\,k} = p_{m+w-1,\,k}\,.$$

A korábbiakhoz hasonlóan jelölje ismét $\pi_{jk}(x)$ az átmenet-valószínűségeket abban az esetben, ha a $\tau_{n+1} - \tau_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, hívások közötti időtartamok, ugyanazon x állandóval egyenlők, ekkor az általános esetben

$$(52) \qquad p_{jk} = \int_0^\infty \pi_{jk}(x) dF(x).$$

Könnyen látható, hogy az $\{\eta_n\}$ Markov-lánc irreducibilis, nem-periodikus és mivel az állapotok száma véges, tehát ergodikus is. Eszerint a $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\{\eta_n = k\} = P_k$ $(k = 0, 1, \ldots, m+w)$ határvalószínűségek léteznek és függetlenek a η_1 változó kezdeti eloszlásától és így az $\{\eta(0), \tau_1\}$ változó-pár eloszlásától is. A $\{P_k\}$ határeloszlás egyértelműen meghatározható a következő egyenletrendszer megoldásával

$$(53) \qquad P_k = \sum_{j=k-1}^{m+w} p_{jk} P_j \qquad (k = 0, 1, \ldots, m+w),$$

ahol

$$(54) \qquad \sum_{k=0}^{m+w} P_k = 1$$

(vö. W. Feller [10] p. 325).

Megoldandó tehát az (53) egyenletrendszer. Tekintsük először az (53) egyenleteket $k \geqq m$-re és vezessük be a $Q_k = P_{m+w-k}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, w+1)$ jelölést. Mivel $p_{jk} = p_{j+1-k}$, ha $m \leqq j < m+w$, $p_{m+w,\,k} = p_{m+w-k}$ és $p_{m-1,\,m} = p_0$, tehát (53) szerint fennáll, hogy

$$Q_k = p_0 Q_{k+1} + p_1 Q_k + \cdots + p_k Q_1 + p_k Q_0 \quad (k = 0, 1, \ldots, w).$$

Ha Q_0-t ismerjük, akkor ezen rekurzív képlet segítségével $Q_1, Q_2, \ldots, Q_{w+1}$ sorjában meghatározható. Figyelembe véve a (42) képletet, nyilvánvalóan felírható, hogy

$$Q_k = A q_k \qquad (k = 0, 1, \ldots, w+1),$$

ahol A még ismeretlen. Tehát

$$(55) \qquad P_k = A q_{m+w-k} \qquad (k = m-1, m, \ldots, m+w).$$

Innen következik, hogy $A = P_{m-1}/q_{w+1}$ és így csupán a $P_0, P_1, \ldots, P_{m-1}$ ismeretlenek meghatározása marad hátra. (Megjegyezzük, hogy ha $m = 1$, akkor (55) szerint $P_k = A q_{m+w-k}$ $(k = 0, 1, \ldots, m+w)$ és a $\sum_{k=0}^{m+w} P_k = 1$ követelmény az A

állandót meghatározza.) Vezessük be a következő generátorfüggvényt

$$U(z)=\sum_{k=0}^{m-1} P_k z^k. \tag{56}$$

Tekintsük most az (53) egyenletrendszert $k<m$-re, és térjünk át a generátorfüggvényre. Ekkor azt nyerjük, hogy

$$\begin{aligned} U(z)= & \int_0^\infty (1-e^{-\mu x}+ze^{-\mu x})U(1-e^{-\mu x}+ze^{-\mu x})dF(x)-p_0P_{m-1}z^m+ \\ & +\sum_{j=m}^{m+w-1} P_j \int_0^\infty \left\{\int_0^x \frac{(m\mu y)^{j-m}}{(j-m)!}[(ze^{-\mu x}+e^{-\mu y}-e^{-\mu x})^m-z^m e^{-m\mu x}]m\mu dy\right\} dF(x)+ \\ & +P_{m+w}\int_0^\infty \left\{\int_0^x \frac{(m\mu y)^{w-1}}{(w-1)!}[(ze^{-\mu x}+e^{-\mu y}-e^{-\mu x})^m-z^m e^{-m\mu x}]m\mu dy\right\} dF(x). \end{aligned} \tag{57}$$

Legyen most

$$U_j=\frac{1}{j!}\left(\frac{d^j U(z)}{dz^j}\right)_{z=1}. \tag{58}$$

Ekkor (54) és (55) szerint

$$U_0=U(1)=\sum_{k=0}^{m-1} P_k=1-\sum_{k=m}^{m+w} P_k=1-A\sum_{j=0}^{w} q_j. \tag{59}$$

Ha (57)-et z-szerint j-szer differenciáljuk és $z=1$-et írunk, akkor azt kapjuk, hogy

$$U_j=(U^j+U_{j-1})\varphi_j-AS_j \qquad (j=1,2,\ldots,m-1),$$

ahol φ_j-et (4) és S_j-t (44) és (45) értelmezi. Innen az $U_j (j=0,1,\ldots,m-1)$ ismeretlenek meghatározására az

$$U_j=\frac{\varphi_j}{1-\varphi_j}U_{j-1}-\frac{AS_j}{1-\varphi_j} \qquad (j=1,2,\ldots,m-1) \tag{60}$$

differenciaegyenletet nyerjük. Ez a korábbi (16) és (35) egyenletekhez hasonlóan oldható meg. Osszuk el a (60) egyenlet mindkét oldalát C_j-vel, akkor

$$\frac{U_j}{C_j}=\frac{U_{j-1}}{C_{j-1}}-\frac{AS_j}{(1-\varphi_j)C_j}.$$

Ezeket az egyenleteket összegezzük $j=r+1, r+2, \ldots, m-1$-re és vegyük tekintetbe, hogy $U_{m-1}=P_{m-1}=Aq_{w+1}$. Így azt kapjuk, hogy

$$\frac{U_r}{C_r}=A\sum_{j=r+1}^{m}\frac{S_j}{(1-\varphi_j)C_j} \qquad (r=0,1,\ldots,m-1). \tag{61}$$

Legyen ebben a képletben $r=0$ és hasonlítsuk össze az (59) képlettel, akkor azt nyerjük, hogy

(62)
$$A=\frac{1}{\sum_{j=0}^{w} q_j+\sum_{j=1}^{m}\frac{S_j}{(1-\varphi_j)C_j}}.$$

A (61) és (62) képletek az $U_0, U_1, \ldots, U_{m-1}$ ismeretleneket meghatározzák. Ezek viszont egyértelműen meghatározzák az $U(z)$ polinomot. Az ismeretlen P_k $(k=0,1,\ldots,m-1)$ valószínűségek végül a következőképpen fejezhetők ki:

$$P_k=\frac{1}{k!}\left(\frac{d^k U(z)}{dz^k}\right)_{z=0}.$$

A korábbiakhoz hasonlóan eljárva azt kapjuk, hogy

(63)
$$P_k=\sum_{r=k}^{m-1}(-1)^{r-k}\binom{r}{k}U_r, \qquad (k=0,1,\ldots,m-1).$$

A fentiek szerint a $\{P_k\}$ valószínűségeloszlás az (55), (61), (62) és (63) képletekkel teljesen meg van határozva.

A B_r $(r=0,1,\ldots,m+w)$ binomiális momentumok a következő generátorfüggvény segítségével határozhatók meg:

$$U^*(z)=\sum_{k=0}^{m+w}P_k z^k=U(z)+A\sum_{k=m}^{m+w}q_{m+w-k}z^k.$$

Innen

$$B_r=\frac{1}{r!}\left(\frac{d^r U^*(z)}{dz^r}\right)_{z=1}=U_r+A\sum_{k=m}^{m+w}\binom{k}{r}q_{m+w-k},$$

ahol $U_r=0$, ha $r\geqq m$. Ezzel az (50) képlet is bizonyítást nyert.

Példák

Tegyük fel, hogy a hívások időpontjainak $\{\tau_n\}$ sorozata λ eseménysűrűségű Poisson-folyamatot alkot. Ekkor $F(x)=1-e^{-\lambda x}$, ha $x\geqq 0$ és $\varphi(s)=\lambda/(\lambda+s)$. Továbbá (5) szerint

$$C_j=\frac{1}{j!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j,$$

(41) szerint

$$p_j=\frac{\lambda}{\lambda+m\mu}\left(\frac{m\mu}{\lambda+m\mu}\right)^j$$

és (42) szerint

$$q_k=\left(\frac{m\mu}{\lambda}\right)^k.$$

I. A VESZTESÉGI RENDSZER. Ebben az esetben (7) szerint

(64) $$B_r = \frac{(\lambda/\mu)^r}{r!} \frac{\sum_{j=0}^{m-r} \frac{(\lambda/\mu)^j}{j!}}{\sum_{j=0}^{m} \frac{(\lambda/\mu)^j}{j!}} \qquad (r=0,1,\ldots,m)$$

és (6) szerint

(65) $$P_k = \frac{\frac{(\lambda/\mu)^k}{k!}}{\sum_{j=0}^{m} \frac{(\lambda/\mu)^j}{j!}} \qquad (k=0,1,\ldots,m).$$

II. A VÁRAKOZÁSI RENDSZER. Ha $\lambda < m\mu$, akkor létezik a $\{P_k\}$ határeloszlás. Most (20) következtében $\omega = \lambda/m\mu$ és (22) szerint

(66) $$A = \frac{\frac{1}{m!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^m}{\sum_{j=0}^{m-1} \frac{1}{j!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j + \frac{1}{m!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^m \frac{1}{1-\frac{\lambda}{m\mu}}}.$$

A (21) és (24) képletek alapján

(67) $$B_r = \begin{cases} \frac{Am!}{r!} \sum_{j=r+1}^{m} \frac{1}{(m-j)!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{r-j} + \frac{A}{1-\omega} \sum_{j=0}^{r} \binom{m}{j} \left(\frac{\omega}{1-\omega}\right)^{r-j}, & \text{ha } r<m \\ A\frac{\omega^{r-m}}{(1-\omega)^{r+1}}, & \text{ha } r \geqq m. \end{cases}$$

Továbbá

(68) $$P_j = \begin{cases} A\frac{m!}{j!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{j-m} & (j=0,1,\ldots,m-1) \\ A\left(\frac{\lambda}{m\mu}\right)^{j-m} & (j=m, m+1,\ldots) \end{cases}.$$

III. AZ EGYESÍTETT VÁRAKOZÁSI ÉS VESZTESÉGI RENDSZER. Ebben az esetben

(69) $$P_k = \begin{cases} A\left(\frac{m\mu}{\lambda}\right)^{m+w-k} \frac{m!}{m^{m-k}k!}, & \text{ha } k \leqq m \\ A\left(\frac{m\mu}{\lambda}\right)^{m+w-k}, & \text{ha } k \geqq m, \end{cases}$$

ahol

$$A=\frac{1}{\dfrac{1-\left(\dfrac{m\mu}{\lambda}\right)^{w+1}}{1-\dfrac{m\mu}{\lambda}}+\sum_{k=0}^{m-1}\left(\dfrac{m\mu}{\lambda}\right)^{m+w-k}\dfrac{m!}{m^{m-k}k!}}. \tag{70}$$

2. §. A $\{P_k^*\}$ valószínűségeloszlás meghatározása

Mind a három modellnél a $\{P_k^*\}$ valószínűségeloszlás, amennyiben létezik, könnyen kifejezhető a megfelelő $\{P_k\}$ valószínűségeloszlás segítségével.

4. TÉTEL: *Ha $F(x)$ nem-rácsos eloszlásfüggvény és átlaga $\alpha<\infty$, akkor a $\lim\limits_{t\to\infty}\mathbf{P}\{\eta(t)=k\}=P_k^*$ határértékek mindhárom modell esetén léteznek és függetlenek az $\{\eta(0),\zeta(0)\}$ változó-pár kezdeti eloszlásától.*

Az I. modell esetén $\{P_k^*\}$, $(k=0,1,\ldots,m)$ mindig valószínűségeloszlás és fennáll, hogy

$$P_k^*=\frac{P_{k-1}}{k\alpha\mu}\qquad(k=1,2,\ldots,m) \tag{71}$$

és

$$P_0^*=1-\sum_{k=1}^{m}P_k^*.$$

A $\{P_k^*\}$ valószínűségeloszlás B_r^* $(r=0,1,\ldots,m)$ binomiális momentumaira fennáll, hogy $B_0^*=1$ és

$$B_r^*=\frac{1-\varphi_r}{\varphi_r}\,\frac{B_r}{r\alpha\mu}\qquad(r=1,2,\ldots,m), \tag{72}$$

ahol B_r-et (7) értelmezi.

A II. modell esetén $\{P_k^*\}$, $(k=0,1,2,\ldots)$ valószínűségeloszlás, ha $m\alpha\mu>1$. (Az $m\alpha\mu\leqq 1$ esetben $P_k^*\equiv 0$, minden k-ra.) Fennáll

$$P_k^*=\begin{cases}\dfrac{P_{k-1}}{k\alpha\mu} & (k=1,2,\ldots,m)\\[2ex] \dfrac{P_{k-1}}{m\alpha\mu} & (k=m+1,m+2,\ldots)\end{cases} \tag{73}$$

és

$$P_0^*=1-\sum_{k=1}^{\infty}P_k^*.$$

A $\{P_k^*\}$ valószínűségeloszlás B_r^* $(r=0,1,2,\ldots)$ binomiális momentumaira fennáll, hogy $B_0^*=1$ és

$$(74)\qquad B_r^*=\frac{B_{r-1}}{r\alpha\mu}+\frac{A}{\alpha\mu}\sum_{k=m+1}^{\infty}\left[\frac{1}{m}\binom{k}{r}-\frac{1}{r}\binom{k-1}{r-1}\right]\omega^{k-m-1},\qquad (r=1,2,\ldots),$$

ahol A-t (22) és B_r-t (24) értelmezi.

A III. modell esetén $\{P_k^*\}$ $(k=0,1,\ldots,m+w)$ mindig valószínűségeloszlás és fennáll, hogy

$$(75)\qquad P_k^*=\begin{cases}\dfrac{P_{k-1}}{k\alpha\mu}, & ha\quad k=1,2,\ldots,m\\[2mm] \dfrac{P_{k-1}}{m\alpha\mu}, & ha\quad k=m,m+1,\ldots,m+w,\end{cases}$$

és

$$P_0^*=1-\sum_{k=1}^{m+w}P_k^*.$$

A $\{P_k^*\}$ valószínűségeloszlás $B_r^*(r=0,1,\ldots,m+w)$ binomiális momentumaira fennáll, hogy $B_0^*=1$ és

$$(76)\quad B_r^*=\frac{B_{r-1}}{r\alpha\mu}-\frac{A}{\alpha\mu}\sum_{k=m+1}^{m+w}\left[\frac{1}{m}\binom{k}{r}-\frac{1}{r}\binom{k-1}{r-1}\right]q_{m+w-k+1}-\frac{A}{r\alpha\mu}\binom{m+w}{r-1}.$$

A 4. TÉTEL BIZONYÍTÁSA: A bizonyítás mindhárom modell esetére közösen végezhető el. Az I. és II. modell ugyanis a III. modellnek azt a speciális esetét képezi, midőn $w=0$, illetve $w=\infty$. Ezért elegendő csupán a III. modell esetével foglalkoznunk, megengedve a $w=0$ és $w=\infty$ értékeket is. Állapodjunk meg abban, hogy az $E_{m+w}\to E_{m+w+1}$ átmeneten azt értjük, hogy egy beérkező hívás elvész és a rendszer marad az E_{m+w} állapotban, azaz $E_{m+w+1}\equiv E_{m+w}$. (Ennek csak az I. és III. modellnél van jelentősége, midőn w véges, a II. modellnél $w=\infty$ és nincs elvesző hívás.)

A bizonyításhoz két segédtételre lesz szükségünk:

1. LEMMA: *Jelölje $M_k(t)$ a $(0,t)$ időintervallumban előforduló $E_k\to E_{k+1}$ $(k=0,1,\ldots,m+w;\ E_{m+w+1}\equiv E_{m+w})$ átmenetek várható számát. Ha $F(x)$ nem-rácsos eloszlásfüggvény és $\alpha<\infty$, akkor bármely $h>0$-ra fennáll, hogy*

$$(77)\qquad \lim_{t\to\infty}\frac{M_k(t+h)-M_k(t)}{h}=\frac{P_k}{\alpha},\qquad (k=0,1,\ldots,m+w),$$

ahol P_k mindig a megfelelő modellre vonatkozik.

1. MEGJEGYZÉS. Ha $F(x)$ rácsos eloszlásfüggvény, akkor (77) általában nem igaz. Ha csupán az $\alpha<\infty$ feltevéssel élünk, akkor is igaz azonban, hogy

$$(78)\qquad \lim_{t\to\infty}\frac{M_k(t)}{t}=\frac{P_k}{\alpha},\qquad (k=0,1,\ldots,m+w).$$

A (77) és (78) képletek egyaránt érvényesek $P_k\equiv 0$ esetén is.

BIZONYÍTÁS: Könnyen belátható, hogy az egymást követő $E_k \to E_{k+1}$ $(k=0, 1, \ldots, m+w)$ átmenetek közötti időtartamok egyforma eloszlású független valószínűségi változók. Ha $F(x)$ nem-rácsos eloszlásfüggvény, akkor ezen valószínűségi változók sem rácsos eloszlásúak. Megmutatjuk, hogy ezen valószínűségi változók közös várható értéke α/P_k. A fent elmondottakból D. BLACKWELL [4] tételének könnyű általánosításaként adódik, hogy a (77) baloldalán álló határérték létezik, független az $\{\eta(0), \zeta(0)\}$ változó-pár kezdeti eloszlásától és egyenlő a szóban forgó valószínűségi változók közös várható értékének reciprok értékével. Meg kell még mutatni, hogy a kérdéses várható érték α/P_k. Tekintsük az $\{\eta_n\}$ Markov-láncot. Ennél az E_k állapot rekurrens állapot és az E_k állapotból kiindulva az első visszatérésig megtett lépésszám várható értéke $1/P_k$ (vö. W. FELLER [10] p. 325). A teljes folyamatot tekintve érvényes rá, hogy $E_k \to E_{k+1}$ átmenetek csupán a hívások τ_n $(n=1,2,\ldots)$ időpontjaiban fordulhatnak elő, éspedig ha $\eta_n=k$, akkor $E_k \to E_{k+1}$ átmenet valóban elő is fordul. Az egymást követő $E_k \to E_{k+1}$ átmenetek között megtett lépések számának a várható értéke a fentiek szerint $1/P_k$. Az egyes lépések hosszának várható értéke pedig α. Felhasználva a folyamat Markov-jellegét, A. WALD [58] jól ismert tételéből (vö. A. N. KOLMOGOROV és J. V. PROHOROV [24]) következik, hogy akkor az egymást követő $E_k \to E_{k+1}$ átmenetek közötti időtartam várható értéke α/P_k. Ezzel (77) bizonyítást nyert.

A fent elmondottak tekintetbevételével (78) fennállása közvetlenül adódik S. TÄCKLIND [57] tételéből.

Visszatérve a 4. TÉTEL bizonyításához, most kimutatjuk, hogy a $\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\{\eta(t)=k\}=P_k^*$ $(k=0, 1, \ldots, m+w)$ határértékek léteznek és függetlenek az $\{\eta(0), \zeta(0)\}$ változó-pár kezdeti eloszlásától. Mindenekelőtt felírhatjuk, hogy

$$\mathbf{P}\{\eta(t)=k\}=\sum_{j=k-1}^{m+w}\int_0^t \pi_{jk}(t-u)\,[1-F(t-u)]\,dM_j(u), \tag{79}$$

ahol $\pi_{jk}(x)$ a $\tau_{n+1}-\tau_n=x$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$ feltétel mellett számított átmenet-valószínűség (vö. (51) és (52)).

Jelölje ugyanis $\tau_1^{(j)}, \tau_2^{(j)}, \ldots, \tau_n^{(j)}, \ldots$ az egymást követő $E_j \to E_{j+1}$ átmenetek időpontjait. Ekkor egyrészt fennáll, hogy

$$M_j(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{P}\{\tau_n^{(j)} \leq t\}. \tag{80}$$

Másrészt az $\eta(t)=k$ esemény több egymást kizáró módon jöhet létre: a $(0, t]$ időközben az n-edik $(n=1, 2, 3, \ldots)$, $E_j \to E_{j+1}$ $(j=k-1, k, \ldots, m+w)$ átmenet u időpontban $(0<u\leq t)$ fordul elő, azaz $\tau_n^{(j)}=u$ és az u időpontban folyamatban levő $j+1$ beszélgetésből az $(u, t]$ időközben befejeződik $j+1-k$

és nem fejeződik be k (ennek a valószínűsége $\pi_{jk}(t-u)$), továbbá az $(u, t]$ időközben nem érkezik újabb hívás a központba (aminek a valószínűsége $1-F(t-u)$). Az elmondottak szerint fennáll, hogy

$$\mathbf{P}\{\eta(t)=k, A_{ut} \mid \tau_n^{(j)}=u\}=\pi_{jk}(t-u)[1-F(t-u)], \quad \text{ha} \quad 0<u\leqq t,$$

ahol A_{ut} azt az eseményt jelöli, hogy $(u, t]$ időközben nem fordul elő hívás. Most a teljes valószínűségi tétel szerint felírható, hogy

$$(81) \qquad \mathbf{P}\{\eta(t)=k\}=\sum_{j=k-1}^{m+w}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t \pi_{jk}(t-u)[1-F(t-u)]d\mathbf{P}\{\tau_n^{(j)}\leqq u\},$$

amely (80)-ra való tekintettel megegyezik (79)-cel.

A (79) határértékének meghatározására előre bocsátjuk a következő megjegyzést: Ha $g(t)$ a $(0, \infty)$ szakaszon korlátos változású függvény, akkor (77) teljesülése esetén fennáll, hogy

$$(82) \qquad \lim_{t\to\infty}\int_0^t g(t-u)dM_j(u)=\frac{P_j}{\alpha}\int_0^{\infty} g(u)du \qquad (j=0, 1, \ldots, m+w).$$

Ez könnyen igazolható az integrál téglányösszegének alsó és felső becslése segítségével (vö. W. L. SMITH [43]). (82) alkalmazásával (79)-ből következik, hogy a $\lim_{t\to\infty}\mathbf{P}\{\eta(t)=k\}=P_k^*$ $(k=0, 1, \ldots, m+w)$ határérték létezik és független az $\{\eta(0), \zeta(0)\}$ változó kezdeti eloszlásától. Eszerint fennáll, hogy

$$(83) \qquad P_k^*=\sum_{j=k-1}^{m+w} p_{jk}^* P_j,$$

ahol

$$(84) \qquad p_{jk}^*=\frac{1}{\alpha}\int_0^{\infty}\pi_{jk}(x)[1-F(x)]dx.$$

Tüstént látszik, hogy ha $\{P_j\}$ valószínűségeloszlás, akkor $\{P_j^*\}$ is az.

A (83) képlet segítségével a $\{P_k^*\}$ eloszlás máris meghatározható explicit alakban. Látni fogjuk azonban, hogy a P_k^* egyszerűbben is kifejezhető a P_j valószínűségek segítségével. Ehhez viszont egy újabb segédtételre lesz szükségünk.

2. LEMMA: *Jelölje $N_k(t)$ a $(0, t]$ időközben előforduló $E_k \to E_{k-1}$ $(k=1, 2, \ldots, m+w;\ E_{m+w+1}\equiv E_{m+w})$ átmenetek várható számát. Ha $F(x)$ nemrácsos eloszlás és $\alpha<\infty$, akkor fennáll, hogy*

$$(85) \qquad \lim_{t\to\infty} N_k'(t)=\begin{cases} k\mu P_k^*, & \text{ha} \quad k=1, 2, \ldots, m, \\ m\mu P_k^*, & \text{ha} \quad k=m, m+1, \ldots, m+w.\end{cases}$$

2. MEGJEGYZÉS. A fenti tétel nyilvánvaló következménye, hogy

$$\lim_{t\to\infty}\frac{N_k(t)}{t}=\begin{cases} k\mu P_k^*, & \text{ha} \quad k\leqq m, \\ m\mu P_k^*, & \text{ha} \quad k\geqq m. \end{cases} \tag{86}$$

BIZONYÍTÁS: Határozzuk meg a $(t, t+\Delta t]$ időközben előforduló $E_k\to E_{k+1}$ átmenetek várható számát, az $N_k(t+\Delta t)-N_k(t)$ mennyiséget. Annak a valószínűsége, hogy ha $\eta(t)=k$, akkor a $(t, t+\Delta t]$ időközben egyetlen $E_k\to E_{k+1}$ átmenet történik $k\mu\Delta t+o(\Delta t)$, illetve $m\mu\Delta t+o(\Delta t)$, aszerint, amint $k\leqq m$ vagy $k\geqq m$. A várható érték kifejezésében az egynél több $E_k\to E_{k-1}$ átmenetnek megfelelő tagok összege $o(\Delta t)$, ugyanis az $E_k\to E_{k-1}$ átmenetek száma felülről becsülhető egy $m\mu$ eseménysűrűségű Poisson-folyamat $(t, t+\Delta t]$ időközben előforduló eseményeinek a számával. Hasonlóan $o(\Delta t)$ értéket nyerünk abban az esetben, ha $\eta(t)\neq k$. Így tehát felírható, hogy

$$N_k(t+\Delta t)-N_k(t)=\mathbf{P}\{\eta(t)=k\}k\mu\Delta t+o(\Delta t), \quad \text{ha} \quad k\leqq m,$$

és

$$N_k(t+\Delta t)-N_k(t)=\mathbf{P}\{\eta(t)=k\}m\mu\Delta t+o(\Delta t), \quad \text{ha} \quad k\geqq m.$$

Miután a $\lim_{t\to\infty}\mathbf{P}\{\eta(t)=k\}=P_k^*$ $(k=0, 1, \ldots, m+w)$ határértékek léteznek, tehát a fentiek szerint a

$$\lim_{t\to\infty} N_k'(t)=\begin{cases} P_k^* k\mu, & \text{ha} \quad k\leqq m, \\ P_k^* m\mu, & \text{ha} \quad k\geqq m \end{cases}$$

határértékek is léteznek. Ezzel (85) igazolást nyert.

A fenti két segédtétel alapján most már könnyen megadhatjuk a 4. TÉTEL bizonyítását. Nyilvánvaló, hogy a $(0, t]$ időközben előforduló $E_{k-1}\to E_k$ és $E_k\to E_{k-1}$ átmenetek számának különbsége legfeljebb 1 lehet. Ekkor azonban ugyanez érvényes a megfelelő várható értékek különbségére is. Tehát fennáll, hogy

$$|M_{k-1}(t)-N_k(t)|\leqq 1.$$

Innen pedig következik, hogy

$$\lim_{t\to\infty}\frac{M_{k-1}(t)}{t}=\lim_{t\to\infty}\frac{N_k(t)}{t}. \tag{87}$$

Ez az egyenlőség a (78) és (86) határértékek fennállása következtében igazolja a (75) állítást. Innen (71) és (73) a $w=0$, illetve $w=\infty$ választással adódik. Mivel $\{P_k^*\}$ ezekben az esetekben valószínűségeloszlás, tehát

$$P_0^*=1-\sum_{k=1}^{m+w} P_k^*.$$

Hátra van a B_r^* $(r=1, 2, \ldots, m+w)$ binomiális momentumok meghatározása. Nyilvánvalóan $B_0^*=1$.

Az I. modell esetén egyszerűen felírható, hogy

$$B_r^* = \sum_{k=r}^{m} \binom{k}{r} P_k^* = \sum_{k=r}^{m} \binom{k}{r} \frac{P_{k-1}}{k\alpha\mu}, \quad (r = 1, 2, \ldots, m),$$

azaz

$$B_r^* = \frac{1}{r\alpha\mu} \sum_{k=r}^{m} \binom{k-1}{r-1} P_{k-1} = \frac{1}{r\alpha\mu}\left[B_{r-1} - \binom{m}{r-1} P_m\right], (r = 1, 2, \ldots, m)$$

és innen (16) alkalmazásával

(88) $$B_r^* = \frac{1-\varphi_r}{\varphi_r} \frac{B_r}{r\alpha\mu},$$

ami éppen a bizonyítandó (72) képlet.

A II. és III. modell esetén felírható, hogy

$$B_r^* = \sum_{k=r}^{m+w} \binom{k}{r} P_k^* = \sum_{k=r}^{m} \binom{k}{r} \frac{P_{k-1}}{k\alpha\mu} + \sum_{k=m+1}^{m+w} \binom{k}{r} \frac{P_{k-1}}{m\alpha\mu},$$

azaz

$$B_r^* = \frac{1}{r\alpha\mu} \sum_{k=r}^{m+w+1} \binom{k-1}{r-1} P_{k-1} + \frac{1}{m\alpha\mu} \sum_{k=m+1}^{m+w} \binom{k}{r} P_{k-1} - \frac{1}{r\alpha\mu} \sum_{k=m+1}^{m+w+1} \binom{k-1}{r-1} P_{k-1}$$

és innen

(89) $$B_r^* = \frac{B_{r-1}}{r\alpha\mu} + \frac{1}{m\alpha\mu} \sum_{k=m+1}^{m+w} \binom{k}{r} P_{k-1} - \frac{1}{r\alpha\mu} \sum_{k=m+1}^{m+w+1} \binom{k-1}{r-1} P_{k-1}.$$

Most a II. modell esetén $w = \infty$ és (19) szerint $P_k = A\omega^{k-m}$, ha $k \geqq m$, a III. modell esetén pedig $w > 0$ és (46) szerint $P_k = Aq_{m+w-k}$, ha $k \geqq m$. Ezek behelyettesítésével adódik (74) és (76).

Példák

Tekintsük ismét azt a speciális esetet, amidőn a hívások $\{\tau_n\}$ sorozata λ eseménysűrűségű Poisson-folyamat. Ekkor a $\{P_k^*\}$ határeloszlás az I. és III. modell esetén mindig létezik, a II. modell esetén csak akkor létezik, ha $\lambda < m\mu$. Ekkor ugyanis $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, $(x \geqq 0)$, nem-rácsos eloszlás és átlaga $\alpha = 1/\lambda$. Ebben az esetben mindhárom modellre fennáll, hogy

(90) $$P_k^* = P_k \qquad (k = 0, 1, \ldots, m+w),$$

a megfelelő P_k valószínűségekkel. Tehát ekkor a $\{P_k^*\}$ eloszlás pontosan megegyezik a $\{P_k\}$ eloszlással. Ez a legegyszerűbben akkor látható be, ha a P_k^* (83) alatti kifejezését tekintjük. Rögtön látszik (52) és (84)-ből, hogy ha $F(x) = 1 - e^{-\lambda x} (x \geqq 0)$, akkor $p_{jk}^* = p_{jk}$. Ekkor viszont (53) és (83) összehasonlításából kitűnik, hogy $P_k^* = P_k$ $(k = 0, 1, \ldots, m+w)$.

3. MEGJEGYZÉS. Észrevehetjük, hogy a (90) egyenletek (75)-re való tekintettel meg is határozzák a $\{P_k\}$ (azaz $\{P_k^*\}$ eloszlást). Ugyanis (75) alkalmazásával felírható, hogy

$$P_k = P_{k-1}\frac{\lambda}{k\mu} \qquad (k=1,2,\ldots,m), \tag{91}$$

$$P_k = P_{k-1}\frac{\lambda}{m\mu} \qquad (k=m,m+1,\ldots,m+w), \tag{92}$$

miután $\alpha = 1/\lambda$, és

$$\sum_{k=0}^{m+w} P_k = 1. \tag{93}$$

A (91) képlet ismételt alkalmazásával

$$P_k = P_0\frac{(\lambda/\mu)^k}{k!}, \qquad (k=0,1,\ldots,m), \tag{94}$$

és a (92) képlet ismételt alkalmazásával

$$P_k = P_m\left(\frac{\lambda}{m\mu}\right)^{k-m} = P_0\frac{(\lambda/\mu)^k}{m^{k-m}m!}, \qquad (k=m,m+1,\ldots,m+w), \tag{95}$$

ahol az I. modell esetén $w=0$, a II. modell esetén $w=\infty$ és a III. modell esetén $0<w<\infty$.

Most (93) szerint az I. modell esetén

$$P_0 = \frac{1}{\sum\limits_{j=0}^{m}\frac{(\lambda/\mu)^j}{j!}}, \tag{96}$$

a II. modell esetén

$$P_0 = \frac{1}{\sum\limits_{j=0}^{m-1}\frac{1}{j!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j + \frac{1}{m!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^m \frac{1}{1-\frac{\lambda}{m\mu}}} \tag{97}$$

és a III. modell esetén

$$P_0 = \frac{1}{\sum\limits_{j=0}^{m-1}\frac{1}{j!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j + \frac{1}{m!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^m \frac{1-\left(\frac{\lambda}{m\mu}\right)^{w+1}}{1-\frac{\lambda}{m\mu}}}. \tag{98}$$

A fenti eredmények megegyeznek a korábban nyert hasonló eredményekkel.

4. MEGJEGYZÉS. A (94) és (96) képletek szerint az I. modell esetén fennáll, hogy

$$P_k^* = \frac{\dfrac{(\lambda/\mu)^k}{k!}}{\sum_{j=0}^{m} \dfrac{(\lambda/\mu)^j}{j!}}, \qquad (k=0, 1, \ldots, m). \tag{99}$$

Ez a jól ismert veszteségi formula, amelyet A. K. ERLANG [8] 1918-ban nyert. Megjegyezzük azonban, hogy (99) nemcsak a speciális

$$H(x) = \begin{cases} 1-e^{-\mu x}, & \text{ha } x \geqq 0, \\ 0 \quad , & \text{ha } x < 0, \end{cases}$$

beszélgetési idő eloszlása esetén érvényes, hanem minden olyan $H(x)$ eloszlásfüggvény esetén, amelyre $H(0)=0$ és amelynek átlaga véges, éspedig $\int_0^\infty x\,dH(x) = \mu^{-1}$. Ezt az észrevételt már ERLANG is megtette. (Vö. L. KOSTEN [27].) Azóta többen foglalkoztak az állítás igazolásával vagy cáfolásával. A (99) képlet fennállására F. POLLACZEK [37], C. PALM [34], L. KOSTEN [25] és B. A. SZEVASZTJANOV [41] adtak bizonyításokat. (Vö. még R. FORTET [11], [13].)

F. POLLACZEK [37] feltételezi, hogy a $(0, t)$ időközben n hívás érkezik a központba és a hívások időpontjai egymástól függetlenül egyenletesen oszlanak el a $(0, t)$ intervallumon. Ilyen feltételek mellett meghatározza annak a valószínűségét, hogy egy tetszőleges hívás k foglalt vonalat talál és kiszámítja ennek a valószínűségnek a határértékét abban az esetben, ha $t \to \infty$ és $n \to \infty$ de úgy, hogy $n/t \to \lambda$. Ilyen módon POLLACZEK megkapja a (99) alatti P_k^* határértéket. POLLACZEK ezen eredményéből a Poisson-folyamatok bizonyos tulajdonságainak felhasználásával aránylag könnyen következik, hogy

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t P_k(u)\,du = P_k^*.$$

Ha most kimutatjuk, hogy a $\lim_{t\to\infty} P_k(t)$ határérték létezik, akkor innen következik, hogy az éppen a P_k^*. C. PALM [34] és L. KOSTEN [25] bizonyításai is némi kívánnivalót hagynak maguk után az exisztencia és egyértelműség kimutatásával kapcsolatban. B. A. SZEVASZTJANOV [41] bizonyítása ezekkel szemben teljesen exakt.*

Végül megemlítjük, hogy J. W. COHEN [7] dolgozatában az Erlang-képlet további messzemenő általánosítását adta meg.

* Az Erlang-formulával kapcsolatban POLLACZEK, PALM, KOSTEN és más itt nem említett szerzők eredményeire először R. SYSKI úr volt szíves figyelmemet felhívni, amiért neki e helyen is köszönetemet fejezem ki.

3. §. A stacionárius $\{\eta(t), \zeta(t)\}$ folyamat

Ismét közösen tárgyaljuk az I., II. és III. modell esetét. Az I. modellnél $w=0$, a II. modellnél $w=\infty$ és a III. modellnél $0<w<\infty$. A II. modellnél feltesszük azonban, hogy $m\alpha\mu>1$.

Jelölje $\zeta(t)$ a t időpontnak a közvetlen utána következő hívástól való távolságát. A $\zeta(t)$ valószínűségi változó feltételes eloszlásfüggvényére vonatkozóan a következő tételt bizonyítjuk be:

5. TÉTEL: *Ha $F(x)$ nem-rácsos eloszlásfüggvény és $\alpha<\infty$, akkor léteznek a következő határeloszlások*

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\{\zeta(t)\leq x\,|\,\eta(t)=k\}=F_k^*(x), \quad (k=0,1,\ldots,m+w), \tag{100}$$

ahol

$$F_k^*(x)=\frac{1}{\alpha P_k^*}\sum_{j=k-1}^{m+w} P_j\int_0^\infty [F(x+y)-F(y)]\,\pi_{jk}(y)\,dy \tag{101}$$

és ezek függetlenek az $\{\eta(0), \zeta(0)\}$ változó-pár kezdeti eloszlásától.

BIZONYÍTÁS: A bizonyítás (79)-éhez hasonlóan történik. A $\{\zeta(t)\leq x, \eta(t)=k\}$ esemény több egymást kizáró módon jöhet létre: Az u időpontban (ahol $0<u\leq t$) $E_j\to E_{j+1}$ $(j=k-1,k,\ldots,m+w)$ átmenet fordul elő, azaz $\tau_n^{(j)}=u$ és a következő hívás időpontja a $(t,t+x]$ időközbe esik (aminek a valószínűsége $F(t+x-u)-F(t-u)$), továbbá az u időpontban folyamatban levő $j+1$ beszélgetésből $(u,t]$ időközben $j+1-k$ befejeződik, míg a többi k nem fejeződik be (ennek a valószínűsége $\pi_{jk}(t-u)$). Eszerint felírható, hogy

$$\mathbf{P}\{\zeta(t)\leq x,\ \eta(t)=k,\ A_{ut}\,|\,\tau_n^{(j)}=u\}=\pi_{jk}(t-u)\,[F(t+x-u)-F(t-u)],\quad \text{ha}$$

$0<u\leq t$, ahol A_{ut} azt az eseményt jelöli, hogy $(u,t]$ időközben nem fordul elő hívás. Innen a teljes valószínűségi tétel alkalmazásával azt nyerjük, hogy

$$\mathbf{P}\{\zeta(t)\leq x,\ \eta(t)=k\}=\sum_{j=k-1}^{m+w}\int_0^t \pi_{jk}(t-u)[F(t+x-u)-F(t-u)]\,dM_j(u). \tag{102}$$

Megjegyezzük, hogy ha (102)-ben $x=\infty$, akkor éppen a (79) képletet kapjuk meg.

Vegyük most tekintetbe, hogy az 1. LEMMA szerint fennáll (77) és alkalmazzuk a (82) összefüggést. Ekkor (102)-ből azt kapjuk, hogy

$$\lim_{t\to\infty}\mathbf{P}\{\zeta(t)\leq x,\ \eta(t)=k\}=\frac{1}{\alpha}\sum_{j=k-1}^{m+w}P_j\int_0^\infty [F(x+y)-F(y)]\,\pi_{jk}(y)\,dy.$$

Miután

$$\mathbf{P}\{\zeta(t)\leq x\,|\,\eta(t)=k\}=\frac{\mathbf{P}\{\zeta(t)\leq x,\ \eta(t)=k\}}{\mathbf{P}\{\eta(t)=k\}}$$

és a $\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\{\eta(t)=k\}=P_k^*$ határérték létezik, tehát így a $\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\{\zeta(t)\leqq x\,|\,\eta(t)=k\}$ határérték is létezik és megegyezik a (101) alatti $F_k^*(x)$ eloszlásfüggvénnyel. Ezzel az 5. TÉTEL bizonyítása teljes.

5. MEGJEGYZÉS. Ha $F(x)$ nem-rácsos eloszlásfüggvény és $\alpha<\infty$, akkor a $\zeta(t)$ változó eloszlására könnyen láthatóan fennáll, hogy

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\{\zeta(t)\leqq x\}=F^*(x), \tag{103}$$

ahol

$$F^*(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\alpha}\displaystyle\int_0^x [1-F(y)]\,dy, & \text{ha } x\geqq 0,\\ 0, & \text{ha } x<0,\end{cases} \tag{104}$$

és ez független az $\{\eta(0),\zeta(0)\}$ változó-pár kezdeti eloszlásától.

A bizonyítás egyszerűen elvégezhető D. BLACKWELL [4] tétele segítségével. (Vö. még J. L. DOOB [8].) Jelölje ugyanis $m(t)$ a $(0,t]$ időközben előforduló hívások várható számát. Ekkor fennáll

$$m(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{P}\{\tau_n\leqq t\}$$

és BLACKWELL tételének egyszerű folyományaként felírható, hogy tetszőleges $h>0$-ra

$$\lim_{t\to\infty}\frac{m(t+h)-m(t)}{h}=\frac{1}{\alpha}. \tag{105}$$

Ezután megállapíthatjuk, hogy a $\{\zeta(t)\leqq x\}$ esemény akkor valósul meg, ha $(t,t+x]$ időközben legalább egy hívás előfordul. Ez pedig több egymást kizáró módon jöhet létre, mégpedig a $(t,t+x]$ intervallumban előforduló utolsó hívás lehet az $n(n=1,2,3,\ldots)$-edik. Ily módon a teljes valószínűségi tétel szerint felírható, hogy

$$\mathbf{P}\{\zeta(t)\leqq x\}=\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{P}\{t<\tau_n\leqq t+x<\tau_{n+1}\}.$$

A $\tau_n=u\,(t<u\leqq t+x)$ feltétel mellett azonban

$$\mathbf{P}\{t<\tau_n\leqq t+x<\tau_{n+1}\,|\,\tau_n=u\}=\mathbf{P}\{\tau_{n+1}-\tau_n>t+x-u\}=1-F(t+x-u)$$

és így

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\{\zeta(t)\leqq x\}&=\sum_{n=1}^{\infty}\int_t^{t+x}[1-F(t+x-u)]\,d\mathbf{P}\{\tau_n\leqq u\}=\\ &=\int_t^{t+x}[1-F(t+x-u)]\,dm(u).\end{aligned} \tag{106}$$

Most (105) felhasználásával és (82) alkalmazásával következik, hogy a (103) határérték létezik és megegyezik (104)-gyel.

A STACIONÁRIUS FOLYAMAT. Ezen előkészítés után definiálhatjuk a stacionárius folyamat fogalmát. Az általunk vizsgált folyamat Markov-folyamatnak tekinthető, ha a rendszer állapotát az $\{\eta(t), \zeta(t)\}$ valószínűségi változó-párral írjuk le. Ha feltételezzük, hogy $\alpha < \infty$ és az $\{\eta(0), \zeta(0)\}$ változó-pár kezdeti eloszlása

(107) $\mathbf{P}\{\eta(0)=k\}=P_k^*, \mathbf{P}\{\zeta(0)\leqq x\mid \eta(0)=k\}=F_k^*(x)\ (k=0,1,\ldots,m+w)$,

akkor az $\{\eta(t), \zeta(t);\ 0\leqq t<\infty\}$ sztochasztikus folyamat stacionárius lesz. Ekkor valamennyi t értékre fennáll, hogy

(108) $\mathbf{P}\{\eta(t)=k\}=P_k^*, \mathbf{P}\{\zeta(t)\leqq x\mid \eta(t)=k\}=F_k^*(x),\ (k=0,1,\ldots,m+w)$

és valamennyi n-re

(109) $$\mathbf{P}\{\eta_n=k\}=P_k, \qquad (k=0,1,\ldots,m+w).$$

A (108) állítás evidens, a (109) fennállásához elegendő megmutatni, hogy fennáll

(110) $$P_k=\sum_{j=k-1}^{m+w} P_j^* \int_0^\infty \pi_{jk}(x)\,dF_j^*(x).$$

Stacionárius folyamat esetén $\mathbf{P}\{\zeta(0)\leqq x\}=F^*(x)$ és mivel $\zeta(0)=\tau_1$, tehát érvényes, hogy a hívások $\{\tau_n\}$ sorozata rekurrens folyamatot alkot. Továbbá stacionárius folyamat esetén a $(0,t]$ időközben előforduló $E_k\to E_{k+1}$ átmenetek várható száma

(111) $$M_k(t)=\frac{P_k}{\alpha}t \qquad (k=0,1,\ldots,m+w);$$

és a $(0,t]$ időközben előforduló $E_k\to E_{k-1}$ $(k=1,2,\ldots,m+w)$ átmenetek várható száma

(112) $$N_k(t)=\begin{cases} k\mu P_k^* t, & \text{ha } k\leqq m,\\ m\mu P_k^* t, & \text{ha } k\geqq m.\end{cases}$$

4. §. A várakozási idő eloszlása stacionárius folyamat esetén

Tegyük fel most, hogy a hívások kiszolgálása *érkezési sorrendben* történik és állapítsuk meg a II. modell esetén egy tetszőleges hívás várakozási idejének eloszlásfüggvényét, továbbá a III. modell esetén szintén egy tetszőleges hívás várakozási idejének eloszlásfüggvényét, azon feltétel mellett, hogy a hívás nem vész el. Jelölje az n-edik érkező hívás várakozási idejét ϑ_n valószínűségi változó, amennyiben egyáltalában létezik várakozási idő. Legyen a II. modell esetén $\mathbf{P}\{\vartheta_n\leqq x\}=G^*(x)$ és a III. modell esetén hasonlóan $\mathbf{P}\{\vartheta_n \leqq x \mid \eta_n < m+w\} = G^*(x)$. Stacionárius folyamat esetén ezen valószínűségek nyilvánvalóan függetlenek n-től.

6. TÉTEL: *A II. modellnél, ha a hívások kiszolgálása érkezési sorrendben történik és stacionárius folyamatot tételezünk fel, akkor egy tetszőleges hívás várakozási idejének eloszlásfüggvénye*

$$G^*(x) = 1 - \frac{A e^{-m\mu(1-\omega)x}}{(1-\omega)}, \quad ha \quad x \geqq 0, \tag{113}$$

ahol A és ω jelentése ugyanaz, mint a 2. TÉTEL*ben.*

BIZONYÍTÁS: A teljes valószínűségi tétel alkalmazásával felírható, hogy

$$G^*(x) = \sum_{j=0}^{m-1} P_j + \sum_{j=m}^{\infty} P_j \int_0^x e^{-m\mu y} \frac{(m\mu y)^{j-m}}{(j-m)!} m\mu\, dy. \tag{114}$$

Ugyanis egy hívás megérkezésének az időpontjában a rendszer $E_0, E_1, E_2, \ldots$ állapotban lehet. Az E_j állapot valószínűsége P_j. Ha $j < m$, akkor a várakozási idő zérus, ha $j \geqq m$, akkor a szóban forgó hívásnak meg kell várnia $j+1-m$ korábbi hívásból eredő beszélgetés befejezését. Az ezen beszélgetések egymást követő befejezési időpontjai pedig $m\mu$ eseménysűrűségű Poisson-folyamatot alkotnak és így annak a valószínűsége, hogy a várakozási idő legfeljebb x:

$$\int_0^x e^{-m\mu y} \frac{(m\mu y)^{j-m}}{(j-m)!} m\mu\, dy = 1 - \sum_{\nu=0}^{j-m} e^{-m\mu x} \frac{(m\mu x)^\nu}{\nu!}.$$

Az elmondottak igazolják (114) fennállását. Ha most tekintetbe vesszük, hogy (34) szerint $\sum_{j=0}^{m-1} P_j = 1 - \frac{A}{1-\omega}$ és (19) szerint $P_j = A\omega^{j-m}$, ha $j \geqq m$, akkor (114)-ből megkapjuk (113)-at, ami bizonyítandó volt.

6. MEGJEGYZÉS. A fenti esetben $G^*(0) = 1 - \frac{A}{1-\omega}$ és a várakozási idő várható értéke

$$\Gamma^* = \int_0^\infty [1 - G^*(x)]\, dx = \frac{A}{m\mu(1-\omega)^2} \tag{115}$$

és ezen mennyiségek függetlenek attól, hogy a hívások kiszolgálása milyen sorrendben történik.

Tekintsük most a III. modellt stacionárius folyamat esetére. Ekkor annak a valószínűsége, hogy egy tetszőleges hívás elvész, (46) szerint

$$P_{m+w} = A = \frac{1}{\sum_{j=0}^{w} q_j + \sum_{j=1}^{m} \frac{S_j}{(1-\varphi_j)C_j}}. \tag{116}$$

A hívások kiszolgálása történjék érkezési sorrendben. Most $G^*(x)$ a várakozási idő feltételes eloszlásfüggvénye, azon feltétel mellett, hogy az érkező hívás nem vész el. $G^*(x)$ meghatározását a következő tétel adja.

7. TÉTEL: *A III. modellnél, ha stacionárius folyamatot tételezünk fel és feltesszük, hogy a hívások érkezési sorrendben lesznek kiszolgálva, akkor egy tetszőleges hívás várakozási idejének feltételes eloszlásfüggvénye, azon feltétel mellett, hogy a hívás nem vész el*

$$G^*(x) = 1 - \frac{A}{1-A} \sum_{k=1}^{w} q_k \sum_{j=0}^{w-k} e^{-m\mu x} \frac{(m\mu x)^j}{j!}, \tag{117}$$

ahol A és q_k jelentése ugyanaz, mint a 3. TÉTEL*ben.*

BIZONYÍTÁS: A teljes valószínűségi tétel alkalmazásával könnyen felírható, hogy

$$(1 - P_{m+w}) G^*(x) = \sum_{j=0}^{m-1} P_j + \sum_{j=m}^{m+w-1} P_j \int_0^x e^{-m\mu y} \frac{(m\mu y)^{j-m}}{(j-m)!} m\mu dy. \tag{118}$$

Itt a jobboldal annak a valószínűségét jelenti, hogy a hívás nem vész el és a várakozás ideje legfeljebb x. Ez az esemény több egymást kizáró módon jöhet létre: a hívás érkezésének időpontjában a rendszer E_j $(j = 0, 1, \ldots, m-1)$ állapotban van (aminek a valószínűsége P_j), amikor is nincs várakozási idő, vagy a rendszer E_j $(j = m, m+1, \ldots, m+w-1)$ állapotban van (aminek a valószínűsége P_j), amikor is a szóban forgó hívásnak meg kell várnia $j+1-m$ beszélgetés egymást követő befejezési időpontjait és kell, hogy ez az időtartam legfeljebb x legyen. Most ezen beszélgetések befejezésének időpontjai $m\mu$ eseménysűrűségű Poisson-folyamatot alkotnak és így a kérdéses valószínűség könnyen felírható. Ezzel (118) fennállását megindokoltuk. Mivel (46) szerint $P_k = A q_{m+w-k}$ $(k = m, m+1, \ldots, m+w)$ és (59) szerint $\sum_{k=0}^{m-1} P_k = 1 - A \sum_{j=0}^{w} q_j$, tehát (118)-ból következik (117), ami bizonyítandó volt.

7. MEGJEGYZÉS. A fenti esetben

$$G^*(0) = 1 - A \sum_{j=0}^{w} q_j \tag{119}$$

és a várakozási idő várható értéke azon feltétel mellett, hogy a hívás nem vész el

$$\Gamma^* = \int_0^\infty [1 - G^*(x)] dx = \frac{A}{m\mu(1-A)} \sum_{k=1}^{w} (w-k+1) q_k. \tag{120}$$

A $G^*(0)$ és Γ^* független attól, hogy a hívások kiszolgálása milyen sorrendben történik.

5. §. Palm képletének bizonyítása

Az I. modell esetén gyakorlati szempontból egyik legfontosabb feladat annak a valószínűségének a meghatározása, hogy egy hívás elvész. Jelölje stacionárius folyamat esetén egy tetszőleges hívás elveszésének a valószínűségét Π_m. A Π_m valószínűség nyilvánvalóan megegyezik az 1. TÉTEL P_m valószínűségével. Eszerint fennáll, hogy

$$\Pi_m = \frac{1}{\sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} \frac{1}{C_j}}, \tag{121}$$

ahol $C_0 = 1$ és

$$C_j = \prod_{i=1}^{j} \frac{\varphi_i}{1-\varphi_i}.$$

A Π_m valószínűséget először C. PALM [35] határozta meg. Később F. POLLACZEK [38] is bebizonyította a (121) fennállását. A Π_m fenti alakja [52] dolgozatunk eredményéből is következik és J. W. COHEN [6] megjelenő munkájában is megtalálható ennek bizonyítása.

PALM és POLLACZEK eredményeiket integrálegyenletek megoldásával nyerik. Az [52] dolgozatunkban a Markov-láncok elméletét használtuk fel, de ott nemcsak a Π_m valószínűséget, hanem a teljes $\{P_j\}$ eloszlást is meghatároztuk. COHEN hasonlóképpen a Markov-láncok elméletét alkalmazta és meghatározta a teljes $\{P_j\}$ eloszlást is. Jelenleg H. ASHCROFT [1] módszerének felhasználásával elemi bizonyítást adunk a (121) képlet fennállására.

A Π_m meghatározása. Tekintsük az I. modellt stacionárius folyamat esetén. Ekkor az $\{\eta_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ Markov-lánc is stacionárius lesz, amelyre $\mathbf{P}\{\eta_n = j\} = P_j$ $(j = 0, 1, \ldots, m)$ minden n-re. Eddig semmilyen feltevést sem tettünk arra vonatkozóan, hogy a hívások kiszolgálása milyen sorrendben történik. Most PALM nyomán tegyük fel, hogy a különböző vonalak $1, 2, \ldots, m$ sorszámokkal vannak megjelölve és egy beérkező hívásnak megfelelő kapcsolat azon a szabad vonalon valósul meg, amelyiknek a legkisebb a sorszáma. Ha ilyen nincs, akkor a hívás elvész. A fenti feltevéssel az általánosság megszorítása nélkül élhetünk, mivel a Π_m valószínűség nem függ a hívások kiszolgálási rendszerétől. Jelölje most Π_r $(r = 1, 2, \ldots, m)$ annak a valószínűségét, hogy egy beérkező hívás az $(1, 2, \ldots, r)$ csoport mindegyik vonalát foglaltan találja. Eszerint Π_m annak a valószínűsége, hogy mind az m vonal foglalt, amely éppen annak a valószínűsége, hogy a hívás elvész. Továbbá jelölje Γ_r $(r = 1, 2, \ldots, m)$ annak a véletlen számnak a várható értékét, amely azt mutatja, hogy egy olyan hívás után, amelyik az $(1, 2, \ldots, r)$ vonalak mindegyikét foglaltan találja, hanyadik hívás lesz a legközelebbi olyan hívás, amelyik az $(1, 2, \ldots, r)$ csoport vonalait ugyancsak foglaltnak találja. Következőleg Γ_m annak a véletlen számnak a várható értéke, amely azt mutatja, hogy egy veszteséges hívás után hanyadik hívás lesz a legközelebbi veszteséges hívás. A Markov-láncok elméletéből könnyen következik, hogy $\Gamma_r = 1/\Pi_r$ $(r = 1, 2, \ldots, m)$ és így speciálisan

(122) $$\Pi_m = 1/\Gamma_m.$$

A feladat tehát Γ_m meghatározására redukálódik.

A Γ_r $(r = 1, 2, \ldots, m)$ mennyiségekre könnyen felírhatjuk a következő rekurzív képletet

(123) $$\Gamma_r = 1 + q_{r,1}\Gamma_r + q_{r,2}(\Gamma_{r-1} + \Gamma_r) + \cdots + q_{r,r}(\Gamma_1 + \Gamma_2 + \cdots + \Gamma_r),$$

ahol

(124) $$q_{r,j} = \binom{r}{j}\int_0^\infty e^{-(r-j)\mu x}(1 - e^{-\mu x})^j dF(x).$$

Ugyanis tekintsünk egy hívást, amely az $(1, 2, \ldots, r)$ csoport vonalait foglaltan találja. A következő olyan hívásig, amely az $(1, 2, \ldots, r)$ vonalakat ismét foglaltan találja, minden esetre be kell következnie legalább egy hívásnak. Nézzük meg, hogy az első hívást még hány további hívás követi a legközelebbi olyan hívásig, amely az $(1, 2, \ldots, r)$ vonalakat foglaltan találja. Ha az első hívásig eltelt idő alatt az $(1, 2, \ldots, r)$ vonalakon folyamatban levő r beszélgetésből pontosan j beszélgetés fejeződik be, aminek a valószínűsége a (124) alatti $q_{r,j}$, akkor $j = 0$ esetén zérus az említett hívásig megtett további hívások száma, míg $j = 1, 2, \ldots, r$ esetben az említett hívásig megtett további hívások várható száma $\Gamma_{r-j+1} + \cdots + \Gamma_r$. Ezen utóbbi várható érték fennállása azzal indokolható, hogy minden egyes hívás pillanatában az $(1, 2, \ldots, r)$ csoport vonalait tetszőlegesen átszámozhatjuk, anélkül, hogy ez bármiféle változást okozna meggondolásainkban. Végezzük el az átszámozást mindig olyképpen, hogy a foglalt vonalak rendelkezzenek a legkisebb sorszámokkal. Mivel ekkor az első hívás pillanatában a foglalt vonalak csoportja $(1, 2, \ldots, r-j)$, tehát a legközelebbi olyan hívásig eltelt hívások számának várható értéke, amely az $(1, 2, \ldots, r)$ vonalakat foglaltan találja, $\Gamma_{r-j+1} + \cdots + \Gamma_r$. Végül (123)-at a teljes várható érték-tétel alapján nyerjük.

Az ismeretlen Γ_r mennyiségek könnyen meghatározhatók a (123) képletből differenciaszámítás segítségével (vö. CH. JORDAN [20]). H. ASHCROFT [1] módszerét követve a következőképpen járhatunk el:

Legyen $\Gamma_0 = 1$ és $T_0 = 0, T_{r+1} = \Gamma_0 + \Gamma_1 + \cdots + \Gamma_r$ $(r = 0, 1, \ldots, m)$. Fejezzük ki (123)-ban a Γ_r-eket a T_r-ek segítségével és vegyük tekintetbe, hogy

$$\sum_{k=0}^{r} q_{r,k} = 1,$$

akkor felírható, hogy

(125) $$T_r=\sum_{k=0}^{r} q_{r,r-k}T_{k+1}-1.$$

Definiáljuk a differencia-képzés Δ műveletét a szokott módon ($\Delta f(x)=$ $=f(x+1)-f(x)$). Mint ismeretes, felírható, hogy

(126) $$\Gamma_r=\sum_{j=0}^{r}\binom{r}{j}\Delta^j\Gamma_0,$$

ahol $\Delta^0\Gamma_0=\Gamma_0=1$. Eszerint elegendő a $\Delta^j\Gamma_0$ ($j=1,2,\ldots,m$) ismeretleneket meghatározni. Mivel $\Gamma_0=\Delta T_0$, tehát $\Delta^j\Gamma_0=\Delta^{j+1}T_0$. A differenciaszámítás ismert képlete alapján most felírhatjuk, hogy

(127) $$\Delta^j T_0=\sum_{r=0}^{j}(-1)^{j-r}\binom{j}{r}T_r.$$

Írjuk be (125)-öt (127)-be és használjuk fel a könnyen igazolható

(128) $$\sum_{r=k}^{j}(-1)^{j-r}\binom{j}{r}q_{r,r-k}=(-1)^{j-k}\binom{j}{k}\varphi_j$$

azonosságot, akkor $j\geqq 1$-re azt nyerjük, hogy

$$\Delta^j T_0=\sum_{r=0}^{j}(-1)^{j-r}\binom{j}{r}\sum_{k=0}^{r}q_{r,r-k}T_{k+1}=\sum_{k=0}^{j}T_{k+1}\sum_{r=k}^{j}(-1)^{j-r}\binom{j}{r}q_{r,r-k}=$$
$$=\varphi_j\sum_{k=0}^{j}(-1)^{j-k}\binom{j}{k}T_{k+1}=\varphi_j\,(\Delta^{j+1}T_0+\Delta^j T_0).$$

Innen

(129) $$\Delta^{j+1}T_0=\frac{1-\varphi_j}{\varphi_j}\Delta^j T_0,\qquad (j=1,2,\ldots,m).$$

Ennek a képletnek ismételt alkalmazásával és $\Delta T_0=\Gamma_0=1$ tekintetbevételével azt nyerjük, hogy

(130) $$\Delta^j\Gamma_0=\Delta^{j+1}T_0=\frac{1-\varphi_1}{\varphi_1}\cdot\frac{1-\varphi_2}{\varphi_2}\cdots\frac{1-\varphi_j}{\varphi_j}\qquad (j=1,2,\ldots,m)$$

és így (126) szerint

(131) $$\Gamma_r=\sum_{j=0}^{r}\binom{r}{j}\prod_{i=1}^{j}\frac{1-\varphi_i}{\varphi_i}\qquad (r=1,2,\ldots,m),$$

ahol az üres szorzat alatt 1 értendő. Minthogy $\Pi_m=1/\Gamma_m$, tehát ezzel (121) igazolást nyert.

8. MEGJEGYZÉS. A tárgyalt PALM-féle modellnél az is megengedhető, hogy a rendelkezésre álló vonalak száma végtelen legyen. Ekkor Π_m nem a veszteség valószínűsége, hanem annak a valószínűsége, hogy a hívás az $(1,2,\ldots,m)$ csoport valamennyi vonalát foglaltan találja és így kapcsolat csak m-nél nagyobb sorszámú vonalon jöhet létre. Viszont az $(1,2,\ldots,m)$ csoport

szempontjából mindegy az, hogy a hívás elvész, vagy a csoporton kívüli vonalak valamelyikén valósul meg a kapcsolat. Ez a modell a túláramló forgalom tanulmányozására is hasznos. Vö. R. I. WILKINSON [59] és J. RIORDAN ([59] munka függeléke).

9. MEGJEGYZÉS. Jelölje $G_r(x)$ a fent említett PALM-féle modellnél két olyan egymást követő hívás között eltelt időtartam eloszlásfüggvényét, amelyik az $(1, 2, \ldots, r)$ csoport vonalait foglaltan találja. Könnyen látható, hogy ekkor $\alpha < \infty$ esetén

$$\int_0^\infty x\,dG_r(x) = \alpha \Gamma_r.$$

C. PALM [35] munkájában a $G_r(x)$ eloszlásfüggvényekre a következő integrálegyenletrendszert állítja fel:

$$(132)\quad G_r(x) = G_{r-1}(x) - \int_0^x (1-e^{-\mu y})[1-G_r(x-y)]\,dG_{r-1}(y), \quad (r=1,2,3,\ldots),$$

ahol $G_0(x) = F(x)$.

Ha bevezetjük a

$$(133)\quad \gamma_r(s) = \int_0^\infty e^{-sx}\,dG_r(x), \quad (r=0,1,2,\ldots)$$

Laplace—Stieltjes transzformáltakat, akkor (132) alapján ezekre a következő rekurzív képlet írható fel:

$$(134)\quad \gamma_r(s) = \frac{\gamma_{r-1}(s+\mu)}{1-\gamma_{r-1}(s)+\gamma_{r-1}(s+\mu)}, \quad (r=1,2,\ldots),$$

ahol $\gamma_0(s) = \varphi(s)$. PALM a (134) egyenletekből kiindulva határozta meg a (121) képletet.

Megjegyezzük, hogy teljes indukcióval könnyen igazolható, hogy

$$(135)\quad \gamma_r(s) = \frac{\displaystyle\sum_{j=0}^{r}\binom{r}{j}\prod_{i=0}^{j-1}\frac{1-\varphi(s+i\mu)}{\varphi(s+i\mu)}}{\displaystyle\sum_{j=0}^{r+1}\binom{r+1}{j}\prod_{i=0}^{j-1}\frac{1-\varphi(s+i\mu)}{\varphi(s+i\mu)}}, \quad (r=0,1,2,\ldots),$$

ahol az üres szorzat alatt 1 értendő.

Ha speciálisan a hívások $\{\tau_n\}$ sorozata λ eseménysűrűségű Poisson-folyamat, akkor $\varphi(s) = \lambda/(\lambda+s)$ és így a (135) képlet szerint

$$(136)\quad \gamma_r(s) = \frac{\lambda B_{r-1}(s)}{B_r(s)} \quad (r=0,1,2,\ldots),$$

ahol

$$(137)\quad B_r(s) = \lambda^{r+1} + \sum_{\nu=0}^{r}\binom{r+1}{\nu} s(s+\mu)\ldots(s+(r-\nu)\mu)\lambda^\nu \quad (r=-1,0,1,2,\ldots)$$

és az üres összeg alatt zérus értendő. A (136) képletet először C. PALM [35] határozta meg (vö. még A. J. HINCSIN [19]).

10. MEGJEGYZÉS. A telefon-rendszerek I. modelljének előzőleg tárgyalt kérdése szoros kapcsolatban van egy másfajta kiszolgálási problémával. Tegyük fel, hogy $m+1$ számú automatikusan működő termelő gép egyetlen kezelő felügyeletére van bízva. A gépek $0 \leqq t < \infty$ időközben folyamatosan termelnek, de előfordulhat, hogy véletlen hibák következtében leállnak és mindaddig állva maradnak, amíg a kezelő a hibát ki nem javította és a gépet el nem indította. Tegyük fel, hogy minden egyes gépre $\mu \Delta t + o(\Delta t)$ annak a valószínűsége, hogy $(t, t+\Delta t)$ időközben leáll, feltéve, hogy t időpontban működik és ez az esemény független minden egyéb körülménytől. Tegyük fel továbbá, hogy a kiszolgálási idők egyforma eloszlású független pozitív valószínűségi változók $F(x)$ eloszlásfüggvénnyel. A kezelő a javításokat tetszőleges sorrendben végezheti, feltesszük azonban, hogy okvetlenül javít, ha van álló gép. Jelölje $\xi(t)$ a t időpontban működő gépek számát. Továbbá jelölje rendre $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n, \ldots$ az egymást követő kiszolgálások végpontjait és legyen $\xi(\delta_n - 0) = \xi_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Ekkor a $\{\xi_n\}$ valószínűségi változók sorozata Markov-láncot alkot és a $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{P}\{\xi_n = j\} = P_j$ $(j = 0, 1, 2, \ldots, m)$ határeloszlás létezik és független a ξ_1 (illetve $\xi(0)$) változó kezdeti eloszlásától. Szerző korábbi [50] dolgozatában meghatározta a $\{P_j\}$ valószínűségeloszlás explicit alakját. Mint kiderül, ez az eloszlás pontosan megegyezik a telefon-forgalom I. modelljére vonatkozó 1. TÉTELben szereplő $\{P_j\}$ eloszlással.

Ha a fent említett folyamatnál $\chi(t)$ valószínűségi változó jelöli a t időpontban (esetleg) folyamatban levő javításnak a t időponttól a javítás befejezéséig tartó időtartamának hosszát, akkor ha a rendszer állapotának leírására a $\{\xi(t), \chi(t)\}$ változópárt használjuk, a folyamat Markov-féle lesz. Ha $\alpha = \int\limits_0^\infty x\,dF(x) < \infty$, akkor a $\{\xi(0), \eta(0)\}$ változó-pár kezdeti eloszlásának megfelelő megválasztásával definiálhatjuk a stacionárius folyamat fogalmát. Stacionárius folyamat esetén a $\{\xi_n\}$ Markov-lánc is stacionárius lesz, amelyre $\mathbf{P}\{\xi_n = j\} = P_j$ $(j = 0, 1, \ldots, m)$ minden n-re.

Az elmondottak szerint a telefon-forgalom I. modelljére vonatkozó $\{\eta_n\}$ stacionárius Markov-lánc ugyanazon sztochasztikus viselkedést mutatja, mint az $m+1$ gép kiszolgálásával kapcsolatos $\{\xi_n\}$ stacionárius Markov-lánc.

Jelölje G_{m+1} a kiszolgálások várható számát egy kiszolgálási szakaszban. Nyilvánvalóan fennáll, hogy $G_{m+1} = 1/P_m$. Tehát G_{m+1} pontosan megegyezik a veszteséges hívások közötti hívások számának Γ_m várható értékével az I. modellnél. G_{m+1} explicit alakját H. ASHCROFT [1] és korábban R. KRONIG [28], R. KRONIG és H. MONDRIA [29] határozta meg. A fentiek szerint így Γ_m explicit alakját is megadták.

Az említett kiszolgálási problémával tudomásunk szerint először A. J. HINCSIN [17] foglalkozott. HINCSIN azonban nem adott explicit megoldást. Azt a speciális esetet, midőn $F(x)=1-e^{-\lambda x}(x\geqq 0)$, exponenciális eloszlásfüggvény, több szerző vizsgálta (vö. pl. W. FELLER [10] p. 379).

6. §. Az I. modell $m=\infty$ esetben

Tekintsük az I. modellt abban az esetben, midőn korlátlan számú vonal áll a hívások rendelkezésére, azaz midőn nincs elvesző hívás. Az erre az esetre vonatkozó eredmények megkaphatók az I. modellre vonatkozó eredményekből $m\to\infty$ határátmenettel. Erre az esetre az alábbi tételeket bizonyítjuk be.

8. TÉTEL: *A $\{P_k\}$ $(k=0,1,2,\ldots)$ határeloszlás mindig létezik és független az $\{\eta(0),\zeta(0)\}$ változó-pár kezdeti eloszlásától. Fennáll, hogy*

$$P_k=\sum_{r=k}^{\infty}(-1)^{r-k}\binom{r}{k}C_r, \tag{138}$$

ahol C_r-et (5) *definiálja.*

A $\{P_k\}$ eloszlás r-edik binomiális momentuma egyszerűen

$$B_r=C_r. \tag{139}$$

BIZONYÍTÁS: Az $\{\eta_n\}$ valószínűségi változók $m=\infty$ esetén is Markov-láncot alkotnak $\mathbf{P}\{\eta_{n+1}=k\mid\eta_n=j\}=p_{jk}$ átmenetvalószínűségekkel, ahol

$$p_{jk}=\binom{j+1}{k}\int_0^{\infty}e^{-k\mu x}(1-e^{-\mu x})^{j+1-k}\,dF(x). \tag{140}$$

Az $\{\eta_n\}$ Markov-lánc, könnyen beláthatóan, irreducibilis és nem-periodikus. F. G. FOSTER [14] tétele segítségével bebizonyítható, hogy az állapotok ergodikusak. Ugyanis FOSTER tételének alkalmazásához választhatjuk magukat a (138) alatti P_k valószínűségeket. Következőleg a $\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}\{\eta_n=k\}=P_k$ $(k=0,1,2,\ldots)$ határeloszlás létezik és független az η_1 változó (és így az $\{\eta(0),\zeta(0)\}$ változópár) kezdeti eloszlásától. A $\{P_k\}$ határeloszlás a következő egyenletrendszer egyértelműen meghatározott megoldása

$$P_k=\sum_{j=k-1}^{\infty}p_{jk}P_j\qquad(k=0,1,2,\ldots) \tag{141}$$

(vö. W. FELLER [10] p. 325), ahol természetesen

$$\sum_{k=0}^{\infty}P_k=1. \tag{142}$$

A (141) egyenletrendszer (10)-hez hasonlóan generátorfüggvények módszerével oldható meg. Legyen

(143) $$U(z)=\sum_{k=0}^{\infty} P_k z^k,$$

akkor (141) szerint fennáll, hogy

(144) $$U(z)=\int_0^{\infty}(1-e^{-\mu x}+ze^{-\mu x})\,U(1-e^{-\mu x}+ze^{-\mu x})\,dF(x).$$

Vezessük be a $\{P_k\}$ valószínűségeloszlás B_r $(r=0,1,2,\ldots)$ binomiális momentumait

(145) $$B_r=\sum_{k=r}^{\infty}\binom{k}{r}P_k.$$

Ha B_r létezik, akkor (13) szerint erre fennáll, hogy

(146) $$B_r=\frac{1}{r!}\left(\frac{d^r\,U(z)}{dz^r}\right)_{z=1}.$$

Most (142) szerint $B_0=1$, és ha (144)-et z szerint r-szer differenciáljuk és $z=1$-et írunk, akkor azt kapjuk, hogy

$$B_r=(B_r+B_{r-1})\,\varphi_r \qquad (r=1,2,3,\ldots),$$

azaz

$$B_r=\frac{\varphi_r}{1-\varphi_r}B_{r-1} \qquad (r=1,2,3,\ldots).$$

Ennek a képletnek ismételt alkalmazásával azt nyerjük, hogy

(147) $$B_r=C_r \qquad (r=0,1,2,\ldots),$$

amivel a (139) képlet igazolást nyert.

Miután $\lim\limits_{r\to\infty}\varphi_r=0$, tehát

$$\lim_{r\to\infty}\frac{C_r}{C_{r-1}}=0.$$

Így (146) szerint felírható, hogy

(148) $$U(z)=\sum_{r=0}^{\infty}C_r(z-1)^r$$

és ez a sor valamennyi z értékre konvergens. Innen

(149) $$P_k=\frac{1}{k!}\left(\frac{d^kU(z)}{dz^k}\right)_{z=0}=\sum_{r=k}^{\infty}(-1)^{r-k}\binom{r}{k}C_r, \qquad (k=0,1,2,\ldots),$$

ami bizonyítandó volt.

11. MEGJEGYZÉS. Mint láttuk, a 8. TÉTEL bizonyításához elegendő kimutatni, hogy $B_r=C_r$ $(r=0,1,2,\ldots)$. Innen a $\{P_k\}$ eloszlás már könnyen

megkapható. A B_r meghatározására a következő szemléletes érvelést is alkalmazhatjuk. Definiáljuk az $\{\eta_n\}$ $(n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ stacionárius Markov-láncot, amelyre $\mathbf{P}\{\eta_n=k\}=P_k$ minden n-re. Tekintsük most egy hívás érkezésének az időpillanatát. Értelmezzük ezzel kapcsolatban az ε_n $(n=1,2,3,\ldots)$ valószínűségi változókat a következőképpen: $\varepsilon_n=1$, ha a hívás pillanatában az n-edik előző hívásból eredő beszélgetés még folyamatban van és $\varepsilon_n=0$, ha ez a beszélgetés már befejeződött. Ekkor felírható, hogy

$$P_k=\mathbf{P}\{\varepsilon_1+\varepsilon_2+\cdots+\varepsilon_n+\cdots=k\}, \qquad (k=0,1,2,\ldots). \tag{150}$$

Most felírható, hogy

$$B_r=\mathbf{M}\left\{\binom{\varepsilon_1+\varepsilon_2+\cdots+\varepsilon_n+\cdots}{r}\right\}=\lim_{n\to\infty}\mathbf{M}\left\{\binom{\varepsilon_1+\varepsilon_2+\cdots+\varepsilon_n}{r}\right\}. \tag{151}$$

Okoskodásunknak ez a lépése szemléletes, ugyanis igazolni kellene, hogy a várható érték-képzés és a határérték vétele felcserélhető egymással. Mivel

$$\binom{\varepsilon_1+\varepsilon_2+\cdots+\varepsilon_n}{r}=\sum_{j_1+j_2+\cdots+j_r\leqq n}\varepsilon_{j_1}\varepsilon_{j_1+j_2}\cdots\varepsilon_{j_1+j_2+\cdots+j_r},$$

ahol $j_1, j_2, \ldots, j_r$ pozitív egész számok, tehát

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{M}\left\{\binom{\varepsilon_1+\varepsilon_2+\cdots+\varepsilon_n}{r}\right\}=\sum_{j_1=1}^{\infty}\sum_{j_2=1}^{\infty}\cdots\sum_{j_r=1}^{\infty}\mathbf{M}\{\varepsilon_{j_1}\varepsilon_{j_1+j_2}\cdots\varepsilon_{j_1+j_2+\cdots+j_r}\}.$$

Egyszerű számítás mutatja, hogy

$$\mathbf{M}\{\varepsilon_{j_1}\varepsilon_{j_1+j_2}\cdots\varepsilon_{j_1+j_2+\cdots+j_r}\}=\varphi_r^{j_1}\varphi_{r-1}^{j_2}\cdots\varphi_1^{j_r}$$

és tehát

$$B_r=\frac{\varphi_1}{1-\varphi_1}\,\frac{\varphi_2}{1-\varphi_2}\cdots\frac{\varphi_r}{1-\varphi_r}=C_r, \tag{152}$$

ami bizonyítandó volt.

9. TÉTEL: *Ha $F(x)$ nem-rácsos eloszlásfüggvény és $\alpha<\infty$, akkor a* $\lim\limits_{t\to\infty}\mathbf{P}\{\eta(t)=k\}=P_k^*$ $(k=0,1,2,\ldots)$ *határeloszlás létezik és független az* $\{\eta(0), \zeta(0)\}$ *változó-pár kezdeti eloszlásától. Fennáll, hogy*

$$P_k^*=\frac{1}{\alpha\mu}\sum_{r=k}^{\infty}(-1)^{r-k}\binom{r}{k}\frac{C_{r-1}}{r} \qquad (k=1,2,3,\ldots) \tag{153}$$

és

$$P_0^*=1-\frac{1}{\alpha\mu}\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^{r-1}\frac{C_{r-1}}{r}. \tag{154}$$

A $\{P_k^*\}$ eloszlás r-edik binomiális momentuma

$$B_r^*=\frac{C_{r-1}}{r\alpha\mu} \qquad (r=1,2,3,\ldots), \tag{155}$$

míg $B_0^*=1$.

BIZONYÍTÁS: Jelölje $M_j(t)$ ismét a $(0, t]$ időközben előforduló $E_j \to E_{j+1}$ átmenetek várható számát. Ha $F(x)$ nem-rácsos eloszlásfüggvény és $\alpha < \infty$, akkor (77) szerint fennáll, hogy bármely $h > 0$ esetén

(156) $$\lim_{t\to\infty} \frac{M_j(t+h)-M_j(t)}{h} = \frac{P_j}{\alpha}, \qquad (j=0,1,2,\ldots).$$

A teljes valószínűségi tétel alkalmazásával (79)-hez hasonlóan felírható, hogy

$$\mathbf{P}\{\eta(t)=k\} = \sum_{j=k-1}^{\infty} \binom{j+1}{k} \int_0^t e^{-k\mu(t-u)}(1-e^{-\mu(t-u)})^{j+1-k}[1-F(t-u)]\,dM_j(u).$$

Innen (156) fennállása szerint (82) alkalmazásával következik, hogy a $\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\{\eta(t)=k\} = P_k^*$ határérték létezik és fennáll, hogy

(157) $$P_k^* = \sum_{j=k-1}^{\infty} p_{jk}^* P_j,$$

ahol

(158) $$p_{jk}^* = \frac{1}{\alpha}\binom{j+1}{k} \int_0^{\infty} e^{-k\mu x}(1-e^{-\mu x})^{j+1-k}[1-F(x)]\,dx.$$

Ha bevezetjük az

(159) $$U^*(z) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k^* z^k$$

generátorfüggvényt, akkor erre (157) szerint fennáll, hogy

(160) $$U^*(z) = \frac{1}{\alpha} \int_0^{\infty} (1-e^{-\mu x}+ze^{-\mu x})U(1-e^{-\mu x}+ze^{-\mu x})[1-F(x)]\,dx.$$

A

(161) $$B_r^* = \sum_{k=r}^{\infty} \binom{k}{r} P_k^* = \frac{1}{r!}\left(\frac{d^r U^*(z)}{dz^r}\right)_{z=1}$$

binomiális momentumokra egyrészt $B_0^* = 1$, másrészt (160)-ból r-szeres z-szerinti deriválással és $z=1$ helyettesítéssel azt kapjuk, hogy

(162) $$B_r^* = [B_r + B_{r-1}]\frac{1-\varphi_r}{r\alpha\mu}, \qquad (r=1,2,3,\ldots).$$

Miután, mint láttuk, ebben az esetben fennáll, hogy

$$B_r = [B_r + B_{r-1}]\varphi_r, \qquad (r=1,2,3,\ldots),$$

tehát

(163) $$B_r^* = \frac{1-\varphi_r}{\varphi_r}\,\frac{B_r}{r\alpha\mu} = \frac{C_{r-1}}{r\alpha\mu}, \qquad (r=1,2,3,\ldots),$$

ami bizonyítja (155)-öt.

Innen (161) szerint következik, hogy

$$U^*(z) = 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{C_{r-1}}{r\alpha\mu}(z-1)^r \tag{164}$$

és ez a sor mindenütt konvergens. Végül

$$P_k^* = \frac{1}{k!}\left(\frac{d^k U^*(z)}{dz^k}\right)_{z=0} = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha\mu}\sum\limits_{r=k}^{\infty}(-1)^{r-k}\dbinom{r}{k}\dfrac{C_{r-1}}{r}, & (k=1,2,3,\ldots), \\ 1-\dfrac{1}{\alpha\mu}\sum\limits_{r=1}^{\infty}(-1)^{r-1}\dfrac{C_{r-1}}{r}, & (k=0), \end{cases} \tag{165}$$

amivel (153) és (154) bizonyítást nyert.

10. TÉTEL: *A* $\{P_k^*\}$ *és* $\{P_k\}$ *valószínűségeloszlás között fennáll a következő összefüggés*

$$P_k^* = \frac{P_{k-1}}{k\alpha\mu} \qquad (k=1,2,3,\ldots) \tag{166}$$

és

$$P_0^* = 1 - \frac{1}{\alpha\mu}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{P_{k-1}}{k}. \tag{167}$$

BIZONYÍTÁS: Jelölje $M_k(t)$ a $(0, t]$ időközben előforduló $E_k \to E_{k+1}$ $(k=0,1,2,\ldots)$ átmenetek várható számát és $N_k(t)$ a $(0,t]$ időközben előforduló $E_k \to E_{k-1}$ $(k=1,2,3,\ldots)$ átmenetek várható számát. A (78), illetve (86) képletek szerint fennáll, hogy

$$\lim_{t\to\infty}\frac{M_k(t)}{t} = \frac{P_k}{\alpha}, \qquad (k=0,1,2,\ldots) \tag{168}$$

és

$$\lim_{t\to\infty}\frac{N_k(t)}{t} = P_k^* k\mu, \qquad (k=1,2,\ldots). \tag{169}$$

Miután most is érvényes, hogy $|M_{k-1}(t) - N_k(t)| \leqq 1$, tehát

$$\lim_{t\to\infty}\frac{M_{k-1}(t)}{t} = \lim_{t\to\infty}\frac{N_k(t)}{t}, \tag{170}$$

amely (168) és (169) tekintetbevételével igazolja a (166) képletet és nyilvánvalóan $P_0^* = 1 - \sum\limits_{k=1}^{\infty} P_k^*$, és ez éppen a (167) képlet.

12. MEGJEGYZÉS. Az $\{\eta(t), 0 \leqq t < \infty\}$ sztochasztikus folyamat felfogható, mint a $\{\tau_n\}$ rekurrens folyamat által származtatott másodlagos folyamat. Egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy $\eta(0)=0$ és τ_1 eloszlásfüggvénye is $F(x)$. Jelölje rendre $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_n, \ldots$, az egymást követő beszélgetések időtartamait és legyen

$$f(u,x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } 0 \leqq u \leqq x, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases} \tag{171}$$

Ekkor felírható, hogy

$$\eta(t)=\sum_{0<\tau_n\leq t} f(t-\tau_n,\chi_n). \tag{172}$$

Legyen $\mathbf{P}\{\eta(t)=k\}=P_k(t)$ és jelölje $G(t,z)$ az $\eta(t)$ valószínűségi változó generátorfüggvényét, azaz

$$G(t,z)=\sum_{k=0}^{\infty} P_k(t)z^k. \tag{173}$$

Szerző [45] dolgozatának 1. tétele alapján $G(t,z)$-re a következő integrálegyenlet írható fel

$$G(t,z)=\int_0^t G(t-u,z)[1-(1-z)e^{-\mu(t-u)}]dF(u)+1-F(t). \tag{174}$$

Erre a lehetőségre R. Syski úr volt szíves a figyelmemet felhívni, rámutatván arra, hogy [45] dolgozatom eredményei alapján, illetve R. Fortet [13] munkája alapján $G(t,z)$-re a következő integrálegyenlet írható fel

$$G(t,z)=1-(1-z)\int_0^t G(t-u,z)e^{-\mu(t-u)}dm(u), \tag{175}$$

ahol $m(t)$ jelöli a $(0,t]$ időközben előforduló hívások várható számát.

A (174), illetve a vele ekvivalens (175) egyenlet Laplace-transzformáció alkalmazásával megoldható. A Laplace-transzformáltak megfordításával pedig a $P_k(t)$ $(k=0,1,2,\ldots)$ valószínűségek is kiszámíthatók. A fent említett speciális kezdeti feltételre vonatkozó $P_k(t)$ valószínűségek ismeretében az általános esetre vonatkozó megoldás nyilvánvaló módon felírható.

Vezessük be a

$$\psi(s,z)=\int_0^\infty e^{-st}G(t,z)dt \tag{176}$$

Laplace-transzformáltat. Ekkor (174), illetve (175) fennállásából következik, hogy

$$\psi(s,z)=\frac{1}{s}-\frac{(1-z)\varphi(s)}{1-\varphi(s)}\psi(s+\mu,z). \tag{177}$$

Ennek a képletnek ismételt alkalmazásával $\psi(s,z)$ sorjában kifejezhető $\psi(s+n\mu,z)$, $(n=1,2,3,\ldots)$, segítségével. Ha tekintetbe vesszük, hogy $\lim_{n\to\infty}\psi(s+n\mu,z)=0$, akkor végül is azt nyerjük, hogy

$$\psi(s,z)=\frac{1}{s}+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^j(1-z)^j}{s+j\mu}\prod_{i=0}^{j-1}\frac{\varphi(s+i\mu)}{1-\varphi(s+i\mu)} \tag{178}$$

és ez a sor minden z értékre konvergens ha $\Re(s) > 0$. A z^k együtthatóját véve azt kapjuk, hogy

$$\int_0^\infty e^{-st} P_k(t)\,dt = \sum_{j=k}^\infty \frac{(-1)^{j-k}\binom{j}{k}}{s+j\mu} \prod_{i=0}^{j-1} \frac{\varphi(s+i\mu)}{1-\varphi(s+i\mu)}, \qquad \text{ha } k>0, \tag{179}$$

míg

$$\int_0^\infty e^{-st} P_0(t)\,dt = \frac{1}{s} + \sum_{j=1}^\infty \frac{(-1)^j}{s+j\mu} \prod_{i=0}^{j-1} \frac{\varphi(s+i\mu)}{1-\varphi(s+i\mu)}. \tag{180}$$

Ezek megfordításával $P_k(t)$ $(k=0,1,2,\ldots)$ egyértelműen meghatározható.

Láttuk, hogy a $\lim\limits_{t\to\infty} \mathbf{P}\{\eta(t)=k\} = P_k^*$ $(k=0,1,2,\ldots)$ határértékek léteznek és függetlenek a kezdeti állapottól. Ha $\lim\limits_{t\to\infty} P_k(t) = P_k^*$ $(k=0,1,2,\ldots)$ létezik, akkor erre fenn kell állnia annak, hogy

$$P_k^* = \lim_{s\to 0} s \int_0^\infty e^{-st} P_k(t)\,dt \tag{181}$$

és mivel

$$\lim_{s\to 0} \frac{s\varphi(s)}{1-\varphi(s)} = \frac{1}{\alpha},$$

tehát így azt nyerjük, hogy

$$P_k^* = \frac{1}{\alpha\mu} \sum_{j=k}^\infty \frac{(-1)^{j-k}}{j} \binom{j}{k} \prod_{i=1}^{j-1} \frac{\varphi(i\mu)}{1-\varphi(i\mu)}, \qquad (k=1,2,3,\ldots), \tag{182}$$

míg

$$P_0^* = 1 - \frac{1}{\alpha\mu} \sum_{j=1}^\infty \frac{(-1)^{j-1}}{j} \prod_{i=1}^{j-1} \frac{\varphi(i\mu)}{1-\varphi(i\mu)}, \tag{183}$$

ami megegyezik a 9. TÉTEL eredményeivel.

7. §. Az I. modell $m=\infty$ és stacionárius esetben

A 3. § eredményeit szó szerint átvehetjük, ha azokban $m=\infty$-t írunk. Ha ismét $\zeta(t)$ jelöli a t időpontnak a közvetlen utána következő hívástól való távolságát, akkor a $\zeta(t)$ valószínűségi változó feltételes eloszlásfüggvényére fennáll az alábbi tétel:

11. TÉTEL: *Ha $F(x)$ nem-rácsos eloszlásfüggvény és $\alpha<\infty$, akkor léteznek a következő határeloszlások*

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\{\zeta(t) \leqq x \mid \eta(t)=k\} = F_k^*(x), \qquad (k=0,1,2,\ldots), \tag{184}$$

ahol

$$F_k^*(x) = \frac{1}{\alpha P_k^*} \sum_{j=k-1}^{\infty} P_j \binom{j+1}{k} \int_0^{\infty} e^{-k\mu y}(1-e^{-\mu y})^{j+1-k} [F(x+y)-F(y)]\, dy, \tag{185}$$

és ezek függetlenek az $\{\eta(0), \zeta(0)\}$ változó-pár kezdeti eloszlásától.

Ez az 5. TÉTEL közvetlen következménye, ha abban $m = \infty$ és a szereplő valószínűségeket erre az esetre tekintjük érvényesnek.

Mint már korábban is említettük, az általunk vizsgált folyamat Markov-folyamatként tekinthető, ha a rendszer állapotát az $\{\eta(t), \zeta(t)\}$ valószínűségi változó-párral jellemezzük. Ha feltételezzük, hogy $\alpha < \infty$ és az $\{\eta(0), \zeta(0)\}$ változó-pár kezdeti eloszlása

$$\mathbf{P}\{\zeta(0) \leqq x, \eta(0) = k\} = P_k^* F_k^*(x), \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots), \tag{186}$$

akkor az $\{\eta(t), \zeta(t)\}$ sztochasztikus folyamat stacionárius lesz és ekkor tetszőleges t időpontra vonatkozó eloszlás is megegyezik a kezdeti eloszlással. Ebben az esetben valamennyi n-re fenn fog állni, hogy

$$\mathbf{P}\{\eta_n = k\} = P_k \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots), \tag{187}$$

vagyis az $\{\eta_n\}$ Markov-lánc is stacionárius lesz. Ez onnan következik, hogy fennáll

$$P_k = \sum_{j=k-1}^{\infty} P_j^* \binom{j+1}{k} \int_0^{\infty} e^{-k\mu x}(1-e^{-\mu x})^{j+1-k}\, dF_j(x). \tag{188}$$

Stacionárius folyamat esetén $\mathbf{P}\{\zeta(0) \leqq x\} = F^*(x)$ és mivel $\zeta(0) = \tau_1$, tehát érvényes, hogy a hívások időpontjainak $\{\tau_n\}$ sorozata stacionárius rekurrens folyamatot alkot.

8. §. Az I. modell $m = \infty$ és Poisson-féle $\{\tau_n\}$ esetben

Tekintsük az I. modellt $m = \infty$ esetén, midőn $\{\tau_n\}$ λ eseménysűrűségű Poisson-folyamat. Ekkor már az $\{\eta(t), 0 \leqq t < \infty\}$ folyamat is Markov-féle lesz. Tegyük fel az egyszerűség kedvéért, hogy $\eta(0) = 0$. Ekkor $\varphi(s) = \lambda/(\lambda+s)$ és a $\mathbf{P}\{\eta(t) = k\} = P_k(t)$ valószínűségek Laplace-transzformáltjaira (179) és (180) képletek alapján fennáll, hogy

$$\int_0^{\infty} e^{-st} P_k(t)\, dt = \sum_{j=k}^{\infty} (-1)^{j-k} \binom{j}{k} \frac{\lambda^j}{s(s+\mu)\cdots(s+j\mu)}, \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots). \tag{189}$$

Ennek megfordításával $P_k(t)$ meghatározható, azonban, mint később látni fogjuk (vö. (256) képlet), közvetlenül is felírható, hogy

$$P_k(t) = \frac{e^{-\frac{\lambda}{\mu}(1-e^{-\mu t})}}{k!} \left[\frac{\lambda(1-e^{-\mu t})}{\mu}\right]^k. \tag{190}$$

13. MEGJEGYZÉS. Most az $E_k \to E_{k+1}$ átmenetek számának eloszlásával szeretnénk foglalkozni. Jelölje $R_k(x)$ az egymást követő $E_k \to E_{k+1}$ átmenetek $(k=0, 1, 2, \ldots)$ közötti időtartamok eloszlásfüggvényét és legyen ennek Laplace—Stieltjes transzformáltja

$$\psi_k(s) = \int_0^\infty e^{-sx}\, dR_k(x). \tag{191}$$

A következőkben megmutatjuk, hogy miként lehet az $R_k(x)$ eloszlásfüggvénvt, illetve a $\psi_k(s)$ Laplace—Stieltjes transzformáltat meghatározni.

Erre nézve tekintsük az $M_k(t)$ függvényt, a $(0, t]$ időközben előforduló $E_k \to E_{k-1}$ $(k=0, 1, 2, \ldots)$ átmenetek várható számát. Könnyen indokolható, hogy fennáll az

$$M_k'(t) = \lambda P_k(t) \tag{192}$$

összefüggés.

Jelölje továbbá $G_0(x)$ az első $E_0 \to E_1$ átmenet és a $t=0$ időpont közti távolságnak az eloszlásfüggvényét és legyen rendre $G_1(x), G_2(x), \ldots, G_k(x), \ldots$ az egymást követő $E_0 \to E_1$, $E_1 \to E_2$, $E_2 \to E_3, \ldots, E_k \to E_{k+1}, \ldots$ átmenetek közötti időtartamok hosszának eloszlásfüggvénye. Könnyen látható, hogy a $G_r(x)$ eloszlásfüggvények éppen a 9. MEGJEGYZÉSben említett PALM-féle eloszlásfüggvények. Ha ezek Laplace—Stieltjes transzformáltjait $\gamma_r(s)$ $(k=0, 1, 2, \ldots)$ jelöli, akkor a (136) képlet szerint erre fennáll, hogy

$$\gamma_r(s) = \frac{\lambda B_{r-1}(s)}{B_r(s)}, \qquad (r=0, 1, 2, \ldots), \tag{193}$$

ahol a $B_r(s)$ függvényeket (137) értelmezi.

Nagyon egyszerűen belátható, hogy fennáll

$$\int_0^\infty e^{-st}\, dM_k(t) = \frac{\gamma_0(s)\gamma_1(s)\cdots\gamma_k(s)}{1-\psi_k(s)} \tag{194}$$

és innen (192) és (193) tekintetbevételével az adódik, hogy

$$\int_0^\infty e^{-st} P_k(t)\, dt = \frac{\lambda^k}{B_k(s)[1-\psi_k(s)]}. \tag{195}$$

Ebből

$$\psi_k(s) = 1 - \frac{\lambda^k}{\left[\lambda^{k+1} + \sum_{\nu=0}^{k} \binom{k+1}{\nu} s(s+\mu)\ldots(s+(k-\nu)\mu)\lambda^\nu\right]} \cdot \frac{1}{\left[\sum_{j=k}^{\infty} (-1)^{j-k} \binom{j}{k} \frac{\lambda^j}{s(s+\mu)\ldots(s+j\mu)}\right]}. \tag{196}$$

Ennek megfordításával $R_k(x)$ egyértelműen meghatározható. Speciálisan (196)-ból kiadódik, hogy

$$\varrho_k = \int_0^\infty x\,dR_k(x) = \frac{1}{\lambda e^{-\frac{\lambda}{\mu}} \frac{(\lambda/\mu)^k}{k!}} \tag{197}$$

és

$$\begin{aligned}\sigma_k^2 = \int_0^\infty (x-\varrho_k)^2\,dR_k(x) = \frac{2\varrho_k}{\lambda} \sum_{\nu=0}^{k} \binom{k+1}{\nu} (k-\nu)! \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{\nu-k} - \\ -\varrho_k^2 \left[1 + \frac{2}{k!} \sum_{j=k}^{\infty} \frac{(-1)^{j-k}}{(j-k)!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{j+1} \left(\sum_{\nu=1}^{j} \frac{1}{\nu}\right)\right].\end{aligned} \tag{198}$$

A fenti képletek birtokában könnyen felírható a $(0, t]$ időközben előforduló $E_k \to E_{k+1}$ átmenetek számának pontos eloszlása. Most azonban csak az aszimptotikus eloszlásról teszünk említést.

Ha $\nu_t^{(k)}$ jelöli a $(0, t]$ időközben előforduló $E_k \to E_{k+1}$ átmenetek számát, akkor a folyamat kezdeti állapotától függetlenül fennáll, hogy

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\mathbf{M}\{\nu_t^{(k)}\}}{t} = \frac{1}{\varrho_k} \tag{199}$$

és

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\mathbf{D}^2\{\nu_t^{(k)}\}}{t} = \frac{\sigma_k^2}{\varrho_k^3}. \tag{200}$$

(Vö. [49] 4. §.) Továbbá a [49] dolgozat 3. §-ának eredménye szerint felírható, hogy

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\left\{ \frac{\nu_t^{(k)} - \frac{t}{\varrho_k}}{\sqrt{\frac{\sigma_k^2 t}{\varrho_k^3}}} \leqq x \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2}\,du, \tag{201}$$

azaz a $\nu_t^{(k)}$ valószínűségi változó $t \to \infty$ esetén aszimptotikusan normális eloszlást követ.

14. MEGJEGYZÉS. Ezután jelölje $\beta_k(t)$ valószínűségi változó a $(0, t]$ időköz azon u pontjaiból álló halmaz Lebesgue-mértékét, amelyre $\eta(u) \geqq k$. Az $\eta(0)$ változó kezdeti eloszlásától független aszimptotikus törvények lesznek érvényesek a $\beta_k(t)$ valószínűségi változók eloszlására, midőn $t \to \infty$.

Mindenekelőtt tekintsük folyamatunknál az egymást követő $E_k \to E_{k+1}$, $E_{k+1} \to E_k$, $E_k \to E_{k+1}, \ldots$ átmenetek időpontjait. Könnyen látható, hogy ezen időpontok közötti különbségek független valószínűségi változók. Az egymást követő $E_{k+1} \to E_k$ és $E_k \to E_{k+1}$ átmenetek közötti időkülönbségek eloszlásfüggvénye éppen a PALM-féle $G_k(x)$ eloszlásfüggvény és ennek Laplace—Stieltjes transzformáltja a (136) képlet szerint

$$\gamma_k(s) = \int_0^\infty e^{-sx}\, dG_k(x) = \frac{\lambda B_{k-1}(s)}{B_k(s)}. \tag{202}$$

Ha az egymást követő $E_k \to E_{k+1}$ és $E_{k+1} \to E_k$ átmenetek közötti időtartam eloszlásfüggvényét $H_k(x)$ jelöli, akkor nyilvánvalóan felírható, hogy

$$R_k(x) = \int_0^x H_k(x-y)\, dG_k(y) \tag{203}$$

és innen Laplace—Stieltjes transzformációra áttérve azt nyerjük, hogy

$$\int_0^\infty e^{-sx}\, dH_k(x) = \frac{\psi_k(s)}{\gamma_k(s)}. \tag{204}$$

Legyen most

$$\alpha_k = \int_0^\infty x\, dG_k(x), \qquad \beta_k = \int_0^\infty x\, dH_k(x) \tag{205}$$

és

$$\sigma^2_{\alpha,k} = \int_0^\infty (x-\alpha_k)^2\, dG_k(x), \qquad \sigma^2_{\beta,k} = \int_0^\infty (x-\beta_k)^2\, dH_k(x). \tag{206}$$

Ekkor (203) szerint fennáll, hogy

$$\varrho_k = \alpha_k + \beta_k \tag{207}$$

és

$$\sigma_k^2 = \sigma^2_{\alpha,k} + \sigma^2_{\beta,k}. \tag{208}$$

Az α_k és $\sigma^2_{\alpha,k}$ könnyen meghatározható (202) segítségével. Mégpedig azt nyerjük, hogy

$$\alpha_k = \frac{1}{\lambda} \sum_{\nu=0}^{k} \nu! \binom{k}{\nu} \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{\nu} \tag{209}$$

és

$$\sigma^2_{\alpha,k} = \frac{2\alpha_k}{\lambda} \left(\sum_{\nu=0}^{k} \nu! \binom{k}{\nu} \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{\nu} \right) - \alpha_k^2 - \frac{2}{\lambda\mu} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} j! \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{j} \sum_{i=1}^{j} \frac{1}{i}. \tag{210}$$

A β_k és $\sigma^2_{\beta,k}$ hasonlóan határozható meg, de a (207) és (208) képletekből közvetlenül is felírható, miután már ϱ_k és σ_k^2 ismeretes.

Hivatkozunk [51] dolgozatunk eredményeire. Ezek szerint az $\eta(0)$ változó kezdeti eloszlásától függetlenül fennáll, hogy

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\mathbf{M}\{\beta_k(t)\}}{t} = \frac{\beta_k}{\alpha_k + \beta_k} \tag{211}$$

és

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\mathbf{D}^2\{\beta_k(t)\}}{t} = \frac{\beta_k^2 \sigma_{\alpha,k}^2 + \alpha_k^2 \sigma_{\beta,k}^2}{(\alpha_k+\beta_k)^3}. \tag{212}$$

Továbbá a $\beta_k(t)$ valószínűségi változó $t \to \infty$ esetén aszimptotikusan normális eloszlású, azaz fennáll, hogy

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\left\{ \frac{\beta_k(t) - \frac{\beta_k t}{\alpha_k+\beta_k}}{\sqrt{\frac{\beta_k^2\sigma_{\alpha,k}^2 + \alpha_k^2\sigma_{\beta,k}^2}{(\alpha_k+\beta_k)^3} t}} \leqq x \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2} du. \tag{213}$$

A fentiekkel kapcsolatban még utalunk [47] dolgozatunkra, ahol ugyanezen problémával is foglalkozunk.

15. MEGJEGYZÉS. A fentiekben szereplő $\alpha_k, \beta_k, \sigma_{\alpha,k}^2$ és $\sigma_{\beta,k}^2$ mennyiségek meghatározására egy másik eljárást is ismertetünk. Tegyük fel most, hogy $\eta(0)=k$ (k rögzített) és legyen ennél a folyamatnál is $\mathbf{P}\{\eta(t)=j\}=P_j(t)$. A (190) képlet felhasználásával egyszerűen belátható, hogy most fennáll

$$P_j(t) = \sum_{i=0}^{j} \binom{k}{i} (1-e^{-\mu t})^{k-i} e^{-i\mu t} e^{-\frac{\lambda}{\mu}(1-e^{-\mu t})} \frac{\left[\frac{\lambda}{\mu}(1-e^{-\mu t})\right]^{j-i}}{(j-i)!}. \tag{214}$$

A (214)-ből is leolvasható és a korábbiakból is következik, hogy a

$$\lim_{t\to\infty} P_j(t) = P_j^* = P_j = e^{-\frac{\lambda}{\mu}} \frac{(\lambda/\mu)^j}{j!} \tag{215}$$

határérték létezik és látszik, hogy a konvergencia exponenciális jellegű.

Ha esetünkben is $M_k(t)$ jelöli a $(0,t]$ időközben előforduló $E_k \to E_{k+1}$ átmenetek várható számát és $N_{k+1}(t)$ jelöli a $(0,t]$ időközben előforduló $E_{k+1} \to E_k$ átmenetek várható számát, akkor ezekre fennáll, hogy

$$M_k'(t) = \lambda P_k(t) \tag{216}$$

és

$$N_{k+1}'(t) = (k+1)\mu P_{k+1}(t). \tag{217}$$

Továbbá könnyen megindokolható, hogy

$$\int_0^\infty e^{-st} dM_k(t) = \frac{\gamma_k(s)}{1-\psi_k(s)} \tag{218}$$

és

$$\int_0^\infty e^{-st} dN_{k+1}(t) = \frac{\psi_k(s)}{1-\psi_k(s)}. \tag{219}$$

Most a (217) és (219) felhasználásával azt nyerjük, hogy

(220) $$\psi_k(s)=\frac{(k+1)\mu\int\limits_0^\infty e^{-st}P_{k+1}(t)\,dt}{1+(k+1)\mu\int\limits_0^\infty e^{-st}P_{k+1}(t)\,dt}$$

és innen (216) és (218) szerint

(221) $$\int\limits_0^\infty e^{-sx}\,dG_k(x)=\gamma_k(s)=\frac{\lambda\int\limits_0^\infty e^{-st}P_k(t)\,dt}{1+(k+1)\mu\int\limits_0^\infty e^{-st}P_{k+1}(t)\,dt},$$

továbbá (204) szerint

(222) $$\int\limits_0^\infty e^{-sx}\,dH_k(x)=\frac{\psi_k(s)}{\gamma_k(s)}=\frac{(k+1)\mu\int\limits_0^\infty e^{-st}P_{k+1}(t)\,dt}{\lambda\int\limits_0^\infty e^{-st}P_k(t)\,dt}.$$

A fenti képletekből (214) tekintetbevételével a szóban forgó Laplace—Stieltjes-transzformáltak meghatározhatók. Ezek azonban látszólag bonyolultabb kifejezésekre vezetnek, mint a korábbi hasonló képletek. Mint látni fogjuk, ellenben a várható értékek, szórások (és általában a momentumok) kiszámítására jól felhasználhatók.

Most be fogjuk bizonyítani, hogy

(223) $$\alpha_k=\frac{\mathfrak{P}_k}{\lambda P_k},$$

(224) $$\beta_k=\frac{1-\mathfrak{P}_k}{\lambda P_k},$$

(225) $$\sigma^2_{\alpha,k}=\alpha_k\left(2\frac{R_k}{P_k}+\alpha_k\right)-2\frac{R_0+R_1+\cdots+R_k}{\lambda P_k},$$

(226) $$\sigma^2_{\beta,k}=\beta_k\left(2\frac{R_k}{P_k}-\beta_k\right)+2\frac{R_0+R_1+\cdots+R_k}{\lambda P_k},$$

ahol

(227) $$P_j=e^{-\frac{\lambda}{\mu}}\frac{(\lambda/\mu)^j}{j!}$$

és

(228) $$\mathfrak{P}_j=P_0+P_1+\cdots+P_j.$$

Továbbá

(229) $$R_0 = -\frac{1}{\mu}\sum_{j=k}^{\infty}\frac{(-1)^{j-k}}{(j-k)!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{j-k}\left(\sum_{i=1}^{j}\frac{1}{i}\right)$$

és

(230) $$R_j = P_j\left[\frac{R_0}{P_0}+\frac{1}{\lambda}\sum_{i=0}^{j-1}\frac{\mathfrak{P}_i}{P_i}-\frac{1}{\lambda}\sum_{i=k}^{j-1}\frac{1}{P_i}\right].$$

A fenti állítások bizonyítására vezessük be a következő mennyiségeket

(231) $$R_j = \int_0^\infty [P_j(t)-P_j]\,dt \qquad (j=0,1,2,\ldots)$$

és

(232) $$S_j = \int_0^\infty t[P_j(t)-P_j]\,dt \qquad (j=0,1,2,\ldots),$$

amelyek (214)-re való tekintettel léteznek. Felírható továbbá, hogy

(233) $$\int_0^\infty e^{-st}P_j(t)\,dt = P_j s^{-1}+R_j-S_j s+o(s),$$

ha $s\to 0$.

Most, miután

(234) $$\int_0^\infty e^{-sx}\,dG_k(x) = 1-\alpha_k s+\frac{\sigma_{\alpha,k}^2+\alpha_k^2}{2}s^2+o(s^2)$$

és

(235) $$\int_0^\infty e^{-sx}\,dH_k(x) = 1-\beta_k s+\frac{\sigma_{\beta,k}^2+\beta_k^2}{2}s^2+o(s^2),$$

ha $s\to 0$, a (221) és (222)-ből (233) figyelembevételével azt kapjuk, hogy

(236) $$\alpha_k = \frac{1+(k+1)\mu R_{k+1}-\lambda R_k}{\lambda P_k},$$

(237) $$\beta_k = \frac{\lambda R_k-(k+1)\mu R_{k+1}}{\lambda P_k},$$

(238) $$\sigma_{\alpha,k}^2 = \alpha_k\left(2\frac{R_k}{P_k}+\alpha_k\right)-2\frac{\lambda S_k-(k+1)\mu S_{k+1}}{\lambda P_k}$$

és

(239) $$\sigma_{\beta,k}^2 = \beta_k\left(2\frac{R_k}{P_k}-\beta_k\right)+2\frac{\lambda S_k-(k+1)\mu S_{k+1}}{\lambda P_k},$$

ahol tekintetbe vettük, hogy $(k+1)\mu P_{k+1}=\lambda P_k$.

Innen speciálisan kiadódik, hogy

(240) $$\varrho_k = \alpha_k + \beta_k = \frac{1}{\lambda P_k}$$

és

(241) $$\sigma_k^2 = \sigma_{\alpha,k}^2 + \sigma_{\beta,k}^2 = 2\varrho_k \frac{R_k}{P_k} + \varrho_k(\alpha_k - \beta_k).$$

A fenti képletekben már csak az R_j és S_j mennyiségek ismeretlenek. Ezek meghatározására vegyük tekintetbe, hogy a $P_j(t)$ valószínűségek kielégítik a következő differenciálegyenletrendszert:

(242) $$\frac{dP_j(t)}{dt} = \Phi_j(t) - \Phi_{j-1}(t), \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots),$$

ahol

$$\Phi_j(t) = (j+1)\mu P_{j+1}(t), -\lambda P_j(t), \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots),$$

míg $\Phi_{-1}(t) \equiv 0$. A kezdeti feltételek

(243) $$P_j(0) = \begin{cases} 1, & \text{ha } j = k, \\ 0, & \text{ha } j \neq k. \end{cases}$$

(242)-ből következik, hogy

$$\int_0^\infty \Phi_j(t)dt = \int_0^\infty \Phi_{j-1}(t)dt + P_j - P_j(0)$$

és ennek ismételt alkalmazásával azt nyerjük, hogy

$$\int_0^\infty \Phi_j(t)dt = \sum_{i=0}^{j} [P_i - P_i(0)].$$

Másrészt könnyen belátható, hogy

(244) $$(j+1)\mu R_{j+1} - \lambda R_j = \int_0^\infty \Phi_j(t)dt = \sum_{i=0}^{j} [P_i - P_i(0)]$$

és innen $j = k$ helyettesítéssel

(245) $$(k+1)\mu R_{k+1} - \lambda R_k = \mathfrak{P}_k - 1.$$

Most a (236) és (237) képletekbe behelyettesítve (245)-öt, megkapjuk a (223) és (224) összefüggéseket.

A (242)-ből az is következik, hogy

$$\int_0^\infty t\Phi_j(t)dt = \int_0^\infty t\Phi_{j-1}(t)dt - R_j$$

és ennek ismételt alkalmazásával azt nyerjük, hogy

$$\int_0^\infty t\Phi_j(t)dt = -(R_0 + R_1 + \cdots + R_j).$$

Mivel könnyen láthatóan

$$(246)\qquad (k+1)\mu S_{k+1}-\lambda S_k=\int_0^\infty t\Phi_k(t)dt=-(R_0+R_1+\cdots+R_k),$$

tehát (238) és (239) szerint ezzel (225) és (226) is igazolást nyert.

Végül az R_j ismeretlenek explicit meghatározása marad csak hátra. Ezek a (244) egyenletrendszer megoldásával nyerhetők. Eszerint fennáll

$$(247)\qquad (j+1)\mu R_{j+1}-\lambda R_j=\begin{cases}\mathfrak{P}_j, & (j=0,1,\ldots,k-1)\\ \mathfrak{P}_j-1, & (j=k,k+1,\ldots)\end{cases}$$

és nyilvánvalóan

$$(248)\qquad \sum_{j=0}^{\infty}R_j=0.$$

Ha tekintetbe vesszük, hogy $(j+1)\mu P_{j+1}=\lambda P_j$, akkor (247)-ből következik, hogy

$$(249)\qquad \frac{R_{j+1}}{P_{j+1}}-\frac{R_j}{P_j}=\begin{cases}\dfrac{\mathfrak{P}_j}{\lambda P_j}, & (j=0,1,\ldots,k-1)\\[2mm] \dfrac{\mathfrak{P}_j-1}{\lambda P_j}, & (j=k,k+1,\ldots).\end{cases}$$

A fenti egyenletekből összegezéssel azt nyerjük, hogy

$$(250)\qquad \frac{R_j}{P_j}-\frac{R_0}{P_0}=\sum_{i=0}^{j-1}\frac{\mathfrak{P}_i}{\lambda P_i}-\sum_{i=k}^{j-1}\frac{1}{\lambda P_i}\qquad (j=1,2,3,\ldots)$$

és ezzel (230) igazolást nyert. Végül R_0 meghatározható (248) segítségével, vagy közvetlenül is kiszámítható

$$(251)\qquad P_0(t)=e^{-\frac{\lambda}{\mu}(1-e^{-\mu t})}(1-e^{-\mu t})^k=\sum_{j=k}^{\infty}\frac{(-1)^{j-k}}{(j-k)!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{j-k}(1-e^{-\mu t})^j$$

figyelembevételével. Eszerint

$$(252)\qquad R_0=\int_0^\infty[P_0(t)-P_0]dt=-\frac{1}{\mu}\sum_{j=k}^{\infty}\frac{(-1)^{j-k}}{(j-k)!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{j-k}\left(\sum_{i=1}^{j}\frac{1}{i}\right),$$

amely éppen a (229) képlet.

Végül még megjegyezzük, hogy könnyen beláthatóak a következő azonosságok

$$\frac{\mathfrak{P}_j}{P_j}=\sum_{\nu=0}^{j}\nu!\binom{j}{\nu}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{\nu}$$

és

$$\sum_{i=0}^{j}\frac{\mathfrak{P}_i}{P_i}=\sum_{\nu=0}^{j}\nu!\binom{j+1}{\nu+1}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{\nu},$$

amelyek felhasználhatók a kérdéses várható értékek és szórásnégyzetek explicit kifejezéseiben.

9. §. Az I. modell általánosítása $m=\infty$ esetben

Tekintsük most az I. modellt abban az esetben, midőn a rendelkezésre álló vonalak száma $m=\infty$. Tegyük fel, hogy a beszélgetések időtartamai $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_n, \ldots$ egyforma eloszlású, független, pozitív valószínűségi változók, tetszőleges

$$H(x)=\mathbf{P}\{\chi_n \leqq x\} \tag{253}$$

eloszlásfüggvénnyel. Azt is feltesszük, hogy a $\{\chi_n\}$ változók függetlenek a $\{\tau_n\}$ időpontoktól és a rendszer kezdeti állapotától. Jelölje a t időpontban folyamatban levő beszélgetések számát $\eta(t)$ valószínűségi változó. Stacionárius folyamat esetén pedig jelölje $\eta^*(t)$ a t időpontban folyamatban levő beszélgetések számát. Tárgyalásunkban két esetet különböztetünk meg, aszerint, amint $\{\tau_n\}$ λ-eseménysűrűségű Poisson-folyamat vagy $\{\tau_n\}$ a bevezetésben említett $F(x)$ eloszlásfüggvénnyel jellemzett rekurrens folyamat.

A Poisson-folyamat esete. Legyen most $\{\tau_n\}$ λ-eseménysűrűségű Poisson-folyamat. Régóta ismeretes, hogy ebben az esetben, ha $\mathbf{M}\{\chi_n\}<\infty$, akkor a $\lim\limits_{t\to\infty} \mathbf{P}\{\eta(t)=k\}=P_k^*$ $(k=0, 1, 2, \ldots)$ határeloszlás létezik és független a rendszer kezdeti állapotától. Mégpedig fennáll, hogy

$$P_k^*=e^{-\lambda\varrho}\frac{(\lambda\varrho)^k}{k!}, \tag{254}$$

ahol

$$\varrho=\int_0^\infty x\,dH(x). \tag{255}$$

Ez az eredmény már A. K. ERLANG [9] vizsgálatai alapján is plauzibilisnek tekinthető. Ha feltesszük, hogy a $\{P_k^*\}$ határeloszlás létezik, akkor F. POLLACZEK [36], C. PALM [34] és L. KOSTEN [25] eredményeiből is következik (254) fennállása. Továbbá megemlítjük, hogy szerzőnek 1950-ben írt, de sajnos csak 1954-ben megjelent, [44] dolgozatában szereplő, Poisson-folyamat által származtatott másodlagos folyamatra vonatkozó általános tételéből speciálisan kiadódik a (254) eredmény. A (254) fennállására közvetlen bizonyítást adott még A. RÉNYI [39], R. FORTET [12] és C. RYLL-NARDZEWSKI [40].

Most egy rövid bizonyítást adunk (254) fennállására. Feltesszük, hogy $\eta(0)=0$. A tetszőleges kezdeti állapotra való áttérés csupán nyilvánvaló módosítást kíván. Hivatkozunk arra a tényre, hogy ha a Poisson-folyamatban $(0, t)$ időközben pontosan n esemény fordul elő, akkor ennek az n eseménynek előfordulási pontjai ugyanazon valószínűségi eloszlást követik, mint a $(0, t)$ intervallumon n független, egyenletes eloszlású pont eloszlása. (Vö. [44] p. 503.) Ha tekintetbe vesszük, hogy az $\eta(t)=k$ esemény több egymást kizáró módon jöhet létre, mégpedig a $(0, t)$ intervallumban $n=0, 1, 2, \ldots$ hívás fordulhat elő, akkor a teljes valószínűségi tétel szerint felírható, hogy

$$\mathbf{P}\{\eta(t)=k\}=\sum_{n=k}^{\infty} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}\binom{n}{k}\left[\frac{1}{t}\int_0^t (1-H(x))dx\right]^k\left[\frac{1}{t}\int_0^t H(x)dx\right]^{n-k},$$

azaz

$$(256)\qquad \mathbf{P}\{\eta(t)=k\}=e^{-\lambda\int_0^t [1-H(x)]dx}\frac{\left[\lambda\int_0^t (1-H(x))dx\right]^k}{k!}, \qquad (k=0, 1, 2, \ldots).$$

Mivel

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^t [1-H(x)]dx=\varrho,$$

innen következik, hogy

$$(257)\qquad P_k^*=\lim_{t\to\infty}\mathbf{P}\{\eta(t)=k\}=e^{-\lambda\varrho}\frac{(\lambda\varrho)^k}{k!} \qquad (k=0, 1, 2, \ldots),$$

ami bizonyítandó volt. Egyéb kezdeti feltétel esetén is hasonló módon eljárva, ugyanezen határértékre jutunk.

A vizsgált folyamat Markov-folyamatként tárgyalható, ha az $\eta(t)$ valószínűségi változó mellett megadjuk azt is, hogy az éppen folyamatban levő beszélgetések befejezéséig mennyi idő szükséges. Ha feltesszük, hogy $\varrho<\infty$ és az $\eta(0)$ változó eloszlása $\{P_k^*\}$, továbbá az $\eta(0)=k$ feltétel mellett a folyamatban levő k beszélgetés befejezéséig eltelt időtartamok együttes eloszlásfüggvénye $H^*(x_1)H^*(x_2)\ldots H^*(x_k)$, ahol

$$(258)\qquad H^*(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\varrho}\displaystyle\int_0^x [1-H(y)]dy, & \text{ha} \quad x\geqq 0,\\ 0, & \text{ha} \quad x<0,\end{cases}$$

akkor stacionárius folyamatot nyerünk, amelynél bármely t időpontra vonatkozó eloszlás megegyezik a kezdeti eloszlással. Ha stacionárius folyamat esetén $\eta^*(t)$ jelöli a t időpontban folyamatban levő beszélgetések számát, akkor minden t időpontra érvényes, hogy

$$(259)\qquad \mathbf{P}\{\eta^*(t)=k\}=P_k^*=e^{-\lambda\varrho}\frac{(\lambda\varrho)^k}{k!}.$$

16. MEGJEGYZÉS. Az $\{\eta(t), 0\leqq t<\infty\}$ sztochasztikus folyamat felfogható Poisson-folyamat által származtatott másodlagos folyamatként is. Egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy $\eta(0)=0$. Ha

$$(260)\qquad f(u, x)=\begin{cases}1, & \text{ha} \quad 0\leqq u\leqq x,\\ 0 & \text{egyébként,}\end{cases}$$

akkor felírható, hogy

(261) $$\eta(t)=\sum_{0\leqq\tau_n\leqq t} f(t-\tau_n, \chi_n).$$

Szerző [44] és [46] dolgozataiban tetszőleges $f(u, x)$ függvény esetén vizsgálta a (261) alatti $\{\eta(t)\}$ folyamatot. Az ezen dolgozatban foglalt eredmények speciális eseteként nyerjük a következő tételeket.

Jelenleg csupán a stacionárius $\{\eta^*(t)\}$ folyamat esetével foglalkozunk. Ekkor a kezdeti feltételeket a korábban részletezett módon kell megválasztani. Érvényes lesz, hogy az $\{\eta(t)\}$ folyamat $t\to\infty$ esetén ugyanolyan sztochasztikus viselkedést mutat, mint a stacionárius $\{\eta^*(t)\}$ folyamat minden t időpontban.

Stacionárius $\{\eta^*(t)\}$ folyamat esetén $\mathbf{M}\{\eta^*(t)\}=\mathbf{D}^2\{\eta^*(t)\}=\lambda\varrho$ és az

(262) $$R(\tau)=\frac{\mathbf{M}\{\eta^*(t)\eta^*(t+\tau)\}-(\lambda\varrho)^2}{\lambda\varrho}$$

korrelációs függvényre fennáll, hogy

(263) $$R(\tau)=\frac{1}{\varrho}\int_{|\tau|}^{\infty}[1-H(x)]\,dx.$$

Az $\{\eta^*(t)\}$ folyamat spektrális eloszlásfüggvényére, $G(\nu)$-re (ahol $0\leqq\nu<\infty$) fennáll, hogy $G(0)=[\mathbf{M}\{\eta^*(t)\}]^2=(\lambda\varrho)^2$ és a $0<\nu<\infty$ értékekre

(264) $$G'(\nu)=\frac{\lambda}{\pi^2\nu^2}\int_0^{\infty}(1-\cos 2\pi\nu x)\,dH(x).$$

Itt

(265) $$G(\infty)=\mathbf{M}\{(\eta^*(t))^2\}=\lambda\varrho(1+\lambda\varrho).$$

A fenti (263) és (264) eredményt V. E. BENEŠ [3] más úton bizonyította be. A telefon-forgalom statisztikai becslésére gyakran felhasználják a következő mennyiséget (vö. L. KOSTEN [26], V. E. BENEŠ [2] és mások munkáit)

(266) $$\frac{1}{T}\int_0^T \eta^*(t)\,dt.$$

Stacionárius folyamat esetén ennek várható értéke

(267) $$\mathbf{M}\left\{\frac{1}{T}\int_0^T \eta^*(t)\,dt\right\}=\lambda\varrho$$

és szórásnégyzete

(268) $$\mathbf{D}^2\left\{\frac{1}{T}\int_0^T \eta^*(t)\,dt\right\}=\frac{2\lambda\varrho}{T^2}\int_0^T (T-\tau)R(\tau)\,d\tau,$$

ahol $R(\tau)$ jelentése a (263) szerinti.

*A rekurrens folyamat esete.** Legyen most $\{\tau_n\}$ a **Bevezetés**-ben említett rekurrens folyamat, amelyre $\mathbf{P}\{\tau_{n+1}-\tau_n \leqq x\} = F(x)$, $(n=1,2,3,\ldots)$. Ha $\eta(t)$ jelöli a t időpontban folyamatban levő beszélgetések számát, akkor az $\{\eta(t)\}$ folyamat tekinthető rekurrens folyamat által származtatott másodlagos folyamatnak. Ha egyszerűség kedvéért $\eta(0)=0$ feltevéssel élünk, akkor a (260) alatti $f(u,x)$ függvény segítségével felírható, hogy

$$\eta(t) = \sum_{0<\tau_n \leqq t} f(t-\tau_n, \chi_n). \tag{269}$$

Szerző [45] dolgozatában tetszőleges $f(u,x)$ függvény esetén vizsgálta ezt a folyamatot. Az ezen dolgozatban foglalt eredmények speciális eseteként nyerjük az alábbi tételeket.

A vizsgált folyamat Markov-folyamatként kezelhető, ha az $\eta(t)$ és $\zeta(t)$ valószínűségi változók mellett megadjuk azt is, hogy az éppen folyamatban levő beszélgetések befejezéséig mennyi idő szükséges. Ha $\alpha<\infty$ és $\varrho<\infty$, akkor a kezdeti eloszlás megfelelő megválasztásával definiálhatjuk a stacionárius folyamat fogalmát. A stacionárius folyamatnál bármely t időpontra vonatkozó eloszlás megegyezik a kezdeti eloszlással. Jelölje stacionárius folyamat esetén $\eta^*(t)$ a t időpontban folyamatban levő beszélgetések számát. Ekkor érvényes lesz, hogy az $\{\eta(t)\}$ folyamat $t\to\infty$ esetén ugyanolyan sztochasztikus viselkedést mutat, mint a stacionárius $\{\eta^*(t)\}$ folyamat minden t időpontban. Nevezetesen, ha $\alpha<\infty$, $\varrho<\infty$ és $F(x)$ nem-rácsos eloszlás, akkor a $\lim\limits_{t\to\infty} \mathbf{P}\{\eta(t)=k\} = P_k^*$ $(k=0,1,2,\ldots)$ határértékek léteznek és függetlenek a kezdeti állapottól. A stacionárius folyamat esetén pedig minden t-re érvényes, hogy $\mathbf{P}\{\eta^*(t)=k\}=P_k^*$, $(k=0,1,2,\ldots)$.

A $\{P_k^*\}$ valószínűségeloszlás M_r^* $(r=0,1,2,\ldots)$ momentumai a [45] dolgozat eredményei alapján meghatározhatók. Az

$$M_r^* = \sum_{k=0}^{\infty} k^r P_k^* \tag{270}$$

momentumok a következő rekurzív képletek segítségével kaphatók meg

$$M_r^* = \frac{1}{\alpha}\sum_{j=0}^{r-1}\binom{r}{j}\int_0^{\infty} M_j^*(t)[1-H(t)]\,dt, \qquad (r=0,1,2,\ldots), \tag{271}$$

ahol $M_0^*(t)=1$ és $M_1^*(t), M_2^*(t), \ldots$ sorjában meghatározható a következő képlet segítségével

$$M_r^*(t) = \sum_{j=0}^{r-1}\binom{r}{j}\int_0^{t} M_j^*(t-x)[1-H(t-x)]\,dm(x), \qquad (r=0,1,2,\ldots), \tag{272}$$

* Az idevágó kérdések részletesebb tárgyalásával a szerző sajtó alatt levő [57] munkájában foglalkozik.

ahol

$$m(x) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(x) \tag{273}$$

és $F_n(x)$ jelöli az $F(x)$ eloszlásfüggvénynek önmagával való n-szeres kompozícióját.

17. MEGJEGYZÉS. Legyen $M = M_1^* = \frac{\varrho}{\alpha}$ és $D^2 = M_2^* - (M_1^*)^2$. Ekkor [45] szerint a stacionárius $\{\eta^*(t)\}$ folyamat korrelációs függvénye létezik és erre felírható, hogy

$$R(\tau) = \frac{1}{\varrho D^2} \int_{|\tau|}^{\infty} [1 - H(x)]dx + \frac{1}{\varrho D^2} \int_0^{\infty} [h(t+\tau) + h(t-\tau)]dm(t) - \frac{M^2}{D^2}, \tag{274}$$

ahol

$$h(\tau) = \int_0^{\infty} [1 - H(t)][1 - H(t+\tau)]dt \tag{275}$$

és $m(t)$ jelentése a (273) szerinti.

Ha $G(\omega)$ jelöli az $\{\eta^*(t)\}$ folyamat spektrális függvényét, amelyre $G(0) = M^2$ és $G(\infty) = M^2 + D^2$, akkor felírható, hogy

$$G(\omega) = M^2 + D^2[G^*(\omega) - G^*(-\omega)]. \tag{276}$$

A $G^*(\omega)$ spektrális eloszlás függvényre A. J. HINCSIN [18] képlete szerint fennáll, hogy

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos \omega\tau \, dG^*(\omega) \tag{277}$$

és ennek megfordításával $G^*(\omega)$ egyértelműen meghatározható. Az

$$\frac{1}{T} \int_0^T \eta^*(t)dt \tag{278}$$

valószínűségi változó várható értékére és szórásnégyzetére fennáll, hogy

$$\mathbf{M}\left\{\frac{1}{T}\int_0^T \eta^*(t)dt\right\} = M \tag{279}$$

és

$$\mathbf{D}^2\left\{\frac{1}{T}\int_0^T \eta^*(t)dt\right\} = \frac{2D^2}{T^2}\int_0^T (T-\tau)R(\tau)d\tau, \tag{280}$$

ahol $R(\tau)$ jelentése a (274) szerinti.

A Magyar Tudományos Akadémia
Matematikai Kutató Intézete

IRODALOM

[1] H. ASHCROFT: The productivity of several machines under the care of one operator. *Journal of the Royal Statistical Society Ser. B.*, **12** (1950) 145—151.

[2] V. E. BENEŠ: A sufficient set of statistics for a simple telephone exchange model. *Bell System Technical Journal*, **36** (1957) 939—964.

[3] V. E. BENEŠ: Fluctuations of telephone traffic. *Bell System Technical Journal*, **36** (1957) 965—973.

[4] D. BLACKWELL: A renewal theorem. *Duke Mathematical Journal*, **15** (1948) 145—150.

[5] E. BROCKMEYER—H. L. HALSTRØM—ARNE JENSEN: The Life and Works of A. K. Erlang. (*Copenhagen*, 1948).

[6] J. W. COHEN: The full availability group of trunks with an arbitrary distribution of the inter-arrival times and a negative exponential holding time distribution, *Simon Stevin Wis- en Natuurkundig Tijdschrift*, **31** (1957) 169—181.

[7] J. W. COHEN: The generalized Engset formulas, *Philips Telecommunication Report*, 1957.

[8] J. L. DOOB: Renewal theory from the point of view of the theory of probability. *Transactions of the American Mathematical Society*, **63** (1948) 422—438.

[9] A. K. ERLANG: Solution of some problems in the theory of probabilities of significance in automatic telephone exchanges. *Post Office Electrical Engineer's Journal*, **10** (1918) 189—197.

[10] W. Feller: An Introduction to Probability Theory and its Applications, *John Wiley, New-York*, 1950.

[11] R. FORTET: Calcul des Probabilités, Paris, 1950.

[12] R. FORTET: Random functions from a Poisson process. *Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, (1951) 373—385.

[13] R. FORTET: Random distributions with an application to telephone engineering. *Proceedings of the Third Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, Vol. **II.** (1956) 81—88.

[14] F. G. FOSTER: On the stochastic matrices associated with certain queueing processes. *Annals of Mathematical Statistics*, **24** (1953) 355—360.

[15] TH. FRY: Probability and its Engineering Uses, *Van Nostrand, New-York*, 1928.

[16] А. Я. Хинчин: Математическая Теория стационарной очереди. Математический сборник **39** (1932) 73—84.

[17] А. Я. Хинчин: О среднем времени простоя станков. Математический сборник, **40** (1933) 119—123.

[18] A. KHINTCHINE: Korrelationstheorie der stationären stochastischen Prozesse. *Mathematische Annalen*, **109** (1934) 604—615.

[19] А. Я. Хинчин: Математические методы теории массового обслуживания. XLIX Труды Математического института имени В. А. Стеклова, Москва, 1955.

[20] CH. JORDAN: Calculus of finite differences, *Budapest*, 1939.

[21] D. G. KENDALL: Stochastic processes occurring in the theory of queues and their analysis by the method of the imbedded Markov chain. *Annals of Mathematical Statistics*, **24** (1953) 338—354.

[22] J. KIEFER—J. WOLFOWITZ: On the theory of queues with many servers. *Transactions of the American Mathematical Society* **78** (1955) 1—18.

[23] A. N. KOLMOGOROV: Sur le problème d'attente. *Recueil Mathématique* (Математ. сборник) **38** (1931) 101—106.

[24] А. Н. Колмогоров—Ю. В. Прохоров: О суммах случайного числа случайных слагаемых. *Успехи математических наук* IV. в. **4**. (1949) 168—172.

[25] L. KOSTEN: On the validity of the Erlang and Engset loss-formulae. *Het. P. T. T. Bedrijf* **2** (1948—49) 42—45.

[26] L. KOSTEN: On the accuracy of measurements of probabilities of delay and of expected times of delay in telecommunication systems, I. *Applied Scientific Research,* B. **2**. (1951) 108—130, és II. **2**. (1952) 401—415.

[27] L. KOSTEN: The historical development of the theory of probability in telephone traffic engineering in Europe. *Teleteknik,* **1** (1957) 32—40.

[28] R. KRONIG: On time losses in machinery undergoing interruption, I. *Physica's Grav,* **10** (1943) 215—224.

[29] R. KRONIG—H. MONDRIA: On time losses in machinery undergoing interruption, II. *Physica's Grav,* **10** (1943) 331—336.

[30] D. V. LINDLEY: The theory of queues with a single server. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society,* **48** (1952) 277—289.

[31] E. LUKÁCS: Applications of Faa di Bruno's formula in mathematical statistics. *American Mathematical Monthly,* **62** (1955) 340—348.

[32] E. C. MOLINA: Application of the theory of probability to telephone trunking problems. *Bell System Technical Journal,* **6** (1927) 461—494.

[33] M. D. MOUSTAFA: Input-output Markov processes. *Indagationes Mathematicae,* **19** (1957) 112—118. (*Proceedings Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen,* A. **60** (1957) 112—118).

[34] C PALM: Analysis of the Erlang traffic formulae for busy-signal arragements. *Ericsson Technics,* No. 4 (1938) 39—58.

[35] C. PALM: Intensitätschwankungen im Fernsprechverkehr. *Ericsson Technics,* No. **44** (1943) 1—189.

[36] F. POLLACZEK: Über eine Aufgabe der Wahrsheinlichkeitstheorie. *Mathematische Zeitschrift,* I. **32** (1930) 64—100, II. **32** (1930) 729—750.

[37] F. POLLACZEK: Lösung eines geometrischen Wahrscheinlichkeitsproblems. *Mathematische Zeitschrift,* **35** (1932) 230—278.

[38] F. POLLACZEK: Généralisation de la théorie probabiliste des systèms téléphoniques sans dispositif d'attente. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris,* **236** (1953) 1469—1470.

[39] A. RÉNYI: On some problems concerning Poisson processes. *Publicationes Mathematicae, Debrecen,* **2** (1951) 66—73.

[40] C. RYLL—NARDZEWSKI: On the non-homogeneous Poisson processes. *Colloquium Mathematicum* **3** (1955) 192—195.

[41] Б. А. Севастьянов: Эргодическая теорема для Марковских процессов и ее приложение к телефонным системам с отказами. *Теория вероятностей и ее применения,* **2** (1957) 106—116.

[42] W. L. SMITH: On the distribution of queueing times. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society,* **49** (1953) 449—461.

[43] W. L. SMITH: Regenerative stochastic processes. *Proceedings of the Royal Society,* A. **232** (1955) 6—31.

[44] TAKÁCS L.: Poisson-folyamat által származtatott másodlagos folyamatokról és azok fizikai alkalmazásairól. *A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei,* 4 (1954) 473—504. (Vö. On secondary processes generated by a Poisson process and their applications in physics. *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae,* **5** (1954) 203—236).

[45] TAKÁCS L.: Rekurrens folyamatok által származtatott másodlagos folyamatokról. *A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei* 5 (1955) 187—197. (Vö. On secondary stochastic processes generated by recurrent processes *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae,* 7 (1956) 17—29).

[46] TAKÁCS L.: Elektroncsövek anódáram ingadozásának valószínűségszámítási tárgyalásáról· *A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei,* 6 (1956) 27—51. (Vö. Über die wahrscheinlichkeitstheoretische Behandlung der Anodenstromschwankungen von Elektronenröhren. *Acta Physica Academiae Scientiarum Hungaricae,* 7 (1957) 25—50).

[47] TAKÁCS L.: Bizonyos típusú rekurrens sztochasztikus folyamatok vizsgálatáról. *A Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetének Közleményei,* 3 (1954) 115—128.

[48] TAKÁCS L.: „Várakozási idő"-problémák tárgyalása Markov-folyamatok segítségével. *A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei,* 4 (1954) 543—570. (Vö. Investigation of waiting time problems by reduction to Markov processes. *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae,* 6 (1955) 101—129).

[49] TAKÁCS L.: Részecskeszámlálók elméletében fellépő sztochasztikus folyamatokról. *A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei;* 6 (1956) 369—421.

[50] TAKÁCS L.: Bizonyos várakozási idő problémáról. *A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei,* 7 (1957) 183—197. (Vö. On a stochastic process concerning some waiting time problems. Теория вероятностей и ее применения 2 (1957) 92—105).

[51] L. TAKÁCS: On certain sojourn time problems in the theory of stochastic processes. *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae,* 8 (1957) 169—191. (Vö. Tartózkodási idő problémákról. *A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei,* 7 (1957) 371—395.)

[52] L. TAKÁCS: On the generalization of Erlang's formula. *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae,* 7 (1956) 419—433.

[53] L. TAKÁCS: On a probability problem concerning telephone traffic. *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae,* 8 (1957) 319—324.

[54] L. TAKÁCS: On a queueing problem concerning telephone traffic. *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae,* 8 (1957) 325—335.

[55] L. TAKÁCS: On a combined waiting time and loss problem concerning telephone traffic. *Annales Universitatis Scientiarum Budapestinensis de Rolando Eötvös nominatae. Sectio Mathematica,* 1 (1957).

[56] L. TAKÁCS: On a coincidence problem concerning telephone-traffic. *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae,* 9 (1958).

[57] S. TÄCKLIND: Elementare Behandlung vom Erneuerungsproblem für den stationären Fall. *Skandinavisk Aktuarietidskrift,* 27 (1944) 1—15.

[58] A. WALD: Sequential tests of statistical hypotheses. *Annals of Mathematical Statistics,* 16 (1945) 117—186.

[59] R. I. WILKINSON: Theories for toll traffic engineering in the USA. *Bell System Technical Journal,* 35 (1956) 421—514.

[60] D. M. G. WISHART: A queueing system with χ^2 service—time distribution. *Annals of Mathematical Statistics,* 27 (1956) 768—779.

(Beérkezett: 1957. XI. 5.)