A KÜLFÖLDI SZAKIRODALOMBÓL

FOURIER-SOROK DIVERGENCIÁJA[1]

P. L. ULJANOV

TARTALOMJEGYZÉK

Bevezetés

FATOU [4] már 1906-ban felvetette a következő kérdést: van-e olyan trigonometrikus sor, amelynek koefficiensei 0 felé tartanak, és amely Lebesgue-szerint mérhető, pozitív mértékű E halmazon divergál? Erre a kérdésre 1911-ben N. N. LUZIN [17] igenlő választ adott. Szerkesztett olyan

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

(a_k, b_k valós számok) trigonometrikus sort, amely a $[0, 2\pi]$ szakaszon majdnem mindenütt divergál, és $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = \lim\limits_{k\to\infty} b_k = 0$. 1912-ben H. STEINHAUS [34] olyan trigonometrikus sorra adott példát, amelynek koefficiensei 0 felé tartanak, és amely mindenütt divergál. Ezenkívül, természetesen, fontos probléma maradt tetszőleges, a $[0, 2\pi]$ szakaszon Lebesgue-szerint integrálható $f(x)$ függvény Fourier-Lebesgue-sora konvergenciájának, illetve divergenciájának a vizsgálata. Ez utóbbi soroknál

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos kx\,dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin kx\,dx \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

[1] Orosz nyelven megjelent: Успехи Математических Наук 12 (1957), 75—132. A fordítás *Králik Dezső* munkája. Az eredeti szövegtől csak az irodalmi jegyzék sorrendjében és néhány nyilvánvaló sajtóhiba, illetőleg apró elírás korrigálásában tértünk el. (Szerk. megjegyzése.)

1922-ben A. N. KOLMOGOROV [13] szerkesztett olyan Lebesgue-integrálható $f(x)$ függvényt ($f(x) \in L(0, 2\pi)$), amelynek Fourier-sora a $[0, 2\pi]$ szakaszon majdnem mindenütt divergál. Nem sokkal később mindenütt divergens Fourier-sorra adott példát [14]. A Kolmogorov által szerkesztett divergens Fourier-sorok részletösszegei nem-korlátosak (l. **2.**, **3.** **§**).

1936-ban MARCINKIEWICZ [21], Kolmogorov eredményeire támaszkodva olyan Fourier-sort szerkesztett, amely a $[0, 2\pi]$ intervallumban majdnem mindenütt divergál, de részletösszegei majdnem mindenütt korlátosak. Ebből látható, hogy ha egy trigonometrikus sor (Fourier-sor) részletösszegei valamely pozitív mértékű E halmazon korlátosak, akkor a sor általában nem konvergál E-nek valamely pozitív mértékű E_1 részhalmazán.

Ugyancsak 1936-ban MARCINKIEWICZ és ZYGMUND [22] Fourier-sorok részletösszegeinek oszcillációs viselkedését is megvizsgálták.

1935-ben MARCINKIEWICZ [20] Fourier-sorok valamely $E \subset [0, 2\pi]$ halmazon való konvergenciájának egy elegendő kritériumát fedezte fel; ez a kritérium egyúttal szükségesnek is bizonyult, ha az egész $f(x) \in L(0, 2\pi)$ függvényosztályra vonatkoztatjuk [21].

Valamennyi előbbi példánál a konjugált sor nem Fourier-sor. HARDY, ROGOSINSKI [8] és SUNOUCHI [36] konstruáltak olyan $f(x) \in L(0, 2\pi)$ függvényt, amelynek Fourier-sora majdnem mindenütt divergens, és ugyanakkor a konjugált sor is Fourier-sor.

Divergens trigonometrikus (Fourier-) sorok konstruálásával egyidejűleg kezdték vizsgálni azokat a ponthalmazokat is, amelyeken végtelen sorok konvergálnak, illetőleg divergálnak. Trigonometrikus sorok (Fourier-sorok) konvergenciapontjainak halmaza általában $F_{\sigma\delta}$-típusú. 1918-ban RAJCHMAN (l. [40], 282.) szerkesztett olyan trigonometrikus sort, amely előre megadott zárt $E \subset [0, 2\pi]$ halmazon konvergál, a komplementer $[0, 2\pi] - E$ halmazon pedig divergál, és a sor együtthatói 0 felé tartanak.

1949-ben HERZOG és PIRANIAN [10] szerkesztettek olyan Taylor-sort, amely előre megadott F_σ-típusú $E \subset [0, 2\pi]$ halmazon konvergál, a $[0, 2\pi] - E$ halmazon pedig divergál.

1951-ben SZ. B. STEČKIN [35] olyan trigonometrikus sorra adott példát, amely adott F_σ-típusú E halmazon konvergál, E komplementerjén pedig divergál.

Újabb eredményt ért el ezen a területen ZELLER [39]. Neki sikerült a fenti tulajdonságokkal rendelkező *Fourier-sort* szerkeszteni.

Jelen dolgozat célja a Fourier-sorok divergenciájára vonatkozó újabb eredmények ismertetése. Az **1.** **§**-ban bizonyítás nélkül felsorolunk több olyan ismert tételt, amelyekre később szükségünk lesz. Ezenkívül Kuttner, valamint Marcinkiewicz és Zygmund két fontos tételét bizonyítjuk be. A **2.** **§**-ban folytonos függvények sorozatait vizsgáljuk, azonkívül példákat adunk olyan folytonos függvényekre, amelyek Fourier-sorai bizonyos pontokban divergálnak. A **3.** §-ban nagy vonásokban ismertetjük Kolmogorov majdnem mindenütt divergáló Fourier-sorának példáját, s megmutatjuk, hogy a konjugált sor nem Fourier-sor. A **4.** §-ban Marcinkiewicznek divergens, de majdnem mindenütt korlátos részletösszegekkel rendelkező Fourier-sor példáját beszéljük meg. A **6.** §-ban szerkesztünk egy H_1-osztálybeli divergens sort. A **7.** §-ban Zeller tételét bizonyítjuk be, és felsorolunk számos jelenleg még megoldatlan problémát.

1. §. Definíciók és segédtételek

Az $[a, b]$ *szakasz* ((a, b) *intervallum*) kifejezésen mindig az $a \leqq x \leqq b$ $(a < x < b)$ pontok halmazát értjük.

Az $S_0, S_1, S_2, \ldots$ sorozat a

$$T = \| a_{mn} \| = \left\| \begin{matrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & \cdots \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n0} & a_{n1} & a_{n2} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{matrix} \right\|$$

mátrix segítségével *szummálható* S-hez, ha a

$$\sum_{i=0}^{\infty} S_i a_{ni} = \tilde{S}_n$$

sorok minden n indexre konvergensek és

$$\lim_{n \to \infty} \tilde{S}_n = S.$$

A T mátrixot *regulárisnak* mondjuk, ha $S_n \to A$-ból $\tilde{S}_n \to A$ következik, ahol A véges szám.

TOEPLITZ ÉS SCHUR TÉTELE. *A T-mátrix regularitásának szükséges és elegendő feltételei a következők:*

1. $\lim\limits_{i \to \infty} a_{in} = 0$ *minden rögzített* $n = 0, 1, \ldots$ *-re,*

2. $\lim\limits_{i \to \infty} \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_{in} = 1,$

3. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_{in}| \leqq C < \infty$, *ahol a C állandó nem függ i-től.* (l. [17], 43—46).

Ha például $a_{in} = \frac{1}{i+1}$, $0 \leqq n \leqq i$-re és $a_{in} = 0$, $n > i$-re, akkor olyan reguláris mátrixot kapunk, amelynél

$$\tilde{S}_i = \frac{S_0 + S_1 + S_2 + \cdots + S_i}{i+1},$$

vagyis az aritmetikai közepekkel való szummálást nyerjük.

Ha valamely sorozat (sor) az aritmetikai közepek módszerével szummálható, akkor azt $(C, 1)$-*szummálhatónak* nevezzük.

Most bizonyítás nélkül néhány tételt sorolunk fel, amelyekre a dolgozat későbbi részeiben szükségünk lesz.

ABEL-FÉLE TRANSZFORMÁCIÓ. *Ha* $S_k = a_0 + a_1 + \cdots + a_k$ $(k \geqq 0)$, *akkor*

$$\sum_{k=m}^{n} a_k b_k = \sum_{k=m}^{n-1} S_k (b_k - b_{k+1}) - S_{m-1} b_m + S_n b_n, \tag{1. 1}$$

ahol $0 \leqq m \leqq n$ *és* $S_{-1} = 0$ (l. [40], 9.).

A TÉTEL. *Ha valamely sor véges számhoz konvergál (illetve* $+\infty$, *vagy* $-\infty$*-hez divergál), akkor egyszersmind* $(C, 1)$*-szummálható is ugyanehhez a számhoz (illetve* $+\infty$, *vagy* $-\infty$*-hez).* (l. pl. [7], 57.).

B TÉTEL (B. LEVI). *Ha* $u_n(x) \in L(E)$, *és*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_E |u_n(x)| dx < \infty,$$

akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *sor E-n majdnem mindenütt egy bizonyos* $u(x) \in L(E)$ *függvényhez konvergál (sőt abszolút konvergál)* (l. [40], 73.).

C TÉTEL. *Ha* $f(x) \in L(E)$, *akkor*

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f(x) \sin nx dx = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \int_E f(x) \cos nx dx = 0$$

(l. [40], 18).

Legyen adva az

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \tag{1. 2}$$

trigonometrikus sor, ahol a_k, b_k valós számok. A

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k \sin kx - b_k \cos kx) \tag{1. 3}$$

sort az (1. 2) sor konjugált sorának nevezzük.

Legyen $f(x)$ valamely 2π szerint periodikus, integrálható függvény (az egész dolgozatban mindig csak 2π szerint periodikus függvényekkel foglalkozunk, ezért ezt a későbbiekben nem is fogjuk mindig hangsúlyozni). Az (1.2) sort $f(x)$ Fourier-sorának nevezzük, ha

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos kx\,dx, \qquad b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin kx\,dx \qquad (k=0,1,\ldots).$$

Az

$$\bar{f}(x) = -\frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^\pi \frac{f(x+t)-f(x-t)}{2\operatorname{tg}\frac{t}{2}}\,dt \tag{1.4}$$

függvényt $f(x)$ konjugált függvényének nevezzük. I. I. Privalov megmutatta, hogy az (1.4) limes majdnem minden $x\in[0,2\pi]$-re létezik (l. [40], 146.). Megjegyezzük, hogy ha $f(x)\in L(0,2\pi)$, akkor általában $\bar{f}(x)\notin L(0,2\pi)$, és az (1.3) sor nem Fourier-sor (l. [40], 109—110.).

Az $f(x)$ függvény Fourier-sorának k-adik részletösszegét a t helyen $S_k(t,f)$-fel jelöljük; ismeretes, hogy

$$S_k(t,f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,D_k(x-t)\,dx, \tag{1.5}$$

ahol

$$D_k(u) = \frac{\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)u}{2\sin\frac{u}{2}} \tag{1.6}$$

a *Dirichlet-féle mag* (l. [40], 21.).

Fourier-sorokra érvényesek a következő fontos tételek:

Riemann-féle lokalizációs tétel. *Ha $f(x)\in L(0,2\pi)$ és $f(x)=0$ minden $x\in[a,b]\subset[0,2\pi]$-re, akkor az $S_n(x,f)$ részletösszegek egyenletesen tartanak 0 felé, midőn $n\to\infty$, minden $[a+\delta, b-\delta]$ szakaszon, ahol δ tetszőleges pozitív szám és kisebb, mint $\frac{b-a}{2}$* (l. [40], 22.).

Ebből a tételből következnek:

1°. Ha $f(x)\in L(0,2\pi)$, és $f(x)=0$ minden $x\in[a,b]\subset[0,2\pi]$-re, akkor $S_n(x,f)\to 0$ minden $x\in(a,b)$-re.

2°. Ha $f_1(x)\in L(0,2\pi)$, $f_2(x)\in L(0,2\pi)$, és $f_1(x)=f_2(x)$ minden $x\in[a,b]\subset[0,2\pi]$-re, akkor az $f_1(x)$ függvény Fourier-sorának $x_0\in(a,b)$ pontban való konvergenciájából (divergenciájából) következik az $f_2(x)$ függvény Fourier-sorának x_0 pontban való konvergenciája (divergenciája).

D TÉTEL (FEJÉR-LEBESGUE-PLESSNER). *Ha* $f(x) \in L(0, 2\pi)$, *akkor* (1.2) *Fourier-sora (úgyszintén* (1.3) *konjugált sora) majdnem mindenütt* $(C, 1)$*-szummálható* $[0, 2\pi]$*-ben* $f(x)$*-hez (illetve* $\bar{f}(x)$*-hez)* (l. [40], 49—50.).

Következmény. *Ha az* $f(x)$ *függvény Fourier-sora a pozitív mértékű E halmazon konvergál, akkor az E-n majdnem mindenütt* $f(x)$*-hez konvergál.* Ez közvetlenül következik az A és D tételekből.

Legyen

$$\ln^+|a| = \begin{cases} \ln|a|, & \text{ha} \quad |a| \geqq 1, \\ 0, & \text{ha} \quad 0 \leqq |a| < 1. \end{cases}$$

E TÉTEL (RIESZ MARCEL). *Ha* $f(x) \in L(0, 2\pi)$ *és* $f(x) \geqq 0$ *minden x-re, valamint* $\bar{f}(x) \in L(0, 2\pi)$, *akkor* $f(x) \ln^+ f(x) \in L(0, 2\pi)$ (l. [40], 151.).

F TÉTEL (KOLMOGOROV, SZELIVERSZTOV, PLESSNER). *Ha*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \ln n < \infty, \tag{1.7}$$

akkor a

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

sor majdnem mindenütt konvergál $[0, 2\pi]$*-ben* (l. [15], [30], illetve [40], 253.).

G TÉTEL (PLESSNER). *Ha* $f(x) \in L^2(0, 2\pi)$, *akkor az* (1.7) *feltétel egyenértékű a*

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|f(x+t) - f(x-t)|^2}{t} \, dt \, dx < \infty \tag{1.8}$$

feltétellel, ahol a_k *és* b_k *az* $f(x)$ *függvény Fourier-együtthatói* (l. [30], [37]).

Most a következő fontos tételt mondjuk ki és bizonyítjuk be:

H TÉTEL (KUTTNER). *Legyen az*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \tag{1.9}$$

trigonometrikus sor a pozitív mértékű E halmazon majdnem mindenütt konvergens. Akkor a konjugált sor:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k \sin kx - b_k \cos kx) \tag{1.10}$$

szintén majdnem mindenütt konvergál E-n, hacsak az aritmetikai közepek módszerével E-n majdnem mindenütt szummálható.

Bizonyítás (l. [8], 82.). Megmutatjuk, hogy az

$$1+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k \sin kx - b_k \cos kx) \tag{1.11}$$

sor E-n majdnem mindenütt konvergál. Legyen ugyanis $B_0(x)=1$, $B_k(x)=$ $=a_k \sin kx - b_k \cos kx$, jelöljük továbbá $S_n(x)$-szel az (1.9) sor n-edik részletösszegét, $\bar{S}_n(x)$-szel az (1.11) sor n-edik részletösszegét, $\bar{\sigma}_n(x)$-szel pedig az (1.11) sor n-edik aritmetikai közepét; $\lim\limits_{n\to\infty} \bar{\sigma}_n(x)=\bar{\sigma}(x)$ majdnem mindenütt az E halmazon. Most összefüggést kell találnunk az $S_n(x)$, $\bar{S}_n(x)$ és $\bar{\sigma}_n(x)$ mennyiségek között.

Legyen $\{\mu_m\}$ egyelőre tetszőleges számsorozat, amelyre teljesül a

$$0<|\mu_m| \leqq \frac{2}{m} \tag{1.12}$$

egyenlőtlenség. Könnyű belátni, hogy

$$\frac{1}{2}[S_m(x-\mu_m)-S_m(x+\mu_m)]=\sum_{n=1}^{m} B_n(x) \sin n\mu_m = \sum_{n=0}^{m} B_n(x) \sin n\mu_m, \tag{1.13}$$

mivel $\sin 0=0$. Bevezetve a

$$\Delta_n^1(m)=\sin n\mu_m - \sin(n+1)\mu_m, \quad \Delta_n^2(m)=\Delta_n^1(m)-\Delta_{n+1}^1(m)$$

jelöléseket és az (1.13) utolsó összegére kétszer alkalmazva az Abel-féle transzformációt, a következő összefüggést nyerjük:

$$\frac{1}{2}[S_m(x-\mu_m)-S_m(x+\mu_m)]=\sum_{n=0}^{m-2}(n+1)\bar{\sigma}_n(x)\Delta_n^2(m)+ \tag{1.14}$$
$$+m\bar{\sigma}_{m-1}(x)\Delta_{m-1}^1(m)+\bar{S}_m(x)\sin m\mu_m.$$

Ebből következik, hogy

$$\bar{S}_m(x)=\frac{S_m(x-\mu_m)-S_m(x+\mu_m)}{2\sin m\mu_m}+\sum_{n=0}^{m-2}\bar{\sigma}_n(x)\left[-\frac{(n+1)\Delta_n^2(m)}{\sin m\mu_m}\right]+$$
$$+\bar{\sigma}_{m-1}(x)\left[-\frac{m\Delta_{m-1}^1(m)}{\sin m\mu_m}\right],$$

vagyis

$$\bar{S}_m(x)=\frac{S_m(x-\mu_m)-S_m(x+\mu_m)}{2\sin m\mu_m}+\sum_{n=0}^{\infty}\bar{\sigma}_n(x)\, b_{m,n}, \tag{1.15}$$

ahol

$$b_{m,n}=-\frac{(n+1)\Delta_n^2(m)}{\sin m\mu_m}, \text{ ha } n\leqq m-2, \quad b_{m,m-1}=-\frac{m\Delta_{m-1}^1(m)}{\sin m\mu_m}$$

és $b_{m,n}=0$, ha $n\geqq m$.

Kuttner tételét bebizonyítjuk, ha megmutatjuk, hogy majdnem minden $x \in E$-re a $\{\mu_m\}$ sorozat úgy választható meg, hogy a $\|b_{m,n}\|$ mátrix reguláris (l. a Toeplitz—Schur-féle tételt) és

$$\lim_{m\to\infty} \frac{S_m(x-\mu_m)-S_m(x+\mu_m)}{2\sin m\mu_m}=0 \tag{1.16}$$

legyen.

Feltevésünk szerint az (1.9) sor majdnem mindenütt konvergál az E halmazon, az (1.11) sor pedig szummálható. Legyen $\varepsilon>0$ tetszőleges szám, kisebb mint $\operatorname{mes} E$ ($\operatorname{mes} E$ az E halmaz mértéke). Jegorov tétele szerint (l. [28], 90.) található olyan $M\subset E$ halmaz, hogy $\operatorname{mes} M>\operatorname{mes} E-\varepsilon$, az (1.9) sor az M halmazon egyenletesen konvergál, és az (1.11) sor M-en szummálható. Azt is feltehetjük, hogy az M halmaz minden pontja e halmaz maximális sűrűségű pontja. Válasszuk az $x_0\in M$ pontot tetszőlegesen és megmutatjuk: van olyan $\{\mu_m\}$ sorozat, hogy elég nagy m indexekre

$$\frac{1}{m}\leqq \mu_m \leqq \frac{2}{m}, \qquad x_0+\mu_m\in M, \qquad x_0-\mu_m\in M$$

legyen. Minthogy x_0 az M halmaz maximális sűrűségű pontja, elég nagy N-re

$$\begin{aligned} &\operatorname{mes}\left\{M\left[x_0+\frac{1}{m},\quad x_0+\frac{2}{m}\right]\right\}>\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{m},\\ &\operatorname{mes}\left\{M\left[x_0-\frac{2}{m},\quad x_0-\frac{1}{m}\right]\right\}>\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{m}, \end{aligned} \tag{1.17}$$

ahol $m\geqq N$. (1.17)-ből következik, hogy $m\geqq N$-re az M halmazon található olyan $x_0-\alpha_m, x_0+\alpha_m$ pontpár, hogy $\frac{1}{m}\leqq\alpha_m\leqq\frac{2}{m}$. Legyen most $\mu_m=\alpha_m$ $m\geqq N$-re. Az (1.9) sor egyenletes konvergenciája miatt az $S'(x)=\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)$ függvény folytonos M-en. Ezért

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}[S_m(x_0+\mu_m)-S_m(x_0-\mu_m)]&=\frac{1}{2}\{[S_m(x_0+\mu_m)-S(x_0+\mu_m)]+\\ &+[S(x_0+\mu_m)-S(x_0-\mu_m)]+[S(x_0-\mu_m)-S_m(x_0-\mu_m)]\}\to 0,\end{aligned}$$

ha $m\to\infty$, vagyis

$$\lim_{m\to\infty}\frac{1}{2}[S_m(x_0+\mu_m)-S_m(x_0-\mu_m)]=0. \tag{1.18}$$

Minthogy $m\geqq N$-re $\frac{2}{m}\geqq\mu_m\geqq\frac{1}{m}$, azért $1\geqq\sin m\mu_m\geqq\sin 1>0$, ha $m\geqq N$, következésképpen

$$\lim_{m\to\infty} \frac{S_m(x_0+\mu_m)-S_m(x_0-\mu_m)}{2\sin m\mu_m}=0 \tag{1.19}$$

(l. (1.18)). Ennélfogva az x_0 pontban teljesül (1.16). Most megmutatjuk, hogy a $\|b_{m,n}\|$ mátrix reguláris. Valóban:

$$\Delta_n^1(m)=-2\sin\frac{\mu_m}{2}\cdot\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\mu_m,$$

$$\Delta_n^2(m)=2\sin\frac{\mu_m}{2}\left[\cos\left(n+\frac{3}{2}\right)\mu_m-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\mu_m\right].$$

Ezért

$$|\Delta_n^1(m)|\leqq\mu_m\leqq\frac{2}{m},\qquad |\Delta_n^2(m)|\leqq\mu_m^2\leqq\frac{4}{m^2}. \tag{1.20}$$

Ennek következtében

$$\lim_{m\to\infty} b_{m,n}=\lim_{m\to\infty}\left[-\frac{(n+1)\Delta_n^2(m)}{\sin m\mu_m}\right]=0\qquad (n=0,1,\ldots), \tag{1.21}$$

minthogy $\sin m\mu_m\geqq\sin 1$, ha $m\geqq N$. (1.20)-ból pedig következik, hogy

$$\sum_{n=0}^{\infty}|b_{m,n}|=\sum_{n=0}^{m-2}\frac{|(n+1)\Delta_n^2(m)|}{\sin m\mu_m}+\frac{m|\Delta_{m-1}^1(m)|}{\sin m\mu_m}\leqq$$

$$\leqq\frac{\mu_m^2}{\sin m\mu_m}m^2+\frac{m\mu_m}{\sin m\mu_m}\leqq\frac{4}{\sin 1}+\frac{2}{\sin 1}=C, \tag{1.22}$$

ahol C nem függ m-től. Megmutatjuk még, hogy

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_{m,n}=1. \tag{1.23}$$

Valóban, ha $a_n=b_n=0$, ahol $n=1,2,\ldots$, akkor $\bar{S}_m(x)=\bar{\sigma}_m(x)=1$ minden m-re. Ebben az esetben az (1.15) formula szerint:

$$1=\sum_{n=0}^{\infty} b_{m,n}$$

minden $m=0,1,\ldots$-re. Minthogy $\lim\limits_{k\to\infty}\bar{\sigma}_k(x_0)=\bar{\sigma}(x_0)$, az (1.21)—(1.23) összefüggésekből következik, hogy

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\bar{\sigma}_n(x_0)b_{m,n}=\bar{\sigma}(x_0) \tag{1.24}$$

(l. a Toeplitz—Schur-tételt). Ennek következtében, egyesítve az (1.15), (1.19) és (1.24) összefüggéseket, azt nyerjük, hogy

$$\lim_{m\to\infty}\bar{S}_m(x_0)=\bar{\sigma}(x_0),\quad\text{ha}\quad x_0\in M\subset E. \tag{1.25}$$

Minthogy mes $M >$ mes $E-\varepsilon$, ahol ε tetszés szerinti pozitív szám, ezért az (1. 25) egyenlőségből következik, hogy

$$\lim_{m\to\infty} \bar{S}_m(x) = \bar{\sigma}(x)$$

majdnem minden $x \in E$-re, és ezzel állításunkat bebizonyítottuk.

Következmény. *Ha az $f(x) \in L(0, 2\pi)$ függvény*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

Fourier-sora majdnem mindenütt konvergál az E halmazon, akkor a

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k \sin kx - b_k \cos kx)$$

konjugált sor szintén majdnem mindenütt konvergál az E halmazon.

Ez közvetlenül következik Kuttner tételéből, valamint abból, hogy a konjugált, egy Fourier-sor konjugált sora, s mint ilyen, majdnem mindenütt $(C, 1)$-szummálható a $[0, 2\pi]$ intervallumon (D tétel).

Megjegyzés. A H tétel általánosabban is érvényes. Ha ti. az

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

trigonometrikus sor a pozitív mértékű E halmazon konvergál, akkor a

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k \sin kx - b_k \cos kx)$$

konjugált sor E-n majdnem mindenütt konvergál. Ezt először A. PLESSNER állapította meg [31] (l. még [22]).

J TÉTEL (ZYGMUND, MARCINKIEWICZ [22]). *Ha az* (1.9) *trigonometrikus sor a pozitív mértékű E halmazon a véges $S(x)$ függvényhez $(C, 1)$-szummálható, és $\overline{\lim}_{n\to\infty} S_n(x) < +\infty$, ha $x \in E$, akkor majdnem minden $x_0 \in E$-re*

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} S_n(x_0) > -\infty, \tag{1.26}$$

$$S(x_0) = \frac{1}{2}\left\{\overline{\lim}_{n\to\infty} S_n(x_0) + \underline{\lim}_{n\to\infty} S_n(x_0)\right\}. \tag{1.27}$$

A bizonyítás lényegében emlékeztet a Kuttner tételénél követett gondolatmenetre. Legyen $S^*(x) = \overline{\lim}_{n\to\infty} S_n(x)$, $S_*(x) = \underline{\lim}_{n\to\infty} S_n(x)$ és $\varphi_n(x) = \sup_{k\geqq n} \{S_k(x)\}$. Nyilvánvaló, hogy $\varphi_n(x) \geqq \varphi_{n+1}(x)$ és $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = S^*(x)$.

Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőlegesen kicsiny szám. Akkor Luzin és Jegorov tételei szerint található olyan $M \subset E$ halmaz, hogy $\operatorname{mes} M > \operatorname{mes} E - \varepsilon$, a $\varphi_n(x)$ függvények folytonosak M-en, és a $\{\varphi_n(x)\}$ sorozat M-en egyenletesen konvergál. Weierstrass tétele szerint az $S^*(x)$ függvény folytonos M-en. Az általánosság korlátozása nélkül feltehetjük, hogy az M halmaz csupa maximális sűrűségű pontból áll.

Legyen $x_0 \in M$. Megmutatjuk, hogy van olyan $\{\lambda_n\}$ sorozat, amely eleget tesz az

$$x_0 + \lambda_n \in M, \quad x_0 - \lambda_n \in M \quad \text{és} \quad \lambda_n = \frac{\pi}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \tag{1.28}$$

feltételeknek. Legyen $\delta_k = \frac{1}{k+1}$. Minthogy x_0 az M halmaz maximális sűrűségű pontja, található olyan n_1 szám, hogy

$$\begin{aligned} &\operatorname{mes}\left\{M\left[x_0 + \frac{\pi(1-\delta_1)}{n}, \quad x_0 + \frac{\pi(1+\delta_1)}{n}\right]\right\} > \frac{\pi\delta_1}{n}, \\ &\operatorname{mes}\left\{M\left[x_0 - \frac{\pi(1+\delta_1)}{n}, \quad x_0 - \frac{\pi(1-\delta_1)}{n}\right]\right\} > \frac{\pi\delta_1}{n}, \end{aligned} \tag{1.29}$$

ahol $n \geqq n_1$. Hasonlóképpen

$$\begin{aligned} &\operatorname{mes}\left\{M\left[x_0 + \frac{\pi(1-\delta_k)}{n}, \quad x_0 + \frac{\pi(1+\delta_k)}{n}\right]\right\} > \frac{\pi\delta_k}{n}, \\ &\operatorname{mes}\left\{M\left[x_0 - \frac{\pi(1+\delta_k)}{n}, \quad x_0 - \frac{\pi(1-\delta_k)}{n}\right]\right\} > \frac{\pi\delta_k}{n}, \end{aligned} \tag{1.30}$$

ahol $n \geqq n_k$; feltesszük, hogy $n_k > n_{k-1}$. Az $\{\alpha_n\}$ nullsorozat legyen olyan, hogy $\alpha_n = \delta_k$, ha $n_k \leqq n < n_{k+1}$. (1.30)-ból következik, hogy

$$\begin{aligned} &\operatorname{mes}\left\{M\left[x_0 + \frac{\pi(1-\alpha_n)}{n}, \quad x_0 + \frac{\pi(1+\alpha_n)}{n}\right]\right\} > \frac{\pi\alpha_n}{n}, \\ &\operatorname{mes}\left\{M\left[x_0 - \frac{\pi(1+\alpha_n)}{n}, \quad x_0 - \frac{\pi(1-\alpha_n)}{n}\right]\right\} > \frac{\pi\alpha_n}{n}. \end{aligned} \tag{1.31}$$

Következésképpen (l. (1.31)) található olyan $\{\beta_n\}$ nullsorozat, hogy

$$x_0 \pm (\pi + \beta_n)\frac{1}{n} = x_0 \pm \lambda_n \in M. \tag{1.32}$$

Legyen $A_0(x) = \frac{a_0}{2}$, $A_n(x) = (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$. Mint Kuttner tételénél, most is olyan összefüggést keresünk, amely az ottanihoz hasonló módon kapcsolja össze az $S_k(x_0)$ és a $\sigma_k(x_0)$ mennyiségeket, ahol $\sigma_k(x_0)$ az (1.9) sor $(C, 1)$-közepe.

Könnyű belátni ugyanis, hogy

$$\frac{1}{2}\{S_m(x_0+\lambda_m)+S_m(x_0-\lambda_m)\}=\sum_{n=0}^{m}A_n(x_0)\cos n\lambda_m. \tag{1.33}$$

Ha az (1.33) egyenlőség jobboldalát kétszeri Abel-transzformációnak vetjük alá, azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\{S_m(x_0+\lambda_m)+S_m(x_0-\lambda_m)\}&=\sum_{n=0}^{m-2}(n+1)\sigma_n(x_0)\Delta_n^2(m)+\\&+m\sigma_{m-1}(x_0)\Delta_{m-1}^1(m)+S_m(x_0)\cos m\lambda_m,\end{aligned} \tag{1.34}$$

ahol $\Delta_n^1(m)=\cos n\lambda_m-\cos(n+1)\lambda_m$, $\Delta_n^2(m)=\Delta_n^1(m)-\Delta_{n+1}^1(m)$. (1.34)-ből következik, hogy

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\{S_m(x_0+\lambda_m)+S_m(x_0-\lambda_m)\}&=\sum_{n=0}^{m-2}\sigma_n(x_0)(n+1)\Delta_n^2(m)+\\+\sigma_{m-1}(x_0)m\Delta_{m-1}^1(m)+\sigma_m(x_0)\cos m\lambda_m&+(S_m(x_0)-\sigma_m(x_0))\cos m\lambda_m=\\&=[S_m(x_0)-\sigma_m(x_0)]\cos m\lambda_m+\sum_{n=0}^{\infty}\sigma_n(x_0)C_{m,n},\end{aligned} \tag{1.35}$$

ahol $C_{m,n}=(n+1)\Delta_n^2(m)$, midőn $n\leqq m-2$, $C_{m,m-1}=m\Delta_{m-1}^1(m)$, $C_{m,m}=$ $=\cos m\lambda_m$, és $C_{m,n}=0$, ha $n>m$. Megmutatjuk, hogy a $\|C_{m,n}\|$ mátrix reguláris. Valóban, minthogy $|\Delta_n^1(m)|<\frac{C_1}{m}$, $|\Delta_n^2(m)|<\frac{C_1}{m^2}$, ($C_1$ állandó), ezért

$$\lim_{m\to\infty}C_{m,n}=\lim_{m\to\infty}(n+1)\Delta_n^2(m)=0 \qquad (n=0,1,\dots) \tag{1.36}$$

(l. (1.20) és (1.21)). Ugyancsak könnyen meggyőződhetünk arról, hogy

$$\sum_{n=0}^{\infty}|C_{m,n}|\leqq C, \tag{1.37}$$

ahol C rögzített állandó (l. (1.22)). Legyen most $a_0=2$, $a_k=b_k=0$, midőn $k\geqq 1$, (1.34)-ből kapjuk:

$$1=\sum_{n=0}^{m-2}(n+1)\Delta_n^2(m)+m\Delta_{m-1}^1(m)+\cos m\lambda_m=\sum_{n=0}^{\infty}C_{m,n}. \tag{1.38}$$

Minthogy $\sigma_n(x_0)\to S(x_0)$, ezért a Toeplitz-Schur-féle tételből (1.36)—(1.38) alapján következik, hogy

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sigma_n(x_0)C_{m,n}=S(x_0),$$

azaz

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sigma_n(x_0)C_{m,n}=S(x_0)+\varepsilon_m, \tag{1.39}$$

ahol $\varepsilon_m \to 0$, ha $m \to \infty$. Egybevetve az (1.35) és (1.39) összefüggéseket, az

$$\frac{1}{2}\{S_m(x_0+\lambda_m)+S_m(x_0-\lambda_m)\}=[S_m(x_0)-\sigma_m(x_0)]\cos m\lambda_m+ \\ +S(x_0)+\varepsilon_m=[S_m(x_0)-S(x_0)]\cos m\lambda_m+S(x_0)+\varepsilon'_m$$

eredményt kapjuk, vagyis

$$\cos m\lambda_m[S_m(x_0)-S(x_0)]=\frac{1}{2}\{S_m(x_0+\lambda_m)+S_m(x_0-\lambda_m)\}-S(x_0)-\varepsilon'_m, \tag{1.40}$$

ahol $\varepsilon'_m \to 0$, ha $m \to \infty$.

A $\{\varphi_n(x)\}$ sorozat az M halmazon egyenletesen konvergál, ezért található olyan $\eta_n \to 0$ számsorozat, hogy

$$S_n(x) \leqq \varphi_n(x) \leqq S^*(x)+\eta_n \qquad (x \in M) \tag{1.41}$$

legyen, következésképp

$$\cos m\lambda_m[S_m(x_0)-S(x_0)] \leqq \frac{1}{2}\{S^*(x_0+\lambda_m)+S^*(x_0-\lambda_m)\}+ \\ +\eta_m-S(x_0)-\varepsilon'_m \tag{1.42}$$

(l. (1.40) és (1.41)). Tekintve, hogy $m\lambda_m \to \pi$ és az $S^*(t)$ függvény M-en folytonos, ezért (1.42)-ből

$$-[S_*(x_0)-S(x_0)] \leqq S^*(x_0)-S(x_0)$$

következik, más szóval

$$S_*(x_0) \geqq -S^*(x_0)+2S(x_0). \tag{1.43}$$

De $x_0 \in M$, ahol $\operatorname{mes} M > \operatorname{mes} E - \varepsilon$. Ennek következtében (1.43) érvényes majdnem minden $x_0 \in E$-re. Az (1.26) egyenlőtlenséget bebizonyítottuk.

Tekintsük most a

$$\frac{c_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(c_k \cos kx + d_k \sin kx) \tag{1.44}$$

sort, ahol $c_k=-a_k$, $d_k=-b_k$. Ebben az esetben

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, S_n^{(1)}(x)=\overline{\lim_{n\to\infty}}\left(\frac{c_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(c_k \cos kx+d_k \sin kx)\right)=\psi^*(x)=-S_*(x).$$

Itt $\psi^*(x)$ az E halmazon majdnem mindenütt véges (l. (1.43)). Megismételve az (1.44) sorra az (1.9) sorra vonatkozó meggondolásokat, majdnem minden $x_0 \in E$-re azt kapjuk, hogy

$$\psi_*(x_0) \geqq -\psi^*(x_0)-2S(x_0), \quad \text{vagyis} \quad -S^*(x_0) \geqq S_*(x_0)-2S(x_0),$$

illetve

$$S_*(x_0) \leqq -S^*(x_0)+2S(x_0). \tag{1.45}$$

Egybevetve az (1.43) és (1.45) egyenlőtlenségeket, (1.27)-et nyerjük. Ezzel a J tételt teljesen bebizonyítottuk.

Következmény. *Legyen* (1.9) *az* $f(x)\in L(0, 2\pi)$ *függvény Fourier-sora. Ekkor majdnem minden* $x_0\in[0, 2\pi]$ *pontban*

$$(1.46)\qquad \overline{\lim_{n\to\infty}}\, S_n(x_0)=f(x_0)+\varphi(x_0),\quad \underline{\lim_{n\to\infty}}\, S_n(x_0)=f(x_0)-\varphi(x_0),$$

ahol $\varphi(x_0)$ *nem-negatív függvény.*

Ez közvetlenül következik a D és J tételekből. Így látjuk, hogy ha az $f(x)$ függvény Fourier-sora az E halmazon divergál, akkor az $S_n(x)$ részletösszegek felső határa E-n majdnem mindenütt annyival nagyobb $f(x)$-nél, mint amennyivel kisebb $f(x)$-nél az alsó határ. Ha pl. $\overline{\lim_{n\to\infty}}\, S_n(x)=+\infty$ és $x\in E$, akkor

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, S_n(x)=-\infty \qquad (x\in E_1\subset E \text{ és mes } E_1=\text{mes } E).$$

Ennélfogva Fourier-Lebesgue-sorok divergenciájánál a sorok részletösszegeinek a felső határa és az alsó határa nulla-mértékű halmaztól eltekintve különbözők. (Ilyenkor beszélünk a részletösszegek oszcillálásáról.)

Fourier-Lebesgue-sorokra igaz a fordított tétel is. Fennáll ugyanis a következő

K TÉTEL (MENSOV [25] és [27]). *Legyen* $\varphi(x)$ *tetszőleges, nem-negatív és mérhető függvény a* $[0, 2\pi]$ *intervallumban. Akkor van olyan* $f(x)\in L(0, 2\pi)$ *függvény, amelyre*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, S_n(x,f)=f(x)+\varphi(x),\quad \underline{\lim_{n\to\infty}}\, S_n(x,f)=f(x)-\varphi(x),$$

$x\in E\subset[0, 2\pi]$, *ahol* mes $E=2\pi$. *Itt a* $\varphi(x)$ *függvény értéke pozitív mértékű halmazon lehet* $+\infty$ *is.*

Megjegyezzük, hogy mindeddig megoldatlan az a kérdés, vajon van-e olyan

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

trigonometrikus sor, amelynél pozitív mértékű E halmazon

$$(1.47)\qquad \overline{\lim_{n\to\infty}}\, S_n(x)=+\infty,\quad \underline{\lim_{n\to\infty}}\, S_n(x)>-\infty,$$

ahol $S_n(x)$ e sor n-edik részletösszege.

Ha az $S_n(x)$ részletösszegeknél nem a közönséges értelemben vett konvergenciát, hanem a mértékben való konvergenciát tekintjük, akkor ebben az esetben D. E. MENSOV kimerítő eredményeket ért el [24]. Fennáll pl. a következő tétel: *Legyen* $F(x)$ *és* $G(x)$ *két tetszőleges, mérhető függvény, amelyek a* $[-\pi, \pi]$ *szakaszon majdnem mindenütt értelmezve vannak és* $G(x) \leqq F(x)$ *majdnem mindenütt a* $[-\pi, \pi]$ *szakaszon. Ezekhez a függvényekhez lehet találni a következő tulajdonságú*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \tag{1.48}$$

trigonometrikus sort:

1°. $F(x)$ *és* $G(x)$ *az* (1.48) *sor részletösszegeinek a* $[-\pi, \pi]$ *szakaszon mértékben való felső és alsó határa.*

2°. *Ha* $\psi(x)$ *tetszőleges mérhető, a* $[-\pi, \pi]$ *szakaszon majdnem mindenütt értelmezett függvény, amelyre teljesül a* $G(x) \leqq \psi(x) \leqq F(x)$ *feltétel majdnem mindenütt, akkor az* (1.48) *sor részletösszegeinek van olyan részsorozata, amely a* $[-\pi, \pi]$ *szakaszon majdnem mindenütt* $\psi(x)$*-hez konvergál.*

3°.
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0.$$

2. §. Konvergenciahalmazok és folytonos függvények Fourier-sorai

Most bevezetünk néhány a halmazokra, valamint az $[a, b]$ szakaszon értelmezett $f_n(x)$ függvények sorozatának viselkedésére vonatkozó definíciót.

1. definíció. Az $\{f_n(x)\}$ sorozat konvergál az x_0 pontban, ha létezik és véges a $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0)$ határérték.

2. definíció. Az $\{f_n(x)\}$ sorozat *korlátosan divergál* az x_0 pontban, ha

$$-\infty < \underline{\lim}_{n\to\infty} f_n(x_0) < \overline{\lim}_{n\to\infty} f_n(x_0) < +\infty.$$

3. definíció. Az $\{f_n(x)\}$ sorozat *nem-korlátosan divergál* az x_0 pontban, ha

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} |f_n(x_0)| = +\infty.$$

4. definíció. Az $\{f_n(x)\}$ sorozat az x_0 pontban divergál, ha $\{f_n(x_0)\}$ korlátosan, vagy nem-korlátosan divergál.

5. definíció. Az $\{f_n(x_0)\}$ sorozatot $+\infty$-hez konvergálónak (illetve $-\infty$-hez konvergálónak) mondjuk, ha $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0) = +\infty$, (illetve, ha $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0) = -\infty$).

Világos, hogy ha az $\{f_n(x)\}$ sorozat $+\infty$-hez vagy $-\infty$-hez konvergál, akkor egyúttal nem-korlátosan divergál, de nem megfordítva.

6. definíció. Az $f_n(x)$ függvények sorozata konvergál (korlátosan divergál stb.) az E halmazon, ha minden $x_0 \in E$ pontban konvergál (korlátosan divergál stb.).

7. definíció. Az $E \subset [a, b]$ halmazt az $\{f_n(x)\}$ függvénysorozat *konvergenciahalmazának* nevezzük, ha ez a függvénysorozat csak az E halmazon konvergál.

8. definíció. Az E halmazt F_σ-típusú halmaznak nevezzük az $[a, b]$ szakaszon, ha $E \subset [a, b]$ és $E = \sum_{k=1}^{\infty} E_k$, ahol az E_k-k az $[a, b]$ szakaszon zárt halmazok.

9. definíció. Az E halmazt az $[a, b]$ szakaszon $F_{\sigma\delta}$-típusú halmaznak mondjuk, ha $E \subset [a, b]$ és $E = \prod_{k=1}^{\infty} E_k$, ahol az E_k halmazok F_σ-típusúak $[a, b]$-n.

10. definíció. Az E halmazt G_δ-típusúnak mondjuk (illetve $G_{\delta\sigma}$-típusúnak), ha

$$E = \prod_{k=1}^{\infty} E_k \qquad \left(\text{ill. } E = \sum_{k=1}^{\infty} E_k\right),$$

ahol az E_k-k nyílt (illetve G_δ-típusú) halmazok az $[a, b]$ szakaszon.

Most már megfogalmazhatunk (és részben be is bizonyíthatunk) néhány tételt, amelyekre a következőkben szükségünk lesz.

1. TÉTEL. *Ha az $f_n(x)$ függvények $[a, b]$-n folytonosak, akkor az $\{f_n(x)\}$ sorozat konvergenciapontjainak halmaza $F_{\sigma\delta}$-típusú.*

Bizonyítás. Legyen

$$E_{n,m}^{(k)} = \underset{x}{E}\left\{|f_n(x) - f_m(x)| \leq \frac{1}{k}\right\} \qquad (k, m, n \text{ természetes számok}).$$

Minthogy az $f_p(x)$ függvények folytonosak, azért $E_{n,m}^{(k)}$ zárt halmaz. Legyenek

$$E_m^{(k)} = \prod_{n=m+1}^{\infty} E_{n,m}^{(k)}, \quad E^{(k)} = \sum_{m=1}^{\infty} E_m^{(k)}, \quad E = \prod_{k=1}^{\infty} E^{(k)}.$$

Tekintve, hogy az $E_{n,m}^{(k)}$ halmazok zártak, az $E_m^{(k)}$ halmazok szintén zártak. Ennélfogva az E halmaz $F_{\sigma\delta}$-típusú.

Megmutatjuk, hogy E az $\{f_n(x)\}$ sorozat konvergenciahalmaza. Legyen $x_0 \in E$. Ekkor $x_0 \in E^{(k)}$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Válasszuk $\varepsilon > 0$-t tetszőlegesen, és a k_0 egész számot úgy, hogy $\frac{1}{k_0} < \varepsilon$ legyen. Minthogy $x_0 \in E^{(k_0)}$, azért $x_0 \in E_{m_0}^{(k_0)}$, vagyis $x_0 \in E_{n,m_0}^{(k_0)}$ minden $n > m_0$-ra. Ennélfogva $|f_n(x_0) - f_{m_0}(x_0)| \leq \frac{1}{k_0} < \varepsilon$ minden $n > m_0$-ra. Az $\{f_n(x)\}$ sorozat tehát konvergál az x_0 pontban.

Hasonló módon könnyen igazolható, hogy ha az előbbi sorozat konvergál az $x_1 \in [a, b]$ pontban, akkor $x_1 \in E$. Igaz a megfordított

2. TÉTEL. *Ha az $E \subset [a, b]$ halmaz $F_{\sigma\delta}$-típusú, akkor a folytonos, egyenletesen korlátos függvényeknek van olyan sorozata, amely E-n nullához konvergál, E-n kívül pedig korlátosan divergál* (l. [6], [33] és [9], 271—272.). A bizonyítást megtalálhatjuk a felsorolt irodalomban.

3. TÉTEL. *Ha az $f_n(x)$ függvények folytonosak $[a, b]$-n, akkor azoknak a pontoknak az E halmaza, ahol a sorozat nem-korlátosan divergál, G_δ-típusú.*

Bizonyítás: Tekintsük a CE halmazt. Világos, hogy CE azokból és csakis azokból az x_0 pontokból áll, amelyekben $\overline{\lim_{n\to\infty}} |f_n(x)| < \infty$. Legyen $E_n^{(k)} = \underset{x}{E}\{|f_n(x)| \leq k\}$. Minthogy az $f_n(x)$ függvények folytonosak, azért $E_n^{(k)}$ zárt halmaz. Legyen $E^{(k)} = \prod_{n=1}^{\infty} E_n^{(k)}$, $B = \sum_{k=1}^{\infty} E^{(k)}$. Könnyű belátni, hogy a B halmaz F_σ-típusú, és $CE = B$. Minthogy pedig CE F_σ-típusú, azért az E halmaz G_δ-típusú.

4. TÉTEL. *Ha $E \subset [a, b]$ G_δ-típusú halmaz, akkor az $[a, b]$-n folytonos függvényeknek van olyan $\{f_n(x)\}$ sorozata, amely E-n kívül konvergál, az E-n pedig $+\infty$-hez konvergál* (l. [9], 272.).

Világos, hogy a 4. tétel a 3. tétel megfordítása, minthogy az E halmaz azon pontok halmaza, amelyekben az $\{f_n(x)\}$ sorozat nem-korlátosan divergál.

Megjegyzés. Az 1—4. tételekből láthatjuk, hogy folytonos függvények $\{f_n(x)\}$ sorozatának divergenciahalmaza $G_{\delta\sigma}$-típusú, azon pontok halmaza pedig, ahol a sorozat nem-korlátosan divergál, G_δ-típusú.

Ezért pl. *ha folytonos függvények $\{f_n(x)\}$ sorozata a $[0, 1]$ szakaszon csak a racionális pontok R halmazán divergál, akkor sehol sem sűrű azoknak a pontoknak az A halmaza, ahol a sorozat nem-korlátosan divergál, és mindenütt sűrű az a B halmaz, ahol a sorozat korlátosan divergál.*

Legyen ugyanis A mindenütt sűrű valamely $[\alpha, \beta] \subset [0, 1]$ szakaszon. A 3. tételből látható, hogy azoknak a pontoknak $C \subset [0, 1]$ halmaza, amelyekben az $\{f_n(x)\}$ sorozat korlátos bármely rögzített x-re, F_σ-típusú $[\alpha, \beta]$-n, azaz $C = \sum_{k=1}^{\infty} F_k$, ahol F_k zárt $[\alpha, \beta]$-n. Minthogy A mindenütt sűrű $[\alpha, \beta]$-n, ezért az F_k halmazok sehol sem sűrűek $[\alpha, \beta]$-n. C tehát első kategóriájú halmaz $[\alpha, \beta]$-n. Következésképp $A_1 = A \cdot [\alpha, \beta] = [\alpha, \beta] - C$ második kategóriájú $[\alpha, \beta]$-n, és ezért kontinuumszámosságú (l. [18], 80—82.). Az A halmaz tehát szintén kontinuumszámosságú. Ez azonban ellene mond annak, hogy $A \subset R$, ahol R megszámlálható. Az A halmaz tehát sehol sem sűrű $[0, 1]$-en és $B = R - A$ mindenütt sűrű $[0, 1]$-en. Ezzel egyúttal azt is igazoltuk, hogy az R halmaz nem G_δ-típusú.

Hasonló meggondolásokkal bizonyítható a következő állítás is: *ha az $f_n(x)$ függvények folytonosak $[a, b]$-n és az $\{f_n(x)\}$ sorozat nem-korlátosan divergál az $E \subset [a, b]$ halmazon, ahol E mindenütt sűrű $[a, b]$-n, akkor mind-azon pontok halmaza, ahol az $\{f_n(x)\}$ sorozat nem-korlátosan divergál, kontinuumszámosságú (habár az eredeti E halmaz megszámlálható is lehetett).* A bizonyítást az olvasóra bízzuk. Megjegyezzük, hogy azoknak a pontoknak az E halmaza, amelyekben folytonos függvények $\{f_n(x)\}$ sorozata korlátosan divergál, $G_{\delta\sigma}$-típusú. Ez következik az alábbi összefüggésekből:

$$F_\sigma - F_{\sigma\delta} = F_\sigma \cap CF_{\sigma\delta} = F_\sigma \cap G_{\delta\sigma} = G_{\delta\sigma}.$$

Egybevetve az 1. és 3. tételeket, ismét megjegyezzük, hogy azon pontok halmaza, amelyekben korlátosan divergál a függvénysorozat, általában bonyolultabb, mint azoknak a pontoknak a halmaza, amelyekben a sorozat nem-korlátosan divergál.

Most néhány olyan eredményt sorolunk fel, amelyek folytonos függvények Fourier-soraira vonatkoznak. Még a múlt században bebizonyította Du Bois—Reymond, hogy vannak olyan folytonos függvények, amelyeknek Fourier-sorai bizonyos pontokban divergálnak. Az alábbiakban Fejért követve, ennek az állításnak egyszerű bizonyítását adjuk.

5. TÉTEL. *Van olyan 2π-periódusú folytonos függvény, melynek Fourier sora az* $x \equiv 0 \pmod{2\pi}$ *pontokban nem-korlátosan divergál, míg az* $x \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$ *pontokban a sor konvergál.*

Bizonyítás. Vegyük a következő trigonometrikus polinomot:

$$T(x, n) = \frac{\cos nx}{n} + \frac{\cos(n+1)x}{n-1} + \dots + \frac{\cos(n+n-1)x}{1} - \frac{\cos(n+n+1)x}{1} -$$

$$- \dots - \frac{\cos(n+2n)x}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos(2n-k)x - \cos(2n+k)x}{k} =$$

$$= 2 \sin 2nx \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kx}{k}.$$

Könnyen igazolhatjuk, hogy a $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}$ sor a $\varphi(x) = \frac{\pi - x}{2}$ függvény Fourier-sora. A $\varphi(x)$ függvény korlátos variációjú a $[0, 2\pi]$ szakaszon, és ezért Fourier-sorának részletösszegei egyenletesen korlátosak minden n-re és x-re (l. [40], 47.). Ennélfogva

$$|T(x, n)| \leq C, \tag{2. 1}$$

ahol C abszolút konstans. Legyen

$$f(x) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2} \cdot T(x, 2^{p^3}). \tag{2. 2}$$

(2. 1)-ből, valamint Weierstrass tételéből következik, hogy $f(x)$ folytonos $[0, 2\pi]$-n. Minthogy $3\cdot 2^{p^3} < 2^{(p+1)^3}$, ha $p = 1, 2, \ldots$, ezért (2. 2)-ben a szumma jel mögötti polinomok tagjai mind különbözők. Ezenkívül, ha $\cos kx$ előfordul a $T(x, 2^{p^3})$ és $\cos mx$ a $T(x, 2^{q^3})$ polinomban, akkor $k < m$, midőn $p < q$. Ennélfogva (2. 1)-ből és (2. 2)-ből következik, hogy az $f(x)$ függvény Fourier-sora (2. 2)-ből nyerhető, ha abban a T polinomokat a cosinusok növekvő sorrendjében írjuk fel. Tehát

$$S_{2\cdot 2^{q^3}}(0, f) = \frac{1}{q^2}\sum_{k=1}^{2^{q^3}} \frac{1}{k} \geqq \frac{1}{q^2} \ln 2^{q^3} = q \ln 2,$$

vagyis $\overline{\lim_{k\to\infty}}\, S_k(0, f)| = +\infty$, következésképp $f(x)$ Fourier-sora a 0 pontban nem-korlátosan divergál.

Legyen most $2\pi > x_0 > 0$. Megmutatjuk, hogy $f(x)$ Fourier-sora konvergál az x_0 pontban. Valóban, Abel-féle transzformációt alkalmazva könnyen kapjuk, hogy

$$\left|\sum_{k=1}^{p} \frac{\cos(n+k)x_0}{n-k}\right| \leqq A(x_0), \qquad p < n, \tag{2. 3}$$

ahol $A(x_0)$ véges, csupán x_0-tól függő mennyiség. Hasonlóan

$$\left|\sum_{k=1}^{p} \frac{\cos(2n+k)x_0}{k}\right| \leqq B(x_0) \qquad (p \leqq n). \tag{2. 4}$$

(2. 2), (2. 3), valamint (2. 4)-ből következik, hogy az $f(x)$ függvény Fourier-sora az x_0-pontban konvergál.

Most még közöljük az 5. tétel Lebesgue-től származó bizonyítását is, amely jobban feltárja a dolog geometriai lényegét. Ezenkívül Lebesgue módszerét alkalmazva, néhány, a továbbiakban szükséges következményhez jutunk.

AZ 5. TÉTEL LEBESGUE-FÉLE BIZONYÍTÁSA. (L. [29], 126—129.) Legyen $n_k = (k+1)^{4^k}$, $a_k = n_0 \cdot n_1 \ldots n_k$, $c_k = \frac{1}{\ln(k+1)}$, $J_k = \left[\frac{\pi}{a_k}, \frac{\pi}{a_{k-1}}\right]$, és legyen $f(x)$ a következő páros függvény:

$$f(x) = \begin{cases} c_k \sin a_k x, & \text{ha } x \in J_k \subset (0, \pi], \\ 0, & \text{ha } x = 0, \end{cases}$$

$k = 0, 1, \ldots$. Minthogy $\frac{a_k}{a_{k-1}} = n_k$ és $c_k \to 0$, ha $k \to \infty$, azért $f(x)$ folytonos $[0, 2\pi]$-n. Tetszőleges $\delta > 0$-ra $f(x)$ korlátos variációjú a $[\delta, 2\pi - \delta]$ szakaszon, és így $f(x)$ Fourier-sora konvergál $[\delta, 2\pi - \delta]$-n. De minthogy $\delta > 0$ tetszőleges, ezért $f(x)$ Fourier-sora a $(0, 2\pi)$ intervallum minden pontjában konvergál.

Megmutatjuk, hogy $f(x)$ Fourier-sora nem-korlátosan divergál az $x=0$ pontban. Evégett elegendő pl. megmutatni, hogy

$$\lim_{k\to\infty} S_{a_k}(0,f)=+\infty. \tag{2.5}$$

Világos, hogy

$$\begin{aligned} S_{a_k}(0,f)&=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{f(t)}{\operatorname{tg}\frac{t}{2}}\sin a_k t\,dt+O(1)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{f(t)}{t}\sin a_k t\,dt+O(1)=\\ &=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/a_k}\frac{f(t)}{t}\sin a_k t\,dt+\frac{2}{\pi}\int_{\pi/a_k}^{\pi/a_{k-1}}\frac{f(t)}{t}\sin a_k t\,dt+\frac{2}{\pi}\int_{\pi/a_{k-1}}^{\pi}\frac{f(t)}{t}\sin a_k t\,dt+\\ &\qquad+O(1)=\frac{2}{\pi}(J_1+J_2+J_3)+O(1). \end{aligned}\tag{2.6}$$

Most megbecsüljük (2.6) mindhárom integrálját. Az $f(t)$ függveny definíciója miatt

$$|J_1|\leqq a_k\frac{\pi}{a_k}\max_{t\in\left[0,\frac{\pi}{a_k}\right]}|f(t)|\leqq\frac{\pi}{\ln(k+1)}=O(1).\tag{2.7}$$

Világos továbbá, hogy

$$\begin{aligned} |J_3|&=\left|\int_{\pi/a_{k-1}}^{\pi}\frac{f(t)}{t}\sin a_k t\,dt\right|\leqq\sum_{i=1}^{k-1}c_i\left|\int_{\pi/a_i}^{\pi/a_{i-1}}\frac{\sin a_i t\sin a_k t}{t}\,dt\right|\leqq\\ &\leqq\sum_{i=1}^{k-1}c_i\int_{\pi/a_i}^{\pi/a_{i-1}}\frac{1}{t}\,dt=\sum_{i=1}^{k-1}\frac{1}{\ln(i+1)}\ln n_i=\sum_{i=1}^{k-1}4^i\leqq\frac{1}{3}\cdot4^k. \end{aligned}\tag{2.8}$$

Alkalmazva a második középértéktételt azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} J_2&=\int_{\pi/a_k}^{\pi/a_{k-1}}\frac{f(t)}{t}\sin a_k t\,dt=\frac{1}{\ln(k+1)}\int_{\pi/a_k}^{\pi/a_{k-1}}\frac{\sin^2 a_k t}{t}\,dt=\\ &=\frac{1}{\ln(k+1)}\int_{\pi/a_k}^{\pi/a_{k-1}}\frac{1-\cos 2a_k t}{2t}\,dt=\frac{1}{2}\frac{\ln n_k}{\ln(k+1)}-\frac{1}{2\ln(k+1)}\int_{\pi/a_k}^{\pi/a_{k-1}}\frac{\cos 2a_k t}{t}\,dt=\\ &=\frac{4^k}{2}-\frac{1}{2\ln(k+1)}\left\{\frac{a_k}{\pi}\int_{\pi/a_k}^{\xi}\cos 2a_k t\,dt+\frac{a_{k-1}}{\pi}\int_{\xi}^{\pi/a_{k-1}}\cos 2a_k t\,dt\right\}=\\ &=\frac{1}{2}\cdot4^k-\frac{1}{\ln(k+1)}\cdot O(1)=\frac{1}{2}\cdot4^k-O(1). \end{aligned}\tag{2.9}$$

Egybevetve a (2. 6)—(2. 9) összefüggéseket:

$$S_{a_k}(0, f) \geqq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)\frac{2}{\pi} 4^k - O(1),$$

s ezzel igazoltuk (2. 5)-öt.

Következmény. *Van olyan 2π-periódusú folytonos $\psi(x)$ függvény, amelynek Fourier-sora mindenütt konvergál kivéve az $x \equiv 0 \pmod{2\pi}$ pontokat, ezekben pedig nem-korlátosan divergál. Emellett $\psi(x) = 0$, ha $x \in [\pi, 2\pi]$.* Valóban, $\psi(x)$-nek vehetjük a következő függvényt

$$\psi(x) = \begin{cases} f(x), & \text{ha} \quad x \in [0, \pi] \\ 0, & \text{ha} \quad x \in (\pi, 2\pi], \end{cases}$$

és könnyen meggyőződhetünk arról, hogy $S_n(0, \psi) = \frac{1}{2} S_n(0, f)$. Hasonló okoskodással bizonyíthatjuk be a következő állítást: *ha $[\alpha, \beta] \subset (0, 2\pi)$, akkor van olyan folytonos, 2π-periódusú $\tau(x)$ függvény, amelynek Fourier-sora mindenütt konvergál az $x \equiv \alpha \pmod{2\pi}$ pontok kivételével, ez utóbbi pontokban pedig a sor nem-korlátosan divergál. Ezenkívül $\tau(x) = 0$, midőn $x \in [0, \alpha] + [\beta, 2\pi]$.* Világos, hogy el tudjuk érni azt is, ha szükséges, hogy a Fourier-sor nem-korlátosan divergáljon az $x \equiv \beta \pmod{2\pi}$ pontokban is.

6. TÉTEL. *Van olyan folytonos $\varphi(x)$ függvény, melynek Fourier-sora csak az $x \equiv 0 \pmod{2\pi}$ pontokban divergál, de*

$$|S_n(x, \varphi)| \leqq B \tag{2. 10}$$

minden x-re és n-re, ahol B állandó.

A bizonyítás hasonló az 5. tétel Fejér-féle bizonyításához, ha

$$\varphi(x) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2} T(x, 2^{p^2})$$

és figyelembe vesszük a következő összefüggést:

$$S_{2 \cdot 2^{q^2}}(0, \varphi) - S_{2^{q^2}}(0, \varphi) = \frac{1}{q^2} \sum_{k=1}^{2^{q^2}} \frac{1}{k} \to 0, \quad \text{ha} \quad q \to \infty.$$

A (2. 10) egyenlőtlenség következik a (2. 1) egyenlőtlenségből, valamint az alábbi egyenlőtlenségből:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} < C_1 \ln n. \tag{2.11}$$

Valóban:

$$S_m(x, \varphi) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2} S_m(x, T(t, 2^{p^2})).$$

A tetszőleges m indexet pedig egyértelműen előállíthatjuk

$$m = 2^{q^2} + i$$

alakban, ahol $0 \leq i < 2^{(q+1)^2} - 2^{q^2}$. Ennélfogva

$$S_m(x, T(t, 2^{p^2})) = T(x, 2^{p^2}),$$

midőn $p < q$ és $S_m(x, T(t, 2^{p^2})) = 0$, ha $p > q$. Következésképp

$$S_m(x, \varphi) = \sum_{p=1}^{q-1} \frac{1}{p^2} \cdot T(x, 2^{p^2}) + \frac{1}{q^2} S_m(x, T(t, 2^{q^2})),$$

vagyis minden x-re:

$$|S_m(x, \varphi)| \leq \sum_{p=1}^{q-1} \frac{1}{p^2} |T(x, 2^{p^2})| + \frac{1}{q^2} |S_m(x, T(t, 2^{q^2}))| \leq$$

$$\leq C \sum_{p=1}^{q-1} \frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2} \left(2 \sum_{k=1}^{2q^2} \frac{1}{k}\right) < C \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2} + 2C_1 \ln 2 = C_2,$$

ahol C_2 rögzített állandó (l. (2. 1), továbbá $T(x, n)$ definícióját és a (2. 11) egyenlőtlenséget. Ezzel a (2. 10) egyenlőtlenséget bebizonyítottuk.

7. TÉTEL. *Legyen $\{r_i\}$ a $[0, 2\pi)$ intervallumban megszámlálható ponthalmaz. Van olyan folytonos, 2π-periódusú $F(x)$ függvény, amelynek Fourier-sora korlátosan divergál az r_i pontokban, és konvergál a $[0, 2\pi) - \{r_i\}$ halmaz pontjaiban.* Ilyen függvény például az

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \varphi(x - r_k).$$

Ennek a tételnek a bizonyítását megtalálhatjuk a [40] monográfiában a 170. oldalon. A 7. tételből következik: *Fourier-sor konvergenciahalmaza általában lehet nem-F_σ-típusú halmaz, még akkor is, ha folytonos függvényről van szó.*

Valóban, vegyük a $[0, 2\pi)$ intervallum racionális pontjainak $\{r_i\}$ halmazát. Az $F(x)$ függvény Fourier-sorának konvergenciahalmaza a $[0, 2\pi) - \{r_i\}$ halmaz, vagyis az irracionális pontok halmaza. Azonban az irracionális pontok halmaza nem F_σ-típusú halmaz (l. [1], 110.).

Az 1. tétel szerint tetszőleges trigonometrikus sor konvergenciahalmaza $F_{\sigma\delta}$-típusú. Ennélfogva Fourier-sor konvergenciahalmaza $F_{\sigma\delta}$-típusú, de nem okvetlenül F_σ-típusú.

Felhasználva a 4. tételre vonatkozó megjegyzést, könnyen beláthatjuk, hogy léteznek folytonos függvények, amelyek Fourier-sorai kontinuumszámosságú halmazon divergálnak (l. [40], 171.).

Megjegyezzük, hogy az a kérdés, vajon divergálhat-e folytonos függvény Fourier-sora pozitív mértékű halmazon, mindeddig eldöntetlen. Nem ismeretes az sem, vajon bármely folytonos függvény Fourier-sora egyetlen pontban konvergál-e.

3. §. Nem-korlátosan divergáló Fourier-sorok

Mielőtt rátérnénk A. N. Kolmogorov tételére [13], bebizonyítjuk a következő állítást.

1. LEMMA. *Minden n egész számhoz lehet konstruálni olyan $\varphi_n(x)$ függvényt és olyan $E_n \subset [0, 2\pi]$ halmazt, valamint M_n, q_n számokat, melyek eleget tesznek az alábbi követelményeknek:*

1. $\varphi_n(x) \geqq 0, \quad \int\limits_0^{2\pi} \varphi_n(x)dx = 2,$

2. $\varphi_n(x)$ *korlátos variációjú a* $[0, 2\pi]$ *szakaszon,*

3. $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{mes} E_n = 2\pi, \quad \lim\limits_{n\to\infty} M_n = \infty,$

4. *tetszőleges* $x_0 \in E_n$ *ponthoz található olyan* $p_{n,x_0} \leqq q_n$ *index, hogy*

$$|S_{p_{n,x_0}}(x_0, \varphi_n)| \geqq M_n$$

legyen.

Bizonyítás. Tekintsük a $[0, 2\pi]$ szakaszon az $A_k = \frac{4\pi}{2n+1} k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ pontokat. Legyen $\lambda_1 = 1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ a páratlan egész számoknak egy sorozata, amelyre később meghatározandó feltételeket fogunk kiszabni. Az $\{m_k\}$ számsorozatot és a $\{J_k\}$ szakaszokat a következőképpen értelmezzük:

$$(3.1) \qquad 2m_k + 1 = \lambda_k(2n+1), \quad J_k = \left[A_k - \frac{1}{m_k^2}, A_k + \frac{1}{m_k^2}\right] \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Legyen mármost a $\varphi_n(x)$ függvény a következő:

$$(3.2) \qquad \varphi_n(x) = \begin{cases} \frac{m_k^2}{n}, & \text{ha} \quad x \in J_k, \\ 0, & \text{ha} \quad x \in [0, 2\pi] - \sum\limits_{k=1}^{n} J_k. \end{cases}$$

Megmutatjuk, hogy $\varphi_n(x)$ a keresett függvény (természetesen, ha m_k-t megfelelően választjuk). (3.1)-ből, valamint (3.2)-ből következik, hogy $\varphi_n(x)$ az 1. lemma (1. és 2.) feltételeit teljesíti. Legyenek a Δ_i szakaszok a következők:

$$\Delta_i = \left[A_i + \frac{2}{n^2}, A_{i+1} - \frac{2}{n^2}\right] \qquad (i = 1, 2, \ldots, (n-1)).$$

Világos, hogy a $\{\Delta_i\}$ és a $\{J_k\}$ szakaszok egymást kölcsönösen nem metszik. Legyenek az $m_1, m_2, \ldots, m_{k-1}$ számok már definiáltak. A C tétel értelmében az m_k számot választhatjuk olyan nagyra, hogy minden $x \in \Delta_{k-1}$-re:

$$\left| \frac{1}{\pi} \int\limits_{\sum_{i=1}^{k-1} J_i} \varphi_n(t) \frac{\sin\left(m_k+\frac{1}{2}\right)(t-x)}{2\sin\frac{t-x}{2}}\, dt \right| \leqq 1 \tag{3.3}$$

legyen, hiszen $x \in \Delta_{k-1}$ és $t \in \sum_{i=1}^{k-1} J_i$ esetén $|t-x| > \varrho > 0$, ahol ϱ csupán n-től függő állandó. Az $\{m_i\}$ sorozat indukció útján teljesen meg van határozva.

Minthogy a Dirichlet-féle mag $D_k(t) = \frac{1}{2} + \cos t + \cdots + \cos kt$, azért

$$|D_k'(t)| \leqq k^2 \qquad (t \in [0, 2\pi]). \tag{3.4}$$

Világos továbbá, hogy $i \geqq k$-ra és $x \in \Delta_{k-1}$-re

$$\frac{2m_k+1}{2}(A_i - A_k) = (i-k) 2\pi\lambda_k, \tag{3.5}$$

$$0 < A_i - x \leqq A_i - A_{k-1} = (i-k+1)\frac{4\pi}{2n+1}. \tag{3.6}$$

(3.4)—(3.6) alapján, valamint Lagrange tételéből $i \geqq k$-ra és $x \in \Delta_{k-1}$-re azt nyerjük, hogy

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{\pi} \int\limits_{J_i} \varphi_n(t) \frac{\sin\frac{2m_k+1}{2}(t-x)}{2\sin\frac{t-x}{2}}\, dt \right| &= \left| \frac{1}{\pi} \int\limits_{J_i} \frac{m_i^2}{n} \frac{\sin\frac{2m_k+1}{2}(A_i-x)}{2\sin\frac{A_i-x}{2}}\, dt + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\pi} \int\limits_{J_i} \frac{m_i^2}{n} \left[\frac{\sin\frac{2m_k+1}{2}(t-x)}{2\sin\frac{t-x}{2}} - \frac{\sin\frac{2m_k+1}{2}(A_i-x)}{2\sin\frac{A_i-x}{2}} \right] dt \right| \geqq \\ &\geqq \frac{1}{\pi n} \frac{\left|\sin\frac{2m_k+1}{2}(A_i-x)\right|}{\sin\frac{A_i-x}{2}} - \frac{1}{\pi} \int\limits_{J_i} \frac{m_i^2}{n} \cdot m_k^2 \frac{1}{m_i^2}\, dt \geqq \\ &\geqq \frac{\left|\sin\left(m_k+\frac{1}{2}\right)x\right|}{\pi n \sin\frac{A_i-x}{2}} - \frac{2}{\pi n} \geqq \frac{1}{\pi^2} \frac{\left|\sin\left(m_k+\frac{1}{2}\right)x\right|}{i-k+1} - \frac{1}{n}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Megjegyezzük, hogy az

$$\frac{1}{\pi}\int_{J_i}\varphi_n(t)\frac{\sin\frac{2m_k+1}{2}(t-x)}{2\sin\frac{t-x}{2}}dt$$

integrál döntő részének állandó az előjele, függetlenül attól, hogy $i \geqq k$.

Egybevetve a (3. 2), (3. 3) és (3. 7) összefüggéseket, $x\in\Delta_{k-1}$ $(k=2,\dots,n)$ esetben az

$$|S_{m_k}(x,\varphi_n)|=\frac{1}{\pi}\left|\int_0^{2\pi}\varphi_n(t)\frac{\sin\left(m_k+\frac{1}{2}\right)(t-x)}{2\sin\frac{t-x}{2}}dt\right|=\frac{1}{\pi}\left|\int_{\sum_{i=1}^{k-1}J_i}+\int_{\sum_{i=1}^{n}J_i}\right|\geqq \tag{3. 8}$$

$$\geqq\frac{\left|\sin\left(m_k+\frac{1}{2}\right)x\right|}{\pi^2}\sum_{i=k}^{n}\frac{1}{i-k+1}-\frac{1}{n}n-1\geqq\frac{1}{\pi^2}\left|\sin\left(m_k+\frac{1}{2}\right)x\right|\sum_{i=1}^{n-k+1}\frac{1}{i}-2$$

összefüggést nyerjük. (3. 8)-ból pedig azt kapjuk, hogy

$$|S_{m_k}(x,\varphi_n)|\geqq\frac{1}{2\pi^2}\left|\sin\left(m_k+\frac{1}{2}\right)x\right|\ln n-2, \tag{3. 9}$$

ha $x\in\Delta_{k-1}$ és $2\leqq k\leqq n-[\sqrt{n}]$. Legyen most σ_{k-1} azon $x\in\Delta_{k-1}$ pontok halmaza, amelyekre

$$\frac{1}{2\pi^2}\left|\sin\left(m_k+\frac{1}{2}\right)x\right|\geqq\frac{1}{\sqrt{\ln n}}. \tag{3. 10}$$

Világos, hogy ha $x\in\sigma_{k-1}$, akkor

$$|S_{m_k}(x,\varphi_n)|\geqq\sqrt{\ln n}-2 \qquad (k=2,\dots,n-[\sqrt{n}]). \tag{3. 11}$$

Legyen

$$q_n=m_n,\quad E_n=\sum_{i=1}^{n-[\sqrt{n}]-1}\sigma_i,\qquad M_n=\sqrt{\ln n}-2. \tag{3. 12}$$

(3. 11) alapján látjuk, hogy az 1. lemmát bebizonyítottuk, ha megmutatjuk, hogy $\operatorname{mes}E_n\to2\pi$, midőn $n\to\infty$.

A Δ_{k-1} szakasz hosszúsága $\frac{4\pi}{2n+1}-\frac{4}{n^2}$. Világos továbbá, hogy a (3. 10) feltétel a Δ_{k-1} szakaszon mindenütt teljesül, kivéve egy $O\left(\frac{1}{n\sqrt{\ln n}}\right)$ mértékű halmazt. Valóban, azoknak az x pontoknak a halmaza, amelyekre

$$\frac{1}{2\pi}\left|\sin\left(m_k+\frac{1}{2}\right)x\right|\leqq\frac{1}{\sqrt{\ln n}},$$

olyan szakaszok összege, amelyek mindegyikének belsejében az $y=$ $=\sin\left(m_k+\frac{1}{2}\right)x=\sin\lambda_k(2n+1)\frac{x}{2}$ függvénynek van egy zérus helye. Az is nyilvánvaló, hogy ezeknek a szakaszoknak azonos hosszúságuk van. Legyen γ ezen szakaszok egyikének a hosszúsága. Könnyen belátható, hogy

$$\gamma=2\frac{\arc\sin\frac{2\pi}{\sqrt{\ln n}}}{\lambda_k(2n+1)\frac{1}{2}}=O\left(\frac{1}{\lambda_k n\sqrt{\ln n}}\right).$$

Az $y=\sin\lambda_k(2n+1)\frac{x}{2}$ függvénynek a $[0, 2\pi]$ szakaszon $\lambda_k(2n+1)+1$ nullahelye van. Két szomszédos nullahely közti távolság $\frac{2\pi}{\lambda_k(2n+1)}$. Minthogy $\lambda_k>n$, ha $k\geqq 2$, és Δ_{k-1} hosszúsága $\frac{4\pi}{2n+1}-\frac{1}{n^2}$, ezért a $\sin\lambda_k(2n+1)\frac{x}{2}$ függvénynek a Δ_{k-1} szakaszon nincs több nullahelye, mint $N=O(\lambda_k)$. Ennek következtében azon $x\in\Delta_{k-1}$ pontok halmazának, amelyekre

$$\frac{1}{2\pi}\left|\sin\left(m_k+\frac{1}{2}\right)x\right|<\frac{1}{\sqrt{\ln n}}\qquad (k\geqq 2),$$

a mértéke $\gamma N=O\left(\frac{1}{n\sqrt{\ln n}}\right)$. Ennélfogva

$$\lim \operatorname{mes} E_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n-[\sqrt{n}]-1}\left[\frac{4\pi}{2n+1}-\frac{4}{n^2}-O\left(\frac{1}{n\sqrt{\ln n}}\right)\right]=2\pi.$$

Az 1. lemmát bebizonyítottuk.

Megjegyzés. Legyen α tetszőleges kicsiny, pozitív szám, és τ_{k-1} azoknak az $x\in\Delta_{k-1}$ pontoknak a halmaza, amelyekre

$$\frac{1}{2\pi^2}\left|\sin\left(m_k+\frac{1}{2}\right)x\right|\geqq\alpha. \tag{3.13}$$

(3.9)-ből, valamint (3. 13)-ból kapjuk:

$$|S_{m_k}(x,\varphi_n)|\geqq\alpha\ln n-2\qquad (x\in\tau_{k-1}), \tag{3.14}$$

ahol $k=2,3,\dots,n-[\sqrt{n}]$. Úgy mint az 1. lemmánál:

$$\operatorname{mes}\tau_{k-1}=\frac{4\pi}{2n+1}-\frac{4}{n^2}-O\left(\frac{\alpha}{n}\right). \tag{3.15}$$

(3. 15)-ből következik, hogy

$$\operatorname{mes} N_n=\operatorname{mes}\sum_{k=2}^{n-[\sqrt{n}]}\tau_{k-1}=2\pi-O(\alpha)-O\left(\frac{1}{n}\right). \tag{3.16}$$

(3. 14)-ből és (3. 16)-ból kapjuk, hogy található két olyan pozitív α és β szám, amelyekre

$$(3.17) \qquad \varliminf_{n\to\infty} \operatorname{mes} \underset{x}{E}[\max_{m_n \geqq i \geqq m_1} |S_i(x, \varphi_n)| \geqq \alpha \ln n] \geqq \beta,$$

ahol m_1, m_n az n egész számtól függően vannak meghatározva (l. 1. lemmát). Nem nehéz belátni, (l. (3. 13)—(3. 16)), hogy ha az α közel esik $+0$-hoz, akkor β is közel esik $2\pi-0$-hoz. Ebből láthatjuk, hogy tetszőleges $\varepsilon>0$-hoz található olyan $\delta>0$, hogy

$$\varliminf_{n\to\infty} \operatorname{mes} \underset{x}{E}[\max_{m_n \geqq i \geqq m_1} |S_i(x, \varphi_n)| > \delta \ln n] > 2\pi-\varepsilon.$$

Ennek következtében van olyan $N(\varepsilon)$ szám, amelyre érvényes a következő egyenlőtlenség:

$$(3.18) \qquad \operatorname{mes} \underset{x}{E}[\max_{m_n \geqq i \geqq m_1} |S_i(x, \varphi_n)| > \delta \ln n] > 2\pi-\varepsilon, \quad \text{ha} \quad n > N.$$

8. TÉTEL (KOLMOGOROV [13]). *Van olyan $\Phi(x) \in L(0, 2\pi)$ függvény, amelynek Fourier-sora a $[0, 2\pi]$ szakaszon majdnem mindenütt nem-korlátosan divergál.*

B i z o n y í t á s. Mivel $M_n \to \infty$ (l. 1. lemmát), induktíve konstruálhatunk olyan növekvő $\{n_k\}$ számsorozatot, hogy fennálljanak az alábbi egyenlőtlenségek:

$$1^\circ. \qquad q_{n_i} \leqq \frac{1}{2^k}\sqrt{M_{n_k}}, \quad \text{ha} \quad i=1,2,\ldots,(k-1),$$

$$2^\circ. \qquad \sum_{i=1}^{k-1} \max_{m,x} |S_m(x, \varphi_{n_i})| \leqq \frac{1}{2}\sqrt{M_{n_k}}.$$

(A $\varphi_{n_i}(x)$ függvény korlátos variációjú és ezért

$$\max_{m,x} |S_m(x, \varphi_{n_i})| \leqq B_{n_i} < \infty,$$

ahol B_{n_i} pozitív állandó (l. [40], 47.). Az 1°. feltételből következik, hogy

$$(3.19) \qquad \frac{1}{\sqrt{M_{n_k}}} \leqq \frac{1}{2^k}.$$

Legyen

$$(3.20) \qquad \Phi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{M_{n_k}}} \varphi_{n_k}(x).$$

(3. 19)-ből, valamint a B tételből következik, hogy a (3. 20) sor majdnem mindenütt konvergál a $\Phi(x)$ integrálható függvényhez.

Most megmutatjuk, hogy $\Phi(x)$ a keresett függvény. Tudjuk, hogy

$$(3.21) \qquad S_i(x, \Phi) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{M_{n_k}}} S_i(x, \varphi_{n_k}).$$

Legyen $E = \overline{\lim_{k\to\infty}} E_{n_k}$. Világos, hogy $\operatorname{mes} E = 2\pi$ (l. az 1. lemma 3. pontját). Vegyünk egy tetszőleges $x_0 \in E$ pontot; megmutatjuk, hogy $\Phi(x)$ Fourier-sora divergál ebben a pontban.

Minthogy $x_0 \in E$, ezért $x_0 \in E_{n_j}$ végtelen sok j-re. (3.21) alapján ugyanis

$$S_{p_{n_j}, x_0}(x_0, \Phi) = \tag{3.22}$$

$$= \sum_{k=1}^{j-1} \frac{1}{\sqrt{M_{n_k}}} S_{p_{n_j}, x_0}(x_0, \varphi_{n_k}) + \frac{1}{\sqrt{M_{n_j}}} S_{p_{n_j}, x_0}(x_0, \varphi_{n_j}) + \sum_{k=j+1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{M_{n_k}}} S_{p_{n_j}, x_0}(x_0, \varphi_{n_k}).$$

Ismeretes, hogy

$$|S_k(x, f)| \leqq k \int_0^{2\pi} |f(t)|\, dt \qquad (k \geqq 1). \tag{3.23}$$

Egybevetve a (3.22), (3.23), 1°., 2°. összefüggéseket, valamint az 1. lemma 1. és 4. pontjait, azt kapjuk, hogy végtelen sok j-re

$$|S_{p_{n_j}, x_0}(x_0, \Phi)| \geqq \frac{1}{\sqrt{M_{n_j}}} |S_{p_{n_j}, x_0}(x_0, \varphi_{n_j})| - \sum_{k=1}^{j-1} \frac{1}{\sqrt{M_{n_k}}} |S_{p_{n_j}, x_0}(x_0, \varphi_{n_k})| -$$

$$- \sum_{k=j+1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{M_{n_k}}} |S_{p_{n_j}, x_0}(x_0, \varphi_{n_k})|,$$

vagyis

$$\begin{aligned} |S_{p_{n_j}, x_0}(x_0, \Phi)| &\geqq \sqrt{M_{n_j}} - \frac{1}{2}\sqrt{M_{n_j}} - \sum_{k=j+1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{M_{n_k}}} q_{n_j} 2 \geqq \\ &\geqq \frac{1}{2}\sqrt{M_{n_j}} - 2 \sum_{k=j+1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{M_{n_k}}} \cdot \frac{\sqrt{M_{n_k}}}{2^k} = \frac{1}{2}\sqrt{M_{n_j}} - \frac{2}{2^j}. \end{aligned} \tag{3.24}$$

(3, 24)-ből következik, hogy

$$\overline{\lim_{i\to\infty}} |S_i(x_0, \Phi)| = +\infty \qquad (x_0 \in E), \tag{3.25}$$

a $\Phi(x)$ függvény Fourier-sora tehát nem-korlátosan divergál a $[0, 2\pi]$ szakaszon majdnem mindenütt. Ezzel a 8. tételt bebizonyítottuk.

Megjegyzés. Mivel

$$\overline{\lim_{i\to\infty}} |S_i(x, \Phi)| = +\infty, \quad \text{ha} \quad x \in E,$$

felmerül a kérdés, hogy vajon nem konvergál-e $\{S_i(x, \Phi)\}$ $+\infty$-hez (vagy $-\infty$-hez) egy pozitív mértékű E_1 halmazon? Megmutatjuk, hogy nem.

Valóban, ha $\Phi(x)$ Fourier-sora pozitív mértékű halmazon $+\infty$-hez konvergálna, akkor a sor $(C, 1)$-szummálható is lenne $+\infty$-hez ezen a halmazon (l. A tételt). De ez nem lehetséges, mert $\Phi(x)$ Fourier-sora majdnem mindenütt $(C, 1)$-szummálható $\Phi(x)$-hez, amely viszont majdnem mindenütt véges (D tétel). Ezen túlmenően, a J tétel felhasználásával megmutathatjuk, hogy majdnem minden $x \in [0, 2\pi]$-re

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x, \Phi) = -\infty.$$

Megjegyezzük, hogy mindeddig nincs eldöntve a következő kérdés: Van-e olyan trigonometrikus sor, amely pozitív mértékű halmazon $+\infty$-hez konvergál?

9. TÉTEL. *Legyen*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \tag{3.26}$$

a Kolmogorov-féle $\Phi(x)$ függvény Fourier-Lebesgue-sora. Ekkor a

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k \sin kx - b_k \cos kx) \tag{3.27}$$

konjugált sor nem Fourier—Lebesgue-sor.

Bizonyítás. Tegyük fel az ellenkezőjét, vagyis azt, hogy a (3.27) sor valamilyen integrálható $f(x)$ függvény Fourier-Lebesgue-sora. Ekkor a (3.27) sor $(C, 1)$-szummálható $f(x)$-hez majdnem mindenütt (D tétel). De minthogy (3.27) a (3.26) sor konjugált sora, ezért majdnem mindenütt $(C, 1)$-szummálható a $\bar{\Phi}(x)$ függvényhez is (D tétel). Ennek következtében $f(x) = \bar{\Phi}(x)$ majdnem minden $x \in [0, 2\pi]$-re, vagyis $\bar{\Phi}(x) \in L(0, 2\pi)$. Azonban $\Phi(x) > 0$ és ezért az E tétel szerint

$$\Phi(x) \ln^+ \Phi(x) \in L(0, 2\pi).$$

Megmutatjuk, hogy ez nem igaz. Valóban

$$\int_0^{2\pi} \Phi(x) \ln^+ \Phi(x)\, dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{M_{n_k}}} \int_0^{2\pi} \varphi_{n_k} \ln^+ \Phi(x)\, dx, \tag{3.28}$$

ahol $M_n = \sqrt{\ln n} - 2 < \sqrt{\ln n}$. Nagy n-ekre megbecsüljük a

$$\int_0^{2\pi} \varphi_n(x) \ln^+ \frac{\varphi_n(x)}{\sqrt{M_n}}\, dx$$

integrált. Világos, hogy

$$\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} \varphi_n(x) \ln^+ \frac{\varphi_n(x)}{\sqrt{M_n}}\, dx = \\ &= \sum_{k=1}^{n} \int_{J_k} \frac{m_k^2}{n} \ln^+ \frac{m_k^2}{n\sqrt{M_n}}\, dx \geqq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \ln \frac{n}{\sqrt{M_n}} \geqq \ln \frac{n}{(\ln n)^{1/4}} \geqq \frac{1}{2} \ln n. \end{aligned} \tag{3.29}$$

Egybevetve (3. 28)-at és (3. 29)-et, azt kapjuk, hogy

$$\int_0^{2\pi} \Phi(x) \ln^+ \Phi(x)\, dx \geqq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{M_{n_k}}} \int_0^{2\pi} \varphi_{n_k}(x) \ln^+ \left(\frac{\varphi_{n_k}(x)}{\sqrt{M_{n_k}}}\right) dx \geqq$$

$$\geqq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{M_{n_k}}} \ln n_k \geqq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln n_k}{(\ln n_k)^{1/4}} = \infty,$$

vagyis

(3. 30) $$\int_0^{2\pi} \Phi(x) \ln^+ \Phi(x)\, dx = +\infty.$$

Ezzel a 9. tételt bebizonyítottuk.

Következmény. *A Kolmogorov-féle $\Phi(x)$ függvényre*

(3. 31) $$\Phi(x) \notin L^{1+\varepsilon}(0, 2\pi)$$

tetszőleges $\varepsilon > 0$-ra. Ez közvetlenül következik (3. 30)-ból.

Megjegyzés. Nem nehéz megmutatni, hogy a *$\bar{\Phi}(x)$ függvény nem integrálható egyetlen szakaszon sem.*

Valóban, könnyen belátható, hogy tetszőleges $[\alpha, \beta]$ szakaszon

(3. 32) $$\int_\alpha^\beta \Phi(x) \ln^+ \Phi(x)\, dx = +\infty.$$

Ezért, ha $\bar{\Phi}(x) \in L(\alpha_0, \beta_0)$ lenne, lehetne konstruálni a következő tulajdonságokkal rendelkező $\Phi_1(x) \in L(0, 2\pi)$ függvényt:

1. $\Phi_1(x) = \Phi(x)$, ha $x \in [\delta, \gamma] \subset (\alpha_0, \beta_0)$,
2. $\Phi_1(x) \geqq 0$ minden x-re,
3. $\bar{\Phi}_1(x) \in L(0, 2\pi)$

(l. [38]). Riesz tételéből azt kapnánk, hogy $\Phi_1(x) \ln^+ \Phi_1(x) \in L(0, 2\pi)$. Ez viszont azt jelentené, hogy $\Phi(x) \ln^+ \Phi(x) = \Phi_1(x) \ln^+ \Phi_1(x) \in L(\delta, \gamma)$. Ilymódon ellentmondásba kerülnénk (3. 32)-vel, és éppen ezt akartuk bebizonyítani.

Megjegyezzük, hogy mindeddig eldöntetlen az a kérdés, hogy bármely $f(x) \in L^{1+\varepsilon}(0, 2\pi)$ $(\varepsilon > 0)$ függvény Fourier-sora pozitív mértékű halmazon konvergál, illetve divergál-e. Most kimondjuk bizonyítás nélkül Kolmogorov alábbi tételét [14]:

10. TÉTEL. *Van olyan $f(x) \in L(0, 2\pi)$ függvény, amelyre*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |S_n(x, f)| = +\infty$$

minden $x \in [0, 2\pi]$-re, a részletösszegek tehát egyetlen pontban sem korlátosak, és így az $f(x)$ függvény Fourier-sora mindenütt nem-korlátosan divergál. A bizonyítást megtalálhatjuk Zygmund jól ismert könyvében.

4. §. Fourier-sorok korlátos divergenciája

A 8. tételben bebizonyítottuk olyan függvény létezését, amelynek Fourier-soránál a részletösszegek majdnem minden x pontban kielégítik a

$$(4.1)\qquad \overline{\lim_{i\to\infty}}\, |S_i(x, \Phi)| = +\infty$$

egyenlőséget (l. (3. 25)). Felmerül az a kérdés, vajon integrálható függvények majdnem mindenütt divergáló Fourier-sorai mindig kielégítik-e a (4. 1) egyenlőséget? Az erre vonatkozó választ adja meg a

11. TÉTEL. (MARCINKIEWICZ). *Van olyan $f(x) \in L(0, 2\pi)$ függvény, amelynek Fourier-sora $[0, 2\pi]$-ben majdnem mindenütt divergál, ugyanakkor pedig*

$$(4.2)\qquad \overline{\lim_{n\to\infty}}\, |S_n(x, f)| < \infty$$

majdnem minden $x \in [0, 2\pi]$-re, vagyis $f(x)$ Fourier-sora majdnem mindenütt korlátosan divergál.

Bizonyítás. Tekintsük az $f_n(x) = \dfrac{\varphi_n(x)}{\ln n}$ függvényt, ahol $\varphi_n(x)$ az 1. lemmában definiált függvény. Világos, hogy $f_n(x)$ korlátos variációjú és $f_n(x) \geqq 0$ minden x-re, továbbá

$$(4.3)\qquad \int_0^{2\pi} f_n(x)\,dx = \frac{2}{\ln n},$$

$$(4.4)\qquad \lim_{n\to\infty} \operatorname{mes}_x E\{f_n(x) > 0\} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{(m_k^{(n)})^2} = 0,$$

ahol $\{m_k^{(n)}\}$ az 1. lemmában bevezetett, egész n-ekre konstruált számsorozat. Legyen

$$E_n^{(\delta)} = E_x\{ \max_{m_n^{(n)} \geqq i \geqq m_1^{(n)}} |S_i(x, f_n)| > \delta\} \qquad (\delta > 0).$$

Az 1. lemmához fűzött megjegyzés alapján állíthatjuk, hogy tetszőleges $\eta > 0$-ra található olyan $\gamma = \gamma(\eta) > 0$ és $N = N(\eta)$, hogy

$$(4.5)\qquad \operatorname{mes} E_x\{ \max_{m_n^{(n)} \geqq i \geqq m_1^{(n)}} |S_i(x, f_n)| > \gamma\} = \operatorname{mes} E_n^{\gamma} > 2\pi - \eta, \quad \text{ha} \quad n \geqq N.$$

Legyen $d_k = \left[A_k + \dfrac{1}{n \ln n}, A_{k+1} - \dfrac{1}{n \ln n}\right]$, ahol $A_k = \dfrac{4\pi}{2n+1} k$. Világos, hogy ezek a szakaszok nem metszik a $\{J_k\}$ szakaszokat (l. 1. lemma). Legyen

$$D_n = \sum_{k=1}^{n-1} d_k.$$

Megmutatjuk, hogy minden i, n és $x \in D_n$-re

(4. 6) $$|S_i(x, f_n)| < M,$$

ahol M állandó. Ehhez elég, ha megmutatjuk, hogy $x \in D_n$-re

(4. 7) $$\int_0^{2\pi} f_n(t) \frac{1}{|x-t|} dt \leqq C \qquad (C \text{ állandó}).$$

Legyen $x_0 \in d_{k_0} \subset D_n$. Akkor $n > 3$-ra

$$\int_0^{2\pi} f_n(t) \frac{1}{|x-t|} dt = \int_0^{x_0} + \int_{x_0}^{2\pi} = \frac{1}{\ln n} \left\{ \sum_{s=1}^{k_0-1} \int_{J_s} \frac{\varphi_n(t)}{x_0-t} dt + \int_{J_{k_0}} \frac{\varphi_n(t)}{x_0-t} dt + \right.$$

$$\left. + \int_{J_{k_0+1}} \frac{\varphi_n(t)}{t-x_0} dt + \sum_{s=k_0+2}^{n} \int_{J_s} \frac{\varphi_n(t)}{t-x_0} dt \right\} \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{\ln n} \left\{ \sum_{s=1}^{k_0-1} \frac{m_s^2}{n} \frac{2n+1}{4\pi(k_0-s)} \frac{2}{m_s^2} + \frac{m_{k_0}^2}{n} \frac{1}{\frac{1}{n \ln n} - \frac{1}{m_{k_0}^2}} \frac{2}{m_{k_0}^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{m_{k_0+1}^2}{n} \frac{1}{\frac{1}{n \ln n} - \frac{1}{m_{k_0+1}^2}} \frac{2}{m_{k_0+1}^2} + \sum_{s=k_0+2}^{n} \frac{m_s^2}{n} \frac{2n+1}{4\pi(s-k_0-1)} \frac{2}{m_s^2} \right\} \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{\ln n} \left\{ \sum_{s=1}^{k_0-1} \frac{1}{k_0-s} + \frac{4 \ln n}{1 - \frac{\ln n}{n}} + \sum_{s=k_0+2}^{n} \frac{1}{s-k_0-1} \right\} \leqq C,$$

vagyis fennáll a (4. 7) egyenlőtlenség. Világos, hogy

$$\operatorname{mes} D_n = \left(\frac{4\pi}{2n+1} - \frac{2}{n \ln n} \right) (n-1) \to 2\pi, \quad \text{ha} \quad n \to \infty,$$

tehát

(4. 8) $$\lim_{n \to \infty} \operatorname{mes} D_n = 2\pi.$$

A (4. 6) és (4. 8) összefüggések alapján a

(4. 9) $$\lim_{n \to \infty} \operatorname{mes}_x E\{\max_i |S_i(x, f_n)| \leqq M\} = 2\pi$$

összefüggést nyerjük. Legyen

(4. 10) $$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_{n_k}(x).$$

Megmutatjuk, hogy az $\{n_k\}$ sorozat alkalmas megválasztása esetén $f(x)$ a keresett függvény. Tegyük fel, hogy már definiálva vannak a

(4. 11) $$4 \leqq n_1 < n_2 < \cdots < n_k,$$

(4. 12) $$2 \leqq q_1 < q_2 < \cdots < q_{k-1}$$

sorozatok, ahol n_i és q_i egész számok. Legyen

(4. 13) $$\Phi_k(x) = \sum_{i=1}^{k} f_{n_i}(x).$$

Legyen az $E_{k,q}$ halmaz a következőképpen értelmezve:

(4. 14) $$E_{k,q} = \underset{x}{E}\left\{ |S_p(x, \Phi_k) - \Phi_k(x)| < \frac{1}{k} \text{ minden } p \geqq q\text{-ra} \right\}.$$

Jegorov tétele, valamint $\Phi_k(x)$ Fourier-sorának konvergenciája alapján:

(4. 15) $$\text{mes}\, CE_{k,q} = \text{mes}\,\{[0, 2\pi] - E_{k,q}\} < \frac{1}{2^k}, \quad \text{ha} \quad q \geqq q(k).$$

Legyen

(4. 16) $$q_k = \max\,\{q(k),\ m_{n_k}^{(n_k)}\}.$$

Határozzuk meg az n_{k+1} egész számot úgy, hogy teljesüljenek az alábbi egyenlőtlenségek:

(4. 17) $$\int_0^{2\pi} f_{n_k}(t)\,dt > q_k \int_0^{2\pi} f_{n_{k+1}}(t)\,dt,$$

(4. 18) $$\text{mes}\, \underset{x}{E}\{\max_i |S_i(x, f_{n_{k+1}})| > M\} < \frac{1}{2^k},$$

(4. 19) $$n_{k+1} > n_k, \quad m_1^{(n_{k+1})} > q_k.$$

Ilyen n_{k+1} szám meghatározásának a lehetősége következik (4. 3)-ból és (4. 9)-ből. Ily módon az $\{n_k\}$ és $\{q_k\}$ sorozatokat indukcióval teljesen meghatároztuk. Minthogy $q_k \geqq 2$, ezért (4. 17)-ből és (4. 10)-ből következik, hogy $f(x) \in L(0, 2\pi)$ (l. B tétel).

Legyen $\psi_k(x) = f(x) - \Phi_k(x)$, akkor azt kapjuk, hogy

(4. 20) $$S_i(x, f) = S_i(x, \Phi_k) + S_i(x, f_{n_{k+1}}) + S_i(x, \psi_{k+1}).$$

Legyen a (4. 20) formulában k olyan, hogy teljesüljön a

(4. 21) $$q_k \leqq i < q_{k+1}$$

feltétel. Világos, hogy (4. 17), (4. 21) és (4. 3) alapján:

$$|S_i(x, \psi_{k+1})| \leqq 4i \int_0^{2\pi} \psi_{k+1}(t)\,dt \leqq 4i \int_0^{2\pi} \left\{ \sum_{s=k+2}^{\infty} f_{n_s}(t) \right\} dt \leqq$$

$$\leqq 8i \int_0^{2\pi} f_{n_{k+2}}(t)\,dt \leqq \frac{8i}{q_{k+1}} \int_0^{2\pi} f_{n_{k+1}}(t)\,dt \leqq 8 \int_0^{2\pi} f_{n_{k+1}}(t)\,dt = o(1).$$

vagyis

(4.22) $$\lim_{i\to\infty} |S_i(x, \psi_{k+1})| = 0 \quad \text{minden} \quad x \in [0, 2\pi]\text{-re}.$$

(4.21)-ből következik továbbá, hogy $k \to \infty$, midőn $i \to \infty$. Minthogy $\Phi_k(x) \to \to f(x)$ majdnem minden $x \in [0, 2\pi]$-re (l. (4.10) és (4.13)), azért $S_i(x, \Phi_k) \to \to f(x)$, ha $i \to \infty$, majdnem minden $x \in [0, 2\pi]$-re ((4.14)—(4.16)). Ennélfogva:

(4.23) $$\lim_{i\to\infty} S_i(x, \Phi_k) = f(x)$$

minden $x \in A \subset [0, 2\pi]$ pontban, ahol $\operatorname{mes} A = 2\pi$. Így (4.18) felhasználásával a

(4.24) $$\overline{\lim_{i\to\infty}} |S_i(x, f_{n_{k+1}})| \leqq M$$

(minden $x \in P \subset [0, 2\pi]$ pontban) becslést nyerjük, ahol $\operatorname{mes} P = 2\pi$ és $q_k \leqq \leqq i < q_{k+1}$. (4.20), valamint (4.22)—(4.24) alapján

$$\overline{\lim_{i\to\infty}} |S_i(x, f)| < \infty$$

majdnem minden $x \in [0, 2\pi]$-re, vagyis az $f(x)$ függvénynek megvan a (4.2) tulajdonsága.

Most megmutatjuk, hogy $f(x)$ Fourier-sora majdnem mindenütt divergál a $[0, 2\pi]$ szakaszon. Válasszuk a rögzített $\varepsilon > 0$-t tetszőlegesen; (4.5) alapján található olyan $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ és $N = N(\varepsilon)$, hogy

(4.25) $$\operatorname{mes} E_x\{\max_{m_n^{(n)} \geqq i \geqq m_1^{(n)}} |S_i(x, f_n)| > \delta\} = \operatorname{mes} E_n^{(\delta)} > 2\pi - \varepsilon$$

legyen, ha $n \geqq N$. Legyen $E = \overline{\lim_{k\to\infty}} \{E_{n_k}^{(\delta)} \cap A\}$; (4.25)-ből következik, hogy $\operatorname{mes} E \geqq 2\pi - \varepsilon$. Ha tehát $x_0 \in E$, akkor $x_0 \in A$ és $x_0 \in E_{n_{k_j}}^{(\delta)}$ $(j = 1, 2, \ldots)$. Az i indexeket úgy választjuk, hogy

(4.26) $$q_{k_j - 1} \leqq i < q_{k_j}$$

legyen. Akkor

(4.27) $$S_i(x_0, f) = S_i(x_0, \Phi_{k_j - 1}) + S_i(x_0, f_{n_{k_j}}) + S_i(x_0, \psi_{k_j}).$$

Minthogy $x_0 \in A$, azért

(4.28) $$\lim_{i\to\infty} S_i(x_0, \Phi_{k_j - 1}) = f(x_0)$$

((4.23) és (4.26)). Hasonlóképpen ((4.22)):

(4.29) $$\lim_{i\to\infty} S_i(x_0, \psi_{k_j}) = 0.$$

Most (4. 25) alapján és abból, hogy $x_0 \in E^{(\delta)}_{n_{k_j}}$,

(4. 30) $$\max_{m^{(n_{k_j})}_{n_{k_j}} \geqq i \geqq m^{(n_{k_j})}_1} |S_i(x_0, f_{n_{k_j}})| > \delta, \quad \text{ha} \quad n_{k_j} \geqq N.$$

Minthogy azonban

(4. 31) $$q_{k_j-1} < m_1^{(n_{k_j})} < m_{n_{k_j}}^{(n_{k_j})} \leqq q_{k_j}$$

(l. (4. 16) és (4. 19)), ezért (4. 30)-ból következik olyan $i_0 = i(x_0, j)$ index létezése, amely kielégíti (4. 26)-ot és amelyre

(4. 32) $$|S_{i_0}(x_0, f_{n_{k_j}})| > \delta > 0.$$

Következésképpen (4. 27)—(4. 29) és (4. 32) alapján azt nyerjük, hogy található végtelen sok olyan $i_0 = i(x_0, j)$ index, amelyekre igaz az

$$|S_{i_0}(x_0, f) - f(x_0)| > \delta$$

becslés, vagyis

(4. 33) $$S_i(x_0, f) \not\to f(x_0) \qquad x_0 \in E.$$

Eszerint (4. 33)-ból következik, hogy $f(x)$ Fourier-sora az E halmazon mindenütt divergál. Ez közvetlenül adódik a D tétel következményéből.

Az E halmaz mértéke azonban $\geqq 2\pi - \varepsilon$, ahol $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Ezért az $f(x)$ függvény konstrukciójának ε-tól való függetlensége miatt $f(x)$ Fourier-sora majdnem mindenütt divergál a $[0, 2\pi]$ szakaszon, s ezzel a 11. tételt bebizonyítottuk.

1°. megjegyzés. Nem nehéz meggyőződnünk arról, hogy minden $[\alpha, \beta]$ szakaszon

(4. 34) $$\int_\alpha^\beta f(t) \ln^+ f(t) dt = +\infty$$

(l. a 9. tételhez fűzött megjegyzést). A (4. 34) egyenlőség azt jelenti, hogy $f(x)$ Fourier-sorának konjugált sora nem Fourier-sor. Ezen túlmenően $\bar{f}(x)$ nem L-integrálható egyetlen szakaszon sem (l. 9. tételt és a hozzáfűzött megjegyzést).

2°. megjegyzés. Vegyünk egy tetszőlegesen kicsiny $\eta > 0$ számot. Könnyen belátható, hogy megválaszthatjuk az $\{n_k\}$ sorozatot úgy is, hogy $f(x)$-re a 11. tétel minden állítása teljesüljön és

(4. 35) $$\text{mes}\, E\{f(x) \neq 0\} < \eta$$

legyen. Valóban:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_{n_k}(x),$$

ahol az $\{n_k\}$ sorozatot speciális módon választottuk. Nem nehéz belátni, hogy az $\{n_k\}$ sorozat választható úgy, hogy

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n_k} < \frac{\eta}{2}$$

legyen és hogy teljesüljenek a (4. 11), (4. 17)—(4. 19) feltételek. Ebben az esetben $f(x)$ megint csak teljesíti a 11. tétel valamennyi állítását. És minthogy (l. (4. 4))

$$\operatorname{mes} E\{f_n(x) \neq 0, \quad x \in [0, 2\pi]\} = \sum_{s=1}^{n} \frac{2}{(m_s^{(n)})^2} \leqq \sum_{s=1}^{n} \frac{2}{n^2} = \frac{2}{n},$$

azért

$$\operatorname{mes} E\{f(x) \neq 0, \quad x \in [0, 2\pi]\} \leqq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{n_k} < \eta,$$

vagyis érvényes (4. 35). Ugyanakkor azonban az $f(x)$ függvényre érvényes (4. 34) is, és ez azt jelenti, hogy a megkonstruált $f(x)$ függvény tetszőleges szakaszon sem marad korlátos (még ha nullamértékű halmazon megváltoztatjuk is).

A (4. 35) egyenlőtlenség és a 11. tétel azt mutatják, hogy Riemann lokalizációs elve halmazokra vonatkozólag nem érvényes, abból tehát, hogy $f(x) \in L(0, 2\pi)$, és $f(x) = 0$ egy pozitív mértékű halmazon, még nem következik $f(x)$ Fourier-sorának konvergenciája (annál kevésbé egyenletes konvergenciája) semmilyen $E_1 \subset E$ pozitív mértékű halmazon sem.

3°. megjegyzés. Felmerül még az a kérdés, nem lehet-e konstruálni olyan $f(x)$ függvényt, amelynek Fourier-sora majdnem mindenütt divergál, és a (4. 2) feltétel mindenütt teljesül? Erre vonatkozólag jelenleg csak a következő választ tudjuk adni.

12. TÉTEL. *Ha van olyan $F(x) \in L(0, 2\pi)$ függvény, amelynek Fourier-sora a $[0, 2\pi]$ szakaszon majdnem mindenütt divergál, és*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |S_n(x, F)| < \infty \tag{4. 36}$$

minden $x \in [0, 2\pi]$-re, akkor van $[0, 2\pi]$-ben olyan korlátos függvény is, amelynek Fourier-sora pozitív mértékű halmazon divergál.

Bizonyítás. Legyen

$$E_{n,m} = \underset{x}{E}\{|S_n(x, F)| \leqq m\}, \quad E_m = \prod_{n=1}^{\infty} E_{n,m}.$$

Világos, hogy E_m zárt halmaz. Minthogy $[0, 2\pi] = \sum_{m=1}^{\infty} E_m$, azért legalább egy E_{k_0} halmaz nem lehet sehol sem sűrű $[0, 2\pi]$-ben, vagyis E_{k_0} sűrű valamelyik $[a, b] \subset [0, 2\pi]$ szakaszon. De E_{k_0} zárt halmaz, ezért $[a, b] \subset E_{k_0}$, tehát

$$|S_n(x, F)| \leqq k_0$$

minden n-re és $x \in [a, b] = J$-re. Ha azonban a Fourier-sor részletösszegei a J szakaszon korlátosak, akkor ezen a szakaszon korlátosak a $\sigma_n(x, F)$ aritmetikai közepek is, ennélfogva az $F(x)$ függvény J-n ekvivalens egy korlátos függvénnyel (l. D tétel). Felhasználva Riemannak a Fourier-sorokra vonatkozó lokalizációs tételét, könnyen konstruálhatunk $[0, 2\pi]$-n olyan korlátos $\varphi(x)$ függvényt, amelynek Fourier-sora J-n ugyanúgy viselkedik, mint $F(x)$ Fourier-sora. Következésképpen $\varphi(x)$ Fourier-sora J-n majdnem mindenütt divergál, s ezzel állításunkat bebizonyítottuk.

Megjegyezzük, hogy mindeddig eldöntetlen kérdés, vajon konvergál-e (illetve divergál-e) pozitív mértékű halmazon korlátos függvény Fourier-sora.

Megjegyzés. Nem nehéz belátni, hogy a 12. tétel gondolatmenete érvényes marad, ha feltételezzük, hogy *a)* a (4. 36) egyenlőtlenség teljesül valamely $[\alpha, \beta] \subset [0, 2\pi]$ szakaszon, *b)* a részletösszegek $[\alpha, \beta]$-án majdnem mindenütt divergálnak.

Következmény. *Legyen $f(x)$ a 11. tételben konstruált függvény. Akkor a*

$$\varlimsup_{n \to \infty} |S_n(x, f)| < \infty \tag{4. 37}$$

egyenlőtlenség nem teljesül sehol sem a $[0, 2\pi]$-ben sűrű $M \subset [0, 2\pi]$ halmazon.

Valóban, ha ez nem így lenne, akkor találnánk olyan $[\alpha, \beta] \subset [0, 2\pi]$ szakaszt, amelyen mindenütt érvényes lenne (4. 37). Ugyanúgy következtetve, mint a 12. tételnél, azt kapnánk, hogy található olyan $[\gamma, \delta] \subset [\alpha, \beta]$ szakasz, ahol $|f(x)| \leq C$ (C állandó). Így tehát

$$\int_\gamma^\delta |f(x)| \ln^+ |f(x)| dx < \infty,$$

ez pedig ellene mond a (4. 34) egyenlőségnek.

5. §. Fourier-sorok konvergenciájának egy nem javítható kritériuma

Mielőtt megfogalmaznánk és bebizonyítanánk MARCINKIEWICZ [20] Fourier-sorok konvergenciájára vonatkozó tételét, bebizonyítjuk a következő lemmát:

2. LEMMA. *Legyen $P \subset [0, 2\pi]$ adott perfekt halmaz, a $\Delta_n = (x_n - 3\delta_n, x_n + 3\delta_n)$ intervallumok pedig P komplementer intervallumai. Ha a $h(t) \in L(0, 2\pi)$ olyan nem-negatív függvény, hogy $h(t) = 0$, ha $t \in P$, és*

$$\int_{\Delta_n} h(t)\, dt \leq \frac{\delta_n}{\ln \frac{\pi}{\delta_n}}, \qquad (n = 1, 2, \ldots), \tag{5. 1}$$

akkor a $h(t)$ függvény Fourier-sora a P halmazon majdnem mindenütt konvergál.

Bizonyítás. A lemma állítása nyilvánvaló, ha $\operatorname{mes} P=0$. Tegyük fel, hogy $\operatorname{mes} P>0$. A 2. lemma bebizonyításához elegendő megmutatnunk, hogy $h(t)$ majdnem minden $x\in P$ pontban eleget tesz a Dini-féle feltételnek, vagyis

$$\int_0^{2\pi} h(t)\frac{dt}{|t-x|}<\infty. \tag{5.2}$$

Bevezetjük a következő jelöléseket:

$$\Delta_n^*=(x_n-\delta_n,\, x_n+\delta_n),\quad h^*(t)=\begin{cases}3h(x_n+3(t-x_n)), & \text{ha } t\in\Delta_n^*,\\ 0, & \text{ha } t\in[0,2\pi]-\sum_{n=1}^{\infty}\Delta_n^*.\end{cases} \tag{5.3}$$

Legyen $\Phi(x)$ a P halmaz karakterisztikus függvénye. Ekkor (5.3) és (5.1) alapján

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\Phi(x)h^*(t)\frac{dx\,dt}{|x-t|}=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\Delta_n^*}h^*(t)\,dt\int_0^{2\pi}\Phi(x)\frac{dx}{|x-t|}\leqq$$

$$\leqq\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\Delta_n^*}h^*(t)\,dt\left\{\int_0^{x_n-3\delta_n}\frac{dx}{t-x}+\int_{x_n+3\delta_n}^{2\pi}\frac{dx}{x-t}\right\}=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\Delta_n^*}h^*(t)\,dt\left\{\ln\frac{t}{t-(x_n-3\delta_n)}+\ln\frac{2\pi-t}{x_n+3\delta_n-t}\right\}\leqq$$

$$\leqq\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\Delta_n^*}h^*(t)\,dt\left\{\ln\frac{x_n-\delta_n}{2\delta_n}+\ln\frac{2\pi-x_n-\delta_n}{2\delta_n}\right\}\leqq$$

$$\leqq\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{(2\pi)^2}{4\delta_n^2}\int_{\Delta_n}h(t)\,dt\leqq\sum_{n=1}^{\infty}2\ln\left(\frac{\pi}{\delta_n}\right)\frac{\delta_n}{\ln\left(\frac{\pi}{\delta_n}\right)}=2\sum_{n=1}^{\infty}\delta_n<\infty,$$

más szóval

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\Phi(x)h^*(t)\frac{1}{|x-t|}\,dx\,dt<\infty. \tag{5.4}$$

(5.4)-ből és Fubini tételéből (l. [28], 296—302.) következik, hogy

$$\int_0^{2\pi}h^*(t)\frac{dt}{|x-t|}<\infty,\quad \text{ha}\quad x\in P_1\subset P, \tag{5.5}$$

ahol $\operatorname{mes} P_1 = \operatorname{mes} P$. Legyen most az $x_0 \in P_1$ pont a P_1 halmaz maximális sűrűségű pontja, akkor van olyan $\delta > 0$, hogy

$$\frac{\operatorname{mes}\{P_1(x_0, x_0+h)\}}{|h|} \geqq \frac{1}{2} \qquad (0 < |h| \leqq \delta). \tag{5.6}$$

(5. 3), (5. 5) és (5. 6) alapján könnyen nyerjük, hogy

$$\infty > \int_0^{x_0} h^*(t)\frac{1}{x_0-t}\,dt \geqq \sum_{\substack{n\\ \Delta_n^* \subset [x_0-\delta,\, x_0]}} \int_{\Delta_n^*} \frac{3h(x_n+3(t-x_n))}{x_0-t}\,dt =$$

$$= 3 \sum_{\substack{n\\ \Delta_n^* \subset [x_0-\delta,\, x_0]}} \int_{\Delta_n} h(u)\frac{du}{x_0-u+2(x_0-x_n)} \geqq \frac{3}{5} \sum_{\substack{n\\ \Delta_n^* \subset [x_0-\delta,\, x_0]}} \int_{\Delta_n} h(u)\frac{du}{x_0-u} \geqq$$

$$\geqq \frac{3}{5}\int_{x_0-\delta}^{x_0} \frac{h(u)}{x_0-u}\,du,$$

mert hiszen $x_0 - x_n \leqq \dfrac{\operatorname{mes}\{P_1(x_n, x_0)\}}{\frac{1}{2}} \leqq 2[x_0-(x_n+3\delta_n)] \leqq 2(x_0-u)$. Ennélfogva

$$\int_{x_0-\delta}^{x_0} \frac{h(u)}{x_0-u}\,du < \infty. \tag{5.7}$$

Hasonló megfontolással:

$$\int_{x_0}^{x_0+\delta} \frac{h(u)}{u-x_0}\,du < \infty. \tag{5.7'}$$

(5. 7), valamint (5. 7′) alapján azt nyerjük, hogy

$$\int_0^{2\pi} \frac{h(u)}{|u-x_0|}\,du < \infty,$$

ha $x_0 \in P_2 \subset P_1$, ahol P_2 a P_1 halmaz maximális sűrűségű pontjainak a halmaza. Tudjuk azonban, hogy $\operatorname{mes} P_2 = \operatorname{mes} P_1 = \operatorname{mes} P$, s ezzel a 2. lemmát bebizonyítottuk.

13. TÉTEL (MARCINKIEWICZ [21]). *Ha $f(x) \in L(0, 2\pi)$, és*

$$\int_0^t |f(x+u)-f(x)|\,du = O\left(\frac{t}{\ln\frac{1}{|t|}}\right), \tag{5,8}$$

ha $x \in E$, akkor $f(x)$ Fourier-sora majdnem mindenütt konvergál E-n (mes $E > 0$).

Bizonyítás. Tegyük fel az ellenkezőt, hogy ti. van olyan $E_1 \subset E$ halmaz, amelyen $f(x)$ Fourier-sora divergál és $\operatorname{mes} E_1 > 0$. Legyen E_n azon $x \in E_1$ pontok halmaza, amelyekre

$$\left|\int_0^t |f(x+u)-f(x)|\,du\right| \leqq n \frac{|t|}{\ln \frac{1}{|t|}}, \qquad \left(|t| \leqq \frac{1}{n}\right). \tag{5.9}$$

Világos, hogy $\lim_{n\to\infty} \operatorname{mes} E_n = \operatorname{mes} E_1$. Ezért $\operatorname{mes} E_{n_0} > 0$, ha pl. $n_0 \geqq 3$. Az E_{n_0} halmazból mindig ki lehet választani pozitív mértékű és $\frac{1}{n_0}$-nál nem nagyobb átmérőjű P perfekt részhalmazt. Legyen

$$E(x,t,M) = \underset{v}{E}\left\{|f(v)-f(x)| \geqq \frac{M}{\ln \frac{1}{|v-x|}},\ v \in \left(x+\frac{1}{3}t,\, x+t\right)\right\}.$$

Ha $x \in P$, akkor $x \in E_{n_0}$. Ennélfogva (5. 9) alapján

$$n_0 \frac{|t|}{\ln \frac{1}{|t|}} \geqq \left|\int_0^t |f(x+u)-f(x)|\,du\right| \geqq \frac{M}{\ln \frac{3}{|t|}} \operatorname{mes} E(x,t,M),$$

vagyis

$$\operatorname{mes} E(x,t,M) \leqq \frac{\ln \frac{3}{|t|}}{\ln \frac{1}{|t|}} \cdot \frac{n_0}{M}|t| \leqq \frac{2n_0}{M}|t|.$$

Világos, hogy

$$\operatorname{mes} E(x,t,14n_0) \leqq \frac{|t|}{7}, \tag{5.10}$$

midőn $x \in P$. Legyen tehát $x \in P$ és $x < y \in P$. (5. 10)-ből azt kapjuk, hogy

$$\operatorname{mes} E(x, y-x, 14n_0) \leqq \frac{y-x}{7}, \quad \operatorname{mes} E(y, x-y, 14n_0) \leqq \frac{y-x}{7}. \tag{5.11}$$

Az (5. 11) egyenlőtlenségből következik, hogy van olyan $\xi \in \left(x+\frac{1}{3}(y-x),\ y-\frac{1}{3}(y-x)\right)$ pont, amely nem tartozik sem az $E(x, y-x, 14n_0)$ halmazhoz, sem az $E(y, x-y, 14n_0)$ halmazhoz, tehát

$$|f(\xi)-f(x)| \leqq \frac{14n_0}{\ln \frac{1}{|\xi-x|}}, \qquad |f(\xi)-f(y)| \leqq \frac{14n_0}{\ln \frac{1}{|y-\xi|}},$$

következésképp

$$(5.12)\qquad |f(y)-f(x)| \leqq \frac{28n_0}{\ln \frac{1}{|y-x|}}$$

tetszőleges $(x,y) \in P$-re. Definiáljuk a $g(x)$ folytonos függvényt a $[0, 2\pi]$ szakaszon a következőképpen:

$$g(x) = \begin{cases} 0 \;, \text{ ha } & x=0, \quad x=2\pi, \\ f(x), \text{ ha } & x \in P, \\ \text{lineáris } P \text{ komplementer intervallumain.} \end{cases}$$

Minthogy $t \ln \frac{1}{t}$ növekszik a $\left(0, \frac{1}{3}\right)$ intervallumban, azért ha x_1 és x_2 beletartoznak P komplementer szakaszainak egyikébe, pl. $[\alpha, \beta]$-ba:

$$|g(x_2)-g(x_1)| \leqq |x_2-x_1| \frac{28\, n_0}{\ln \frac{1}{|\beta-\alpha|} |\beta-\alpha|} =$$

$$= \frac{|x_2-x_1| \ln \frac{1}{|x_2-x_1|}}{|\beta-\alpha| \ln \frac{1}{|\beta-\alpha|}} \cdot \frac{28n_0}{\ln \frac{1}{|x_2-x_1|}} \leqq \frac{28n_0}{\ln \frac{1}{|x_2-x_1|}},$$

mert $|\beta-\alpha| < \frac{1}{3}$. Ennek következtében

$$(5.13)\qquad |g(y)-g(x)| \leqq \frac{84n_0}{\ln \frac{1}{|y-x|}}$$

tetszőleges $(x, y) \in [0, 2\pi]$-re. (5. 13)-ból következik tehát, hogy

$$(5.14)\qquad \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{|g(x+t)-g(x-t)|^2}{t}\, dt\, dx < \infty.$$

De az (5. 14) egyenlőtlenség equivalens a

$$(5.15)\qquad \sum_{k=2}^{\infty} (a_k^2+b_k^2) \ln k < \infty$$

egyenlőtlenséggel, ahol a_k és b_k a $g(x)$ függvény Fourier-koefficiensei (G tétel). Az F tétel alapján tehát $g(x)$ Fourier-sora $[0, 2\pi]$-n majdnem mindenütt konvergál, s így annál inkább konvergál majdnem mindenütt a P halmazon.

Tekintsük a $h(x)=f(x)-g(x)$ függvényt. Világos, hogy $h(x)=0$, midőn $x\in P$. Ha $[\alpha,\beta]$ a P halmaz egyik komplementer szakasza, akkor

$$\int_\alpha^\beta |h(t)|dt=\int_\alpha^\beta |f(t)-g(t)|dt\leqq\int_\alpha^\beta |f(t)-f(\alpha)|dt+\int_\alpha^\beta |g(t)-g(\alpha)|dt=$$

$$(5.16)\qquad =\int_0^{\beta-\alpha}|f(\alpha+t)-f(\alpha)|dt+\int_0^{\beta-\alpha}|g(\alpha+t)-g(\alpha)|dt.$$

Minthogy $\alpha\in P$, ezért (5. 16), (5. 9), (5. 13) alapján

$$\int_\alpha^\beta |h(t)|dt\leqq n_0\frac{\beta-\alpha}{\ln\frac{1}{\beta-\alpha}}+84n_0\frac{\beta-\alpha}{\ln\frac{1}{\beta-\alpha}}=85n_0\frac{\beta-\alpha}{\ln\frac{1}{\beta-\alpha}},$$

vagyis a $\frac{h(t)}{85n_0}$ függvény eleget tesz a 2. lemma feltételeinek. Ezért $h(t)$ Fourier-sora a P halmazon majdnem mindenütt konvergál. De minthogy $f(x)=g(x)+h(x)$, azért $f(x)$ Fourier-sora ugyancsak majdnem mindenütt konvergál a P halmazon. Ez ellene mond annak, hogy $P\subset E_{n_0}\subset E_1$.

Kimutatható, hogy a 13. tétel általában nem javítható. Érvényes ugyanis a következő

14. TÉTEL (MARCINKIEWICZ [21]). *Legyen a pozitív, nem-csökkenő páros $\omega(t)$ függvény olyan, hogy*

$$(5.17)\qquad \lim_{t\to 0}\omega(t)\ln\frac{1}{|t|}=+\infty,$$

akkor van olyan $f(x)\in L(0,2\pi)$ függvény, amelynek Fourier-sora a $[0,2\pi]$ szakaszon majdnem mindenütt divergál és

$$(5.18)\qquad \frac{1}{t}\int_0^t|f(x+u)-f(x)|du=O(\omega(t))$$

majdnem minden $x\in[0,2\pi]$ pontra.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $\lim_{t\to 0}\omega(t)=0$. (5. 17)-ből láthatjuk, hogy ez nem korlátozza a 14. tétel általános érvényét. Legyen

$$(5.19)\qquad \omega(t)=\frac{\varphi(t)}{\ln\frac{1}{|t|}}\qquad\left(|t|\leqq\frac{1}{3}\right).$$

(5. 17)-ből következik, hogy $\lim_{t\to 0}\varphi(t)=+\infty$. Könnyen meggyőződhetünk arról, hogy $\varphi(t)$-hez konstruálhatunk olyan pozitív, páros $\varphi_1(t)\leqq\varphi(t)$ függvényt,

amely csökken a $\left(0, \frac{1}{3}\right]$ intervallumban, és amelyre $\lim_{t\to 0} \varphi_1(t) = +\infty$. Legyen

$$\omega_1(t) = \frac{\varphi_1(t)}{\ln \frac{1}{|t|}}.$$

Világos, hogy $\omega(t) \geqq \omega_1(t)$ és $\lim_{t\to 0} \omega_1(t) \ln \frac{1}{|t|} = +\infty$ (l. (5. 19)).

Megmutatjuk, hogy fennáll a következő egyenlőtlenség:

$$\alpha\,\omega_1(t) \leqq \omega_1(\alpha t) \qquad \left(0 \leqq t \leqq \frac{1}{3}\right), \tag{5.20}$$

ahol $0 \leqq \alpha \leqq 1$. Valóban, a $t \ln \frac{1}{t}$ függvény monoton növekszik a $\left(0, \frac{1}{3}\right]$ intervallumban, és a $\varphi_1(t)$ függvény monoton csökken. Ezért az $\frac{\omega_1(t)}{t} = \frac{\varphi_1(t)}{t \ln \frac{1}{t}}$ függvény monoton csökken $\left(0, \frac{1}{3}\right]$-ban, azaz

$$\frac{\omega_1(t_1)}{t_1} > \frac{\omega_1(t_2)}{t_2}, \qquad \left(0 < t_1 < t_2 \leqq \frac{1}{3}\right). \tag{5.21}$$

Felhasználva (5. 21)-et, azt kapjuk, hogy

$$\alpha\,\omega_1(t) = \alpha t \frac{\omega_1(t)}{t} < \alpha t \frac{\omega_1(\alpha t)}{\alpha t} = \omega_1(\alpha t),$$

érvényes tehát az (5. 20) egyenlőtlenség.

Minthogy $\lim_{n\to\infty} \omega_1\left(\frac{1}{n}\right) \ln n = +\infty$, tudunk konstruálni olyan csökkenő $\{\varepsilon_n\}$ sorozatot, amelyre

$$1 \geqq \varepsilon_n \geqq \frac{1}{n}, \quad \lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \varepsilon_n^3 \omega_1\left(\frac{1}{n}\right) \ln n = +\infty. \tag{5.22}$$

Legyen most

$$f_n(x) = \varepsilon_n^2 \omega_1\left(\frac{1}{n}\right) \varphi_n(x) \qquad (n > \varepsilon), \tag{5.23}$$

ahol $\varphi_n(x)$ az 1. lemmában definiált Kolmogorov-féle függvény. Világos, hogy $f_n(x)$ a $[0, 2\pi]$ szakaszon korlátos variációjú és minden n-re és x-re

$$f_n(x) \geqq 0, \lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} f_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} 2\varepsilon_n^2 \omega_1\left(\frac{1}{n}\right) = 0. \tag{5.24}$$

(5. 23) alapján, valamint az 1. lemmához fűzött megjegyzés értelmében (l. (3. 14), (3. 16))

$$(5.25)\qquad \max_{m_n^{(n)}\geq p\geq m_1^{(n)}} |S_p(x,f_n)| \geq \varepsilon_n^3\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)\ln n-2$$

minden $x\in[0,2\pi]$-re, kivéve egy $O(\varepsilon_n)$-méretű halmazt ($m_1^{(n)}, m_2^{(n)},\dots, m_n^{(n)}$, az 1. lemmában bevezetett egész számokból álló sorozat). Felhasználva (5. 22)-t és (5. 25)-öt, azt kapjuk, hogy

$$(5.26)\qquad \lim_{n\to\infty} \operatorname{mes}_x E\{\max_{m_n^{(n)}\geq p\geq m_1^{(n)}} |S_p(x,f_n)|\geq M_n\}=2\pi,$$

ahol

$$(5.27)\qquad \lim_{n\to\infty} M_n=\lim_{n\to\infty}\left[\varepsilon_n^3\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)\ln n-2\right]=\infty.$$

Legyen

$$(5.28)\qquad D_n=\sum_{k=1}^{n-1}\left[A_k+\frac{\sqrt{\varepsilon_n}}{n}, A_{k+1}-\frac{\sqrt{\varepsilon_n}}{n}\right],$$

ahol $A_k=\frac{4\pi}{2n+1}k$. (5. 22)-ből, valamint (5. 28)-ból következik, hogy

$$(5.29)\qquad \lim_{n\to\infty}\operatorname{mes} D_n=2\pi.$$

Legyen $x_0\in\left[A_{k_0}+\frac{\sqrt{\varepsilon_n}}{n}, A_{k_0+1}-\frac{\sqrt{\varepsilon_n}}{n}\right]$. Világos, hogy

$$(5.30)\qquad \frac{1}{u}\int_0^u |f_n(x_0+t)-f_n(x_0)|\,dt=0,$$

midőn $0<|u|<\frac{\sqrt{\varepsilon_n}}{2n}$ (l. (5. 22)-t, valamint a $\varphi_n(x)$ függvénynek az 1. lemmában adott definícióját). Ha most $\frac{\sqrt{\varepsilon_n}}{2n}\leq|u|\leq\frac{1}{n}$, akkor (5. 28)-ból és (5. 20)-ból következik

$$\left|\frac{1}{u}\int_0^u |f_n(x_0+t)-f_n(x_0)|\,dt\right|=\left|\frac{1}{u}\int_0^u f_n(x_0+t)\,dt\right|\leq\frac{1}{|u|}\cdot\frac{2}{n}\varepsilon_n^2\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)\leq$$

$$(5.31)\qquad \leq 4\varepsilon_n\sqrt{\varepsilon_n}\cdot\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)\leq 8\varepsilon_n\omega_1\left(\frac{\sqrt{\varepsilon_n}}{2n}\right)\leq 8\varepsilon_n\omega\left(\frac{\sqrt{\varepsilon_n}}{2n}\right)\leq 8\varepsilon_n\omega(u).$$

Hasonlóképpen, ha $\frac{k}{n} \leqq |u| \leqq \frac{k+1}{n}$ $(k=1, 2, \ldots, n)$, akkor

$$\left|\frac{1}{u}\int_0^u |f_n(x_0+t)-f_n(x_0)|\,dt\right| = \left|\frac{1}{u}\int_0^u f_n(x_0+t)\,dt\right| \leqq \frac{1}{|u|}\cdot\frac{2(k+1)}{n}\cdot\varepsilon_n^2\omega_1\left(\frac{1}{n}\right) \leqq$$

(5.32)
$$\leqq \frac{2(k+1)}{k}\varepsilon_n^2\omega_1\left(\frac{1}{n}\right) \leqq 4\varepsilon_n\omega\left(\frac{1}{n}\right) \leqq 4\varepsilon_n\omega(u).$$

(5.30)—(5.32) alapján nyerjük, hogy minden $x\in D_n$-re érvényes az

(5.33)
$$\left|\frac{1}{u}\int_0^u |f_n(x+t)-f_n(x)|\,dt\right| \leqq 8\varepsilon_n\omega(u), \qquad \left(|u| \leqq \frac{1}{3}\right)$$

egyenlőtlenség. Legyen

(5.34)
$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_{n_k}(x).$$

Megmutatjuk, hogy ha az $\{n_k\}$ sorozatot alkalmas módon választjuk, akkor $f(x)$ a keresett függvény.

Legyenek a $4=n_1<n_2<\cdots<n_k$ számok már megválasztva. Az n_{k+1} számot oly nagyra választjuk, hogy teljesüljenek a következő feltételek:

(5.35)
$$n_k < n_{k+1}, \quad \varepsilon_{n_{k+1}} < \frac{1}{2^{k+1}},$$

(5.36)
$$\max_{1\leqq i\leqq k}\{\max_{x\in[0,2\pi]}[\max_{0\leqq p<\infty}|S_p(x, f_{n_i})|]\} \leqq \frac{M_{n_{k+1}}}{2k},$$

(5.37)
$$\int_0^{2\pi} f_{n_{k+1}}(x)\,dx \leqq \frac{1}{2^k\cdot m_{n_k}^{(n_k)}},$$

(5.38)
$$m_1^{(n_{k+1})} > m_{n_k}^{(n_k)}$$

(5.39)
$$mD_{n_{k+1}} > 2\pi - \frac{1}{2^{k+1}}.$$

Ez nyilván lehetséges (5.22), (5.24) és (5.29) alapján, valamint a korlátos variációjú $f_n(x)$ függvény Fourier-sora részletösszegeinek egyenletesen korlátos volta miatt (l. [40], 47. old.).

Minthogy $\int_0^{2\pi}\varphi_n(x)\,dx = 2$, ezért (5.23), (5.34), (5.35) alapján, valamint a B tételből következik, hogy az $f(x)$ függvénynek a $[0, 2\pi]$ szakaszon majdnem mindenütt van értelme, és hogy $f(x)\in L(0, 2\pi)$.

Megmutatjuk, hogy $f(x)$ Fourier-sora $[0, 2\pi]$-ben majdnem mindenütt divergál. Legyen

(5.40) $$E_n = \underset{x}{E}\{\max_{m_n^{(n)} \geqq p \geqq m_1^{(n)}} |S_p(x, f_n)| \geqq M_n\}.$$

Legyen $E = \overline{\lim_{n_k\to\infty}} E_{n_k}$. Világos, hogy $\operatorname{mes} E = 2\pi$ (l. (5.26)). Ha $x_0 \in E$, akkor $x_0 \in E_{n_k}$ végtelen sok n_{k_j}-re. Tekintsük az

(5.41) $$S_i(x_0, f) = \sum_{p=1}^{k_j-1} S_i(x_0, f_{n_p}) + S_i(x_0, f_{n_{k_j}}) + \sum_{p=k_j+1}^{\infty} S_i(x_0, f_{n_p})$$

részletösszegeket, ahol k_j olyan, hogy

$$m_{(n_{k_j-1})}^{(n_{k_j-1})} < i \leqq m_{(n_{k_j})}^{(n_{k_j})}.$$

(5.36) alapján

(5.42) $$\left|\sum_{p=1}^{k_j-1} S_i(x_0, f_{n_p})\right| \leqq \frac{M_{n_{k_j}}}{2}$$

minden i-re. De minthogy $x_0 \in E_{n_{k_j}}$, azért (5.40) alaján van olyan $i_{k_j} = i(x_0, n_{k_j})$ index, hogy

(5.43) $$|S_{i_{k_j}}(x_0, f_{n_{k_j}})| \geqq M_{n_{k_j}}$$

legyen. Megjegyezzük, hogy

(5.44) $$m_1^{(n_{k_j})} \leqq i_{k_j} \leqq m_{n_{k_j}}^{(n_{k+1})}.$$

Ismeretes, hogy

$$|S_p(x, \psi)| \leqq 4p \int_0^{2\pi} |\psi(x)| dx.$$

Ennélfogva (5.37), (5.38) és (5.44) miatt

(5.45) $$\left|\sum_{p=k_j+1}^{\infty} S_{i_{k_j}}(x_0, f_{n_p})\right| \leqq 4 i_{k_j} \sum_{p=k_j+1}^{\infty} \frac{1}{2^{p-1} \cdot m_{n_{p-1}}^{(n_{p-1})}} \leqq 4 \sum_{p=k_j+1}^{\infty} \frac{1}{2^{p-1}} \cdot \frac{m_{(n_{k_j})}^{(n_{k_j})}}{m_{n_{p-1}}^{(n_{p-1})}} \leqq 4.$$

Egybevetve (5.41)—(5.43)-at és (5.45)-öt, a

$$|S_{i_{k_j}}(x_0, f)| \geqq \frac{M_{n_{k_j}}}{2} - 4$$

becslést nyerjük, vagyis (5.27) alapján

(5.46) $$\overline{\lim_{i\to\infty}} |S_i(x_0, f)| = +\infty \qquad (x_0 \in E).$$

Az (5.46) egyenlőség azt jelenti, hogy az $f(x)$ függvény Fourier-sora E-n, vagyis $[0, 2\pi]$-ben majdnem mindenütt divergál.

Most megmutatjuk, hogy az $f(x)$ függvény eleget tesz az (5. 18) feltételnek is. Legyen $\varepsilon>0$ tetszés szerinti pozitív szám. Világos, hogy található olyan p, amely kielégíti az $\frac{1}{2^p}<\varepsilon$ egyenlőtlenséget. Legyen most $D_\varepsilon=\prod_{k=p+1}^{\infty} D_{n_k}$. Könnyen beláthatjuk, hogy $\operatorname{mes} D_\varepsilon \geqq 2\pi-\frac{1}{2^p}>2\pi-\varepsilon$. (L. (5. 39)). Az $f_{n_1}(x)$, $f_{n_2}(x),\ldots,f_{n_k}(x)$ függvényeknek véges sok szakadási pontjuk van $[0,2\pi]$-ben (l. az f_n és φ_n függvények definícióját). Ennélfogva a szakadási pontokat befedhetjük véges sok szakasszal, amelyek hosszúságának összege ε-nál kisebb. A megmaradó nyilt B_ε halmaz véges számú intervallumból áll, amelyek mindegyikén az $f_{n_k}(k=1,\ldots,p)$ függvények állandó értékűek. Legyen $A_\varepsilon=D_\varepsilon\cdot B_\varepsilon$. Világos, hogy $\operatorname{mes} A_\varepsilon>2\pi-2\varepsilon$. Legyen $x_0\in A_\varepsilon$. Megmutatjuk, hogy az x_0 pontban teljesül az (5. 18) feltétel. Mivel

$$f(x)=\sum_{k=1}^{p} f_{n_k}(x)+\sum_{k=p+1}^{\infty} f_{n_k}(x)=F_1(x)+F_2(x), \tag{5. 47}$$

(5. 33), (5. 35) alapján és $x_0\in D_\varepsilon$ következtében minden u-ra érvényes a következő egyenlőtlenség:

$$\left|\frac{1}{u}\int_0^u |F_2(x_0+t)-F_2(x_0)|\,dt\right| \leqq \sum_{k=p+1}^{\infty}\left|\frac{1}{u}\int_0^u |f_{n_k}(x_0+t)-f_{n_k}(x_0)|\,dt\right| \leqq \tag{5. 48}$$
$$\leqq \sum_{k=p+1}^{\infty} 8\varepsilon_{n_k}\omega(u) \leqq 4\omega(u).$$

De minthogy $x_0\in B_\varepsilon$, azért elegendő kis $\delta>0$-ra

$$\left|\frac{1}{u}\int_0^u |F_1(x_0+t)-F_1(x_0)|\,dt\right| \leqq \sum_{k=1}^{p}\left|\frac{1}{u}\int_0^u |f_{n_k}(x_0+t)-f_{n_k}(x_0)|\,dt\right|=0< \tag{5. 49}$$
$$<4\omega(u),$$

hacsak $0<|u|\leqq\delta$. Így (5. 47)—(5. 49) alapján

$$\left|\frac{1}{u}\int_0^u |f(x_0+t)-f(x_0)|\,dt\right| \leqq 8\omega(u) \qquad (|u|\leqq\delta) \tag{5. 50}$$

minden $x_0\in A_\varepsilon$-ra. (5. 50)-ből következik, hogy van olyan véges $C(x_0)$ szám, amelynek a következő tulajdonsága van:

$$\left|\frac{1}{u}\int_0^u |f(x_0+t)-f(x_0)|\,dt\right| \leqq C(x_0)\omega(u), \tag{5.51}$$

hacsak $u \in (0, 2\pi]$ és $x_0 \in A_\varepsilon$, vagyis az x_0 pontban érvényes (5. 18). De minthogy ε tetszés szerinti pozitív szám volt, és

$$\text{mes } A_\varepsilon > 2\pi - \varepsilon,$$

ez egyúttal azt jelenti, hogy az (5. 51) egyenlőtlenség majdnem minden $x_0 \in [0, 2\pi]$-re érvényes, és ezzel a 14. tételt bebizonyítottuk.

6. §. H_1-osztálybeli divergens sorok

Elöljáróban bebizonyítjuk a következő lemmát.

3. LEMMA. *Minden egész $n \geqq 2$ számhoz lehet találni olyan $T_n(x)$ trigonometrikus polinomot, olyan $E_n \subset [0, 2\pi]$ halmazt és olyan $M_n > 0$ számot, hogy teljesüljenek a következő feltételek:*

1. $T_n(x) \geqq 0$, *ha* $x \in [0, 2\pi)$,
2. $\int\limits_0^{2\pi} T_n(x)\, dx = \pi$,
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \text{mes } E_n = 2\pi$, $\lim\limits_{n\to\infty} M_n = \infty$,
4. *minden* $x_0 \in E_n$*-hez található olyan* p_{n, x_0} *index, hogy*

$$|S_{p_n, x_0}(x_0, T_n)| \geqq M_n$$

legyen, ahol $S_k(x, T_n)$ a $T_n(x)$ polinom Fourier-sorának k-adik részletösszege (l. [8], 70—72.).

B i z o n y í t á s: Legyen $A_k = \frac{4\pi}{2n+1} k$, ahol $k = 0, 1, \ldots, n$. Adott n-hez könnyen szerkeszthetünk olyan $n+1$ számból álló $m_0 < m_1 < \cdots < m_n$ sorozatot, hogy

$$\text{(6. 1)} \qquad \begin{aligned} &\text{a)} \quad m_0 \geqq n^4, \\ &\text{b)} \quad m_{k+1} > 2m_k, \\ &\text{c)} \quad 2m_k + 1 = \lambda_k(2n+1) \end{aligned}$$

legyen, ahol λ_k egész szám. Legyen

$$\text{(6. 2)} \qquad T_n(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} K_{m_i}(x - A_i),$$

ahol $K_i(t)$ a Fejér-féle mag, más szóval

$$\text{(6. 3)} \qquad K_i(t) = \frac{1}{2(i+1)} \left[\frac{\sin\,(i+1)\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}} \right]^2 = \frac{1}{2} + \sum_{j=1}^{i} \frac{i+1-j}{i+1} \cos jt$$

(l. [40], 45.). (6. 2)-ből és (6.3)-ból következik, hogy $T_n(x)$ olyan m_n-edrendű trigonometrikus polinom, amely kielégíti a 3. lemma 1. és 2. feltételeit. Világos, hogy

$$S_{m_k}(x, T_n) = \frac{1}{n+1}\left[\sum_{i=0}^{k} K_{m_i}(x-A_i) + \sum_{i=k+1}^{n}\left\{\frac{1}{2} + \sum_{j=1}^{m_k}\frac{m_i+1-j}{m_i+1}\cos j(x-A_i)\right\}\right] =$$

$$= \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{k} K_{m_i}(x-A_i) +$$

$$+ \frac{1}{n+1}\sum_{i=k+1}^{n}\left\{\frac{1}{2} + \sum_{j=1}^{m_k}\frac{(m_k+1-j)+m_i-m_k}{m_i+1}\cos j(x-A_i)\right\} =$$

$$= \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{k} K_{m_i}(x-A_i) +$$

$$+ \frac{1}{n+1}\sum_{i=k+1}^{n}\left\{\frac{1}{2} + \frac{m_k+1}{m_i+1}\sum_{j=1}^{m_k}\frac{m_k+1-j}{m_k+1}\cos j(x-A_i)\right\} +$$

$$+ \frac{1}{n+1}\sum_{i=k+1}^{n}\frac{m_i-m_k}{m_i+1}\sum_{j=1}^{m_k}\cos j(x-A_i) = \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{k} K_{m_i}(x-A_i) +$$

$$+ \frac{1}{n+1}\sum_{i=k+1}^{n}\left\{\frac{1}{2} + \frac{m_k+1}{m_i+1}\left[K_{m_k}(x-A_i) - \frac{1}{2}\right]\right\} +$$

$$+ \frac{1}{n+1}\sum_{i=k+1}^{n}\frac{m_i-m_k}{m_i+1}\left[D_{m_k}(x-A_i) - \frac{1}{2}\right] =$$

$$= \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{k} K_{m_i}(x-A_i) + \frac{1}{n+1}\sum_{i=k+1}^{n}\frac{m_k+1}{m_i+1}K_{m_k}(x-A_i) +$$

$$+ \frac{1}{n+1}\sum_{i=k+1}^{n}\frac{m_i-m_k}{m_i+1}D_{m_k}(x-A_i) = \sum\nolimits_{k,1} + \sum\nolimits_{k,2} + \sum\nolimits_{k,3},$$

mert

$$\text{(6. 4)} \qquad \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{m_k+1}{m_i+1} = \frac{1}{2}\frac{m_i-m_k}{m_i+1}.$$

Legyen most $\Delta_k = (A_k + n^{-2}, A_{k+1} - n^{-2})$ $(k = 0, 1, \dots (n-1))$ egymást nem metsző intervallumok rendszere. Becsüljük meg $\sum_{k,i}$-t $(i = 1, 2, 3)$, ha $x \in \Delta_k$. Minthogy $K_i(t) = O\left(\frac{1}{it^2}\right)$ (l. [40], 48.), azért (6. 1) alapján, ha $x \in \Delta_k$ és $i \leqq k$:

$$K_{m_i}(x-A_i) = O\left(\frac{1}{m_i(x-A_i)^2}\right) = O\left(\frac{n^4}{m_i}\right) = O(1).$$

Ezért

$$\text{(6. 5)} \qquad \sum\nolimits_{k,1} = O(1).$$

Hasonlóképpen, ha $x \in \Delta_k$:

$$\sum_{k,2} = \frac{1}{n+1} \sum_{i=k+1}^{n} \frac{m_k+1}{m_i+1} K_{m_k}(x-A_i) = \frac{1}{n+1} \sum_{i=k+1}^{n} \frac{m_k+1}{m_i+1} O\left(\frac{1}{m_k(x-A_i)^2}\right) =$$

$$(6.6) \qquad = \frac{1}{n+1} \sum_{i=k+1}^{n} O\left(\frac{n^4}{m_i+1}\right) = \frac{1}{n+1} \sum_{i=k+1}^{n} O(1) = O(1).$$

(6.4)—(6.6) alapján kapjuk, hogy

$$(6.7) \qquad |S_{m_k}(x, T_n)| > \left|\sum_{k,3}\right| - O(1), \qquad (x \in \Delta_k).$$

(6.1)-ből pedig:

$$\sin\left(m_k + \frac{1}{2}\right)(x-A_i) = \sin\left[\left(m_k + \frac{1}{2}\right)(x-A_{k+1}) + \left(m_k + \frac{1}{2}\right)\frac{k+1-i}{2n+1} 4\pi\right] =$$

$$= \sin\left(m_k + \frac{1}{2}\right)(x-A_{k+1}).$$

Ennélfogva

$$(6.8) \qquad \sum_{k,3} = \frac{1}{n+1} \sin\left(m_k + \frac{1}{2}\right)(A_{k+1}-x) \sum_{i=k+1}^{n} \frac{m_i-m_k}{m_i+1} \frac{1}{2\sin\frac{1}{2}(A_i-x)}.$$

Legyen most $k < n - \sqrt{n}$. Akkor, ha $x \in \Delta_k$, (6.1) alapján

$$\sum_{i=k+1}^{n} \frac{m_i-m_k}{m_i+1} \frac{1}{2\sin\frac{1}{2}(A_i-x)} \geqq \sum_{i=k+1}^{n} \frac{m_i - \frac{m_i-1}{2}}{m_i+1} \frac{1}{A_i-x} \geqq$$

$$\geqq \frac{1}{2} \sum_{i=k+1}^{n} \frac{1}{A_i-A_k} = \frac{2n+1}{8\pi} \sum_{i=k+1}^{n} \frac{1}{i-k} = \frac{2n+1}{8\pi} \sum_{i=1}^{n-k} \frac{1}{i} \geqq \frac{2n+1}{8\pi} \ln(n-k) \geqq$$

$$(6.9) \qquad \geqq \frac{2n+1}{8\pi} \ln \sqrt{n} = \frac{2n+1}{16\pi} \ln n$$

következik. Ennélfogva $k < n - \sqrt{n}$-re és $x \in \Delta_k$-ra

$$|S_{m_k}(x, T_n)| \geqq \frac{(2n+1)}{16\pi} \cdot \frac{\ln n}{n+1} \left|\sin\left(m_k + \frac{1}{2}\right)(A_{k+1}-x)\right| - O(1) \geqq$$

$$(6.10) \qquad \geqq \frac{\ln n}{16\pi} \left|\sin\left(m_k + \frac{1}{2}\right)x\right| - O(1)$$

(l. (6.1) c) pontját). Most definiáljuk a következő halmazt:

$$(6.11) \qquad E_n = \sum_{k=0}^{[n-\sqrt{n}]} \left\{ \Delta_k \cdot \mathop{E}_{x}\left[\left|\sin\left(m_k + \frac{1}{2}\right)x\right| > \frac{1}{\sqrt{\ln n}}\right] \right\}.$$

(6. 10)-ből és (6. 11)-ből következik, hogy

$$|S_{m_k}(x_0, T_n)| \geqq \frac{\sqrt{\ln n}}{16\pi} - O(1) \geqq \frac{\sqrt{\ln n}}{16\pi} - C = M_n,$$

hacsak

$$x_0 \in \Delta_k \cdot \underset{x}{E}\left[\left|\sin\left(m_k + \frac{1}{2}\right)x\right| > \frac{1}{\sqrt{\ln n}}\right] \subset E_n,$$

ahol C valamilyen n-től független állandó.

Megmutatjuk, hogy $\text{mes}\, E_n \to 2\pi$. Valóban,

$$\text{mes}\left\{\sum_{k=0}^{[n-\sqrt{n}]} \Delta_k\right\} = \frac{4\pi}{2n+1}[n-\sqrt{n}] - \frac{2}{n^2}[n-\sqrt{n}] \to 2\pi.$$

Az E_n halmazt a $\sum\limits_{k=0}^{[n-\sqrt{n}]} \Delta_k$ halmazból úgy kapjuk, hogy mindegyik Δ_k-ból $(k=0, 1, \ldots, [n-\sqrt{n}])$ kizárjuk azokat az x pontokat, amelyekben

$$\left|\sin\left(m_k + \frac{1}{2}\right)x\right| \leqq \frac{1}{\sqrt{\ln n}}. \tag{6. 12}$$

De $m_k \geqq n^4$ (l. (6. 1)) és a Δ_k szakasz hosszúsága $\frac{4\pi}{2n+1} - \frac{2}{n^2}$. Ennélfogva annak a halmaznak a mértéke, amelyet kizártunk $\sum\limits_{k=0}^{[n-\sqrt{n}]} \Delta_k$-ból,

$$\sum_{k=0}^{[n-\sqrt{n}]} O\left(\frac{1}{n\sqrt{\ln n}}\right) = O\left(\frac{1}{\sqrt{\ln n}}\right)$$

nagyságrendű, tehát nullához tart, midőn $n \to \infty$. Ennélfogva $\text{mes}\, E_n \to 2\pi$. És minthogy $M_n \to \infty$, ezért a 3. és 4. követelmények is teljesülnek, s így a 3. lemmát teljesen bebizonyítottuk.

15. TÉTEL (HARDY, ROGOSINSKI, SUNOUCHI). *Van olyan $f(x) \in L(0, 2\pi)$ függvény, hogy $\bar{f}(x) \in L(0, 2\pi)$ legyen és az $f(x)$ és $\bar{f}(x)$ függvények Fourier-sorai a $[0, 2\pi]$ szakaszon majdnem mindenütt divergáljanak* (l. [8], 72. és [36]).

Bizonyítás. Minthogy $\lim\limits_{n\to\infty} M_n = \infty$, ahol M_n a 3. lemmából való, azért az $\{M_n\}$ sorozatból ki lehet választani olyan $\{M_{n_k}\}$ részsorozatot, hogy

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{M_{n_k}}} < \infty \tag{6. 13}$$

legyen. Tekintsük a $T_{n_k}(x)$ polinomok sorozatát. Írjuk fel a $T_{n_k}(x)$ valós polinomot exponenciális alakban:

$$T_{n_k}(x)=\sum_{l=-m_{n_k}}^{m_{n_k}} c_l^{(k)} e^{ilx} \qquad (k=1,2,\ldots). \tag{6.14}$$

Válasszuk meg a ν_k egész számokat úgy, hogy fennálljanak az alábbi egyenlőtlenségek:

$$\nu_1 > m_{n_1},\quad \nu_2 > \nu_1+m_{n_1}+m_{n_2},\ldots,\quad \nu_k > \nu_{k-1}+m_{n_{k-1}}+m_{n_k},\ldots$$

A ν_k számok ilyen megválasztása esetén a

$$P_{n_k}(x)=\frac{e^{i\nu_k x}}{\sqrt{M_{n_k}}}T_{n_k}(x)=\frac{1}{\sqrt{M_{n_k}}}\sum_{l=-m_{n_k}}^{m_{n_k}} c_l^{(k)} e^{i(l+\nu_k)x} \tag{6.15}$$

polinomoknak nincsenek egyforma tagjaik. Írjuk fel formálisan a következő sort:

$$\sum_{k=1}^{\infty} P_{n_k}(x). \tag{6.16}$$

Minthogy

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{2\pi}|P_{n_k}(x)|\,dx=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{M_{n_k}}}\int_0^{2\pi}|T_{n_k}(x)|\,dx=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\pi}{\sqrt{M_{n_k}}}<\infty$$

(l. 3. lemma, (6. 13)—(6. 15)), ezért B. Levi tétele szerint (B tétel) a (6. 16) sor majdnem mindenütt konvergál egy komplex $F(x)=f_1(x)+if_2(x)$ függvényhez. Megmutatjuk, hogy a valós $f_1(x)$ függvény a keresett függvény. A (6. 16) sor tagonként integrálható e^{-ikx}-szel való szorzás után is és így az $F(x)$ függvény komplex Fourier-sorát (6. 16)-ból úgy kapjuk, hogy a $P_{n_k}(x)$ polinomokat e^{ikx} növekvő rendjében csoportosítjuk át. Ennélfogva

$$F(x)\sim\sum_{k=1}^{\infty}c_k e^{ikx},\quad c_k=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}F(x)e^{-ikx}\,dx \qquad (k=1,2,\ldots). \tag{6.17}$$

Bebizonyítjuk, hogy a (6. 17) sor majdnem mindenütt divergál. Legyen $E=\overline{\lim_{k\to\infty}}E_{n_k}$. Világos, hogy mes $E=2\pi$ (l. 3. lemma). Legyen $x_0\in E$. Ekkor az x_0 pont végtelen sok E_{n_k}-ban benne van, vagyis $x_0\in E_{n_{k_s}}$ $(s=1,2,\ldots)$. $P_{n_{k_s}}(x)$ tagjai a (6. 17) sorban az e^{ikx} exponenciális tagok növekedő rendjében fognak előfordulni. Ezért a 3. lemma szerint az x_0 ponthoz található végtelen sok $\alpha_s<\beta_s$ számpár, amelyekre

$$\left|\sum_{\nu=\alpha_s}^{\beta_s} c_\nu e^{i\nu x_0}\right|\geqq\sqrt{M_{n_{k_s}}}. \tag{6.18}$$

Ez azonban azt jelenti, hogy a Cauchy-féle konvergenciakritérium nem teljesül, vagyis a (6. 17) sor az x_0 pontban divergál. Ezen túlmenően (6. 18)-ból következik, hogy majdnem minden $x_0 \in [0, 2\pi]$ pontban

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left| \sum_{k=1}^{n} c_k e^{ikx_0} \right| = +\infty. \tag{6. 19}$$

Legyen most $c_k = a_k - i\, b_k\, (k = 1, 2, \ldots)$, ahol a_k és b_k valós számok. A (6. 17) sort írhatjuk a következő alakban is:

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{ikx} = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) + i \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \sin kx - b_k \cos kx). \tag{6. 20}$$

Ugyanúgy, mint fent, a (6. 16) sort $\cos kx$-szel megszorozva és integrálva azt kapjuk, hogy

$$\int_0^{2\pi} F(x) \cos kx\, dx = \int_0^{2\pi} [f_1(x) + i f_2(x)] \cos kx\, dx = (a_k - i\, b_k)\pi.$$

Hasonlóképpen

$$\int_0^{2\pi} F(x) \sin kx\, dx = \int_0^{2\pi} [f_1(x) + i f_2(x)] \sin kx\, dx = (a_k - i\, b_k)\pi i.$$

Ezekből az egyenlőségekből következik, hogy

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_1(x) \cos kx\, dx = a_k, \qquad \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_1(x) \sin kx\, dx = b_k,$$

és

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_2(x) \cos kx\, dx = -b_k, \qquad \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_2(x) \sin kx\, dx = a_k,$$

vagyis a $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ sor az $f_1(x) \in L(0, 2\pi)$ függvény Fourier-sora, a $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k \sin kx - b_k \cos kx)$ sor pedig az $f_2(x) \in L(0, 2\pi)$ függvény Fourier-sora. A második sor azonban az első konjugált sora, ezért $\bar{f}_1(x) = f_2(x)$ majdnem minden $x \in [0, 2\pi]$-re. Ily módon

$$F(x) = f_1(x) + i \bar{f}_1(x).$$

Kiindulva (6. 19)-ből, a (6. 20) egyenlőségből, valamint Kuttner tételének (H tétel) következményéből, meggyőződhetünk arról, hogy a (6. 20) alatti Fourier-sorok, melyek egymásnak konjugáltjai, majdnem mindenütt divergálnak a $[0, 2\pi]$ szakaszon. Ennélfogva $f(x)$ függvény gyanánt vehetjük az $f_1(x)$ függvényt. Ezzel a 15. tételt teljesen bebizonyítottuk.

Következmény. *A* (6. 17) *sorban helyettesítsük az* e^{ikx} *függvényt az*

$$r^k e^{ikx} = (re^{ix})^k = z^k$$

függvénnyel, ahol $z = re^{ix}$ *és* $0 \leqq r < 1$. *Ily módon kapunk egy*

$$\Phi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k \qquad (|z| < 1) \tag{6.21}$$

analitikus függvényt, amely a H_1*-osztályhoz tartozik és amelynél a* (6. 21) *sor majdnem mindenütt divergál a* $|z| = 1$ *egységkör peremén.*

A 15. tétel alapján csupán azt kell megmutatnunk, hogy $\Phi(z) \in H_1$, vagyis

$$\int_0^{\pi} |\Phi(r \cdot e^{ix})| dx \leqq C < \infty \qquad (0 \leqq r < 1),$$

ahol C r-től független állandó. Minthogy $F(x) = f_1(x) + i\bar{f_1}(x) \in L(0, 2\pi)$, azért

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \sum_{k=1}^{\infty} r^k (c_k e^{ikx}) = \sum_{k=1}^{\infty} r^k (a_k \cos kx + b_k \sin kx) + \\ &+ i \sum_{k=1}^{\infty} r^k (a_k \sin kx - b_k \cos kx) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [f_1(t) + i\bar{f_1}(t)] \frac{1-r^2}{1-2r\cos(t-x)+r^2} dt, \end{aligned} \tag{6.22}$$

ahol $0 \leqq r < 1$ (l. [40], 51.). (6. 22), valamint Fubini tétele alapján (l. [28], 296—302.) azonnal következik

$$\int_0^{2\pi} |\Phi(re^{ix})| dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} \{f_1(t) + i\bar{f_1}(t)\} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(t-x)+r^2} dt \right| dx \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} |f_1(t) + i\bar{f_1}(t)| \frac{1-r^2}{1-2r\cos(t-x)+r^2} dt\, dx =$$

$$= \int_0^{2\pi} |f_1(t) + i\bar{f_1}(t)| \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(t-x)+r^2} dx \right\} dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} |f_1(t) + i\bar{f_1}(t)| dt = C < \infty.$$

Megjegyzés. Megpróbáljuk kideríteni azokat az okokat, amelyek miatt $f(x) \in L(0, 2\pi)$ és $\bar{f}(x) \in L(0, 2\pi)$.

A 3. lemma szerint, úgy mint a 8. tételben konstruálhatnánk egy

$$\psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{M_{n_k}}} T_{n_k}(x) \tag{6.23}$$

függvényt, amely Lebesgue szerint integrálható és amelynek Fourier-sora majdnem mindenütt divergál $[0, 2\pi]$-ben. Ebben az esetben a $\bar{\psi}(x)$ függvény nem lenne Lebesgue szerint integrálható, és ennélfogva $\psi(x)$ Fourier-sorának konjugált sora nem lenne Fourier-sor.

Megmutatjuk, hogy $\bar{\psi}(x) \notin L(0, 2\pi)$. Tegyük fel az ellenkezőt, hogy ti. $\bar{\psi}(x) \in L(0, 2\pi)$. Azonban $\psi(x) \geqq 0$, ennélfogva az E tételből következik, hogy

$$\psi(x) \ln^+ \psi(x) \in L(0, 2\pi). \tag{6.24}$$

Világos, hogy $\frac{\pi}{2n} \leqq x \leqq \frac{\pi}{n}$-re

$$K_n(x) = \frac{1}{2(n+1)} \left[\frac{\sin (n+1)\frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \right]^2 \geqq C n, \tag{6.25}$$

ahol C pozitív állandó. (6.24) és (6.25)-ből következik

$$\infty > \int_0^{2\pi} \psi(x) \ln^+ \psi(x)\, dx =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{M_{n_k}}} \int_0^{2\pi} T_{n_k}(x) \ln^+ \psi(x)\, dx \geqq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{M_{n_k}}} \int_0^{2\pi} T_{n_k}(x) \ln^+ \frac{T_{n_k}(x)}{\sqrt{M_{n_k}}}\, dx \geqq$$

$$\geqq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{M_{n_k}}} \sum_{i=0}^{n_k} \frac{1}{n_k+1} \int_0^{2\pi} K_{m_i}(x - A_i) \ln^+ \frac{T_{n_k}(x)}{\sqrt{M_{n_k}}}\, dx \geqq$$

$$\geqq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{M_{n_k}}} \sum_{i=0}^{n_k} \frac{1}{n_k+1} \int_{A_i + \frac{\pi}{2m_i}}^{A_i + \frac{\pi}{m_i}} K_{m_i}(x - A_i) \ln^+ \frac{K_{m_i}(x - A_i)}{(n_k+1)\sqrt{M_{n_k}}}\, dx \geqq$$

$$\geqq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{M_{n_k}}} \sum_{i=0}^{n_k} \frac{1}{n_k+1} \int_{A_i + \frac{\pi}{2m_i}}^{A_i + \frac{\pi}{m_i}} C m_i \ln \frac{C m_i}{(n_k+1)\sqrt{M_{n_k}}}\, dx \geqq C_1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln n_k}{\sqrt{M_{n_k}}} = \infty,$$

mert $m_i \geqq n_k^4$ és $M_{n_k} = \frac{\sqrt{\ln n_k}}{16\pi} - C_2$. Így ellentmondáshoz jutnánk, tehát $\overline{\psi}(x) \notin L(0, 2\pi)$.

Az $f_1(x)$ függvényt a (23) sorból úgy kaptuk (l. a 15. tétel bizonyítását), hogy mindegyik összeadandót szoroztuk $\cos \nu_k x$-szel, ahol a ν_k-kat speciális módon választottuk. Így az új sor tagjai a következő alakúak:

$$\cos \nu_k x \frac{T_{n_k}(x)}{\sqrt{M_{n_k}}} \qquad (\nu_k > m_{n_k}), \tag{6.26}$$

vagyis már nem nem-negatív függvények. Az A_i pont környezetében a (6. 26) kifejezés közelítően úgy viselkedik, mint

$$\cos \nu_k x \frac{1}{(n_k+1)\sqrt{M_{n_k}}} K_{m_i}(x - A_i),$$

ahol m_i néhányszor kisebb, mint m_{n_k}, midőn $i < n_k$. De minthogy $\nu_k > m_{n_k}$, ezért ez azt jelenti, hogy az A_i pont környezetében a (6. 26) függvény mintegy „fésűként" viselkedik, amelynek magas fogai felfelé és lefelé váltakoznak. Szemmelláthatóan a

$$\sum_{k=1}^{\infty} \cos \nu_k x \frac{T_{n_k}(x)}{\sqrt{M_{n_k}}} = f(x)$$

sor tagjainak ez a viselkedése biztosítja az $\overline{f}(x)$ függvény integrálhatóságát.

7. §. Fourier-Lebesgue-sorok konvergencia- és divergenciahalmazai

A konvergencia- és divergenciahalmazok definícióját a **2.** §-ban adtuk meg. Most bebizonyítjuk a 4. lemmát, amelyre szükségünk lesz Zeller tételének a bizonyításánál (l. [39]).

4. LEMMA. *Legyen* $[a, b] \subset (0, 2\pi)$, $[c, d] \subset (a, b)$, *legyen továbbá* $\varepsilon > 0$ *tetszőlegesen kicsi, N pedig tetszőlegesen nagy szám. Ekkor van olyan*

$$T_\varepsilon(x) = \sum_{k=p}^{q}{}' (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \tag{7.1}$$

trigonometrikus polinom, amelyre

$$q \geqq p \geqq N, \quad \int_0^{2\pi} |T_\varepsilon(x)|\, dx < \varepsilon, \tag{7.2}$$

a részletösszegek pedig eleget tesznek a

$$|S_k(x, T_\varepsilon)| < \varepsilon \tag{7.3}$$

feltételnek minden k-ra és $x \in [0, 2\pi] - [a, b]$*-re; ha pedig* $x \in [c, d]$*, akkor található olyan* k_x *index, hogy*

$$|S_{k_x}(x, T_\varepsilon)| > \frac{1}{\varepsilon} \tag{7.4}$$

legyen.

Bizonyítás. A 10. tétel értelmében van olyan $f(x) \in L(0, 2\pi)$ függvény, amelynek Fourier-sora mindenütt nem-korlátosan divergál. Legyen

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x), & \text{ha } x \in [c, d], \\ 0, & \text{ha } x \in [0, 2\pi] - [c, d]. \end{cases}$$

Riemann lokalizációs tétele szerint $f_1(x)$ Fourier-sora nem-korlátosan divergál (c, d)-ben és konvergál $[0, 2\pi] - [c, d]$-ben. Ha $f_1(x)$ Fourier-sora nem-korlátosan divergál a c, d pontokban is, akkor legyen $\varphi(x) = f_1(x)$. Ha pedig $f_1(x)$ Fourier-sora a c pontban (és esetleg a d pontban is) nem volna nem-korlátosan divergáló, akkor legyen $\varphi(x) = f_1(x) + \tau(x)$, ahol $\tau(x)$ olyan folytonos függvény, melynek Fourier-sora nem-korlátosan divergál az $x \equiv c \pmod{2\pi}$ pontokban (ha esetleg szükséges, az $x \equiv d \pmod{2\pi}$ pontokban is), a többi pontban pedig konvergál, emellett $\tau(x) = 0$, ha $x \in [0, 2\pi] - [c, d]$ (l. az 5. tétel következményét).

A $\varphi(x)$ függvény Fourier-sora $[c, d]$-ben mindig nem-korlátosan divergál és $\varphi(x) = 0$, ha $x \in [0, 2\pi] - [c, d]$. Legyen

$$\delta = \min\{1, a, c-a, b-d\}, \quad M = \frac{1}{\varepsilon} + 3\varepsilon, \quad \|\varphi\| = \int_0^{2\pi} |\varphi(x)|\, dx,$$

$$\psi(x) = \frac{\delta\varepsilon\, \varphi(x)}{2^{10} N \|\varphi\|}.$$

Világos, hogy

$$\int_0^{2\pi} |\psi(x)|\, dx = \frac{\delta\varepsilon}{2^{10} N}. \tag{7.5}$$

Minthogy a $\psi(x)$ függvény Fourier-sora nem-korlátosan divergál a $[c, d]$ szakaszon, azért minden $x \in [c, d]$-re található olyan $n_x \geqq N$ index, hogy

$$|S_{n_x}(x, \psi)| > M \tag{7.6}$$

legyen. Azonban $S_{n_x}(t, \psi)$ trigonometrikus polinom, s ezért (7.6)-ból következik, hogy minden $x \in [c, d]$-re létezik az alábbi tulajdonságú $(x - \eta_x, x + \eta_x)$ környezet:

$$|S_{n_x}(t, \psi)| > M,$$

ha $t \in (x - \eta_x, x + \eta_x)$. Ily módon a $[c, d]$ szakaszt lefedhetjük intervallumok egy végtelen rendszerével, amelyből a Heine—Borel-tétel szerint kiválaszthatunk véges számú intervallumot, amelyek szintén lefedik $[c, d]$-t. Ennélfogva található olyan L szám, hogy

$$|S_{n_x}(x, \psi)| > M, \tag{7.7}$$

ha $x \in [c, d]$, ahol $N \leqq n_x < L$. Azonban $\psi(x) \in L(0, 2\pi)$ és $\psi(x) = 0$, ha $x \in [0, 2\pi] - [c, d]$. Ennélfogva található olyan folytonosan differenciálható, 2π-szerint periodikus $\alpha(x)$ függvény, amelyre

$$\alpha(x) = 0, \quad \text{ha} \quad x \in [0, 2\pi] - [c, d], \quad \|\psi - \alpha\| < \frac{\delta\varepsilon}{2^{10}L}. \tag{7.8}$$

De minthogy $\int\limits_0^{2\pi} \alpha'(x)\, dx = 0$, ezért az $\alpha'(x)$ függvényt tetszőleges pontossággal megközelíthetjük bizonyos $m \geqq L$ fokszámú $\beta(x)$ trigonometrikus polinommal, amelynek állandó tagja zérus. Legyen

$$\max_{x \in [0, 2\pi]} |\alpha'(x) - \beta(x)| < \frac{\delta\varepsilon}{2^{10}L}, \tag{7.9}$$

és legyen továbbá

$$\gamma(x) = \int\limits_0^x \beta(t)\, dt = \sum_{k=0}^{m} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \qquad (m \geqq L),$$

ahol

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} \gamma(x)\, dx, \quad a_k = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} \gamma(x) \cos kx\, dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} \gamma(x) \sin kx\, dx \ (k \geqq 1).$$

(7.9)-ből következik, hogy

$$\max_{x \in [0, 2\pi]} |\alpha(x) - \gamma(x)| < \frac{\delta\varepsilon}{2^7 \cdot L}, \quad \|\alpha - \gamma\| < \frac{\delta\varepsilon}{2^4 \cdot L}. \tag{7.10}$$

Így tehát (l. (7.8) és (7.10))

$$\|\psi - \gamma\| < \frac{\delta\varepsilon}{2^3 \cdot L}, \tag{7.11}$$

és ezért (l. (7.5))

$$\|\gamma\| < \frac{\delta\varepsilon}{2^2 N}. \tag{7.12}$$

A (7.9) és (7.10) egyenlőtlenségekből következik

$$|\gamma(x)| < \frac{\delta\varepsilon}{2^7 L}, \quad |\gamma'(x)| = |\beta(x)| < \frac{\delta\varepsilon}{2^{10} L}, \quad \text{ha} \quad x \in [0, 2\pi] - [c, d], \tag{7.13}$$

mert hiszen $\alpha(x) = \alpha'(x) = 0$, midőn $x \in [0, 2\pi] - [c, d]$.

Legyen most

$$T_\varepsilon(x) = \sum_{k=N}^{m} (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Megmutatjuk, hogy ez a trigonometrikus polinom eleget tesz a 4. lemma minden követelményének. Valóban, (7. 12)-ből következik

$$\int_0^{2\pi} |T_\varepsilon(x)|\, dx = \int_0^{2\pi} \left| \gamma(x) - \sum_{k=0}^{N-1} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \right| dx \leqq$$

$$\leqq (2N+1) \int_0^{2\pi} |\gamma(x)|\, dx \leqq (2N+1) \frac{\delta\varepsilon}{2^2 N} < \varepsilon,$$

vagyis a 4. lemma (7. 2) feltétele teljesül.

Legyen $x \in [c, d]$. Akkor (7. 7), (7. 12) és (7. 11) alapján következik

$$|S_{n_x}(x, T_\varepsilon)| = \left| S_{n_x}(x, \gamma) - \sum_{k=0}^{N-1} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \right| \geqq$$

$$\geqq |S_{n_x}(x, \psi)| - |S_{n_x}(x, \psi - \gamma)| - 2N \int_0^{2\pi} |\gamma(x)|\, dx \geqq$$

$$\geqq M - (2n_x + 1) \|\psi - \gamma\| - 2N \frac{\delta\varepsilon}{2^2 N} \geqq \frac{1}{\varepsilon} + 3\varepsilon - (2L+1) \frac{\delta\varepsilon}{2^3 L} - \frac{\varepsilon}{2} > \frac{1}{\varepsilon},$$

vagyis fennáll a (7. 4) egyenlőtlenség.

Minthogy $\left| \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kx}{k} \right| < 2^2 \pi$ minden n-re és x-re, azért

$$\left| \int_{t_1}^{t_2} D_n(t)\, dt \right| = \left| \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{1}{2} + \cos t + \cdots + \cos nt \right) dt \right| < \pi + 2^3 \pi < 2^5 \tag{7. 14}$$
$$(0 \leqq |t_2 - t_1| \leqq 2\pi).$$

Tekintsünk egy $x \in [0, a] + [b, 2\pi]$ pontot és becsüljük meg az $S_n(x, T_\varepsilon)$ részletösszeget tetszőleges n-re. Világos, hogy

$$\begin{aligned} S_n(x, \gamma) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \gamma(t) D_n(t-x)\, dt = \frac{1}{\pi} \int_{x-\delta}^{2\pi+x-\delta} \gamma(t) D_n(t-x)\, dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{x-\delta}^{x+\delta} + \frac{1}{\pi} \int_{x+\delta}^{2\pi+x-\delta} = J_1(x) + J_2(x). \end{aligned} \tag{7. 15}$$

Parciálisan integrálva, továbbá (7. 13) és (7. 14) alapján azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} |J_1(x)| &= \frac{1}{\pi} \left| \int_{x-\delta}^{x+\delta} \gamma(t) D_n(t-x)\, dt \right| = \left| \frac{1}{\pi} \gamma(t) \int_{x-\delta}^{t} D_n(u-x)\, du - \right. \\ &\left. - \frac{1}{\pi} \int_{x-\delta}^{x+\delta} \gamma'(t) \left\{ \int_{x-\delta}^{t} D_n(u-x)\, du \right\} dt \right| \leqq \frac{1}{\pi} \frac{\delta\varepsilon}{2^7 L} \cdot 2^6 + \frac{1}{\pi} \frac{\delta\varepsilon}{2^{10} L} \cdot 2^5 \cdot 2\pi < \frac{\varepsilon}{4}, \end{aligned} \tag{7. 16}$$

ha $x \in [0, a] + [b, 2\pi]$. Tekintsük most a $J_2(x)$ integrált. Azonnal látjuk, hogy

$$
(7.17)\qquad
\begin{aligned}
|J_2(x)| &= \frac{1}{\pi}\left| \int\limits_{x+\delta}^{2\pi+x-\delta} \gamma(t) \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)(t-x)}{2\sin\frac{t-x}{2}}\, dt \right| \leqq \\
&\leqq \frac{1}{\pi} \frac{1}{2\sin\frac{\delta}{2}} \|\gamma\| \leqq \frac{1}{2\delta} \frac{\delta\varepsilon}{2^2 N} < \frac{\varepsilon}{8}.
\end{aligned}
$$

A (7. 15)—(7. 17) összefüggésekből következik, hogy $|S_n(x, \gamma)| < \frac{\varepsilon}{2}$ minden n-re és $x \in [0, a] + [b, 2\pi]$-re. De

$$T_\varepsilon(x) = \gamma(x) - \sum_{k=0}^{N-1} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

ahol

$$\sum_{k=0}^{N-1} (|a_k| + |b_k|) \leqq 2N \int\limits_0^{2\pi} |\gamma(x)|\, dx \leqq 2N \frac{\delta\varepsilon}{2^2 N} \leqq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Így minden n-re és $x \in [0, a] + [b, 2\pi]$-re:

$$|S_n(x, T_\varepsilon)| \leqq |S_n(x, \gamma)| + \left| S_n\left(x, \sum_{k=0}^{N-1} (a_k \cos kt + b_k \sin kt)\right) \right| < \varepsilon,$$

vagyis érvényes a (7. 3) egyenlőtlenség. Ezzel a 4. lemmát bebizonyítottuk, és most már rátérhetünk Zeller tételére.

16. TÉTEL (ZELLER [39]). *Legyen $E \subset [0, 2\pi)$ tetszőleges F_σ-típusú halmaz $[0, 2\pi)$-ben. Ekkor van olyan $f(x) \in L(0, 2\pi)$ függvény, amelynek Fourier-sora konvergál az E és nem-korlátosan divergál a $[0, 2\pi) - E = E_1$ halmazon.*

Bizonyítás. Ha $E_1 = [0, 2\pi)$, akkor a 16. tétel ekvivalens a 10. tétellel. Ennélfogva feltehetjük, hogy az E halmaz nem üres. Ezenkívül az általánosság korlátozása nélkül feltehetjük, hogy $0 \in E$. Ily módon az E_1 halmaz teljesen $[0, 2\pi]$ belsejében fekszik. Minthogy most E_1 G_δ-típusú a $(0, 2\pi)$ intervallumban, ezért E_1 legfeljebb megszámlálható sok nyilt C_i halmaz közös része, azaz $E_1 = \prod_{i=1}^{\infty} C_i$, ahol $C_i \subset (0, 2\pi)$. Legyen $G_1 = C_1$, $G_2 = C_1 C_2, \ldots,$ $G_n = C_1 C_2 \ldots C_n$, akkor azt kapjuk, hogy

$$(7.18)\qquad E_1 = \prod_{i=1}^{\infty} G_i, \quad G_i \subset (0, 2\pi) \quad \text{és} \quad G_1 \supset G_2 \supset \ldots,$$

ahol a G_i-k nyilt halmazok. De minden nyilt halmaz legfeljebb megszámlálható sok intervallum összege. Minden (α, β) intervallum előállítható megszámlálható sok olyan $[\alpha_i, \beta_i]$ szakasz összegeként úgy, hogy minden $x \in (\alpha, \beta)$ pont legfeljebb két $[\alpha_i, \beta_i]$ szakaszhoz tartozzék. Így tehát a G_i halmaz előállítható a következő két alakban:

$$(7.19) \qquad G_i = \sum_{j=1}^{\infty} [a_j^{(i)}, b_j^{(i)}] = \sum_{j=1}^{\infty} [c_j^{(i)}, d_j^{(i)}],$$

ahol $[c_j^{(i)}, d_j^{(i)}] \subset (a_j^{(i)}, b_j^{(i)})$, és ha $x \in G_i$, akkor x legfeljebb két $[a_j^{(i)}, b_j^{(i)}]$ szakaszhoz tartozik (az i index rögzített). A (7.18) és (7.19) formulákból következik, hogy $x \in E_1$ akkor és csak akkor, ha végtelen sok $[a_j^{(i)}, b_j^{(i)}]$-hez és végtelen sok $[c_j^{(i)}, d_j^{(i)}]$-hez tartozik. Rendezzük át az $[a_j^{(i)}, b_j^{(i)}]$ szakaszok sorozatát egyetlen $[a_k, b_k]$ sorozatba és hasonlóan a $\{[c_j^{(i)}, d_j^{(i)}]\}$ sorozatot is egyetlen $\{[c_k, d_k]\}$ sorozatba, úgyhogy $[c_k, d_k] \subset (a_k, b_k)$ legyen. Ekkor:

$$E_1 = \overline{\lim_{k\to\infty}}\, [a_k, b_k] = \overline{\lim_{k\to\infty}}\, [c_k, d_k],$$

vagyis

$$(7.20) \qquad E_1 = \prod_{m=1}^{\infty} \sum_{k=m}^{\infty} [a_k, b_k] = \prod_{m=1}^{\infty} \sum_{k=m}^{\infty} [c_k, d_k].$$

Vegyünk most két szakaszt: $[a_k, b_k]$-t és $[c_k, d_k]$-t és az $\varepsilon_k = 2^{-k}$ számot. Tegyük fel, hogy $i = 1, 2, \ldots (k-1)$-re már megkonstruáltuk a

$$(7.21) \qquad T_i(x) = \sum_{n=p_i}^{q_i} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

polinomot, amely eleget tesz a

$$(7.22) \qquad p_i > q_{i-1}, \quad \int_0^{2\pi} |T_i(x)|\, dx < 2^{-i},$$

feltételeknek, az $S_n(x, T_i)$ részletösszegekre pedig teljesül

$$(7.23) \qquad |S_n(x, T_i)| < 2^{-i} \qquad (n = 1, 2, \ldots \text{ és } x \in [0, 2\pi] - [a_i, b_i]),$$

és ha $x \in [c_i, d_i]$, akkor található olyan $p_x^{(i)} \geqq p_i$ index, hogy

$$(7.24) \qquad |S_{p_x^{(i)}}(x, T_i)| > 2^i \qquad (p_x^{(i)} \leqq q_i)$$

legyen. Tekintve, hogy $[c_k, d_k] \subset (a_k, b_k)$, ezért a 4. lemma alapján találhatunk olyan $T_k(x)$ polinomot, amely eleget tesz a (7.21)—(7.24) feltételeknek $i = k$-ra. Így a $T_k(x)$ polinomok sorozatát indukcióval minden k indexre definiáltuk. Legyen

$$(7.25) \qquad f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(x).$$

Megmutatjuk, hogy $f(x)$ a keresett függvény.

A (7.22) egyenlőtlenségből, valamint B. Levi tételéből (B tétel) következik, hogy az $f(x)$ függvénynek van értelme és hogy $f(x) \in L(0, 2\pi)$. Továbbá

(7. 21), (7. 22) és (7. 25) alapján következik, hogy az $f(x)$ függvény Fourier-sorát a (7. 25) sorból egyszerűen úgy kapjuk, hogy a $T_k(x)$ polinomokat kifejtett alakban írjuk fel.

Legyen $x \in E_1$. (7. 20)-ból következik, hogy $x \in [c_{n_i}, d_{n_i}]$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Ennélfogva (l. (7. 22), (7. 24) és (7. 25))

$$|S_{p_x^{(n_i)}}(x, f) - S_{q_{n_i-1}}(x, f)| = |S_{p_x^{(n_i)}}(x, T_{n_i})| > 2^{n_i},$$

vagyis $f(x)$ Fourier-sora nem-korlátosan divergál tetszőleges $x \in E_1$ pontban.

Legyen most $x \in E$, tehát $x \notin E_1$. (7. 20)-ból következik, hogy x hozzátartozik minden $[0, 2\pi] - [a_i, b_i]$ halmazhoz bizonyos $i \geqq i_x$-től kezdve. Ez pedig azt jelenti, hogy (l. (7. 23))

$$|S_n(x, T_i)| < \frac{1}{2^i} \tag{7.26}$$

minden n-re és $i \geqq i_x$-re. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges szám. Ekkor található olyan $N \geqq i_x$, hogy

$$\sum_{k=N}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{7.27}$$

Tekintsük az

$$S_{n+p}(x, f) - S_n(x, f)$$

különbséget, midőn $n \geqq N$ és $p \geqq 0$. Világos, hogy

$$\begin{aligned} S_{n+p}(x, f) - S_n(x, f) = \sum_{k=1}^{N-1} [S_{n+p}(x, T_k) - S_n(x, T_k)] + \\ + \sum_{k=N}^{\infty} S_{n+p}(x, T_k) - \sum_{k=N}^{\infty} S_n(x, T_k). \end{aligned} \tag{7.28}$$

(7. 26) és (7. 27) alapján, valamint $N \geqq i_x$-re való tekintettel

$$\sum_{k=N}^{\infty} |S_{n+p}(x, T_k)| \leqq \sum_{k=N}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \frac{\varepsilon}{2}, \sum_{k=N}^{\infty} |S_n(x, T_k)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ennélfogva (l. (7. 28)):

$$|S_{n+p}(x, f) - S_n(x, f)| < \varepsilon + \sum_{k=1}^{N-1} |S_{n+p}(x, T_k) - S_n(x, T_k)|. \tag{7.29}$$

Könnyen belátható, hogy találhatunk olyan N_1 számot, hogy

$$S_{n+p}(x, T_k) = S_n(x, T_k) = T_k(x),$$

ahol $0 < k \leqq N-1, n \geqq N_1, p \geqq 0$. Így tehát adott $\varepsilon > 0$-hoz találhatunk olyan $N_2 = \max\{N, N_1\}$ számot, hogy

$$|S_{n+p}(x, f) - S_n(x, f)| < \varepsilon$$

legyen, ha $n \geqq N_2$ és $p \geqq 0$. Ennélfogva a Cauchy-féle kritérium alapján az $\{S_n(x, f)\}$ sorozat konvergál, ha $x \in E$. Ezzel a 16. tételt bebizonyítottuk.

Amint már megjegyeztük (l. 1. tételt és a 7. tétel következményét), trigonometrikus sorok (Fourier-sorok) konvergenciapontjainak halmaza $F_{\sigma\delta}$-típusú, de nem szükségképpen F_{σ}-típusú. A 16. tétel végérvényesen megoldja a divergencia kérdését arra az esetre, amikor a Fourier-sor divergenciapontjai nem-korlátos divergenciapontok. Ily módon a 16. tétel a 2. tétel élesítése Fourier-sorok esetére, ha az E halmaz F_{σ}-típusú, és ha nem szükséges az E-n nulla felé való konvergenciát, E-n kívül pedig nem-korlátos divergenciát feltételezni.

Ami annak a trigonometrikus sornak a megszerkesztését illeti, amely adott F_{σ}-típusú (illetve $F_{\sigma\delta}$-típusú) $E\subset[0,2\pi)$ halmazon nullához konvergál, és az $E_1=[0,2\pi)-E$ halmazon divergál, ahhoz E-re vonatkozó kiegészítő feltételre van szükségünk. Tudniillik nem üres E_1 halmaz nem okvetlenül U-halmaz (az A halmazt U-halmaznak nevezzük, ha abból, hogy a trigonometrikus sor nullához konvergál $[0,2\pi)-A$-n, valamennyi koefficiens eltűnése következik). Minden olyan halmazt, amely nem U-halmaz, M-halmaznak nevezünk.

Nyilvánvaló, hogy ha E_1 U-halmaz volna, akkor az E-n nullához konvergáló trigonometrikus sornak nullához kellene konvergálnia az E_1 halmazon is. Így tehát a mi $E_1=[0,2\pi)-E$ halmazunk M-halmaz. Ebből többek között következik, hogy E_1 kontinuum számosságú (l. pl. N. K. BARI [2] munkáját).

Megjegyezzük, hogy az E_1-re bebizonyított szükséges feltétel nem okvetlenül elegendő is, minthogy M-halmaz nem szükségképpen $G_{\delta\sigma}$-típusú. Azonban még abban az esetben is, ha $G_{\delta\sigma}$-típusú halmaz volna, a kitűzött probléma még ekkor is messze lenne a megoldástól.

Még több, trigonometrikus sorok (Fourier-sorok) konvergencia- és divergenciahalmazaira vonatkozó kérdés megoldatlan. Néhányat felsorolunk közülük.

I. Található-e adott $F_{\sigma\delta}$-típusú E halmazhoz olyan trigonometrikus sor (Fourier-sor), amely E-n konvergál és $[0,2\pi)-E$-n divergál? Ha ilyen sorok léteznek, akkor a 3. tétel értelmében szükségképpen van a $[0,2\pi)-E$ halmazon olyan pont, amelyben a sor korlátosan divergál.

II. Ismeretes (l. a 4. tételhez fűzött megjegyzést), hogy trigonometrikus sorok (Fourier-sorok) korlátos divergenciájú pontjainak halmaza $G_{\delta\sigma}$-típusú. Kérdés, vajon tetszőleges $G_{\delta\sigma}$-típusú E halmazhoz található-e olyan trigonometrikus sor (Fourier-sor), amely E-n korlátosan divergál, és $[0,2\pi)-E$-n konvergál?

Hogy ez a feladat milyen nehéz, azt a következő speciális eset is mutatja. Még ha $E=(\alpha,\beta)$, vagyis egy intervallumról van szó, akkor is tudnunk kellene olyan korlátos függvényt szerkeszteni, amelynek Fourier-sora pozitív mértékű halmazon divergál (l. a 12. tételt és a hozzáfűzött megjegyzést). Ez a kérdés azonban mindeddig megoldatlan.

III. Azoknak a pontoknak a halmaza, amelyekben a trigonometrikus sor (Fourier-sor) $+\infty$-hez konvergál, $F_{\sigma\delta}$-típusú ([8], 271.). Kérdés, vajon tetszőleges $F_{\sigma\delta}$-típusú E halmazhoz szerkeszthető-e olyan trigonometrikus sor (Fourier-sor), amely csak az E-n konvergál $+\infty$ felé? Ennek a sornak a $[0, 2\pi)-E$ halmazon való viselkedésére vonatkozóan különböző követelményeket szabhatunk még ki, így pl. konvergenciát, $-\infty$-hez tartó konvergenciát, korlátos divergenciát, stb.

Világos, hogy ha Fourier-sorokról van szó, akkor szükségképpen $\operatorname{mes} E = 0$, mert hiszen Fourier-sor nem konvergálhat $+\infty$-hez pozitív mértékű halmazon (amint ezt már a korábbiakból tudjuk).

Ennek a feladatnak a nehézségét bizonyítja az a tény, hogy mindeddig nem ismeretes az sem, van-e olyan trigonometrikus sor, amely $+\infty$-hez konvergál pozitív mértékű halmazon.

IV. Ismeretes, hogy trigonometrikus soroknál a konvergenciapontok halmaza $F_{\sigma\delta}$-típusú, azon pontok halmaza pedig, ahol a sor korlátosan divergál, $G_{\delta\sigma}$-típusú, továbbá azoknak a pontoknak a halmaza, ahol a sor $+\infty$-hez, vagy $-\infty$-hez konvergál, $F_{\sigma\delta}$-típusú. Legyenek E_1 és E_2 olyan $G_{\delta\sigma}$-típusú, E_3 és E_4 olyan $F_{\sigma\delta}$-típusú halmazok, amelyek egymást kölcsönösen nem metszik. Milyen feltételek mellett szerkeszthető olyan trigonometrikus sor, amely a $[0, 2\pi)-\sum_{i=1}^{4} E_i$ halmazon konvergál, E_1-en korlátosan divergál, E_3-on, ill. E_4-en $+\infty$, ill. $-\infty$-hez tart, és E_2-n nem korlátosan divergál (de nem konvergál $+\infty$-hez, ill. $-\infty$-hez)?

IRODALOM

[1] ALEXANDROV, P. SZ.: *Bevezetés a halmazok és függvények általános elméletébe,* Akadémiai Kiadó, Budapest, 1952.

[2] BARI, N.: Sur l'unicité du développement trigonométrique, *Fund. Math.*, 9 (1927) 62—115.

[3] ERDŐS, P., HERZOG, F., PIRANIAN, G.: Sets of divergence of Taylor series and of trigonometric series, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **60**, No 6 (1954) 538.

[4] FATOU, P.: Séries trigonométriques et séries de Taylor, *Acta Math.*, 30 (1906) 335—400.

[5] FEJÉR, L.: Sur les singularités de la série de Fourier des fonctions continues, *Ann. Sci. Ec. Normale Sup.*, **28** (1911) 63—103.

[6] HAHN, H.: Über die Menge der Konvergenzpunkte einer Funktionfolge, *Archiv der Math. und Physik,* **28** (1919) 34—45.

[7] HARDY, G. H.: *Divergent series,* Oxford, 1949.

[8] HARDY, G. H., ROGOSINSKI, W.: *Fourier series,* Cambridge, 1944.

[9] HAUSDORFF, F.: *Mengenlehre,* 2. Auflage, Berlin und Leipzig, 1927.

[10] HERZOG, F., PIRANIAN, G.: Sets of convergence of Taylor Series, I, *Duke Math. Journ.*, **16**, No 3 (1949) 529—534.

[11] Herzog, F., Piranian, G: Sets of convergence of Taylor Series, II. *Duke Math. Journ.*, **20** No 1 (1953) 41—54.

[12] ——— : Sets of radial continuity of analytic functions, *Pacific Journ. of Math.*, **4** (1954) 533—538.

[13] Kolmogoroff, A.: Une série de Fourier—Lebesgue divergente presque partout, *Fund. Math.*, **4** (1923) 324—328.

[14] ——— : Une série de Fourier—Lebesgue divergente partout, *Compt. Rend. Acad. Sci.* (Paris) **183** (1926), 1327—1328.

[15] Kolmogoroff, A., Seliverstoff, G.: Sur la convergence des séries de Fourier, *Atti Acad. naz. Lincei*, **3** (1926) 307—310.

[16] Lohwater, A. J., Piranian, G.: Sets of radial discontinuity of bounded analytic functions, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **60**, No 6 (1954) 543.

[17] Lusin, N.: Über eine Potenzreihe, *Rend. circ. Matem. Palermo*, **32** (1911) 386—390.

[18] Н. Н. Лузин: Теория функций действительного переменного, М. Учпедгиз, 1940.

[19] ——— : Интеграл и тригонометрический ряд, Москва—Ленинград 1951.

[20] Marcinkiewicz, J.: On the convergence of Fourier series, *Journ. London Math. Soc.*, **10**, No 4 (1935) 264—268.

[21] ——— : Sur les séries de Fourier, *Fund. Math.*, **27** (1936) 38—69.

[22] Marcinkiewicz, J., Zygmund, A.: On the differentiability of functions and summability of trigonometrical series, *Fund. Math.*, **26** (1936) 1—43.

[23] Mazurkiewicz, S.: Sur les séries de puissances, *Fund. Math.*, **3** (1922) 52—58.

[24] Меньшов Д. Е.: О сходимости по мере тригонометрических рядов, Труды матем. ин.-та им. Стеклова **32** (1959).

[25] ——— : О пределах неопределенности тригонометрических рядов, ДАН **74**, № 2 (1950) 181—184.

[26] Меньшов Д. Е.: Некоторые вопросы из теории тригонометрических рядов, Вестник Моск. ин.-та **8** (1950) 3—10.

[27] ——— : О пределах неопределенности рядов фурые, матем. сб. **30** (**72**) : 3 (1952) 601—650.

[28] Натансон И. П.: Теория функций вещественной переменной, Москва—Ленинград 1950.

[29] Немыцкий В., Слудская М., Черкасов А.: Курс математического анализа, т. II. Москва—Ленинград (1944).

[30] Plessner, A.: Über Konvergenz von trigonometrischen Reihen, *Journ. reine und angew. Math.*, **155** (1926) 15—25.

[31] Плеснер А.: О сопряженных тригонометрических рядах, ДАН **4** (1935) 235—238.

[32] Rosenbloom, P. C.: Comments on the precedings paper by Herzog and Piranian, Pacific Journ. of Math. **4** (1954) 539—543.

[33] Sierpinski, W.: Sur l'ensemble des points de convergence d'une suite de fonctions continues, *Fund. Math.*, **2** (1921) 41—49.

[34] Steinhaus, H.: Une série trigonometrique partout divergente, *Compt. Rend. Soc. Sci.* (Varsovie), (1912) 219—229.

[35] Стечкин, С. Б.: О сходимости и расходимости тригонометрических рядов, УМН **VI**, № 2 (1951), 148—149.

[36] Sunouchi, G.: Fourier series which belongs to the class H diverges almost everywhere, *Ködai Math. seminar reports*, **1** (1953) 27—28.

[37] Ульянов, П. Л.: О некоторых эквивалентных условиях сходимости рядов и интегралов, УМН **VIII**, вып. 6 (1953).

[38] Ульянов, П. Л.: О продолжении функций, ДАН **105** № 5 (1955), 913—915.
[39] ZELLER, K.: Über Konvergenzmengen von Fourierreihen, *Archiv der Math.*, **6**, No 4 (1955) 335—340.
[40] ZYGMUND, A.: *Trigonometrical Series*, Warsawa—Lwow, 1935.
[41] ———— : An example in Fourier series, *Studia Math.*, **10** (1948) 113—119.

Technikai szerkesztő: Alpár László

A kiadásért felelős az Akadémiai Kiadó igazgatója Műszaki felelős: Farkas Sándor
A kézirat beérkezett: 1958. I. 17. — Terjedelem: 15 (A/5) ív, 5 ábra

Szegedi Nyomda Vállalat 58-177 Felelős vezető: Vincze György