ALGEBRAI RENDSZEREK, AMELYEKBEN KÖZÉP-OPERÁCIÓ VAN ÉRTELMEZVE

FUCHS LÁSZLÓ

Bemutatta Rényi Alfréd lev. tag az 1950. december 12-én tartott felolvasó ülésen

1. Bevezetés. Különféle középértékek, mint például a számtani, mértani, négyzetes, harmonikus stb. közepek jól ismeretesek nemcsak a matematikusok, hanem azok előtt is, akik a matematika alkalmazásainak területén dolgoznak. Tudjuk, hogy ezeknek milyen fontos szerepük van a különféle átlagértékek számításánál. Ezért meglepő tény, hogy a középértékeknek egységes matematikai tárgyalása egészen 1930-ig nem történt meg. Ekkor vezették valószínűségszámítási kutatásai *A. Kolmogorov*ot a közepekhez és ekkor adta a középértékek elméletének megalapozását;[1] ugyanazokhoz az eredményekhez jutott tőle függetlenül *M. Nagumo* is.[2] Definíciójuk értelmében az $x_1, \ldots, x_n$ számok középértékén az ú. n. *kvázi-aritmetikus* közepeket értjük, vagyis azon $M_n(x_1, \ldots, x_n)$ n-változós függvényeket, amelyek ilyen alakban írhatók:

$$f(M_n) = \frac{f(x_1) + \ldots + f(x_n)}{n},$$

ahol $f(x)$ egy folytonos és szigorúan monoton függvény. A kvázi-aritmetikus közepek a közönséges aritmetikai (számtani) közép általánosítása, hiszen $f(x) = x$ esetén éppen a számtani közepet kapjuk. A többi nevezetes közép is kvázi-aritmetikus: a mértaninál $f(x) = \log x$, a harmonikusnál $f(x) = \frac{1}{x}$, a hatványközepeknél pedig $f(x) = x^k$. *Kolmogorov* és *Nagumo* a kvázi-aritmetikus közepeket bizonyos axiómákkal jellemzik. Ezek azonban nem alkalmasak arra, hogy egy adott $M_n(x_1, \ldots, x_n)$ n-változós függvényről eldöntsék, hogy kvázi-aritmetikus közép-e, mert az axiómák a középértékeket nem egy fix változószámra (pl. $n = 2$-re) definiálják, hanem csak $n = 2, 3, 4, \ldots$ változóra *egyszerre*[3]. *Fenyő István*nak sikerült[4] olyan axiómarendszert megadni, amely (analiticitási feltételek nélkül is) alkalmas adott változószámú közepek jellemzésére. *Fenyő* eredményeit lényegesen egyszerűsítette *Aczél János*[5] egy új axióma felállításával (ez az ú. n. biszimmetricitás, l. alább). Ezzel nemcsak a közönséges középértékek elmélete nyert igen áttekinthető s egyszerű formát, hanem ennek segítségével *Aczél*nak sikerült a súlyozott közepek karakterizálása is.[6] A súlyozott kvázi-aritmetikus közepek azok az $M_n(x_1, \ldots, x_n)$ függvények, amelyekre

$$f(M_n) = \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \ldots + \lambda_n f(x_n);$$

itt $f(x)$ egy folytonos és monoton növekedő függvény és a λ_i pozitív súlyok összege 1. *Aczél* kimutatta, hogy a nem-szimmetrikus közepek éppen a súlyozott kvázi-aritmetikus közepek.[6]

A jelen dolgozat a középértékekre vonatkozó ismert eredményeket általánosítja olyképpen, hogy valós számok helyett bizonyos tulajdonságokkal felruházott rendszereket tekint, amelyekben egy a kvázi-aritmetikus közepekhez hasonló közép-operáció van értelmezve. Miként meglévő eredmények minden algebrizálásának, úgy ennek is az a célja, hogy az egyes fogalmak közt fennálló kapcsolatok közül a lényegeseket kidomborítsa, a lényegteleneket elvesse és ezáltal a dolog leglényegére mutasson rá. Eredményeink a valós esetre vonatkozó tételekkel teljesen megegyeznek, tárgyalásunk is lényegileg *Aczél János* módszerét követi, csupán a nem-szimmetrikus közepeknél alkalmaztunk bizonyos, tárgyalásmódunk szolgáltatta egyszerűsítéseket.

A legegyszerűbb esetet: a kétváltozós közepek esetét tárgyaljuk. Néhol csak utalunk az angol nyelven megjelent részletes kidolgozásra, amely az Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae első kötetének 2—4. füzetében jelent meg "On mean systems" címmel (303—320 old.).

2. Definíció és következményei. Legyen M olyan algebrai rendszer, amely a következő axiómáknak tesz eleget:

(1) M *teljesen rendezett halmaz,* azaz M elemeire definiálva van egy $\geqq$ rendezési reláció olyképpen, hogy (i) M-nek bármely két a, b elemére vagy $a \geqq b$ vagy $b \geqq a$ fennáll, (ii) $a \geqq b$ és $b \geqq a$ együttes fennállásából $a = b$ következik, (iii) $a \geqq b$ és $b \geqq c$-ből $a \geqq c$ következik, végül (iv) M *teljes* abban az értelemben, hogy M-nek minden Dedekind-szelete M-nek egy elemét értelmezi.*

(2) M-*nek bármely két elemére értelmezve van egy közép-operáció,* amelyet (az algebrában használatos módon) egyszerűség kedvéért szorzatként írunk: $ab = c$ az M-nek egyértelműen definiált eleme. ab az a-nak és b-nek a közepe (sorrend!).

(3) *A közép-operáció idempotens,* azaz $aa = a$ az M halmaz minden a elemére. Tehát minden elemnek önmagával vett közepe az elemet sajátmagát szolgáltatja.

(4) *A közép-operáció szigorúan monoton:* ha $a > b$, akkor az M minden c elemére $ac > bc$ és $ca > cb$. Vagyis nagyobb elemmel képzett közép is nagyobb.

(5) *A közép-operáció biszimmetrikus:* $(ab)(cd) = (ac)(bd)$ az M halmaz bármely négy elemére.**

* A teljességgel ekvivalens követelmény pl. az, hogy M minden korlátos, nem-üres részhalmazának legyen egy legkisebb felső korlátja és egy legnagyobb alsó korlátja. Az ekvivalencia ugyanúgy bizonyítható, mint a valós esetben.

** Ez *Aczél* axiómája. Hogy ez a súlyozott kvázi-aritmetikus közepekre fennáll, az azonnal belátható: ha λ és μ pozitív súlyok összege 1, akkor $f(xy) = \lambda f(x) + \mu f(y)$ miatt

$$f[(ab)(cd)] = \lambda f(ab) + \mu f(cd) = \lambda^2 f(a) + \lambda\mu f(b) + \mu\lambda f(c) + \mu^2 f(d) =$$
$$= \lambda f(ac) + \mu f(bd) = f[(ac)(bd)],$$

innen pedig f szigorúan monoton volta miatt $(ab)(cd) = (ac)(bd)$, azaz éppen a biszimmetricitás következik.

(6) *A közép-operáció archimedeszi*:* ha $a < c < b$, akkor elég sokszor alkalmazva a közép-operációt, elérhető, hogy $bb \ldots ba > c$ és hogy $abb \ldots b > c$ legyen.**

Ezen axiómákból könnyen következnek az M halmaz következő tulajdonságai.

(α) A közép-operáció *intern* abban az értelemben, hogy a és b közepe a és b közé esik: ha $a > b$, akkor $a > ab > b$ (és $a > ba > b$). Ugyanis szorozzuk az $a > b$ egyenlőtlenséget jobbról a-val, majd balról b-vel; ekkor (3) és (4) miatt $a = aa > ab$ ill. $ab > bb = b$, tehát $a > ab > b$. Hasonlóan bizonyítható a másik állítás is. Az operáció intern volta teszi jogosulttá a „közép"-operáció terminológia használatát.

(β) Érvényes az *egyszerűsítési szabály*: ha $ax = ay$ (vagy $xa = ya$), akkor $x = y$. Ez azonnal következik abból, hogy ha $x \neq y$, akkor vagy $x > y$, vagy pedig $y > x$, ezekből viszont a szigorú monotonitás miatt $ax > ay$, ill. $ay > ax$ következik, ami ellentmondásban van az $ax = ay$ egyenlettel.

(γ) A biszimmetricitás és az idempotencia alapján bizonyítható a *disztributivitás*: $a(bc) = (ab)(ac)$, hiszen $a(bc) = (aa)(bc) = (ab)(ac)$. Hasonlóan: $(bc)a = (ba)(ca)$.

(δ) Az M halmazban definiálható a *határérték* a következő, meglehetősen kézenfekvő módon. M elemeinek egy $a_0, a_1, a_2, \ldots$ sorozatáról akkor mondjuk, hogy egy a határértékhez konvergál (jelben $a_\nu \to a$), ha M-nek az a elemet tartalmazó minden (b, c) nyílt intervallumához*** található olyan N természetes szám, hogy $b < a_\nu < c$, ha $\nu > N$. M teljességének felhasználásával a valós számok esetére jól ismert gondolatmenettel könnyen igazolható, hogy minden monoton növekedő s felülről korlátos sorozatnak van határértéke, amely egyszersmind a sorozat legkisebb felső korlátja.

(ε) A következő lemma mutatja, hogy a közép-operáció folytonossága már következik a fenti axiómákból.

Folytonossági lemma. *A közép-operáció folytonos abban az értelemben, hogy* $a_\nu \to a$ *esetén* $a_\nu b \to ab$ *és* $ba_\nu \to ba$, *ill. általánosabban: ha* $a_\nu \to a$ *és* $b_\nu \to b$, *akkor* $a_\nu b_\nu \to ab$.

Ennek bizonyítása archimedeszi axiómánkon alapszik. A részletes bizonyításra itt nem térünk ki, hanem utalunk a bevezetésben említett cikkre. Meg-

* A geometriából jól ismert archimedeszi axióma így szól: minden adott AB távolságot az A pontból (a nulla-pontból) kiindulva felmérhetünk olyan sokszor, hogy bármely adott C ponton túlhaladunk. Ezzel egyenértékű követelmény az, hogyha p és q pozitív számok, akkor alkalmas n természetes számra $np > q$. Bizonyítandó tételünkből látni fogjuk, hogy (6) axiómánk lényegileg éppen ezt követeli.

** Rövidség kedvéért elhagyjuk a zárójeleket: $bb \ldots ba = b\{b[\ldots(ba)]\}$.

*** A (b, c) intervallumon M mindazon elemeiből álló részhalmazt értjük, amelyek b és c közé esnek. Nyilvánvaló, hogy mit értünk nyílt és zárt intervallumon.

jegyezzük, hogy megfordítva is: az archimedeszi axióma egyenes következménye a folytonosságnak.

(ζ) Jelentse x az M halmaznak egy változó elemét. x polinomjának nevezzük M véges sok elemét tartalmazó olyan szorzatokat, amelyekben x-en kívül csak konstansok szerepelnek, pl. $g(x)=a\{x[(bx)c]\}$. A monotonitás alapján azonnal látható, hogy egy nem-konstans polinom feltétlenül monoton növekedő a szűkebb értelemben: ha $x<y$, akkor $g(x)<g(y)$. A folytonossági lemma miatt minden polinom folytonos és így érvényes a valós analízisből jól ismert Bolzano-tétel analogonja:

Bolzano-féle lemma. *Legyen $g(x)$ M-nek egy polinomja és legyenek v, w az M elemei, melyekre $g(v)<a$, ill. $g(w)>a$. Ekkor a $g(x)=a$ egyenletnek M-ben egy s csakis egy x gyöke van.*

(A gyök egyértelműsége a monotonitás folyománya.)

3. Kommutatív közép-operációk. Először a kommutatív esetet tárgyaljuk, tehát az (1)—(6) axiómákon kívül feltesszük, hogy

(7) *A közép-operáció kommutatív:* $ab=ba$ minden a, b-re.

Most definiálni fogjuk a valós számok $(0, 1)$ intervallumának M egy tetszőleges (a, b) intervallumára való φ egy-egyértelmű leképezését. Ez a φ leképezés olyan tulajdonságú lesz, hogy az M rendszerben a közép-operációnak a valós számoknál a közönséges számtani közép képzése fog megfelelni. A $(0, 1)$ intervallumot (a, b)-re leképező φ függvény konstrukciójánál *Aczél János* módszerét fogjuk követni.

Tegyük $\varphi(0)=a$ és $\varphi(1)=b$. A φ függvényt először a $(0, 1)$ intervallumba eső diadikus törtekre definiáljuk. Ezek a $\delta/2^n$ alakú számok, ahol δ pozitív egészszám $\leqq 2^n$. Legyen

$$\varphi\left(\frac{1}{2}\right)=\varphi(0)\cdot\varphi(1)=ab,$$

$$\varphi\left(\frac{1}{4}\right)=\varphi(0)\cdot\varphi\left(\frac{1}{2}\right)=a(ab),\qquad \varphi\left(\frac{3}{4}\right)=\varphi\left(\frac{1}{2}\right)\varphi(1)=(ab)b,$$

s. í. t. Általában írjuk δ-t ilyen alakban: $\delta=2\delta'+\varepsilon$, ahol $\varepsilon=0$ vagy 1 aszerint, hogy δ páros vagy páratlan, és definiáljuk:

$$\varphi\left(\frac{\delta}{2^n}\right)=\varphi\left(\frac{\delta'}{2^{n-1}}\right)\cdot\varphi\left(\frac{\delta'+\varepsilon}{2^{n-1}}\right)\qquad (n\geqq 1).$$

(Ha $\varepsilon=0$, akkor ez nem mond semmi újat, de az idempotencia miatt helyes.) Evidens, hogy φ monoton növekedő függvény és könnyen belátható, hogy eleget tesz a következő függvény-egyenletnek:

$$(*)\qquad \varphi(\xi)\varphi(\eta)=\varphi\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right).$$

Valóban, tegyük $\xi=\dfrac{2\delta+\varepsilon}{2^n}$ és $\eta=\dfrac{2\theta+\varepsilon'}{2^n}$ és alkalmazzunk n-re vonatkozó teljes indukciót. Ekkor a definíció szerint és a kommutativitás miatt

$$\varphi(\xi)\varphi(\eta)=\left[\varphi\left(\frac{\delta}{2^{n-1}}\right)\varphi\left(\frac{\delta+\varepsilon}{2^{n-1}}\right)\right]\left[\varphi\left(\frac{\theta+\varepsilon'}{2^{n-1}}\right)\varphi\left(\frac{\theta}{2^{n-1}}\right)\right],$$

ez pedig a biszimmetricitás miatt így is írható:

$$\varphi(\xi)\varphi(\eta)=\left[\varphi\left(\frac{\delta}{2^{n-1}}\right)\varphi\left(\frac{\theta+\varepsilon'}{2^{n-1}}\right)\right]\left[\varphi\left(\frac{\delta+\varepsilon}{2^{n-1}}\right)\varphi\left(\frac{\theta}{2^{n-1}}\right)\right].$$

Most felhasználjuk az indukciós feltevést az $n-1$ kitevőre:

$$\varphi(\xi)\varphi(\eta)=\varphi\left(\frac{\delta+\theta+\varepsilon'}{2^{n}}\right)\varphi\left(\frac{\delta+\theta+\varepsilon}{2^{n}}\right),$$

amire ismét alkalmazva a definíciót (ez amiatt lehetséges, hogy a számlálók legfeljebb egy egységgel térnek el egymástól), kapjuk

$$\varphi(\xi)\varphi(\eta)=\varphi\left(\frac{2\delta+2\theta+\varepsilon'+\varepsilon}{2^{n+1}}\right)=\varphi\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right).$$

A φ függvény értelmezési tartományát most kiterjesztjük a $(0, 1)$ valós intervallum minden számára, tehát a nem-diadikus törtekre is. Ez annak alapján lehetséges, hogy minden nem-diadikus valós szám tetszőleges pontossággal megközelíthető diadikus törtekkel. Legyen A_ξ és B_ξ a ξ valós számnál kisebb η, ill. a ξ-nél nagyobb ζ diadikus törtek halmaza. Jelentse A az M halmaz $y=\varphi(\eta)$ alakú elemeinek halmazát, hol η befutja A_ξ elemeit. Az A halmaz nem-üres, felülről korlátos, és így van az A-nak egy legkisebb felső korlátja: y'. Hasonlóan legyen z' a legnagyobb alsó korlátja azon B halmaznak, mely a $z=\varphi(\zeta)$, $\zeta\in B_\xi$ alakú elemekből áll. A φ monotonitásából evidens, hogy $a<y'\leqq z'<b$. Bizonyítjuk, hogy $y'=z'$. Ugyanis $y'<z'$ esetén alkalmazzuk az $a<y'<z'$ elem-hármasra az archimedeszi axiómát, amely szerint elegendő sokszor (n-szer) szorozva, elérhető, hogy $y'<az'z'\dots z'$. Ennek következménye, hogy A-nak minden $y=\varphi(\eta)$ és B-nek minden $z=\varphi(\zeta)$ elemére $y<azz\dots z$ érvényes, hiszen feltétlenül $y\leqq y'$ és $z'\leqq z$ az y' és z' definíciója miatt. Ámde $az=\varphi\left(\frac{\zeta}{2}\right)$, $azz=\varphi\left(\frac{3\zeta}{4}\right)$, $\dots$, $azz\dots z=\varphi\left(\frac{(2^n-1)\zeta}{2^n}\right)$ lévén, $y<azz\dots z$ azt jelenti, hogy $\eta<\zeta-\frac{\zeta}{2^n}$ igaz egy rögzített n-re és minden olyan diadikus valós η, ζ számokra, melyek eleget tesznek az $\eta<\xi<\zeta$ követelménynek. Ez nyilvánvaló ellentmondás. Tehát csakugyan $y'=z'$, és így definiálhatjuk $\varphi(\xi)=y'=z'$. Ennélfogva φ már értelmezve van minden 1-nél kisebb pozitív valós számra. Az előbbi okoskodás azt is mutatja, hogy φ értékkészlete nem hagyhatja ki az (a, b) intervallum egyetlen elemét sem.

Mindezek alapján világos, hogy φ a $(0, 1)$ valós intervallum és M-nek (a, b) intervalluma közt egy kölcsönösen egyértelmű s monoton megfeleltetést létesít, melyre (*) érvényes.

A φ függvényt még ki kell terjeszteni olyképpen, hogy értékkészlete ne csak az (a, b) intervallumra korlátozódjék, hanem M minden elemét felölelje. Ha c jelenti M-nek egy tetszésszerinti elemét az (a, b) intervallumon kívül, pl. $a < b < c$, akkor az archimedeszi axióma miatt n-szeri közép-operáció alkalmazása után elérhető, hogy $a < aa \ldots ac < b$ legyen. Ha $\varphi(\delta) = aa \ldots ac$, $\varphi(0) = a$ és $\varphi(\gamma) = c$, akkor nyilván $\delta = \frac{\gamma}{2^n}$ kell legyen és ennek alapján δ ismeretében γ meghatározható. Ez a kiterjesztett φ függvény már M minden elemét felveszi és eleget tesz a (*) függvény-egyenletnek. Így φ-nek inverz függvénye: $f(x)$, amely az egész M halmazt képezi le kölcsönösen egyértelmű s monoton módon a valós számok egy I intervallumára, eleget tesz az

$$f(xy) = \frac{f(x) + f(y)}{2}$$

függvény-egyenletnek. Ezáltal teljesen bebizonyítottuk a következő tételt.

1. tétel. *(Kolmogorov, Nagumo, Fenyő, Aczél.) Ha egy* M *halmaz eleget tesz az* (1)—(7) *axiómáknak, akkor létezik olyan szigorúan monoton* $f(x)$ *függvény (a* $\varphi(\xi)$ *inverz függvénnyel), mely* M*-et a valós számok egy* I *intervallumára képezi le úgy, hogy*

$$f(xy) = \frac{f(x) + f(y)}{2},$$

ill.

$$\varphi(\xi)\varphi(\eta) = \varphi\left(\frac{\xi + \eta}{2}\right)$$

*érvényes.**

Megjegyezzük, hogy $f(x)$ és $\varphi(\xi)$ nincsenek egyértelműen meghatározva, hiszen a kiindulásul szolgáló (a, b) intervallumot tetszőleges módon választhattuk. Azonban kimutatható, hogy ha $f(x)$ egy a tétel állítását kielégítő függvény, akkor az összes ilyen függvény a $g(x) = \sigma f(x) + \tau$ alakban állítható elő, hol σ, τ valós számok és $\sigma > 0$. [$g(x)$-hez természetesen más I intervallum tartozhatik.] Ezek szerint az $f(x)$ függvény csak egy pozitív lineáris transzformáció erejéig van meghatározva.

4. A nem-kommutatív eset. Most az előbbi részben tett kommutativitási feltételt elejtjük és az általános, nem-kommutatív esettel foglalkozunk. Az M halmazra be fogjuk bizonyitani *Aczél János*nak azon tételét, hogy a középoperáció lényegileg súlyozott aritmetikai közép képzése. A most adandó bizonyítás *Aczél* eredeti bizonyításának némileg egyszerűsített és algebrizált alakja.

* E tételből kiderül, hogy M-re vonatkozó archimedesi axiómánk a valós számokra azt jelenti, hogy ha $\alpha < \gamma < \beta$, akkor van olyan n természetes szám, hogy $\gamma < \frac{\alpha + (2^n - 1)\beta}{2^n}$, azaz $2^n(\beta - \gamma) > \beta - \alpha$, ami valóban semmi egyéb, mint a valós számokra vonatkozó archimedeszi axióma.

Jelölje t az M-nek egy tetszőleges, de a továbbiakban rögzített elemét. Adott x, y elemek mellett oldjuk meg z-re a

$$g(z) = (tz)(zt) = (tx)(yt)$$

egyenletet. Mivel pl. $x < y$ esetén $g(x) = (tx)(xt) < (tx)(yt)$, viszont $g(y) = (ty)(yt) > (tx)(yt)$, ezért a Bolzano-lemma értelmében van pontosan egy olyan z, mely a kívánt feltételnek eleget tesz. z az x-től és az y-tól függ, jelöljük: $z = x \wedge y$. A definícióból nyilvánvaló, hogy $x \wedge x = x$ és ha $x < x'$, akkor $x \wedge y < x' \wedge y$, továbbá a biszimmetricitás folytán $x \wedge y = y \wedge x$. Vegyük még figyelembe, hogy a disztributivitás, a biszimmetricitás és az idempotencia miatt

$$[t(xy)][(yx)t] = [(tx)(ty)][(yt)(xt)] = [(tx)(yt)][(ty)(xt)] =$$
$$= [(tx)(yt)][(tx)(yt)] = (tx)(yt) = (tz)(zt),$$

ebből pedig

$$z = x \wedge y \geqq \min(xy, yx)$$

következik. Hasonló meggondolás arra vezet, hogy

$$(x \wedge y) \wedge y \geqq \min(xyy, y(xy), yyx),$$

s. í. t. (6) alapján az $\wedge$ operáció archimedeszi tulajdonsága következik. Ha még sikerül azt is belátni, hogy $\wedge$ biszimmetrikus, azaz $(x \wedge y) \wedge (u \wedge v) = (x \wedge u) \wedge (y \wedge v)$, akkor ezzel kimutattuk, hogy $\wedge$ egy kommutatív középoperáció. A biszimmetrícitás igazolásához egy lemmára van szükségünk.

Aczél-féle lemma. *M-nek bármely négy elemére:*

$$(x \wedge y)(u \wedge v) = xu \wedge yv.$$

Ennek bizonyítása céljából képezzük

$$h = \{t[(x \wedge y)(u \wedge v)]\}\{[(x \wedge y)(u \wedge v)]t\} =$$
$$= \{[t(x \wedge y)][t(u \wedge v)]\}\{[(x \wedge y)t][(u \wedge v)t]\} =$$
$$= \{[t(x \wedge y)][(x \wedge y)t]\}\{[t(u \wedge v)][(u \wedge v)t]\},$$

amiből $\wedge$ definíciója szerint

$$h = [(tx)(yt)] \cdot [(tu)(vt)] = [(t(xu)][(yv)t] = [t(xu \wedge yv)][(xu \wedge yv)t].$$

Innen $g(z) = (tz)(zt)$ monotonitása következtében a lemma állítását nyerjük. A lemmából egy újabb fajta disztributivitás adódik a már említett $u = u \wedge u$ idempotencia alapján:

$$u(x \wedge y) = (u \wedge u)(x \wedge y) = ux \wedge uy$$

és

$$(x \wedge y)u = xu \wedge yu.$$

Mármost a disztributivitás szerint a $w = (x \wedge y) \wedge (u \wedge v)$ jelöléssel

$$(tw)(wt) = [t(x \wedge y)][(u \wedge v)t] = (tx \wedge ty)(ut \wedge vt) = (ty \wedge tx)(ut \wedge vt),$$

ez pedig a lemma értelmében egyenlő a $(ty)(ut) \wedge (tx)(vt)$ elemmel. Az eredeti operáció biszimmetrikus voltából nyerjük, hogy itt y és u felcserélhető, tehát az $\wedge$ operáció biszimmetrikus és így valóban: $\wedge$ egy kommutatív középoperáció.

Alkalmazzuk az $\wedge$ kommutatív közép-operációra az 1. tételt. Eszerint van oly φ függvény (az f inverzzel), mely egy valós I intervallumot M-re olyan módon képez le, hogy

$$\varphi(\xi) \wedge \varphi(\eta) = \varphi\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right).$$

Ezt helyettesítsük be az *Aczél*-féle lemmába. Az $x = \varphi(\xi), y = \varphi(\eta), u = \varphi(\varrho), v = \varphi(\sigma)$ jelölésekkel

$$\varphi\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right) \cdot \varphi\left(\frac{\varrho+\sigma}{2}\right) = \varphi\left(\frac{f(\varphi(\xi)\varphi(\varrho)) + f(\varphi(\eta)\varphi(\sigma))}{2}\right),$$

vagyis

$$f\left(\varphi\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right) \cdot \varphi\left(\frac{\varrho+\sigma}{2}\right)\right) = \frac{f(\varphi(\xi)\varphi(\varrho)) + f(\varphi(\eta)\varphi(\sigma))}{2}.$$

Ez azt mutatja, hogy a kétváltozós $F(\xi, \eta) = f(\varphi(\xi)\varphi(\eta))$ valós függvény kielégíti a *Jensen*-féle

$$F\left(\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\varrho+\sigma}{2}\right) = \frac{F(\xi, \varrho) + F(\eta, \sigma)}{2}$$

kétváltozós függvényegyenletet. Ismert tétel szerint[7] ennek egyetlen monoton megoldása $F(\xi, \eta) = \lambda\xi + \mu\eta + \nu$ rögzített λ, μ, ν valós számokra. Ennélfogva

$$\varphi(\xi)\varphi(\eta) = \varphi(\lambda\xi + \mu\eta + \nu).$$

Tegyük $\xi = \eta = 0$, majd $\xi = \eta = 1$, ekkor az idempotencia miatt $\varphi(0)\varphi(0) = \varphi(0) = \varphi(\nu)$, tehát $\nu = 0$, ill. $\varphi(1)\varphi(1) = \varphi(1) = \varphi(\lambda + \mu)$, tehát $\lambda + \mu = 1$ következik. Az operáció intern volta következtében

$$\min(\xi, \eta) \leqq \lambda\xi + \mu\eta \leqq \max(\xi, \eta),$$

ahonnan $0 < \lambda < 1, 0 < \mu < 1$ adódik. Ezzel bebizonyítottuk:

2. tétel. *(Aczél.) Ha* M *eleget tesz az* (1)—(6) *axiómáknak, akkor létezik olyan φ monoton és egy-egyértelmű leképezés, mely egy I valós intervallumot* M*-re képez le, és olyan* $0 < \lambda < 1$ *valós szám, hogy*

$$\varphi(\xi)\varphi(\eta) = \varphi(\lambda\xi + \mu\eta) \qquad (\lambda + \mu = 1),$$

vagyis

$$f(xy) = \lambda f(x) + \mu f(y) \qquad (\lambda + \mu = 1),$$

ha t. i. f jelöli φ inverzét.

Főtételünk azt a tényt fejezi ki, hogy egy az (1)—(6) axiómáknak eleget tevő rendszer algebrailag nem különbözik a valós számoknak a számtani közép képzésével ellátott egy intervallumától.

A tétel néhány alkalmazására vonatkozólag utalunk az angolnyelvű részletes kidolgozásra.

Budapesti Eötvös Loránd Tudományegyetem
Matematikai Intézete.

IRODALOM

[1] *A. Kolmogorov:* Sur la notion de la moyenne, Rendiconti Accad. d. Lincei, Roma, *12* (1930), 388—391.

[2] *M. Nagumo:* Über eine Klasse der Mittelwerte, Japanese Journ. Math., *7* (1930), 71—79.

[3] A régi eredmények tárgyalását lásd pl. *Veress Pál:* A középérték fogalmáról, Mat. és Fiz. Lapok, *43* (1936), 46—60.

[4] *Fenyő István :* A középértékek elméletéről, doktori dolgozat (Budapest, 1945).

[5] *J. Aczél:* The notion of mean values, Norske Vid. Selsk. Forh., *19* (1946), 83—86.

[6] *J. Aczél:* On mean values, Bull. Amer. Math. Soc., *54* (1948), 392—400.

[7] *G. H. Hardy, J. E. Littlewood* and *G. Pólya:* Inequalities (Cambridge, 1934).