A MIKUSIŃSKI-FÉLE OPERÁTORFOGALOM ÉS A DISZTRIBÚCIÓ FOGALMA KÖZTI KAPCSOLATRÓL

FENYŐ ISTVÁN

1. Az alábbiakban szereplő valósváltozós, komplexértékű $f(t)$ függvények legyenek a $t \geqq 0$ félegyenes valamely $[0, T)$ számközén definiálva és tegyük fel, hogy a $[0, T)$ bármely zárt részintervallumán legfeljebb véges sok szakadási helyük van, továbbá $\int_0^t f(\tau)d\tau$ létezzék bármely $0 \leqq t < T$-re. E függvények osztályát jelöljük K_T-vel. Ismeretes, hogy MIKUSIŃSKI a $[0, T)$ számközön definiált o p e r á t o r nak nevezi a K_T-be tartozó függvények párját, és ezt a párt $a(t)/b(t)$-vel jelöli (röviden a/b), ahol $b(t)$ a 0 hely elegendő kicsi jobboldali környezetében nem azonosan eltűnő [1]. Két operátor a/b és a_1/b_1 azonosak egymással, ha

$$a*b_1 = a_1*b, \qquad (0 \leqq t < T),$$

ahol

$$f*g = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau$$

a két függvény konvolúciója.

Ha $T = \infty$, akkor a „nevezőnek" a 0 hely jobboldali környezetében való nem azonos eltűnésére vonatkozó kikötést el lehet hagyni. Nemrégen bebizonyítottuk [2], hogy minden végesrendű Korevaar-féle disztribúció egy $[0, \infty)$-ben értelmezett Mikusiński-féle operátor, továbbá, hogy ha $b = t^{\mu}\beta(t)$ alakú függvény, ahol $\mu > -1$, $\beta(+0) \neq 0$, akkor az a/b operátor egy végesrendű disztribúció. Könnyű példát konstruálni olyan $[0, \infty)$-ben értelmezett operátorra, mely nem végesrendű disztribúció, sőt ami egyáltalán nem disztribúció.

Tekintsük ezekután a $T_n > 0$ számok olyan sorozatát, melyre $T_n \uparrow \infty$ és $\{w_n\}$ legyen az operátoroknak olyan sorozata, melynek n-ik tagja, w_n a $[0, T_n]$ intervallum felett értelmezett. Az operátorok egy ilyen sorozatát *szuperfüggvénynek* nevezzük, ha a sorozat bármely két tagjára érvényes, hogy $w_n = w_m$ a $[0, T_m]$-ben, ha $m \leqq n$. Két szuperfüggvényt $\{w_n\}$- és $\{\overline{w}_n\}$-t azonosaknak tekintünk, ha minden n és $\overline{n}$ esetében $w_n = \overline{w}_{\overline{n}}$ a $[0, T_n]$ és $[0, T_{\overline{n}}]$ közös részén.

Érvényes mármost a következő

TÉTEL: *Bármely, a* $[0, \infty]$ *félegyenesen definiált disztribúció szuperfüggvény és fordítva, ha a szuperfüggvényt definiáló operátorsorozat mindegyikének „nevezője“* $b_n(t) = t^{\mu_n}\beta_n(t)$ *alakú, ahol* $\mu_n > -1$ *és* $\beta_n(+0) \neq 0$, *akkor a szuperfüggvény disztribúció.*

Az előbbi és a most kimondott tétel értelmében a szuperfüggvény fogalma általánosabb, mint a disztribúcióé.

A szuperfüggvény fogalmát és a tételt nyilván a következő módon is megfogalmazhatjuk:

Szuperfüggvénynek nevezzük az $a_T(t)$ és $b_T(t)$ függvények olyan a_T/b_T-vel jelölt párját, melyek az alábbi feltételeket teljesítik:

1° $a_T(t)$ és $b_T(t) \in K_T$ minden $T \geqq 0$-ra,

2° a 0 pontnak nincs olyan jobboldali környezete, melyben $b_T \equiv 0$ lenne,

3° $a_T/b_T = \bar{a}_T/\bar{b}_T$, ha bármely $T > 0$-ra $a_T * \bar{b}_T = \bar{a}_T * b_T$.

A szuperfüggvényekkel való számolási műveletek azonosak a véges intervallumok felett definiált operátorokra vonatkozó műveletekkel.

A kimondott tétel második része így is megfogalmazható: annak elégséges feltétele, hogy az a_T/b_T szuperfüggvény disztribúció legyen, az, hogy minden T-re $b_T(t) = t^{\mu(T)}\beta_T(t)$ alakú legyen, ahol $\mu(T) > -1$ és $\beta_T(+0) \neq 0$.

2. A tétel első része igen egyszerűen bizonyítható: Legyen ugyanis $\{b_n\}$ a K_∞ osztálybeli függvények olyan végtelen sorozata, melyre minden véges $T > 0$ mellett található olyan $b_T(t)$ függvény, hogy a $\{b_T * b_n\}$ függvénysorozat $[0, T]$-n egyenletesen konvergáljon valamilyen $a_T(t) \in K_T$ függvényhez. Tegyük még fel, hogy nincs a 0-nak olyan jobboldali környezete melyben a b_T és a b_n függvények azonosan eltünnek. Ha $\lim\limits_{n\to\infty} b_T * b_n = a_T$, akkor a $\{b_n\}$ sorozat nyilván azonosítható az a_T/b_T szuperfüggvénnyel, mert 1° és 2° nyilván teljesülnek. Ami 3°-at illeti, az szintén teljesül, mert ha valamely $\bar{b}_T(t)$ mellett is igaz az, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \bar{b}_T * b_n = \bar{a}_T(t)$, akkor az egyenletes konvergencia miatt

$$\lim_{n\to\infty} \bar{b}_T * b_T * b_n = \bar{b}_T * a_T \quad \text{és} \quad \lim_{n\to\infty} b_T * \bar{b}_T * b_n = b_T * \bar{a}_T.$$

A konvolució kommutativitása miatt

$$a_T * \bar{b}_T = \bar{a}_T * b_T$$

minden $T > 0$-ra.

Legyen ezekután φ egy tetszőleges disztribúció, melyet a $\{b_n\}$ Korevaar-féle fundamentális sorozat definiál [3]. Ez azt jelenti, hogy minden $T > 0$-ra található olyan p nemnegatív egész szám, hogy $b_n^{(-p)}$ egyenletesen konvergens legyen a $[0, T]$ számközön, ahol

$$b_n^{(-p)} = \int_0^t d\tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 \cdots \int_0^{\tau_{p-1}} b_n(\tau) d\tau = \int_0^t \frac{(t-\tau)^{p-1}}{(p-1)!} b_n(\tau) d\tau = U_p * b_n,$$

$U(t)$ a Heaviside-féle ugrásfüggvényt jelenti:

$$U(t) = \begin{cases} 1, & \text{ha } t > 0 \\ 0, & \text{ha } t < 0, \end{cases}$$

$U_2(t) = U * U, \ldots, U_p(t) = U_{p-1} * U$. De akkor

$$\lim_{n\to\infty} b_n^{(-p)} = \lim_{n\to\infty} U_p * b_n = a_T,$$

tehát

$$\varphi = \{b_n\} = a_T / U_p$$

és ezzel állításunk első része bizonyítást nyert.

3. Ami állításunk második részét illeti arról be fogjuk bizonyítani, hogy ekvivalens azzal, hogy a

$$k * \varphi = l \tag{1}$$

elsőfajú Volterra-féle integrálegyenletnek van egyértelmű megoldása valamely $[0, T]$ számközben, ha $k(t) = t^r \varkappa(t)$ $(r > -1,\ \varkappa(+0) \neq 0,\ \varkappa \in K_T)$ és $l(t) = t^s \lambda(t)$ alakú, s az r-nél nagyobb pozitív szám és $\lambda(t) \in K_T$ függvény a 0 helyen véges.

Mert:

a) ha az (1) alatti integrálegyenlet egyértelműen megoldható, akkor a b_T függvényről tett feltevés alapján mindig létezik olyan μ-től és T-től függő nemnegatív egész szám p, hogy a

$$b_T * \varphi = U_p * a_T$$

integrálegyenletnek van megoldása. p-t elegendő nagynak választva[1] ti. $U_p * a_T = t^s \lambda(t)$ alakú, ahol s is kellően nagy és $\lambda(+0)$ véges. De ez azt jelenti, hogy $U_p * a_T / b_T$ szuperfüggvény egy közönséges φ_T függvénnyel azonos, melyről nyilván feltehetjük, hogy folytonos (ellenkező esetben ugyanis p-nek eggyel való növelése révén elértük azt, hogy φ_T folytonos legyen) $[0, T]$-ben. Legyen $\{\varphi_n\}$ a legalább p-szer folytonosan $[0, T]$-ben differenciálható függvények olyan sorozata, mely egyenletesen konvergál φ_T-hez. De akkor $\{\varphi_n^{(p)}\}$ egy fundamentális sorozat, tehát egy disztribúció. Másrészt a $\{\varphi_n^{(p)}\}$ disztribúció azonos a φ_T / U_p szuperfüggvénnyel (mert $U_p * \varphi_n^{(p)} \to \varphi_T$), ez viszont egyenlő az a_T / b_T-vel.

[1] Világos, hogy ha valamely p mellett $b_T * \varphi = U_p * a_T$ egyenletnek van megoldása, akkor p-nél nagyobb egész mellett is létezik megoldás; így lehetőségünk van arra, hogy p-t alkalmasan válasszuk meg.

b) ha $a_T/b_T = \Phi$ disztribúció, akkor $U_p * \Phi = f$ egy folytonos függvény, ha $p = p(T)$ elegendő nagy, vagyis

$$U_p * a_T/b_T = f,$$

de ez éppen azt jelenti, hogy a $b_T * f = U_p * a_T$ integrálegyenletnek van megoldása. Ha $f = t^h \varphi(t)$ alakba írjuk, ahol $\varphi(+0)$ véges, akkor $b_T * f = t^{h+\beta}\psi(t)$, ez pedig csakis úgy lehetséges, ha $h + \beta = s > \beta$, mert $f(t)$ folytonossága miatt $h > 0$.

4. Az előbbiek szerint tehát elég bebizonyítani, hogy az (1) egyenletnek van egyértelmű megoldása, ha $k = t^r \varkappa(t)$ $(r > -1,\ \varkappa(+0) \neq 0)$ és $l(t) = t^s \lambda(t)$, ahol $\lambda(+0)$ véges és $s > r$, $s > 0$.

A megoldás unicitása azonnal következik $T = \infty$ esetben TITSHMARSCH egy tételéből [4], ha pedig T véges, úgy az unicitás MIKUSIŃSKI egy megjegyzése miatt nyilvánvaló [5].

Mielőtt az (1) alatti integrálegyenlet megoldhatóságát bebizonyítanánk, megmutatjuk, hogy az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy r nemnegatív egész. Ha ugyanis r nem lenne egész, képezzük a szóbanforgó egyenlet mindkét oldalának konvolúcióját t^{n-r-1}-el, ahol n olyan nemnegatív egész, mely mellett $n - r - 1 > 0$. Ekkor

$$t^{n-r-1} * t^r \varkappa(t) = \int_0^t (t-\tau)^{n-r-1} \tau^r \varkappa(\tau)\, d\tau = t^n \int_0^1 \varrho^r (1-\varrho)^{n-r-1} \varkappa(t\varrho)\, d\varrho = t^n \gamma(t),$$

ahol

$$\gamma(t) = \int_0^1 \varrho^r (1-\varrho)^{n-r-1} \varkappa(t\varrho)\, d\varrho$$

és

$$\gamma(+0) = \varkappa(+0) \frac{\Gamma(r+1)\Gamma(n-r)}{\Gamma(n+z)} \neq 0.$$

Hasonló módon

$$t^{n-r-1} * t^s \lambda(t) = t^{n-r+s} \mu(t)$$

és ha $s > r$, akkor $n + s - r > n$.

Ezek szerint feltesszük tehát, hogy r nemnegatív egész. $\varkappa(t)$ helyett tekintsük azt a $\bar{\varkappa}(t)$ függvényt, melyre

$$\bar{\varkappa}(t) = \begin{cases} \varkappa(t), & \text{ha } 0 \leqq t \leqq T, \\ \varkappa(T), & \text{ha } \quad t \geqq T. \end{cases}$$

$\{\varkappa_n(t)\}$ legyen a függvények olyan sorozata, mely a következő tulajdonsággal bír:

a) $\varkappa_n(t) = \varkappa(T)$, ha $t > T$ és $\varkappa_n(+0) = \varkappa(+0)$, $(n = 1, 2, \ldots)$,

b) mindegyik $\varkappa_n(t)$ legyen legalább háromszor differenciálható, *c)* $\varkappa_n(t) \to \varkappa(t)$ egyenletesen $[0, T]$-n[2].

Mindegyik $\varkappa_n$ Laplace-transzformáltja nyilván létezik és

$$\lim_{n\to\infty} \mathfrak{L}\{\varkappa_n\} = \mathfrak{L}\{\bar{\varkappa}\}$$

egyenletesen a konvergencia félsíkban. Egy közismert tétel értelmében (l. például [6])

$$\mathfrak{L}\{\varkappa_n\} = \varkappa(+0)z^{-1} + O(z^{-2}), \quad \text{ha} \quad \operatorname{Re} z \to \infty$$

és a $\varkappa_n$ sorozat egyenletes konvergenciája miatt

$$\mathfrak{L}\{\bar{\varkappa}\} = \varkappa(+0)z^{-1} + O(z^{-1}), \quad \text{ha} \quad \operatorname{Re} z \to \infty.$$

Legyen $\bar{k}(t) = t^r \bar{\varkappa}(t)$, akkor

$$\mathfrak{L}\{\bar{k}\} = (-1)^r \frac{d^r}{dz^r} \mathfrak{L}\{\bar{\varkappa}\}.$$

Így tehát

$$\mathfrak{L}\{\bar{k}\} = \varkappa(+0)z^{-r-1} + O(z^{-r-1}),$$

teljesen hasonló gondolatmenettel

$$\mathfrak{L}\{\bar{l}\} = \lambda(+0)z^{-s-1} + O(z^{-s-1}),$$

ahol $\bar{l}(t) = l(t)$ $[0, T]$-ben és $\bar{l}(t) = l(T)$, ha $t > T$. Így tehát, ha α tetszőleges szám, melyre $s - r > \alpha > 0$

$$z^\alpha \frac{\mathfrak{L}\{\bar{l}\}}{\mathfrak{L}\{\bar{k}\}} \to 0, \quad \text{ha} \quad |z| \to \infty \qquad (\operatorname{Re} z > 0).$$

Ennélfogva Fock [6] ismert tétele szerint $\dfrac{\mathfrak{L}\{\bar{l}\}}{\mathfrak{L}\{\bar{k}\}}$ inverz Laplace-transzformáltja létezik és a

$$\bar{k} * \varphi = \bar{l}$$

integrálegyenlet megoldását adja. Ha a független változó $[0, T]$-ben van, akkor ez az (1) alatti egyenletbe megy át.

Megjegyezzük, hogy az (1) alatti egyenletre vonatkozó állítás közvetlen következménye V. VOLTERRA egy ismert tételének [7], ha $\varkappa$- és λ-ról legalább $(r+1)$-szeri differenciálhatóságot tételezünk fel.

5. Könnyű megmutatni, hogy nem minden szuperfüggvény disztribúció. Legyen például $a_T(t) = t^s \alpha_T(t)$, ahol $s = s(T) > 0$ és $\alpha_T(t)$ végtelen sokszor differenciálható, továbbá $\alpha_T(+0) \neq 0$ bármely T mellett és $b(t) = \exp(-t^{-2})$.

[2] Ilyen függvénysorozat mindig létezik, ha $\varkappa$ folytonos, ami pedig az általánosság megszorítása nélkül mindig feltételezhető.

Az a_T/b szuperfüggvény nem disztribúció, mert bárhogyan választjuk is a p nemnegatív egészet a

$$b*\varphi = U_\mu * a_T$$

integrálegyenletnek VOLTERRA és PÉRES egy tétele értelmében nincs megoldása [8].

Ezzel szemben a kimondott tétel második része valóban csupán elégséges feltétele annak, hogy egy szuperfüggvény disztribúció legyen. Mert legyen a_T/b_T olyan, disztribúcióval azonos szuperfüggvény, melyre a tétel feltételei teljesülnek. Akkor az

$$\exp(-t^2)*a_T/\exp(-t^2)*b_T$$

szuperfüggvény is disztribúció, noha a tétel feltételei erre nem érvényesek.

Felmerül az a kérdés, mi annak a *szükséges és elégséges* feltétele, hogy egy szuperfüggvény disztribúció legyen. Ennek megválaszolása azon múlik, hogy megadhassuk annak szükséges és elégséges feltételét, hogy az (1) alatti integrálegyenlet megoldható legyen, ha k olyan, hogy $k \cdot t^{-r} \to 0$ bármely pozitív r esetén. Tudomásunk szerint erre a kérdésre a válasz nem ismert.

6. A **3.** alatt elmondottakból következik, hogy ha minden T-re $b_T = t^\mu \beta_T(t)$ és $a_T = t^\nu \alpha_T(t)$ alakúak, $\beta_T(+0) \neq 0$, $\alpha_T(+0) \neq 0$ és μ, $\nu > -1$, továbbá $\nu > \mu$, akkor az a_T/b_T szuperfüggvény közönséges függvénnyel azonosítható. Ha $\mu \geqq \nu$ és $\mu - \nu = \Delta$ a T-től független, akkor a_T/b_T egy végesrendű disztribúcióval egyenlő.

Ha a_T/b_T szuperfüggvény disztribúció (nem szükségképpen végesrendű), akkor van olyan $p = p(T) > \Delta(t)$, hogy

$$U_p * a_T/b_T = f_T(t)$$

folytonos függvény legyen. Ha megadjuk ezt a folytonos függvényt és a $p = p(T)$-t, akkor a disztribúció definiálva van. SIKORSKI éppen így definiálja a disztribúciókat. [9].

7. Befejezésül talán érdemes megemlíteni a következőt. Láttuk **2.** alatt, hogy a folytonos függvények olyan $\{b_n\}$ sorozata — nevezzük szupersorozatnak —, melyhez minden T mellett található olyan $b_T(t)$ függvény, hogy $\{b_T * b_n\}$ egyenletesen konvergens legyen $[0, T]$-n, egy szuperfüggvényt definiál. A szupersorozat nyilván a Korevaar-féle fundamentális sorozat általánosítása. Mivel minden $[0, T]$ felett definiált disztribúció reprezentálható fundamentális sorozattal és minden szupersorozat egy szuperfüggvényt definiál, természetesen felvetődik az a kérdés, vajon minden szuperfüggvényhez tartozik-e egy szupersorozat? Bebizonyítjuk, hogy a válasz igenlő. Legyen ugyanis $\{c_n\}$ és $\{\varepsilon_n\}$ a számoknak két tetszőleges olyan sorozata, melyekre $c_n \uparrow \infty$ és $\varepsilon_n \downarrow 0$.

TITCHMARSCH [10] egy tétele szerint mindig kiválasztható a folytonos függvények olyan $\{u_n(t)\}$ sorozata, melyek a következő tulajdonsággal bírnak:

$$u_n(0)=0, \qquad (n=1,2,\ldots)$$

$$u_n(t)\equiv 0, \quad \text{ha} \quad t\geqq c_n \qquad (n=1,2,\ldots)$$

$$\int_0^{c_n} |a_{c_n}-u_n|<\frac{\varepsilon_n}{2}.$$

Válasszuk ezekután a φ_n függvényt úgy, hogy $|u_n-b_{c_n}*\varphi_n|<\frac{\varepsilon_n}{2c_n}$ egy elegendő kicsiny $0\leqq t\leqq \alpha_n<c_n$ szakaszon, ahol még $b_{c_n}(\alpha_n)\neq 0$. A $b_{c_n}*\varphi_n$ függvényt egészítsük ki az (α_n, c_n) számközön egy v_n folytonos függvénnyé úgy, hogy $|u_n-v_n|<\frac{\varepsilon_n}{2c_n}$ legyen. Az (α_n, c_n) intervallumban határozzuk meg φ_n-et úgy, hogy

$$\int_\alpha^t b_{c_n}(t-\tau)\varphi_n(\tau)d\tau=v_n(t)-\int_0^\alpha b_{c_n}(t-\tau)\varphi_n(\tau)d\tau \qquad (t>\alpha_n)$$

legyen. Hogy ez lehetséges, az következik abból, hogy $b_{c_n}(\alpha)\neq 0$. Az így definiált φ_n-re

$$\int_0^{c_n}|a_{c_n}-b_{c_n}*\varphi_n|\,dt\leqq\int_0^{c_n}|a_{c_n}-u_n|dt+\int_0^{c_n}|u_n-b_{c_n}*\varphi_n|dt\leqq\varepsilon_n.$$

Ha most minden φ_n-et úgy definiálunk, hogy azonosan zéró legyen, ha $t>c_n$, akkor $\{\varphi_n\}$ egy, az a_T/b_T-t definiáló szupersorozat. Mert legyen $b_T^{(2)}=b_T*b_T$, akkor

$$|b_T*a_{c_n}-b_T^{(2)}*\varphi_n|=\left|\int_0^t b_T(t-\tau)[a_{c_n}(\tau)-b_T*\varphi_n]dt\right|\leqq$$

$$\leqq B_T\int_0^t|a_{c_n}-b_T*\varphi_n|dt\leqq B_T\varepsilon_n,$$

ha $t\leqq T\leqq c_n$. De $a_{c_n}\to a_T$ egyenletesen $[0,T]$-n, tehát $b_T^{(2)}*\varphi_n$ is egyenletesen konvergál b_T*a_T-hoz. De akkor

$$\{\varphi_n\}=b_T*a_T/b_T^{(2)}=a_T/b_T.$$

Q. E. D.

IRODALOM

[1] J. Mikusiński: Le calcul operationel d'intervalle fini, *Studia Math.*, **XV.** (1956) 255—251.
[2] St. Fenyő: Über den Zusammenhang zwischen den Mikusińskischen Operatoren und den Distributionen, *Math. Nachr.* 1958. s. a.
[3] J. Korevaar: Distributions defined from the point of view of applied Mathematics, *Ind. Math.* (1955) 375—385. Definition 4.2, Definition 5.1.
[4] E. C. Titchmarsch: The zeros of certain integral functions, *Proc. of the Lond. Math. Soc.*, **25** (1926) 283—302.
[5] M. Parodi: *Applications physiques de la transformation de Laplace,* (1948) p. 5.
[6] V. Fock: Math. Zeitschr, **21** (1924) 161.
[7] V. Volterra: *Leçons sur les fonctions de lignes,* (1913) p. 166. Théorème III.
[8] Volterra—Pérès: *Leçons sur la composition,* (1924), p. 89.
[9] R. Sikorski: A definition of the notion of distribution, *Bull. Acad. Polonaise. Sci.*, Cl. III. Vol. **II.** (1954) 209—211.
[10] E. C. Titchmarsch: *The theory of functions,* (1947) p. 376.

(Beérkezett: 1957. XI. 19)