VIZSGÁLATOK AZ OPERÁTORMODULUSOK ELMÉLETÉBEN, I.

KERTÉSZ ANDOR

Édesapám 60. születésnapjára hálával és szeretettel

TARTALOMJEGYZÉK*

1. §. Bevezetés

Az operátormodulus[1] mai értelemben vett fogalmát E. NOETHER vezette be 1929-ben (lásd [37][2]). Ennek az azóta igen fontosnak bizonyult struktúrafajtának ma már gazdag irodalma van, s joggal beszélhetünk az operátormodulusok *elméletéről*. Igen figyelemre méltó az a kölcsönhatás, amely egyrészt a moduluselmélet, másrészt más algebrai struktúrák elméletének fejlődése között áll fenn. Így pl. az Abel-féle csoportok elméletében az utóbbi két

* A dolgozat itt közölt I. része csupán az első öt paragrafust tartalmazza.

[1] A használt fogalmak és elnevezések magyarázatát lásd a 2. §-ban.

[2] A szegletes zárójelbe tett számok a dolgozat végén megadott irodalomjegyzékre utalnak.

évtizedben elért jelentős eredmények nagy lendületet adtak az operátormodulusok vizsgálatának, de úgy tapasztaljuk, hogy az operátormodulusok elméletében elért eredmények is jelentősen járulnak hozzá az Abel-féle csoportok és a gyűrűk elméletéhez.

Az Abel-féle csoportok elmélete az operátormodulusok elmélete felé két irányban terjeszthető ki. Az egyik: modulusok vizsgálata speciális operátortartomány (p-adikus egész számok gyűrűje, Dedekind-féle gyűrű stb.) alapul vétele mellett. Ezekben a vizsgálatokban inkább a csoportelméleti jelleg domborodik ki, s az idevonatkozó eredményekről szóló dolgozatok teszik ki a moduluselmélet irodalmának jelentős részét. A másik irányhoz tartozik az a törekvés, amely az Abel-féle csoportok elméletében bevezetett fogalmakat és bebizonyított tételeket az operátormodulusok minél szélesebb osztályaira igyekszik átvinni. Ezekben a vizsgálatokban sok a gyűrűelméleti momentum, s az eredmények nagy része a gyűrűelméletet is gazdagítja. A jelen dolgozat vizsgálatai ehhez az utóbbi irányhoz tartoznak.

Bár az irodalomban van néhány igen jelentős eredmény,[3] amely az operátormodulusok általános esetére vonatkozik, a vizsgálatok túlnyomó többségében azonban az operátortartományra nézve több-kevesebb kikötést tesznek. Alig szerepel a moduluselméletben olyan eredmény, amely ne tenné fel a modulusról legalább azt, hogy unitér legyen (vagyis hogy az operátortartomány egységelemes gyűrű, s az egységelem identikus operátorként hat). Jóllehet az unitérség kikötése meglehetősen természetes követelmény, mindamellett elég nagy megszorítást jelent, hiszen az egységelemes gyűrűk az összes gyűrűk között egy eléggé speciális osztályt alkotnak, s egységelemes gyűrű mint operátortartomány esetében az egységelem általában nem hat identikus operátorként.

Mi az unitérség követelményét is elejtve az operátormodulusokkal teljes általánosságban foglalkozunk. Mindenek előtt egy hiányosságot kellett pótolnunk. Az unitér modulusok esetében jól bevált fogalmak és módszerek egy része ugyanis az általános esetben többnyire használhatatlannak bizonyul. E hiányosság kiküszöbölésére megfelelőnek látszik a 3. §-ban megadott konstrukció, amelynek lényege az, hogy bármely operátormodulus az operátortartomány alkalmas egységelemes bővítésével unitérré válik, s ez a tény az unitér modulusok elméletében használt fogalmaknak és módszereknek az általános esetre való átvitelére egy természetes utat biztosít.

A dolgozat három fejezetre és egy függelékre tagozódik. Az I. fejezet az alapfogalmak (pl. az elem rendje, lineáris rang, szabad operátormodulus) definícióját, továbbá e fogalmakra vonatkozó alapvető vizsgálatokat tartalmazza.

[3] Pl. Jacobson nevezetes „sűrűségi tétele" (lásd N. Jacobson [19]; erre a tételre egy egyszerű bizonyítás Szele Tibor [42] munkájában található).

Már itt találkozunk azzal az egész dolgozaton programszerűen végighúzódó törekvéssel, amely a moduluselméleti vizsgálatokat a gyűrűelmélet szempontjából úgy igyekszik hasznosítani, hogy modulusok egy osztályának tanulmányozásánál felveti a kérdést: vannak-e, s ha igen, melyek az összes olyan R gyűrűk, amelyekre bármely R-modulus a tekintett modulusosztályhoz tartozik. Az ilyen jellegű problémát az adott modulusosztályhoz tartozó duális problémának nevezzük.

A dolgozat II. fejezete a modulusok feletti egyenletek elméletével foglalkozik. A vizsgálatok a kompatibilis egyenletrendszer fogalmára épülnek. A kompatibilis egyenletrendszernek az absztrakt algebra nyelvén (részstruktúra, homomorfizmus stb.) történő definiálása lehetővé teszi a klasszikus algebra lineáris egyenletrendszerekre vonatkozó vizsgálatainak és eredményeinek az absztrakt algebrába való természetes beágyazását. E fejezetben van kiépítve az algebrailag zárt Abel-féle csoportok Szele-féle elméletéhez hasonlóan az algebrailag zárt operátormodulusok elmélete. Adott R gyűrű esetén az összes algebrailag zárt R-modulus leírása — igen nehéznek látszó — problémájával kapcsolatban a megoldás felé megtesszük az első szerény lépést: meghatározzuk az összes triviális algebrailag zárt R-modulust. Megoldjuk továbbá az algebrailag zárt modulusokra vonatkozó duális problémát. A probléma megoldása az ún. féligegyszerű gyűrűk osztályához vezet, s azt az eredményt nyerjük, hogy a lineáris egyenletrendszerek klasszikus elmélete a ferdetestek esetéről kiterjeszthető az olyan unitér operátormodulusok esetére, amelyeknek operátortartománya féligegyszerű gyűrű. Egyúttal a féligegyszerű gyűrűk osztálya az a legtágabb gyűrűkategória, amelyre ez az elmélet átvihető.

A lineáris algebrát általában vektorterek, azaz olyan operátormodulusok felett szokás felépíteni, amelyeknek operátortartománya ferdetest. A vektorterek fogalmának természetes általánosítása az olyan operátormodulus, amely egyszerű modulusok direkt összegére bomlik. Az ilyen modulusokat nevezik teljesen redukálható modulusoknak. A dolgozat III. fejezete a teljesen redukálható modulusok részletes vizsgálatának van szentelve. Adott R gyűrű esetén invariánsokkal jellemezzük az összes teljesen redukálható R-modulust, s az ilyen modulusok számos jellemző tulajdonságát állapítjuk meg. A duális probléma megoldása után gyűrűelméleti alkalmazásként a féligegyszerű gyűrűk több új, tisztán gyűrűelméleti jellemzése is adódik.

A függelékben tetszőleges operátormodulusok esetében bevezetünk egy radikál-fogalmat, amelyről megmutatjuk, hogy hasonló szerepet tölt be a modulusok elméletében, mint a Jacobson-féle radikál fogalma a gyűrűelméletben.

A dolgozat eredményeinek egy része már közölve van a szerző [27], [28], és [29] idegen nyelvű munkáiban.

I. AZ OPERÁTORMODULUSOK ÁLTALÁNOS ELMÉLETÉNEK ALAPJAI

2. §. Alapfogalmak és jelölések

A jelen paragrafus célja a továbbiakban használt alapfogalmak és jelölések előrebocsátása. Az Abel-féle csoport és a gyűrű fogalmát, továbbá az e fogalmakra vonatkozó elemi tényeket ismertnek tesszük fel. (E fogalmak bevezetését lásd pl. [39]-ben.)

Legyen G additíve írt Abel-féle csoport és R tetszőleges gyűrű.[4] Azt mondjuk, hogy G az R gyűrűvel mint operátortartománnyal ellátott *operátormodulus*, ha G bármely g és R bármely r eleméhez egyértelműen hozzá van rendelve G-nek egy eleme — amelyet az r, g elempár szorzatának nevezünk és rg-vel jelölünk — oly módon, hogy teljesülnek az alábbi egyenlőségek:

(i) $$r(g+h) = rg + rh,$$

(ii) $$(r+s)g = rg + sg,$$

(iii) $$(rs)g = r(sg),$$

ahol r, s tetszőleges R-beli, g, h tetszőleges G-beli elemek. — Pontosabban azt kellene mondanunk, hogy G baloldali operátormodulus. Ha ugyanis az r és g elemekhez hozzárendelt G-beli elemet gr-rel jelölnénk és az (i), (ii), (iii) követelményeket ennek megfelelően átírnánk, akkor a jobboldali operátormodulus fogalmához jutnánk. Mi már most megállapodunk abban, hogy a következőkben kizárólag baloldali operátormodulusokat tekintünk, s azt a tényt, hogy G az R gyűrűvel mint baloldali operátortartománnyal ellátott operátormodulus, röviden úgy fejezzük ki, hogy G *R-modulus*. (Természetesen nemcsak az operátormodulus fogalma, hanem e dolgozat összes eredményei is értelemszerűen átfogalmazhatók jobboldali írásmódra.)

Operátormodulusra példa bármely Abel-féle csoport, amelynek operátortartománya az egyelemű gyűrű, (amely természetesen zérus-operátorként hat)[5]

[4] Szükségesnek találjuk hangsúlyozni, hogy itt és a továbbiakban gyűrűn mindig *asszociatív gyűrűt* értünk.

[5] A következőkben minden Abel-féle csoportot ebben a felfogásban tekintünk. Megfordítva, ha egy G operátormodulusról azt mondjuk, hogy operátortartománya 0, vagyis hogy G 0-modulus, akkor éppen a G közönséges Abel-féle csoportot értelmezzük. E dolgozat eredményeinek a közönséges Abel-féle csoportok esetére ily módon történő specializálása mindig lehetséges. (Szokásos a G közönséges Abel-féle csoportot operátormodulusként úgy is felfogni, mint olyant, amelynek operátortartománya az egész számok E gyűrűje, ahol az $a (\in G)$ elemnek az n egész számmal való na szorzata $n > 0$ esetén az n tagú $a + a + \cdots + a$ összeggel, $n < 0$ esetén ezen összeg negatívjával, végül $n = 0$ esetén 0-sal van értelmezve. Ez a felfogás azonban a mi vizsgálataink szempontjából nem előnyös.)

továbbá bármely R gyűrű is R-modulusnak tekinthető, ahol a modulus maga az R gyűrű R^+-szal jelölt additív csoportja, s az operátortartomány elemeivel való szorzás az R gyűrűben értelmezett szorzással van adva. Bármely G Abel-féle csoport tetszőleges R gyűrű esetén R-modulussá tehető, ha bármely $r(\in R)$, $g(\in G)$ elempárra az rg szorzatot $rg=0$-sal definiáljuk.

A G R-modulus elemeinek valamely H halmazát G *részmodulusának* nevezzük, ha bármely $r(\in R)$ és $h_1, h_2(\in H)$ elemekre $h_1 - h_2 \in H$ és $rh_1 \in H$ teljesül. E definició értelmében világos, hogy egy G (közönséges) Abel-féle csoport részmodulusai éppen G részcsoportjaival, s egy R gyűrű mint R-modulus részmodulusai R balideáljaival esnek össze. — Bármely (egynél több elemű) R-modulusnak van legalább két különböző részmodulusa: maga az egész modulus és az egyetlen elemből álló 0 részmodulus. Ha az A R-modulusnak csupán ez a két részmodulusa van, akkor azt mondjuk, hogy *A egyszerű R-modulus.*

Egy G R-modulusnak egy H R-modulusba való olyan $g \to g\varphi$ $(g \in G, g\varphi \in H)$ egyértelmű leképezését, amelyre

$$(g_1+g_2)\varphi = g_1\varphi + g_2\varphi$$

és

$$(rg_1)\varphi = r(g_1\varphi)$$

bármely g_1, g_2 $(\in G)$ és $r(\in R)$ elemek esetén teljesül, *homomorf leképezésnek*, vagy *homomorfizmusnak* nevezzük. A $g\varphi$ elemek összességét $G\varphi$-vel jelöljük, s azt mondjuk, hogy $G\varphi$ a G modulus képe a φ homomorfizmusnál; jelben: $G \sim G\varphi$. Ha a φ homomorf leképezés kölcsönösen egyértelmű, akkor izomorfizmusnak nevezzük; jelben: $G \cong G\varphi$.[6] A G modulus egy ε önmagába való homomorf leképezését *endomorfizmusnak* mondjuk. Ha az ε endomorfizmus idempotens (abban az értelemben, hogy $(g\varepsilon)\varepsilon = g\varepsilon$ G bármely g elemére), akkor *projekciónak* nevezzük.

A G R-modulus összes R-endomorfizmusainak halmazát gyűrűvé teszi az összeadás és szorzás következő definíciója: a G modulus χ és η endomorfizmusainak összegén, ill. szorzatán azt a $\chi+\eta$, ill. $\chi\eta$ leképezést értjük, amelyre G bármely g eleme esetén

$$g(\chi+\eta) = g\chi + g\eta, \quad \text{ill.} \quad g(\chi\eta) = (g\chi)\eta.$$

A G modulushoz ily módon egyértelműen hozzárendelt gyűrűt *G teljes endomorfizmusgyűrűjének* nevezzük és $\mathfrak{E}(G)$-vel jelöljük.

Legyen H a G R-modulusnak tetszőleges részmodulusa. Ekkor G-nek, mint közönséges Abel-féle csoportnak, H szerinti faktorcsoportja R-modulus-

[6] Ha adott esetben ki akarjuk hangsúlyozni, hogy az R operátortartományra nézve „megengedett" részmodulusról, illetve operátorhomomorfizmusról van szó, akkor R-részmodulusról, ill. R-homomorfizmusról beszélünk.

nak tekinthető, ha tetszőleges $r(\in R)$ elem és $g+H$ mellékosztály szorzatán az $rg+H$ mellékosztályt értjük. Minthogy H részmodulus G-ben, ez a szorzás független a g reprezentáns elem választásától. Az így nyert R-modulust *a G modulus H szerinti faktormodulusának* nevezzük és G/H-val jelöljük. A továbbiakban adott G modulus valamely G/H faktormodulusának elemeit $\bar{g}$ $(g \in G)$-sal jelöljük, ahol $\bar{g}=g+H$. Operátormodulusokra is érvényes a *homomorfizmustétel*: ha a G R-modulusnak a G' R-modulus homomorf képe, akkor az összes olyan G-beli g elem, amelynek képe a tekintett homomorfizmusnál 0, G-nek olyan H részmodulusát alkotja, amelyre $G/H \simeq G'$; másrészt, G bármely faktormodulusa G-nek homomorf képe; azaz, G összes homomorf képeinek és faktormodulusainak halmaza lényegében megegyezik.

Azt mondjuk, hogy a G R-modulus a H_ν $(\nu \in \Delta)$ R-modulusok *szubdirekt összege*, ha minden $\nu(\in \Delta)$ indexhez van G-nek olyan φ_ν homomorfizmusa, hogy $G\varphi_\nu = H_\nu$ és ha g 0-tól különböző eleme G-nek, akkor legalább egy ν-re $g\varphi_\nu \neq 0$. — Modulusoknak szubdirekt összegként való előállításainál leginkább a fenti definíció átfogalmazásából adódó következő tényt célszerű használni [4], [34]:

A G R-modulus akkor és csak akkor szubdirekt összege a H_ν $(\nu \in \Delta)$ R-modulusoknak, ha G-ben minden $\nu(\in \Delta)$-re van olyan K_ν részmodulus, hogy $G/K_\nu \simeq H_\nu$ és $\cap_{\nu \in \Delta} K_\nu = 0$.

Ha G^* a H_ν modulusok szubdirekt összege és a h_ν $(\in H_\nu)$ reprezentáns elemek bármely választásánál van olyan $g(\in G)$ elem, hogy $g\varphi_\nu = h_\nu$ minden $\nu(\in \Delta)$ indexre, akkor azt mondjuk, hogy G^* a H_ν modulusok *komplett direkt összege*. Ezt így jelöljük: $G^* = \sum_{\nu \in \Delta}^{*} H_\nu$. A G^* modulus, amelyet a H_ν modulusok lényegében egyértelműen határoznak meg, az összes lehetséges olyan $\langle \ldots, h_\nu, \ldots \rangle$ „vektorok" halmaza által realizálható, amelyek minden H_ν modulusból pontosan egy h_ν komponenset tartalmaznak, s amelyekre az összeadás és az R-beli elemekkel való szorzás a következőképpen van definiálva:

$$\langle \ldots, h_\nu, \ldots \rangle + \langle \ldots, g_\nu, \ldots \rangle = \langle \ldots, h_\nu + g_\nu, \ldots \rangle,$$
$$r\langle \ldots, h_\nu, \ldots \rangle = \langle \ldots, rh_\nu, \ldots \rangle.$$

Nyilvánvaló, hogy G^*-nak bármely ν $(\in \Delta)$-re van H_ν-vel izomorf részmodulusa, továbbá, hogy a H_ν modulusok bármely szubdirekt összege (izomorf módon) beágyazható G^*-ba.

Legyen G_0 a H_ν modulusok szubdirekt összege, és tegyük fel, hogy bármely g $(\in G_0)$ elemre $g\varphi_\nu \neq 0$ legfeljebb véges sok $\nu(\in \Delta)$ indexre teljesül, továbbá, hogy a $h_\nu(\in H_\nu)$ reprezentáns elemek minden olyan választásánál, ahol véges sok $\nu(\in \Delta)$ index kivételével $h_\nu = 0$, van olyan $g(\in G_0)$ elem, hogy $g\varphi_\nu = h_\nu$ minden $\nu(\in \Delta)$ indexre, ekkor azt mondjuk, hogy G_0 a

H_ν modulusok *diszkrét direkt összege*, vagy röviden csak *direkt összege*. Jelben: $G_0 = \sum_{\nu \in \Delta} H_\nu$. A G_0 modulust a H_ν modulusok lényegében egyértelműen meghatározzák, és G_0 izomorf a G^* modulus ama részmodulusával, amely az összes olyan $\langle \ldots, h_\nu, \ldots \rangle$ vektorokból áll, amelyeknek legfeljebb véges sok komponense különbözik zérustól. A G_0 modulusnak azok az elemei, amelyek a fenti izomorfizmusnál $\langle \ldots, 0, \ldots, 0, h_\nu, 0, \ldots, 0, \ldots \rangle$ alakú elemeknek felelnek meg, egy H_ν-vel izomorf H'_ν részmodulust alkotnak G_0-ban, és azt mondjuk, hogy G_0 a $H'_\nu (\nu \in \Delta)$ részmodulusainak direkt összege. Nyilvánvaló, hogy G_0 bármely g eleme

$$g = h'_{\nu_1} + \cdots + h'_{\nu_k} \qquad (h_{\nu_i} \in H'_{\nu_i},\ i = 1, \ldots, k)$$

alakban áll elő és ez az előállítás egyértelmű, azaz $h'_{\nu_1} + \cdots + h'_{\nu_k} = 0$-ból $h'_{\nu_1} = \cdots = h_{\nu_k} = 0$ következik.

Ha a G R-modulus H részmodulusához létezik G-nek olyan K részmodulusa, hogy G bármely eleme egy H-beli és egy K-beli elem összege, továbbá $H \cap K = 0$, akkor $G = H + K$, és azt mondjuk, hogy H a G R-modulus *direkt összeadandója.* Ekkor fennállnak a következő relációk:

$$H \simeq G/K, \quad K \cong G/H.$$

Ha H G-nek olyan részmodulusa, hogy G minden olyan M részmodulusára, amely maximális az $M \cap H = 0$ tulajdonságra nézve[7] fennáll a

$$G = H + M$$

direkt felbontás, akkor H-t a G *erős direkt összeadandójának* mondjuk.[8]

Értelemszerű módosítással definiálható gyűrűk szubdirekt összege, és érvényes a következő tétel:

Az R gyűrű akkor és csak akkor szubdirekt összege az $S_\nu (\nu \in \Delta)$ gyűrűknek, ha minden $\nu (\in \Delta)$-re van R-nek olyan I_ν (kétoldali) ideálja, hogy $R/I_\nu \cong S_\nu$ és $\cap_{\nu \in \Delta} I_\nu = 0$.

Egy G R-modulust (BOURBAKI [5] szerint) *unitér R-modulusnak* nevezünk, ha R egységelemes gyűrű ($1 \in R$) és bármely $g (\in G)$ elemre $1 \cdot g = g$.

Legyen a G R-modulusnak H tetszőleges részhalmaza, továbbá az R gyűrűnek L tetszőleges balideálja. LH-val jelöljük az összes lh ($l \in L, h \in H$) alakú elemekből megalkotható véges tagszámú összegek halmazát. LH mindig részmodulus, s ha H is részmodulus volt, akkor $LH \subseteq H$. Ha $RG = 0$, akkor azt mondjuk, hogy G *triviális R-modulus.* Bármely G R-modulusban az összes olyan g elemek, amelyekre $Rg = 0$, egy egyértelműen meghatározott

[7] Ez pontosabban azt jelenti, hogy M nem tartalmaztatik *valódi módon* G egyetlen olyan K részmodulusában sem, amelyre fennáll a $K \cap H = 0$ reláció.

[8] FUCHS LÁSZLÓ [13] adott kritériumot arra nézve, hogy egy Abel-féle csoport valamely direkt összeadandója erős direkt összeadandó legyen.

részmodulust alkotnak, amelyet G *maximális triviális részmodulusának* nevezünk. Ha R egységelemes gyűrű és G tetszőleges R-modulus, akkor G felbomlik maximális triviális részmodulusának és egy unitér R-modulusnak a direkt összegére.[9] Ha a G R-modulusra $RG = G$, akkor a G modulust *perfekt R-modulusnak* nevezzük. Unitér R-modulus mindig perfekt. Ha G valamely H részmodulusára a G/H faktormodulus perfekt, akkor azt mondjuk, hogy *H G-nek homoperfekt részmodulusa.* Világos, hogy egyszerű R-modulus vagy triviális vagy perfekt, továbbá, hogy egy direkt összegként előálló R-modulus akkor és csak akkor triviális, ill. perfekt, ha a tekintett felbontásban minden egyes direkt összeadandó triviális, ill. perfekt.

Ha H a G R-modulusnak olyan részmodulusa, hogy $H \subset G$ és G minden olyan K részmodulusára, amelyre $H \subseteq K \subset G$, a $K = H$ egyenlőség következik, akkor azt mondjuk, hogy *H maximális részmodulus G-ben.* Hasonlóan, *H minimális részmodulus G-ben,* ha a $0 \subset K \subseteq H$ relációból $K = H$ következik. Ha H maximális részmodulus G-ben, akkor G/H egyszerű R-modulus.[10]

A későbbiek során felhasználjuk a következő lemmát:

1. LEMMA: *A tetszőleges G R-modulus akkor és csak akkor bomlik fel véges sok egyszerű R-modulus direkt összegére, ha G-ben van véges sok olyan maximális részmodulus, amelyek metszete* 0.

A lemma bizonyítása megtalálható [24]-ben, a 164—165. oldalakon.

A G R-modulus valamely S *elemrendszere által generált részmodulusán* G-nek azt a részmodulusát értjük, amely legszűkebb az S elemrendszert tartalmazó részmodulusok között. Ezt a részmodulust az S rendszer egyértelműen meghatározza, jelölésére az $\{S\}$ jelet használjuk. Az egyetlen elem által generált részmodulust *ciklikus részmodulusnak* nevezzük. Ha $g \in G$, akkor $\{g\}$ az összes $rg + ng$ $(r \in R, n \in E)$ alakú elemek halmaza. Ha G unitér R-modulus, a $\{g\}$ ciklikus részmodulust már az összes rg $(r \in R)$ alakú elemek kimerítik. A G R-modulust *ciklikusnak* nevezzük, ha van olyan g eleme, amelyre $\{g\} = G$. A továbbiakban rövidség kedvéért a $\{g\}$ ciklikus modulust a *g elem ciklusának* fogjuk mondani. Ha S az R gyűrű valamely elemrendszere, akkor $\{S\}$ mindig az R gyűrű S által generált balideálját jelenti.

[9] Ez könnyen belátható az ún. Peirce-féle felbontás,

$$g = (g - 1 \cdot g) + 1 \cdot g \qquad (g \in G)$$

segítségével. Ebből ugyanis máris világos, hogy G bármely eleme az összes $g - 1 \cdot g$ $(g \in G)$ elemek által alkotott G_0 és az összes $1 \cdot g$ $(g \in G)$ elemek által alkotott G_1 részmodulusok egy-egy elemének összegeként áll elő. Minthogy továbbá G_0-t az 1 elem (s így R is) annullálja, G_1-et pedig (elemenként) reprodukálja, $G_0 \cap G_1 = 0$, s így valóban $G = G_0 + G_1$. Továbbá az is világos, hogy G_0 G-nek *maximális* triviális részmodulusa.

[10] Az egész dolgozatban a „$\subset$" jel mindig szigorú tartalmazást jelöl.

Azt mondjuk, hogy G *φ-tulajdonságú részmodulusaira nézve minimumkövetelménynek tesz eleget,* ha G φ-tulajdonságú részmodulusainak bármely szigorúan csökkenő lánca véges sok lépésben megszakad. Ha G minden részmodulusa rendelkezik a φ tulajdonsággal, akkor egyszerűen csak azt mondjuk, hogy G-ben teljesül a *minimumkövetelmény.* Értelemszerű módosítással definiálható a *maximumkövetelmény* is.

A G R-modulus véges számú $b_1, \ldots, b_k$ elemét *függetlennek* nevezzük, ha bármely

$$r_1 b_1 + n_1 b_1 + \cdots + r_k b_k + n_k b_k = 0 \qquad (r_i \in R;\, n_i \in E;\, i = 1, \ldots, k)$$

alakú relációból

$$r_1 b_1 + n_1 b_1 = \cdots = r_k b_k + n_k b_k = 0$$

következik. A G *tetszőleges számosságú* elemrendszerét *függetlennek* mondjuk, ha minden véges részrendszere független. Az így definiált függetlenség véges jellegű tulajdonság lévén, TUKEY lemmája szerint G bármely U részhalmaza tartalmaz egy S maximális független elemrendszert. Ha $U = G$, akkor azt mondjuk, hogy S a G modulus *maximális független elemrendszere.* G-nek valamely nem független elemrendszerét *függőnek* nevezzük. Ha G valamely g elemére és S elemrendszerére $\{g\} \cap \{S\} \neq 0$, akkor azt mondjuk, hogy a g elem függ az S elemrendszertől. Ha két elemrendszer olyan kapcsolatban van egymással, hogy az egyik elemrendszer bármely eleme függ a másik rendszertől és megfordítva, akkor a két elemrendszert *lineárisan ekvivalensnek* mondjuk.

G-nek valamely $S = (\ldots, b_\nu, \ldots)_{\nu \in \Delta}$ elemrendszere nyilvánvalóan akkor és csak akkor független, ha

$$\{\ldots, b_\nu, \ldots\}_{\nu \in \Delta} = \sum_{\nu \in \Delta}' \{b_\nu\}.$$

Ha $\sum_{\nu \in \Delta}' \{b_\nu\} = G$, akkor azt mondjuk, hogy az S elemrendszer G-nek *bázisa.* A bázis mindig maximális független elemrendszer G-ben, e tény megfordítása azonban általában nem áll fenn.

A dolgozatban többször fel fogjuk használni a következő, tisztán halmazelméleti lemmát:

2. LEMMA: *Legyen A és B két végtelen halmaz, és legyen számosságuk rendre $\mathfrak{m}$ és $\mathfrak{n}$. Jelöljük C-vel B összes véges részhalmazainak halmazát. Ha $\mathfrak{m} > \mathfrak{n}$, akkor A-nak bármely C-be való egyértelmű leképezésénél van C-nek olyan eleme, amely végtelen sok A-beli elem képe.*

A lemma állítása abból következik, hogy mivel $\mathfrak{n}$ végtelen kardinális szám, C számossága ugyancsak $\mathfrak{n}$, s így, ha a tekintett leképezésnél C egy-egy eleme legfeljebb véges sok esetben lépne fel képelemként, feltevésünkkel ellentétben $\mathfrak{m} \leqq \mathfrak{n}$ adódnék.

Végül összefoglaljuk a dolgozatban használt fontosabb jelöléseket:

E : a racionális egész számok gyűrűje;
R^+ : az R gyűrű additív csoportja;
$L_{(R)}$: ha R az S gyűrű részgyűrűje, L az R-nek balideálja, $L_{(R)}$-rel jelöljük L^+-t mint R-modulust, ahol az rl ($r \in R, l \in L$) szorzat megegyezik az S-ben definiált rl szorzattal[11];
R^* : az R gyűrűnek a 3. §-ban definiált egységelemes bővítése;
$O(g)$: a g elem rendje (definíció a 3. §-ban);
G/H : G-nek H szerinti faktormodulusa;
$+, \Sigma$: elemekre összeg, modulusokra direkt összeg;
Σ^* : modulusok komplett direkt összege;
$\oplus$: gyűrűk gyűrűelméleti direkt összege;
Σ_0^* : gyűrűk komplett direkt összege;
$\{S\}$: az S elemrendszer által generált részmodulus;
$R(\mathfrak{m})$: az $\mathfrak{m}$ számosságú szabad bázissal generált szabad R-modulus (definíció az 5. §-ban).

3. §. Egy redukciós tétel

A matematikai irodalomban eddig vizsgált operátormodulusok túlnyomó többsége unitér modulus volt. A nem unitér modulusok ugyanis már olyan távol fekvő általánosításai a közönséges Abel-féle csoportoknak, hogy a csoportelmélet jól bevált fogalomalkotásait és módszereit eddig a nem unitér modulusok esetére nem sikerült kielégítő módon általánosítani. Ebben a paragrafusban bebizonyítunk egy olyan tételt, amely lehetővé teszi az unitér modulusok elméletére általánosított fogalmak és módszerek természetes továbbvitelét tetszőleges operátormodulusok esetére.

Legyen R tetszőleges gyűrű. Tekintsük az összes $\langle r, n\rangle$ ($r \in R, n \in E$) rendezett párok R^* halmazát, ahol $\langle r_1, n_1\rangle = \langle r_2, n_2\rangle$ akkor és csak akkor, ha $r_1 = r_2$ és $n_1 = n_2$. Az R^* halmazt az összeadás és szorzás következő definíciója gyűrűvé teszi:

$$\langle r_1, n_1\rangle + \langle r_2, n_2\rangle = \langle r_1 + r_2, n_1 + n_2\rangle,$$
$$\langle r_1, n_1\rangle \langle r_2, n_2\rangle = \langle r_1 r_2 + n_2 r_1 + n_1 r_2, n_1 n_2\rangle.$$

Az R^* gyűrűben $\langle 0, 1\rangle$ egységelem, továbbá az összes $\langle r, 0\rangle$ ($r \in R$) elemek egy R-rel izomorf részgyűrűt alkotnak. R^* tehát R-nek egységelemes bővítése.

[11] Tulajdonképpen olyan jelölést kellene bevezetnünk, amely kifejezné, hogy S részstruktúrájáról van szó. Ez azonban a jelölést nagyon komplikálttá tenné, s a tekintett esetekben a fenti egyszerűbb jelölést is a félreértés veszélye nélkül használhatjuk.

R^* konstrukciója J. L. DORROHtól származik [7]. A továbbiakban R^* mindig az adott R gyűrű fenti módon konstruált egységelemes bővítését jelöli.

Bebizonyítunk egy tételt, amelynek a moduluselméleti alkalmazásokon kívül az is érdekessége, hogy az R^* gyűrűt R összes egységelemes bővítései között jellemzi.

Az R gyűrű két bővítését *ekvivalensnek* nevezzük, ha közöttük olyan izomorfizmus létesíthető, amelyben R elemei fix elemek. Azt mondjuk, hogy az R valamely R_1 bővítése *T_1-tulajdonságú*, ha egységelemes, és bármely G R modulus esetén R_1 úgy rendelhető G-hez operátortartományként, hogy G unitér R_1-modulus legyen, s R elemei változatlanul hassanak.[12] Ha R_1 R-nek olyan T_1-tulajdonságú bővítése, hogy R_1 egyetlen valódi részgyűrűje sem T_1-tulajdonságú bővítése R-nek, akkor azt mondjuk, hogy R_1 minimális T_1-tulajdonságú bővítése R-nek.

1. TÉTEL: *Legyen R tetszőleges gyűrű. R-nek van T_1-tulajdonságú bővítése. R bármely T_1-tulajdonságú bővítése tartalmazza R-nek legalább egy minimális T_1-tulajdonságú bővítését. R bármely minimális T_1-tulajdonságú bővítése és R^* mint R bővítése ekvivalensek.*

BIZONYÍTÁS: Legyen G tetszőleges R-modulus. Ekkor az

$$\langle r, n\rangle g = rg + ng \qquad (\langle r, n\rangle \in R^*, g \in G)$$

definícióval a G modulust R^*-modulussá tettük, ahol bármely $g(\in G)$ és $r(\in R)$ elemre $\langle 0, 1\rangle g = g$ és $\langle r, 0\rangle g = rg$. Az R^* tehát R-nek T_1-tulajdonságú bővítése.[13]

R^* minimális T_1-tulajdonságú bővítése R-nek. Legyen ugyanis S R^*-ban olyan részgyűrű, amely R-nek T_1-tulajdonságú bővítése. Ekkor $R \subset S$. Legyen S egységeleme $\langle r_0, n_0\rangle$. Itt $n_0 \neq 0$, s mivel

$$\langle r_0, n_0\rangle\langle r_0, n_0\rangle = \langle r_0^2 + 2n_0 r_0, n_0^2\rangle = \langle r_0, n_0\rangle,$$

$n_0^2 = n_0$, s így $n_0 = 1$ következik. Minthogy pedig $\langle r_0, 0\rangle \in S$.

$$\langle r_0, 1\rangle - \langle r_0, 0\rangle = \langle 0, 1\rangle \in S,$$

s így $S = R^*$.

Legyen R_1 R-nek T_1-tulajdonságú bővítése és tegyük fel, hogy a $G = \{a\}$ végtelen ciklikus csoport triviális R-modulus. Tekintsük most a G modulust olyan unitér R_1-modulusnak, amelyen R elemei zérus-operátorként hatnak. R_1-ben az 1 egységelem által generált I részgyűrű E-nek homomorf képe, és minthogy bármely 0-tól különböző $n(\in E)$-re

$$(n \cdot 1)a = n(1 \cdot a) = na \neq 0,$$

[12] Nyilvánvaló, hogy R-nek T_1-tulajdonságú bővítése mindig valódi bővítés.

[13] A szerzőtől függetlenül és vele kb. egyidőben egy bizonyos speciális esetben ugyanezt a konstrukciót alkalmazza RÉDEI LÁSZLÓ [40]. Ezzel kapcsolatban lásd még R. E. JOHNSON [22] dolgozatának 542. oldalát.

$n\cdot 1 \neq 0$, s így $I \simeq E$. Továbbá R_1-ben $R \cap I = 0$, minthogy I elemei közül csupán a 0 hat zérus-operátorként a G moduluson. R_1 tehát tartalmazza R és I additív csoportjának R_2 direkt összegét. Két $r + n\cdot 1 (\in R_2)$ alakú elem szorzata

$$(r+n\cdot 1)(s+m\cdot 1) = rs + n\cdot 1\cdot s + r\cdot m\cdot 1 + n\cdot 1\cdot m\cdot 1 =$$
$$= rs + ns + mr + nm\cdot 1 \in R_2,$$

tehát R_2 részgyűrűje R_1-nek. Mármost az

$$\langle r, n\rangle \to r + n\cdot 1 \qquad (r \in R;\ n \in E)$$

leképezés mutatja, hogy R^* és R_2 R-nek ekvivalens bővítései. Ezzel az 1. tétel bizonyítását befejeztük.

Az 1. tétel lehetővé teszi számunkra azt, hogy a tetszőleges G R-modulust unitér R^*-modulusnak tekinthessük. Ha a következőkben azt mondjuk, hogy G *R^*-modulus*, ez mindig azt fogja jelenteni, hogy *a G modulus az 1. tétel bizonyításában leírt „kanonikus" módon van az R^* operátortartománynyal ellátva.* Pontosabban, a továbbiakban adott G R-modulus esetén az

$$\langle r, n\rangle g \qquad (r \in R;\ n \in E;\ g \in G)$$

szorzat mindig az $rg + ng (\in G)$ elemet fogja jelenteni. Természetesen, ha valamely vizsgálatban az R gyűrű már eleve egységelemes és az összes tekintett R-modulus unitér, akkor az R^* operátortartomány bevezetése teljesen felesleges. Mi a továbbiakban mindig az általános esettel fogunk foglalkozni. Ha azonban valaki vizsgálatainkat az unitér modulusok esetére akarja specializálni, ezt könnyen megteheti, hiszen semmi nehézséget nem jelent az általunk bevezetett fogalmaknak és alkalmazott módszereknek az unitér modulusok esetére való értelemszerű módosítása.[14]

Legyen g a tetszőleges G R-modulus valamely eleme. R összes olyan r elemeinek L halmaza, amelyekre $rg = 0$, R-ben balideált alkot. Az irodalomban (lásd pl. [23], [33]) ezt a balideált nevezik a g elem rendjének. Amennyiben G unitér R-modulus, az elem rendjének fenti definíciója tökéletesen kielégítő. Ekkor ugyanis a g elem által generál ciklikus részmodulus izomorf az $R_{(R)}/L_{(R)}$ faktor modulussal, ahol L a g elem rendje. Ha azonban G nem unitér R-modulus (pl. triviális R-modulus), akkor az elem rendjének

[14] SZENDREI JÁNOS a fenti konstrukciónak a következő érdekes interpretációját adta: Legyen R tetszőleges gyűrű és G egy R-modulus. Legyen továbbá $A = \{a\}$ egy olyan ciklikus R-modulus, hogy $ra + na = 0$ $(r \in R;\ n \in E)$ esetén szükségképpen $r = 0, n = 0$ következzék. Ekkor az A modulus $\mathfrak{E}(A)$ teljes endomorfizmusgyűrűje az R gyűrű R^*-gal ekvivalens bővítése. Ha $\eta \in \mathfrak{E}(A), g \in G$ és $a\eta = ra + na$, akkor legyen: $\eta\cdot g = rg + ng$. E definícióval a G R-modulust olyan unitér $\mathfrak{E}(A)$-modulussá tettük, hogy az $R^* \cong \mathfrak{E}(A)$ ekvivalenciánál az $r (\in R)$ elemnek megfelelő $\varrho (\in \mathfrak{E}(A))$ endomorfizmusra fennáll a $\varrho g = rg$ egyenlőség minden $g (\in G)$ esetén.

fenti definíciója alapján az elem ciklusáról általában semmit sem mondhatunk. Ezért célszerűnek látszik e definíciót módosítanunk.

A tetszőleges G R-modulus valamely g *elemének rendjén* az R^* gyűrű összes olyan $\langle r, n\rangle$ elemeiből álló balideálját értjük, amelyekre $\langle r, n\rangle g = 0$. A g elem rendjét $O(g)$-vel jelöljük. Nyilvánvaló, hogy az elem rendjének most bevezetett fogalma természetes általánosítása az elem rendje fogalmának közönséges Abel-féle csoportok, tehát 0-modulusok esetében. Valóban, ha az a elem rendje a közönséges értelemben n, akkor a-t pontosan a $0^* \cong E$ gyűrű n által generált főideálja annullálja, és megfordítva.

Bármely R modulusnak van egy és csak egy olyan eleme, amelynek rendje az R^* gyűrű: ez a 0 elem. Ha az a elem rendje az R^* gyűrű zérusideálja, akkor az a elemet zérus rendű, vagy röviden 0 rendű elemnek hívjuk. Vannak olyan modulusok, amelyekben bármely 0-tól különböző elem zérus rendű. Az ilyen modulusokat *torziómentes modulusoknak* nevezzük.

Minthogy a G R-modulus valamely g elemének $\{g\}$ ciklusa az összes $rg + ng$ $(r \in R,\ n \in E)$ alakú elemek halmaza, ezt egyszerűen így fejezzük ki $\{g\} = R^*g$. Az

$$\langle r, n\rangle \to \langle r, n\rangle g \qquad (\langle r, n\rangle \in R^*)$$

leképezés alapján könnyű belátni, hogy

$$R^*_{(R)}/O(g)_{(R)} \cong R^*g = \{g\}.$$

Ha speciálisan $O(g) = 0$, akkor $R^*_{(R)} \cong \{g\}$.

Az elem rendjének fogalmával kapcsolatban még megjegyezzük, hogy az R^* gyűrű bármely L balideáljához konstruálható olyan R-modulus, amelynek alkalmas a elemére $O(a) = L$. Valóban, könnyű belátni, hogy az $R^*_{(R)}/L_{(R)}$ aktormodulusban a $\langle 0, 1\rangle$ $(\in R^*)$ elem mellékosztályának rendje L.

4. §. A lineáris rang

Az előző paragrafusban bevezetett R^* operátortartomány segítségével a függetlenség definíciója is egyszerűbben fogalmazható meg. E szerint egy G R-modulus valamely $S = (\ldots, b_\nu, \ldots)$ elemrendszerét függetlennek mondjuk, ha S bármely véges

$$b_{\nu_1}, \ldots, b_{\nu_k} \tag{1}$$

részrendszerére bármely

$$\langle r_1, n_1\rangle b_{\nu_1} + \cdots + \langle r_k, n_k\rangle b_{\nu_k} = 0 \qquad (\langle r_i, n_i\rangle \in R^*;\ i = 1, \ldots, k)$$

alakú relációból

$$\langle r_1, n_1\rangle b_{\nu_1} = \cdots = \langle r_k, n_k\rangle b_{\nu_k} = 0 \tag{2}$$

következik. Ha az (1) alatti elemek valamennyien zérus rendűek, akkor a (2) reláció ekvivalens a következővel:

$$\langle r_1, n_1\rangle = \cdots = \langle r_k, n_k\rangle = \langle 0, 0\rangle.$$

Tekintsük a tetszőleges G R-modulus zérus rendű elemei halmazának összes maximális független részrendszereit. Ezen elemrendszerek számosságainak minimumát a G modulus *lineáris rangjának* nevezzük.

Azt mondjuk, hogy a G R-modulus T_2-*tulajdonságú*, ha bármely 0 rendű elemének ciklusa torziómentes és e ciklusban bármely két 0-tól különböző elem ciklusainak metszete is 0-tól különböző.[15]

Megmutatjuk, hogy T_2-tulajdonságú modulusokra érvényes a „kicserélési tétel":

2. TÉTEL: *Legyen G T_2-tulajdonságú R-modulus és*

(A) $$a_1, \dots, a_j$$

(B) $$b_1, \dots, b_k$$

G-nek két olyan csupa 0 rendű elemekből álló véges elemrendszere, hogy (A) *független, de mindegyik eleme függ a* (B) *rendszertől. Ekkor $j \leqq k$ és a $b_1, \dots, b_k$ elemek sorrendjét alkalmasan megválasztva a* (B) *és az $a_1, \dots, a_j$, $b_{j+1}, \dots, b_k$ elemrendszerek lineárisan ekvivalensek.*

BIZONYÍTÁS: Mindenek előtt megmutatjuk, hogy a G modulusban 0 rendű elemekből álló elemrendszerek lineáris ekvivalenciája tranzitív. Ehhez elegendő azt belátnunk, hogy ha a $g_1, \dots, g_l (\in G)$ és $h_1, \dots, h_m (\in G)$ csupa 0 rendű elemből álló rendszerek lineárisan ekvivalensek, továbbá a tetszőleges $g (\in G)$ 0 rendű elem függ az egyik rendszertől, akkor függ a másik rendszertől is. Legyen

(3) $$\langle r_0, n_0\rangle g = \langle r_1, n_1\rangle g_1 + \cdots + \langle r_l, n_l\rangle g_l \qquad \langle r_0, n_0\rangle \neq \langle 0, 0\rangle$$

(4) $$\begin{cases} \langle r_{10}, n_{10}\rangle g_1 = \langle r_{11}, n_{11}\rangle h_1 + \cdots + \langle r_{1m}, n_{1m}\rangle h_m & \langle r_{10}, n_{10}\rangle \neq \langle 0, 0\rangle \\ \vdots & \\ \langle r_{l0}, n_{l0}\rangle g_l = \langle r_{l1}, n_{l1}\rangle h_1 + \cdots + \langle r_{lm}, n_{lm}\rangle h_m & \langle r_{l0}, n_{l0}\rangle \neq \langle 0, 0\rangle. \end{cases}$$

Minthogy a (3) és (4) képletekben szereplő valamennyi elem 0 rendű, a T_2-tulajdonság révén R^* alkalmas $\langle s_\alpha, i_\alpha\rangle (\neq \langle 0, 0\rangle)$ és $\langle s'_\alpha, i'_\alpha\rangle$ elemeivel $(\alpha = 1, \dots, l)$ fennállnak a következő egyenlőségek:

(5) $$\begin{cases} \langle s_1, i_1\rangle \langle r_1, n_1\rangle g_1 = \langle s'_1, i'_1\rangle \langle r_{10}, n_{10}\rangle g_1 \\ \langle s_2, i_2\rangle \langle s_1, i_1\rangle \langle r_2, n_2\rangle g_2 = \langle s'_2, i'_2\rangle \langle r_{20}, n_{20}\rangle g_2 \\ \vdots \\ \langle s_l, i_l\rangle \cdots \langle s_2, i_2\rangle \langle s_1, i_1\rangle \langle r_l, n_l\rangle g_l = \langle s'_l, i'_l\rangle \langle r_{l0}, n_{l0}\rangle g_l . \end{cases}$$

[15] Közönséges Abel-féle csoport mindig T_2-tulajdonságú, viszont példák mutatják, hogy a T_2-tulajdonság operátormodulusokra általában már nem teljesül.

Mármost (3)-at (balról) $\langle s_1, i_1\rangle$-gyel, (4) első egyenletét (balról) $\langle s_1', i_1'\rangle$-vel beszorozva, a (3) beszorzott alakjában az $\langle s_1, i_1\rangle\langle r_1, n_1\rangle g_1$ elem (5) első egyenlete alapján a h_i elemek egy (R^* feletti) lineáris kombinációjával helyettesíthető. Az így nyert kifejezést $\langle s_2, i_2\rangle$-vel, (4) második egyenletét $\langle s_2', i_2'\rangle$-vel beszorozva ismét (5) alapján helyettesítünk, s ezt az eljárást folytatva azt kapjuk, hogy az

$$\langle s_l, i_l\rangle\cdots\langle s_2, i_2\rangle\langle s_1, i_1\rangle\langle r_0, n_0\rangle g\,(\neq 0)$$

elem benne van a G modulus $\{h_1, \ldots, h_m\}$ részmodulusában, tehát g függ a $h_1, \ldots, h_m$ elemrendszertől.

Tekintsük most a tétel feltételeinek eleget tevő (A) és (B) elemrendszereket. A tétel állítása nyilvánvalóan igaz, ha $j=0$. Tegyük fel, hogy a tételt már bebizonyítottuk $j-1$-re.

Minthogy az $a_1, \ldots, a_{j-1}$ elemrendszer független és minden eleme függ (B)-től, indukciós feltevésünk értelmében $j-1 \leqq k$ és a $b_1, \ldots, b_k$ elemek sorrendjének alkalmas megválasztásával a

$$(6) \qquad b_1, \ldots, b_k$$

$$(7) \qquad a_1, \ldots, a_{j-1}, b_j, \ldots, b_k$$

rendszerek lineárisan ekvivalensek. Minthogy a_j függ a (6) rendszertől, így függ a (7) rendszertől is, tehát fennáll egy

$$\langle t_0, m_0\rangle a_j = \langle t_1, m_1\rangle a_1 + \cdots + \langle t_{j-1}, m_{j-1}\rangle a_{j-1} + \\ + \langle t_j, m_j\rangle b_j + \cdots + \langle t_k, m_k\rangle b_k \qquad (\langle t_0, m_0\rangle \neq \langle 0, 0\rangle)$$

alakú reláció. Ebből az (A) rendszer függetlensége miatt következik, hogy $j \leqq k$ és hogy a $\langle t_j, m_j\rangle, \ldots, \langle t_k, m_k\rangle$ elemek közül legalább egy, mondjuk $\langle t_j, m_j\rangle$ különbözik $\langle 0, 0\rangle$-tól. Ekkor

$$\langle t_j, m_j\rangle b_j = -\langle t_1, m_1\rangle a_1 - \cdots - \langle t_{j-1}, m_{j-1}\rangle a_{j-1} + \\ + \langle t_0, m_0\rangle a_j - \langle t_{j+1}, m_{j+1}\rangle b_{j+1} - \cdots - \langle t_k, m_k\rangle b_k,$$

tehát a b_j elem függ az

$$(8) \qquad a_1, \ldots, a_j, b_{j+1}, \ldots, b_k$$

elemrendszertől. Minthogy pedig így a (7) és (8) elemrendszerek lineárisan ekvivalensek, a tranzitivitás miatt ugyanaz áll a (6) és (8) rendszerekre is, s ezzel a tétel bizonyítását befejeztük.

3. TÉTEL: *Legyen G T_2-tulajdonságú R-modulus. G zérus rendű elemeinek bármely két maximális független rendszere egyenlő számosságú.*

KOROLLÁRIUM: *T_2-tulajdonságú modulus lineáris rangja megegyezik a modulus 0 rendű elemei tetszőleges maximális független rendszerének számosságával.*

BIZONYÍTÁS: Legyen A és B a tétel feltételeinek eleget tevő két elemrendszer. Ha közülük bármelyik véges, a tétel állítása azonnal következik a 2. tételből.

Tegyük fel tehát, hogy A számossága $\mathfrak{m}$, B számossága $\mathfrak{n}$, továbbá, hogy $\mathfrak{m} > \mathfrak{n}$ és mindkettő végtelen kardinális szám. Jelöljük C-vel B összes véges részhalmazainak halmazát. Minthogy A minden eleme függ B-től, A minden a_ν eleméhez tekintsünk egy és csak egy

$$(9) \qquad \langle r_\nu, n_\nu \rangle a_\nu = \langle r_{\nu_1}, n_{\nu_1} \rangle b_{\nu_1} + \cdots + \langle r_{\nu_k}, n_{\nu_k} \rangle b_{\nu_k}$$
$$(\langle r_\nu, n_\nu \rangle \neq \langle 0, 0 \rangle;\ b_{\nu_1}, \ldots, b_{\nu_k} \in B)$$

alakú (biztosan létező) relációt. Ekkor az a leképezés, amely A minden a_ν eleméhez az egyértelműen hozzárendelt (9) relációban fellépő $b_{\nu_1}, \ldots, b_{\nu_k}$ elemek halmazát mint C elemét rendeli hozzá, A-nak C-be való egyértelmű leképezése, s így a 2. lemma szerint A-nak van olyan végtelen részrendszere, amely B-nek valamely véges részrendszerétől függ. Ez azonban ellentmondásban van a 2. tétel állításával. Az ellentmondás oka nyilván az $\mathfrak{m} > \mathfrak{n}$ feltevés, s mivel A és B szerepe teljesen szimmetrikus, következik, hogy $\mathfrak{m} = \mathfrak{n}$; ezzel a tételt bebizonyítottuk.[16]

4. TÉTEL: *Legyen H a G T_2-tulajdonságú R-modulus részmodulusa. Ekkor G lineáris rangja megegyezik a H és G/H modulusok lineáris rangjának összegével.*

BIZONYÍTÁS: Legyen h_ν $(\nu \in \Delta)$ a H, $\bar{g}_\mu$ $(\mu \in \Gamma)$ a G/H modulus zérus rendű elemeinek valamely maximális független rendszere, s tegyük fel, hogy a $\bar{g}_\mu$ $(\mu \in \Gamma)$ elemrendszer számossága éppen G/H lineáris rangja. A tétel bizonyításához elegendő megmutatnunk, hogy az

$$(10) \qquad S = (\ldots, h_\nu, \ldots, g_\mu, \ldots)_{\nu \in \Delta, \mu \in \Gamma} \qquad (g_\mu \in \bar{g}_\mu)$$

elemrendszer G zérus rendű elemeinek maximális független rendszere.

Először is világos, hogy S minden eleme 0 rendű. Továbbá, tegyük fel, hogy S elemei között fennáll egy

$$(11) \qquad \langle r_1, n_1 \rangle h_{\nu_1} + \cdots + \langle r_k, n_k \rangle h_{\nu_k} + \langle s_1, m_1 \rangle g_{\mu_1} + \cdots + \langle s_l, m_l \rangle g_{\mu_l} = 0$$

alakú reláció. A G/H fraktormodulusra áttérve

$$\langle s_1, m_1 \rangle \bar{g}_{\mu_1} + \cdots + \langle s_l, m_l \rangle \bar{g}_{\mu_l} = 0$$

adódik, ahonnan a $\bar{g}_\mu$ elemrendszer függetlensége miatt

$$\langle s_1, m_1 \rangle = \cdots = \langle s_l, m_l \rangle = \langle 0, 0 \rangle$$

[16] E helyen talán érdemes megjegyezni, hogy a fenti bizonyításhoz hasonlóan a testelméletben a transzcendenciafok invarianciájára is egy elegáns bizonyítás adódik. Lásd [30].

következik. Így a (11) egyenlőségből

$$\langle r_1, n_1\rangle h_{\nu_1} + \cdots + \langle r_k, n_k\rangle h_{\nu_k} = 0,$$

s most a h_ν elemrendszer függetlenségéből kapjuk, hogy

$$\langle r_1, n_1\rangle = \cdots = \langle r_k, n_k\rangle = \langle 0, 0\rangle.$$

Tehát a (10) elemrendszer független.

Végül a (10) rendszer maximális voltát kell megmutatnunk. Legyen g a G modulus valamely 0 rendű eleme. Ekkor okvetlenül fennáll egy

$$(12) \qquad \langle r, n\rangle g = \langle t_1, j_1\rangle g_{\mu'_1} + \cdots + \langle t_p, j_p\rangle g_{\mu'_p} + h$$

alakú reláció, ahol $h \in H$ és $\langle r, n\rangle \neq \langle 0, 0\rangle$. Ha h nem 0 rendű elem, azaz ha valamely $\langle s, m\rangle \neq \langle 0, 0\rangle$ elemre $\langle s, m\rangle h = 0$, akkor

$$(13) \qquad \langle s, m\rangle \langle r, n\rangle g = \langle s, m\rangle \langle t_1, j_1\rangle g_{\mu'_1} + \cdots + \langle s, m\rangle \langle t_p, j_p\rangle g_{\mu'_p}.$$

Ha h zérus rendű elem, akkor fennáll egy

$$(14) \qquad \langle r', n'\rangle h = \langle z_1, i_1\rangle h_{\nu'_1} + \cdots + \langle z_q, i_q\rangle h_{\nu'_q} \qquad (\langle r', n'\rangle \neq \langle 0, 0\rangle)$$

alakú reláció. A (12) egyenletet balról $\langle r', n'\rangle$-vel szorozva, s az így nyert egyenlőségbe (14) alapján helyettesítve az

$$(15) \qquad \langle r', n'\rangle \langle r, n\rangle g = \langle z_1, i_1\rangle h_{\nu'_1} + \cdots + \langle z_q, i_q\rangle h_{\nu'_q} + \langle r', n'\rangle \langle t_1, j_1\rangle g_{\mu'_1} + \\ + \cdots + \langle r', n'\rangle \langle t_p, j_p\rangle g_{\mu'_p}$$

relációt nyerjük. Figyelembe véve, hogy g zérus rendű elem és G T_2-tulajdonságú modulus, $\langle s, m\rangle \langle r, n\rangle g \neq 0$ és $\langle r', n'\rangle \langle r, n\rangle g \neq 0$, tehát (13) és (15) szerint g mindkét esetben függ az S elemrendszertől.

Ezzel a 4. tételt bebizonyítottuk.

A T_2-tulajdonságú modulusokkal kapcsolatos duális problémát oldja meg a következő

5. TÉTEL: *A tetszőleges R gyűrű akkor és csak akkor olyan, hogy bármely R-modulus T_2-tulajdonságú, ha R^* zérusosztómentes gyűrű és bármely két 0-tól különböző baloldali főideáljának metszete is különbözik 0-tól.*[17]

BIZONYÍTÁS: Tegyük fel, hogy az R gyűrűre bármely R-modulus T_2-tulajdonságú. Ekkor speciálisan $R^*_{(R)}$ is T_2-tulajdonságú. Mivel a $\langle 0, 1\rangle$ elem 0 rendű és R^* bármely $\langle r, n\rangle$ eleme benne van a $\{\langle 0, 1\rangle\}$ ciklusban, így ha $\langle r, n\rangle \neq \langle 0, 0\rangle$, a T_2-tulajdonság miatt $\langle s, m\rangle \langle r, n\rangle = \langle 0, 0\rangle$-ból $\langle s, m\rangle = \langle 0, 0\rangle$ következik, tehát R^* zérusosztómentes gyűrű. Továbbá tegyük fel, hogy L valamely R-részmodulusa R^*-nak. Ha $\langle t, l\rangle \in L$ és $\langle z, k\rangle$ tetszőleges R^*-beli elem, akkor

$$\langle z, k\rangle \langle t, l\rangle = \langle zt + lz + kt, kl\rangle = \langle zt + zl, 0\rangle + \langle kt, kl\rangle = \\ = \langle z, 0\rangle \langle t, l\rangle + k\langle t, l\rangle \in L,$$

[17] A tételben a „baloldali főideáljának" kifejezés helyettesíthető a „balideáljának" szóval.

tehát L az R^* gyűrű balideálja. Ezt figyelembe véve a T_2-tulajdonságból következik, hogy R^* bármely két 0-tól különböző balideáljának metszete is 0-tól különböző.

Megfordítva, legyen G tetszőleges R-modulus és R^* olyan zérusosztómentes gyűrű, amelyben bármely két 0-tól különböző baloldali főideál metszete is 0-tól különböző. Megmutatjuk, hogy G T_2-tulajdonságú R-modulus. Legyen g G-nek 0 rendű eleme, és tekintsük a $\{g\}$ ciklust. Ez az összes $\langle r, n\rangle g$ alakú elemekből áll. Ha $\langle r, n\rangle \neq \langle 0, 0\rangle$, akkor $\langle r, n\rangle g \neq 0$, s mivel R^* zérusosztómentes, az $\langle s, m\rangle\langle r, n\rangle g = 0$ egyenlőségből $\langle s, m\rangle = \langle 0, 0\rangle$ következik, tehát $\langle r, n\rangle g$ is 0 rendű elem. Legyen továbbá $\langle t, l\rangle \neq \langle 0, 0\rangle$. Ekkor $\langle t, l\rangle g \neq 0$, s az R^* gyűrűre kirótt feltétel miatt van olyan $\langle z_1, k_1\rangle$ és $\langle z_2, k_2\rangle$ elem, hogy

$$\langle z_1, k_1\rangle\langle r, n\rangle = \langle z_2, k_2\rangle\langle t, l\rangle \neq \langle 0, 0\rangle.$$

Így az $\{\langle r, n\rangle g\}$ és $\{\langle t, l\rangle g\}$ ciklusoknak a

$$\langle z_1, k_1\rangle\langle r, n\rangle g = \langle z_2, k_2\rangle\langle t, l\rangle g$$

elem 0-tól különböző közös elemük. Ezzel bebizonyítottuk, hogy G T_2-tulajdonságú R-modulus.

Végül megmutatjuk, hogy van olyan S gyűrű, amely kielégíti az 5. tételben szereplő feltételeket. Az egyelemű gyűrű mindenesetre ilyen. Lássunk most egy nem triviális példát. Legyen $E[x]$ az E gyűrű feletti egyhatározatlanos polinomok gyűrűje. Jelöljük S-sel $E[x]$-ben az x által generált ideált. Könnyű belátni, hogy ekkor $S^* \cong E[x]$. Az $E[x]$ gyűrű zérusosztómentes és kommutatív. E tulajdonságokból következik, hogy ha $f(x) \neq 0$ és $g(x) \neq 0$, akkor $f(x) \cdot g(x) \neq 0$, s $f(x) \cdot g(x)$ eleme mind az $f(x)$, mind pedig a $g(x)$ által generált ideálnak. S tehát valóban kielégíti a kívánt feltételeket. Ezzel kapcsolatban érdemes még hangsúlyozni, hogy az $S^* \cong E[x]$ izomorfizmus alapján az S gyűrűvel mint operátortartománnyal ellátott modulusok elmélete összeesik az unitér $E[x]$-modulusok elméletével.

5. §. Szabad R-modulusok

E paragrafus tárgya a szabad R-modulusok legáltalánosabb értelemben vett fogalmának bevezetése, s e fogalomra vonatkozó alapvető tételek bizonyítása.

Egységelemes gyűrűk esetében az unitér szabad R-modulus fogalma már szerepelt az irodalomban.[18] E fogalomnak azonban az volt a hiányossága, hogy egy ilyen szabad R-modulus faktormodulusaként csak unitér

[18] Eszerint ha R egységelemes gyűrű, egy unitér szabad R-modulus $R_{(R)}$-rel izomorf R-modulusok direkt összege.

R-modulusok állíthatók elő. Mi az alábbiakban tetszőleges R gyűrű esetén a szabad R-modulus fogalmát annyira általánosan fogjuk definiálni, hogy e fogalom kielégíti azt a vele szemben támasztott természetes követelményt, hogy bármely R-modulus valamely szabad R-modulus faktormodulusaként álljon elő. A szabad R-modulusok fogalmának meghatározását megkönnyíti a 3. §-ban bevezetett jelölési mód.

Jelöljön R tetszőleges gyűrűt.

(I) Legyen S az x_α szimbólumok rendszere, ahol α befutja az $\mathfrak{m}$ számosságú A halmazt. Tekintsük most az

$$f=\sum_{i=1}^{k}\langle r_i, n_i\rangle x_{\alpha_i} \qquad (\langle r_i, n_i\rangle \in R^*)$$

formális (véges tagszámú) összegek $F^{(\mathrm{I})}$ halmazát, ahol az $\alpha_i(i=1,\dots,k)$ indexek páronként különbözők. Egy ilyen f kifejezést R feletti lineáris formának nevezünk. Ha minden i-re $\langle r_i, n_i\rangle=\langle 0,0\rangle$, azt írjuk, hogy $f=0$. Két

$$f_1=\sum_{i=1}^{k}\langle r_{1i}, n_{1i}\rangle x_{\alpha_{1i}} \quad \text{és} \quad f_2=\sum_{j=1}^{l}\langle r_{2j}, n_{2j}\rangle x_{\alpha_{2j}}$$

lineáris formát egyenlőnek tekintünk, ha minden olyan i,j indexpárra, amelyre $\alpha_{1i}=\alpha_{2j}$, az $\langle r_{1i}, n_{1i}\rangle=\langle r_{2j}, n_{2j}\rangle$ egyenlőség következik, továbbá, ha valamely i-hez nincs olyan j index, hogy $\alpha_{1i}=\alpha_{2j}$ volna, akkor $\langle r_{1i}, n_{1i}\rangle=\langle 0,0\rangle$ és megfordítva. Az $F^{(\mathrm{I})}$ halmazt R-modulussá tehetjük a műveletek következő definíciójával:

a) Legyen s az R gyűrű tetszőleges eleme. Ekkor

$$sf=\sum_{i=1}^{k}(s\langle r_i, n_i\rangle)x_{\alpha_i}=\sum_{i=1}^{k}\langle sr_i+n_i s, 0\rangle x_{\alpha_i}.$$

b) Legyen

$$f_1=\sum_{i=1}^{k}\langle r_{1i}, n_{1i}\rangle x_{\alpha_{1i}}; \quad f_2=\sum_{j=1}^{l}\langle r_{2j}, n_{2j}\rangle x_{\alpha_{2j}}.$$

Ekkor

$$f_1+f_2=\sum_{i=1}^{k}\langle r_{1i}, n_{1i}\rangle x_{\alpha_{1i}}+\sum_{j=1}^{l}\langle r_{2j}, n_{2j}\rangle x_{\alpha_{2j}}, \tag{16}$$

ha még az így nyert kifejezést lineáris formává tesszük azáltal, hogy a lehetséges „összevonásokat“ elvégezzük, azaz (16)-ban mindazokra az i,j indexpárokra, amelyekre $\alpha_{1i}=\alpha_{2j}$, az $\langle r_{1i}, n_{1i}\rangle x_{\alpha_{1i}}$ és $\langle r_{2j}, n_{2j}\rangle x_{\alpha_{2j}}$ tagokat $\langle r_{1i}+r_{2j}, n_{1i}+n_{2j}\rangle x_{\alpha_{1i}}$-vel helyettesítjük.

(II) Legyen A egy $\mathfrak{m}$ számosságú halmaz és G_α minden α ($\in \mathsf{A}$) indexre egy $R^*_{(R)}$-rel izomorf R-modulus. Jelöljük $F^{(\mathrm{II})}$-vel a G_α modulusok direkt összegét: $F^{(\mathrm{II})}=\sum_{\alpha\in \mathsf{A}} G_\alpha$.

(III) Legyen $F^{(III)}$ olyan R-modulus, amelyben létezik olyan $\mathfrak{m}$ számosságú $X=(\ldots, x_\alpha, \ldots)$ elemrendszer, hogy a modulus bármely f eleme egyértelműen írható az $f=\sum_{i=1}^{k}\langle r_i, n_i\rangle x_{\alpha_i}$ véges tagszámú összeg alakjában.

Könnyen belátható, hogy az (I), (II) és (III)-ban definiált $F^{(I)}$, $F^{(II)}$ és $F^{(III)}$ R-modulusok izomorfok. Ezt, a fentiekben három különböző módon realizált, de izomorfizmus erejéig egyértelműen meghatározott F objektumot *szabad R-modulusnak* nevezzük. Minthogy az F szabad R-modulust az R gyűrű és az $\mathfrak{m}$ számosság lényegében egyértelműen meghatározza, jelölésére az $R(\mathfrak{m})$ szimbólumot használjuk. A (III)-ban szereplő X elemrendszert az $F^{(III)}$ modulus *szabad bázisának* nevezzük. Nyilvánvaló, hogy $F^{(I)}$-nek szabad bázisa az összes $\langle 0, 1\rangle x_\alpha (\alpha \in \mathrm{A})$ elemek halmaza, $F^{(II)}$ szabad bázisa pl. azon $g_\alpha (\in G_\alpha, \alpha \in \mathrm{A})$ elemek összessége, amelyek az $R^*_{(R)} \cong G_\alpha$ izomorfizmusokban a $\langle 0, 1\rangle$ elemnek felelnek meg. — Tekintsük $R(\mathfrak{m})$ összes szabad bázisát. E szabad bázisok számosságainak minimumát az $R(\mathfrak{m})$ szabad R-modulus *szabad rangjának* nevezzük. Ha $R(\mathfrak{m})$ szabad rangja $\mathfrak{n}$, lineáris rangja $\mathfrak{r}$, akkor nyilvánvalóan fennállnak az $\mathfrak{r} \leqq \mathfrak{n} \leqq \mathfrak{m}$ egyenlőtlenségek. Ha R az előző paragrafus 5. tételében szereplő feltételeket kielégítő gyűrű, akkor $\mathfrak{r}=\mathfrak{n}=\mathfrak{m}$.

6. TÉTEL: *Bármely G R-modulus izomorf valamely szabad R-modulus egy faktormodulusával.*

BIZONYÍTÁS: Legyen $S=(\ldots, a_\alpha, \ldots)_{\alpha\in\mathrm{A}}$ a G R-modulus valamely generátorrendszere, s tekintsük azt az F szabad R-modulust, amelynek szabad bázisa az a_α $(\alpha \in \mathrm{A})$ elemeknek kölcsönösen egyértelmű módon megfelelő x_α elemek X halmaza. Az

$$\langle r_1, n_1\rangle x_{\alpha_1} + \cdots + \langle r_k, n_k\rangle x_{\alpha_k} \longrightarrow r_1 a_{\alpha_1} + n_1 a_{\alpha_1} + \cdots + r_k a_{\alpha_k} + n_k a_{\alpha_k}$$

leképezés nyilvánvalóan F-nek G-re való homomorf leképezése, s így a homomorfizmus-tétel szerint G valóban izomorf az F modulus valamely F/H faktormodulusával.

A bizonyításból az is következik, hogy *ha a G modulusnak van $\mathfrak{m}$ számosságú generátorrendszere, akkor G már egy olyan szabad R-modulus valamely faktormodulusával izomorf, amelynek szabad rangja nem nagyobb $\mathfrak{m}$-nél.*

Ha a 6. tétel bizonyításában szereplő F modulus H részmodulusának az

$$f_\beta = \langle r_{\beta 1}, n_{\beta 1}\rangle x_{\beta 1} + \cdots + \langle r_{\beta k_\beta}, n_{\beta k_\beta}\rangle x_{\beta k_\beta} \qquad (\beta \in \mathrm{B})$$

elemek U halmaza generátorrendszere, akkor a G modulusban az U rendszernek megfelel az

$$r_{\beta 1} a_{\beta 1} + n_{\beta 1} a_{\beta 1} + \cdots + r_{\beta k_\beta} a_{\beta k_\beta} + n_{\beta k_\beta} a_{\beta k_\beta} = 0 \qquad (\beta \in \mathrm{B})$$

relációk rendszere, amely nyilvánvalóan rendelkezik azzal a tulajdonsággal, hogy a G modulus elemei között fenálló bármely reláció e relációrendszerből levezethető. Egy modulus bizonyos elemei között fennálló, relációknak fenti tulajdonságú rendszerét a modulust *definiáló relációk rendszerének* hívjuk.

Bármely G R-modulus megadható egy bizonyos elemhalmazra vonatkozó definiáló relációk rendszerével. Megfordítva, ha adva van egy R gyűrű, egy M elemhalmaz és egy M-re vonatkozó R feletti relációrendszer, akkor létezik egy, és izomorfizmustól eltekintve csakis egy, olyan R-modulus, amelyre nézve a tekintett relációk definiáló relációk rendszerét alkotják.

Most bebizonyítjuk a következő tételt:

7. TÉTEL: *Ha a G R-modulus valamely A részmodulusa szerinti faktormodulusa szabad R-modulus, akkor A G-nek direkt összeadandója.*

BIZONYÍTÁS: Legyen G/A szabad R-modulus és $S=(\ldots,\bar{a}_\varrho,\ldots)_{\varrho\in P}$ e modulus valamely szabad bázisa. Minden $\bar{a}_\varrho(\varrho\in P)$ mellékosztályból egy-egy a_ϱ reprezentáns elemet kiválasztva nyilvánvaló, hogy a G modulus $B=\{\ldots,a_\varrho,\ldots\}_{\varrho\in P}$ részmodulusa szabad R-modulus az $(\ldots,a_\varrho,\ldots)_{\varrho\in P}$ szabad bázissal, s hogy $A\cap B=0$. Minthogy másrészt bármely A szerinti mellékosztály tartalmazza B-nek valamely elemét, fennáll a

$$G=\{A,B\}=A+B$$

egyenlőség, q. e. d.

A tetszőleges H R-modulust *T_3-tulajdonságúnak* mondjuk, ha abból, hogy H a G R-modulusnak homomorf képe, következik, hogy G-nek van H-val izomorf direkt összeadandója. A 7. tételből és bizonyításból nyilvánvaló, hogy bármely szabad R-modulus T_3-tulajdonságú. Felvethető tehát a probléma: a T_3-tulajdonság jellemzi-e a szabad R-modulusokat? E kérdésre a pontos választ megadja a

8. TÉTEL:[19] *Egy H R-modulus akkor és csak akkor T_3-tulajdonságú, ha direkt összeadandója valamely szabad R-modulusnak.*[20]

BIZONYÍTÁS: Ha a H R-modulus T_3-tulajdonságú, akkor minthogy szabad R-modulus faktormodulusa, szabad R-modulus direkt összeadandója is.

Megfordítva, legyen H az F szabad R-modulus direkt összeadandója:

$$F=H+K, \tag{17}$$

és a G R-modulus homomorf képe: $G\sim H$. Megmutatjuk, hogy G-nek van

[19] Az unitér modulusok speciális esetében a tétel állításával tartalmilag megegyező állítás be van bizonyítva CARTAN és EILENBERG könyvében. (Lásd [6], Proposition 24, 7. old.)

[20] Hogy szabad R-modulus direkt összeadandója nem okvetlenül szabad modulus, mutatja a következő egyszerű példa: $B=E^*_{(E)}$ szabad E-modulus, amelynek B_0 maximális triviális részmodulusa 0-tól különböző, minthogy például $\langle n,-n\rangle$ $(n\neq 0)$ B_0-nak 0-tól különböző eleme. Mivel E egységelemes gyűrű, B_0 B-nek direkt összeadandója. Másfelől B_0 nem szabad E-modulus, hiszen egyetlen 0 rendű eleme sincs.

H-val izomorf direkt összeadandója, azaz H T_3-tulajdonságú. Jelöljük F-nek a ((17) direkt felbontás alapján) H-ra való projekcióját ε-nal, G-nek H-ra való homomorf leképezését η-val. Legyen F valamely szabad bázisa az $x_\alpha (\alpha \in \mathrm{A})$ elemek halmaza. Ekkor minden $\alpha(\in \mathrm{A})$ indexhez meghatározunk egy és csak egy olyan $g_\alpha(\in G)$ elemet, amelyre $g_\alpha \eta = x_\alpha \varepsilon$. Az $x_\alpha \rightarrow g_\alpha$ $(\alpha \in \mathrm{A})$ leképezés F-nek G-be való valamely τ homomorf leképezését indukálja. Megmutatjuk, hogy H bármely h elemére $(h\tau)\eta = h$.[21] Legyen ugyanis $h = \langle r_1, n_1 \rangle x_{\alpha_1} + \cdots + \langle r_k, n_k \rangle x_{\alpha_k}$. Ekkor egyrészt $h = h\varepsilon = \langle r_1, n_1 \rangle (x_{\alpha_1}\varepsilon) + \cdots + \langle r_k, n_k \rangle (x_{\alpha_k}\varepsilon)$, másrészt $(h\tau)\eta = \langle r_1, n_1 \rangle (x_{\alpha_1}\tau)\eta + \cdots + \langle r_k, n_k \rangle (x_{\alpha_k}\tau)\eta = \langle r_1, n_1 \rangle (x_{\alpha_1}\varepsilon) + \cdots + \langle r_k, n_k \rangle (x_{\alpha_k}\varepsilon)$, s így valóban $(h\tau)\eta = h$. Ebből következik, hogy ha $h \neq 0$, akkor $h\tau \neq 0$. Tehát a G modulus $H\tau$ részmodulusa izomorf H-val. Jelöljük M-mel G-ben az η homomorfizmus magját, azaz mindazon $g(\in G)$ elemek halmazát, amelyekre $g\eta = 0$. Megmutatjuk, hogy $G = H\tau + M$. Mindenesetre világos, hogy $H\tau \cap M = 0$, mivel $(h\tau)\eta = 0$-ból $h = 0$ s így $h\tau = 0$ következik. Azt, hogy $\{H\tau, M\} = G$, a következőképpen láthatjuk be. Legyen z tetszőleges G-beli elem, ekkor

$$z = (z\eta)\tau + [z - (z\eta)\tau].$$

Minthogy $z\eta \in H$, ezért $(z\eta)\tau \in H\tau$, továbbá

$$[z - (z\eta)\tau]\eta = z\eta - [(z\eta)\tau]\eta = z\eta - z\eta = 0,$$

tehát $[z - (z\eta)\tau] \in M$. Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

Közönséges Abel-féle csoportok esetén a T_3-tulajdonság a szabad Abel-féle csoportokat jellemzi. Ennek az az oka, hogy szabad Abel-féle csoport bármely részcsoportja, s így méginkább bármely direkt összeadandója is szabad Abel-féle csoport. Ez azonban operátormodulusok esetén általában már nem érvényes. Ismeretes, hogy ha az R egységelemes gyűrű zérusosztómentes és bármely balideálja (baloldali) főideál, akkor bármely unitér szabad R-modulus bármely részmodulusa is szabad. C. J. EVERETT megmutatta, hogy az R gyűrűre vonatkozó fenti kikötések szükségesek is a tétel érvényességéhez [10], [11]. Mi az alábbiakban e tételnek az általános esetre vonatkozó analogonját bizonyítjuk be.

9. TÉTEL: *A tetszőleges R gyűrű akkor és csak akkor olyan, hogy bármely $\mathfrak{m}$ szabad rangú F szabad R-modulus bármely H részmodulusa is szabad és szabad rangja nem nagyobb $\mathfrak{m}$-nél, ha R^* zérusosztómentes baloldali főideálgyűrű.*

BIZONYÍTÁS: Legyen R olyan gyűrű, hogy ha F szabad R-modulus, amelynek szabad rangja $\mathfrak{m}$, akkor F bármely H részmodulusa is szabad és szabad rangja nem nagyobb $\mathfrak{m}$-nél. Ekkor az $R^*_{(R)}$ 1 rangú szabad R-modulus

[21] A leképezéseket jobboldali operátorként írjuk.

bármely 0-tól különböző részmodulusa is 1 rangú szabad R-modulus. Minthogy az 5. tétel bizonyításában megmutattuk, hogy $R^*_{(R)}$ részmodulusai és R^* balideáljai összeesnek, most már csak azt kell bebizonyítanunk, hogy ha $\langle r, n\rangle \neq \langle 0, 0\rangle$, akkor az

$$\langle s, m\rangle \langle r, n\rangle = \langle 0, 0\rangle \tag{18}$$

egyenlőségből $\langle s, m\rangle = \langle 0, 0\rangle$ következik. Tekintsük az $R^*_{(R)}$ modulus $R^*\langle r, n\rangle$ részmodulusát. Ekkor van olyan $\langle r_0, n_0\rangle (\in R^*_{(R)})$ elem, hogy $O(\langle r_0, n_0\rangle) = 0$ és $R^*\langle r, n\rangle = R^*\langle r_0 n_0\rangle$. Innen, alkalmas $\langle u, k\rangle, \langle v, l\rangle$ elemekre

$$\langle r_0, n_0\rangle = \langle u, k\rangle \langle r, n\rangle \quad \text{és} \quad \langle r, n\rangle = \langle v, l\rangle \langle r_0, n_0\rangle. \tag{19}$$

Ebből

$$\langle r_0, n_0\rangle = \langle u, k\rangle \langle r, n\rangle = \langle u, k\rangle \langle v, l\rangle \langle r_0, n_0\rangle,$$
$$(\langle 0, 1\rangle - \langle u, k\rangle \langle v, l\rangle) \langle r_0, n_0\rangle = \langle 0, 0\rangle,$$
$$\langle 0, 1\rangle - \langle u, k\rangle \langle v, l\rangle = \langle 0, 0\rangle,$$

tehát

$$\langle u, k\rangle \langle v, l\rangle = \langle 0, 1\rangle \tag{20}$$

következik. Továbbá fennáll a következő összefüggés:

$$O(\langle v, l\rangle) \subseteq O(\langle v, l\rangle^2) \subseteq \cdots \subseteq O(\langle v, l\rangle^{2^i}) \subseteq \ldots,$$

s mivel R^* bármely balideálja (baloldali) főideál, tehát R balideáljaira nézve maximumkövetelménynek tesz eleget, van olyan i természetes szám, amelyre

$$O(\langle v, l\rangle^{2^i}) = O(\langle v, l\rangle^{2^{i+1}}).$$

A (18) és (19) egyenlőségekből

$$\langle s, m\rangle \langle v, l\rangle \langle r_0, n_0\rangle = \langle s, m\rangle \langle r, n\rangle = \langle 0, 0\rangle,$$

így

$$\langle s, m\rangle \langle v, l\rangle = \langle 0, 0\rangle. \tag{21}$$

(20) alapján

$$\langle s, m\rangle = \langle s, m\rangle \langle u, k\rangle^{2^i} \langle v, l\rangle^{2^i}, \tag{22}$$

s így (21) miatt

$$\langle s, m\rangle \langle v, l\rangle^{2^i} = \langle s, m\rangle \langle u, k\rangle^{2^i} \langle v, l\rangle^{2^{i+1}} = \langle 0, 0\rangle.$$

Ebből

$$\langle s, m\rangle \langle u, k\rangle^{2^i} \in O(\langle v, l\rangle^{2^{i+1}}) = O(\langle v, l\rangle^{2^i}),$$

tehát (22) alapján $\langle s, m\rangle = \langle 0, 0\rangle$, s ezzel a tétel állításának egyik felét bebizonyítottuk.

Megfordítva, tegyük fel, hogy H az $\mathfrak{m}$ szabad rangú F szabad R-modulus valamely részmodulusa, s hogy R^* zérusosztómentes baloldali főideálgyűrű. Megmutatjuk, hogy H is szabad R-modulus. Legyen az F modulus valamely $\mathfrak{m}$ számosságú szabad bázisa jólrendezett:

$$x_1, x_2, \ldots, x_\nu, \ldots \qquad (\nu < \lambda).$$

Ekkor F bármely $f(\neq 0)$ eleme egyértelműen felírható

$$f = \langle r_1, n_1\rangle x_{\nu_1} + \cdots + \langle r_k, n_k\rangle x_{\nu_k}$$

alakban, ahol $\nu_1 < \cdots < \nu_k$ és $\langle r_i, n_i\rangle \neq \langle 0, 0\rangle$ $(i = 1, \ldots, k)$. A ν_k-t az f elem *utolsó indexének*, az $\langle r_k, n_k\rangle$-t pedig az f elem *utolsó együtthatójának* nevezzük. Tekintsük H-ban azokat az elemeket, amelyeknek utolsó indexe legkisebb a H-ban fellépő elemek utolsó indexei között. Nyilvánvaló, hogy a legkisebb utolsó indexhez tartozó utolsó együtthatók R^*-nak egy $L(\neq 0)$ balideálját alkotják. Legyen $\langle s_0, m_0\rangle$ az L-nek valamely — feltevésünk szerint létező — generátoreleme, és c egy olyan H-beli legkisebb utolsó indexű elem, amelynek utolsó együtthatója $\langle s_0, m_0\rangle$. Minthogy R^* zérusosztómentes gyűrű, a $\{c\}$ részmodulus szabad R-modulus, s minden olyan $h(\in H)$ elem, amelynek utolsó indexe megegyezik c utolsó indexével, benne van a $\{c\}$-ban. Alkalmas $\langle r, n\rangle$ elemre ugyanis h és $\langle r, n\rangle c$ utolsó együtthatója megegyezik, s így fenn kell állnia a $h = \langle r, n\rangle c$ egyenlőségnek. Ellenkező esetben ugyanis a $h' = h - \langle r, n\rangle c$ H-beli és 0-tól különböző elem utolsó indexe — feltevésünkkel ellentétben — kisebb volna c utolsó indexénél

Legyen most $S = (\ldots, c_\gamma, \ldots)_{\gamma \in \Gamma}$ olyan H-beli elemrendszer, amely maximális a következő tulajdonságokra nézve: a) S szabad bázisa az $\{S\}$ részmodulusnak; b) ha a $h(\in H)$ elem utolsó indexe nem nagyobb a c_γ elemek valamelyikének utolsó indexénél, akkor $h \in \{S\}$. Ilyen S elemrendszer létezését ZORN lemmája biztosítja. Megmutatjuk, hogy $\{S\} = H$, ami állításunk igazolását jelenti. Tegyük fel ugyanis, hogy $\{S\} \subset H$, és H-nak $\{S\}$-en kívül fekvő elemei között tekintsük a legkisebb utolsó indexű elemeket. Ezek közül válasszunk ki egy olyan c_0 elemet, amelynek utolsó együtthatója generátoreleme R^* ama balideáljának, amelyet a tekintett utolsó indexszel bíró H-beli elemek utolsó együtthatói alkotnak. $\{c_0\}$ szabad R-modulus és H-nak pontosan azokból az elemeiből áll, amelyeknek utolsó indexe megegyezik c_0 utolsó indexével. Másrészt, mivel c_0 az S rendszertől független, az (S, c_0) elemrendszerre teljesül az a) és b) követelmény, s így ellentmondásba kerültünk az S elemrendszer maximalitásának kikötésével. Tehát $\{S\} = H$.

Végül, minthogy bármely $\nu(< \lambda)$ rendszámhoz S-nek legfeljebb egy olyan eleme lehet, amelynek utolsó indexe éppen ν, nyilvánvaló, hogy az S elemrendszer számossága legfeljebb $\mathfrak{m}$, tehát H szabad rangja $\leqq \mathfrak{m}$.

Ezzel a 9. tételt teljesen bebizonyítottuk.

IRODALOM

[1] ARTIN, E.: Zur Theorie der hyperkomplexen Zahlen, *Abh. Hamburg*, **5** (1927) 251—260.
[2] ARTIN, E. — NESBITT, C. J. — THRALL, R. M.: Rings with minimum condition, *Ann Arbor*, 1954.
[3] BAER, R.: Abelian groups that are direct summands of every containing abelian group, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **46** (1940) 800—806.
[4] BIRKHOFF, G.: Subdirect unions in universal algebra, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **50** (1944) 764—768.
[5] BOURBAKI, N.: Éléments de mathématique, I. Partie, Livre II: Algèbre, *Paris*, 1947.
[6] CARTAN, H. — EILENBERG, S.: Homological algebra, *Princeton*, 1956.
[7] DORROH, J. K.: Concerning adjunctions to algebras, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **38** (1932) 85—88.
[8] ECKMANN, B. — SCHOPF, A.: Über injektive Moduln, *Arch. Math.*, **4** (1953) 75—78.
[9] EHRENFEUCHT, A.: On a problem of J. C. H. Whitehead concerning abelian groups, *Bull. Acad. Polon. Sci.*, Cl. III. **3** (1955) 127—128.
[10] EVERETT, C. J.: Vector spaces over rings, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **48** (1942) 312—316.
[11] EVERETT, C. J.: The basis theorem for vector spaces over rings, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **51** (1945) 531—532.
[12] FUCHS, L.: A remark on the Jacobson radical, *Acta. Sci. Math. Szeged*, **14** (1952), 167—168.
[13] FUCHS, L.: On a useful lemma for abelian groups, *Acta. Sci. Math. Szeged*, **17** (1956) 134—138.
[14] FUCHS, L. — SZELE, T.: Contribution to theory of semi-simple rings, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **3** (1952) 235—239.
[15] FUCHS, L. — SZELE, T.: Abel-csoportok egyetlen maximális alcsoporttal, *Magyar Tud. Akad. Mat. Fiz. Oszt. Közl.*, **5** (1955) 387—389.
[16] GACSÁLYI, S.: On algebraically closed abelian groups, *Publ. Math. Debrecen*, **2** (1952) 292—296.
[17] GACSÁLYI, S.: On pure subgroups and direct summands of abelian groups, *Publ. Math. Debrecen*, **4** (1955) 89—92.
[18] GOLDMAN, O.: A characterization of semi-simple rings with the descending chain condition, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **52** (1946) 1021—1027.
[19] JACOBSON, N.: Structure theory of simple rings without finiteness assumptions, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **57** (1945) 228—245.
[20] JACOBSON, N.: The radical and semi-simplicity for arbitrary rings, *Amer. J. Math.*, **67** (1945) 300—320.
[21] JACOBSON, N.: Structure of rings, *(Coll. Publ.) Providence*, 1956.
[22] JOHNSON, R. E.: Structure theory of faithful rings II. Restricted rings, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **84** (1957) 523—544.
[23] KAPLANSKY, I.: Infinite abelian groups, *Ann Arbor*, 1954.
[24] KERTÉSZ, A.: Féligegyszerű gyűrűk mint operátortartományok, *Magyar Tud. Akad. Mat. Fiz. Oszt. Közl.*, **5** (1955) 149—186.
[25] KERTÉSZ, A.: The general theory of linear equation systems over semi-simple rings, *Publ. Math. Debrecen*, **4** (1955) 79—86.
[26] KERTÉSZ, A.: A féligegyszerű gyűrűk egy új jellemzése, *Acta Univ. Debrecen*, **1** (1954) 151—153.
[27] KERTÉSZ, A.: Beiträge zur Theorie der Operatormoduln, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **8** (1957) 235—257.

[28] KERTÉSZ, A.: Systems of equations over modules, *Acta Sci. Math. Szeged,* **18** (1957) 207—234.

[29] KERTÉSZ, A.: Eine Charakterisierung der halbeinfachen Ringe, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **9** (1958), megjelenés alatt.

[30] KERTÉSZ, A.: Simple proof of a fundamental theorem of field theory, *Amer. Math. Monthly,* megjelenés alatt.

[31] KERTÉSZ, A. — SZELE, T.: Az általánosított p-csoportok elméletéhez, *Acta Univ. Debrecen,* **2** (1955) 131—135.

[32] Курош, А. Г.: Композиционные системы в бесконечных группах, Мат. Сб. (нов. с.), **16** (1945) 59—72.

[33] KUROS, A. G.: Csoportelmélet, *Budapest,* 1955.

[34] McCOY, N. H. — MONTGOMERY, D.: A representation of generalized Boolean rings, *Duke Math. J.*, **3** (1937) 455—459.

[35] VON NEUMANN, J.: On regular rings, *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.*, **22** (1936) 707—713.

[36] VON NEUMANN, J.: Continuous geometry, *Princeton,* 1937.

[37] NOETHER, E.: Hyperkomplexe Größen und Darstellungstheorie, *Math. Z.*, **30** (1929) 641—692.

[38] POLLÁK, G.: Lösbarkeit eines Gleichungssystems über einem Ringe, *Publ. Math. Debrecen,* **4** (1955) 87—88.

[39] RÉDEI, L.: Algebra I., *Budapest,* 1954.

[40] RÉDEI, L.: Die einstufig nichtkommutativen endlichen Ringe, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **8** (1957) 401—442.

[41] SZELE, T.: Ein Analogon der Körpertheorie für abelsche Gruppen, *J. Reine Angew. Math.*, **188** (1950) 167—192.

[42] SZELE, T.: Két gyűrűelméleti struktúratétel geometriai bizonyítása, *Magyar Tud. Akad. Mat. Fiz. Oszt. Közl.*, 4 (1954) 49—85.

[43] VILLAMAYOR, O.: Sur les équations et les systèmes linéaires dans les anneux associatifs, *C. R. Acad. Sci. Paris,* **240** (1955) 1681—1683, 1750—1751.

[44] VAN DER WAERDEN, B. L.: Moderne Algebra II., *Berlin,* 1931.

[45] WEDDERBURN, J. H. M.: On hyperkomplex numbers, *Proc. London Math. Soc.*, (2) **26** (1908) 77—118.

(Beérkezett: 1958. VI. 30.)

A Debreceni Kossuth Lajos Tudományegyetem
Matematikai Intézete