

EGY TAUBER TÍPUSÚ TÉTEL RŐL

FREUD GÉZA

Bemutatta Turán Pál lev. tag az 1951. október 1-én tartott felolvasó ülésen

Bevezetés

A Tauber-típusú tételek A. Tauber azon sorelméleti tételéről kapták a nevüket, mely szerint, ha

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \sum_0^{\infty} a_n x^n = s \text{ és } a_n = o\left(\frac{1}{n}\right),$$

akkor ebből következik, hogy $\sum a_n$ konvergál és

$$\sum_0^{\infty} a_n = s.$$

Taubernek ezt a tételét J. A. Littlewood, majd később E. Landau, ill. G. H. Hardy és J. A. Littlewood általánosították arra az esetre, ha $a_n > -\frac{K}{n}$, és bebizonyították, hogy az egyenértékű az alábbi tétellel:

Legyen

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \sum_0^{\infty} a_n x^n = s \text{ és } s_n = \sum_{\nu=0}^n a_{\nu} > -K,$$

akkor ebből következik, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=0}^n s_{\nu} = s.$$

Fenti tételt E. Landau általánosította arra az esetre, ha a $\sum a_n x^n$ hatványsor helyett az

$$\int_0^{\infty} e^{-st} d\alpha(t) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) d\tau(t).$$

Laplace—Stieltjes integrált tekintjük az $s=0$ hely környezetében. Ez utóbbi átmegy a hatványsorba, ha $\tau(t)=[t]$, $f(n)=a_n$ és $e^{-s}=x$, másrészt speciális esetként tartalmazza a Laplace-transzformációt, ha $\tau(t)=t$ -t helyettesítünk.¹

Az idézett tételeknek a korábbiaknál sokkal egyszerűbb és szemléletesebb bizonyítását adta J. Karamata, akinek sikerült fenti tételeket lényegében a Weierstrass-féle approximáció-tételre visszavezetnie.

E dolgozat szerzője még 1945-ben felvetette a kérdést, nem lehet-e fenti tételeket maradéktagos tételekké élesíteni és egy Turán Pál-hoz írt levelében bebizonyította, hogy ha

$$\sum a_n x^n = (1-x) \sum s_n x^n = S + o\{(1-x)^{\varepsilon}\}, \varepsilon > 0$$

és

$$s_n > -K,$$

akkor ebből következik, hogy

$$\sum_{\nu=0}^n s_{\nu} = nS + O\left(\frac{n}{\log n}\right).$$

Tölem függetlenül ugyanezzel a problémával foglalkozott A. G. Posztnyikov²; dolgozatában $f(\sigma) = \sum a_n e^{-\lambda_n \sigma}$ alakú Dirichlet-sorokkal foglalkozik és kimutatja, hogy ha $\sigma \geq 0$ -ra

$$f(\sigma) = \frac{1}{\sigma} + O(1) \text{ és } a_n \geq 0,$$

akkor ebből következik, hogy

$$\sum_{\lambda_n \leq n} a_n = n + O\left(\sqrt{\frac{n}{\log n}}\right).$$

A. G. Posztnyikov eredményei után J. Korevaar³ hatványsor esetére a pontosabb $O\left(\frac{n \log \log n}{\log n}\right)$ maradéktagot bizonyította be és a tételt ugyancsak hatványsor esetére általánosabb alakra hozta. Másrészt J. Korevaar bebizonyította, hogy $O\left(\frac{n}{\log n}\right)$ -nél jobb maradéktag nem érhető el. Saját korábbi eredményemben tehát a maradéktag nem javítható. Egy nemrég megjelent dolgozatomban⁴ sikerült korábbi eredményemet Laplace—Stieltjes integrálokra általánosítanom. Legyen

$$f(t) \geq 0 \quad (1)$$

és

$$F(s) = \int_{t=0}^{\infty} f(t) e^{-st} d\tau(t), \quad (2)$$

ahol $\tau(t)$ egy a $0 \leq t \leq \infty$ intervallumban definiált, monoton nem csökkenő függvény és a (2) Lebesgue—Stieltjes integrál minden $s > 0$ -ra konvergál. Ha most feltételezzük, hogy

$$F(s) = A \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{s^{\alpha}} [1 + r(s)], \quad (3)$$

ahol

$$|r(s)| < c_0 s^{\epsilon} \quad (4)$$

minden valós és pozitív s értékre,* akkor érvényes az alábbi becslés:

$$\int_{t=0}^x f(t) d\tau(t) = A x^{\alpha} [1 + \varrho(x)], \quad (5)$$

ahol

$$|\varrho(x)| < \frac{c_1}{\log x} \quad \text{ha } x > 2. \quad (6)$$

J. Korevaar³ eredményéből következik, hogy a (6) becslés tovább nem javítható.

* A $c_0, c_1, \dots$ állandók a továbbiakban csak ε -tól függnék.

Idézett dolgozatomban a tétel bizonyítását egy approximációtételre alapoztam, melynek bizonyításához felhasználtam a mechanikus kvadratúra *Csebisjev*, *Markov* és *Stieltjes* által kidolgozott elméletét, továbbá *Erdős* és *Turán* egy, a mechanikus kvadratúra elméletében alapvető lemmáját,* valamint *Karamata* módszerét. Az alábbiakban ugyanezen tétel egy attól eltérő bizonyítását ismertetem, az $\alpha = 1$ esetre, melyben az ott használt approximációtételt elemi becslésekkel megkerülöm.**

Segéd tételek

Bizonyításunk során fel fogjuk használni két speciális polinomsorozat létezését, és pedig:

I. segéd tétel. Tetszőleges $\alpha > 0$ számhoz található olyan $Q_\nu(\xi)$ polinomsorozat, ahol $Q_\nu(\xi)$ fokszáma legfeljebb ν , melyre

$$0 \leq Q_\nu(\xi) \leq 1 \quad \text{ha} \quad 0 \leq \xi \leq 1, \quad (7)$$

$$\int_0^1 Q_\nu(\xi) d\xi < \frac{1}{\nu} \quad (8)$$

és

$$Q_\nu(\xi) > \frac{1}{4} \quad \text{ha} \quad e^{-\alpha} \leq \xi \leq e^{-\alpha - \frac{1}{4\nu}}. \quad (9)$$

Bizonyítás: A Fourier-sorok elméletéből ismeretes, hogy pozitív egész-számú ν -re

$$\beta_\nu(\vartheta) = \frac{1}{\nu^2} \left(\frac{\sin \frac{\nu}{2} \vartheta}{\sin \frac{1}{2} \vartheta} \right)^2 = \frac{2}{\nu} \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\nu-1} \left(1 - \frac{k}{\nu} \right) \cos k\vartheta \right]. \quad (10)$$

Ebből közvetlenül leolvasható, hogy

$$0 \leq \beta_\nu(\vartheta) \leq 1 \quad (11)$$

és így *Markov* tétele szerint $|\beta'_\nu(\vartheta)| \leq \nu$, tehát mivel $\beta_\nu(0) = 1$,

$$\beta_\nu(\vartheta) \geq \frac{1}{2} \quad \text{ha} \quad |\vartheta| < \frac{1}{2\nu}. \quad (12)$$

Legyen

$$q_\nu(\cos \vartheta) = \frac{1}{2} \left[\beta_\nu\left(\frac{\pi}{2} + \vartheta\right) + \beta_\nu\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right) \right], \quad (13)$$

akkor $q_\nu(x)$ $\nu-1$ -ed fokú polinom és (11) alapján

$$0 \leq q_\nu(x) \leq 1 \quad \text{ha} \quad -1 \leq x \leq +1. \quad (14)$$

Elemi úton belátható, hogyha ϑ a $(\pi/3, 2\pi/3)$ intervallumban fekszik, akkor

* Ennek irodalma a 4 dolgozat irodalomjegyzékében van felsorolva.

** A közölt bizonyítás módszerében azonos azzal, ahogyan a tételt 1945-ben először bebizonyítottam.

$\left| \frac{\pi}{2} - \vartheta \right| < 2 \cos \vartheta$, így (12) és (13)-ból

$$q_\nu(\xi) > \frac{1}{4} \quad \text{ha} \quad |\xi| < \frac{1}{4\nu} \quad (15)$$

és ebből következik, hogy $Q_\nu(\xi) = q_\nu(\xi - e^{-\alpha})$ teljesíti a (7) és (9) feltételt, végül

$$\int_0^1 Q_\nu(\xi) d\xi < \int_{-1}^{+1} q_\nu(\xi) d\xi = \int_0^\pi q_\nu(\cos \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta < \int_0^\pi q_\nu(\cos \vartheta) d\vartheta = \frac{1}{\nu}$$

és így (8) is teljesül, Q. e. d.

II. segédttétel. Legyen

$$g(\xi) = \begin{cases} \xi^{-1} & \text{ha } e^{-1} \leq \xi \leq 1 \\ 0 & \text{ha } 0 \leq \xi < e^{-1}, \end{cases} \quad (16)$$

akkor található olyan $\{P_\nu(\xi)\}$ polinomsorozat, amelyre $P_\nu(\xi)$ legfeljebb ν -ed fokú és

$$|g(\xi) - P_\nu(\xi)| < c_2 \left\{ \frac{1}{\nu} + \text{Min} \left(1, \frac{1}{\nu^3 |\xi - e^{-1}|^3} \right) \right\}. \quad (17)$$

Bizonyítás:

$$g(\xi) = g_1(\xi) + e(1 - g_2(\xi)), \quad (18)$$

ahol $g_2(\xi)$ az $(e^{-1}, 1)$ intervallum karakterisztikus függvénye és

$$g_1(\xi) = \begin{cases} \xi^{-1} & \text{ha } e^{-1} \leq \xi \leq 1 \\ e & \text{ha } 0 \leq \xi \leq 1. \end{cases} \quad (19)$$

$g_1(\xi)$ a $(0, 1)$ intervallumban egyenletesen 1 exponensű Lipschitz-feltételnek tesz eleget, tehát D. Jackson tétele szerint⁶ található olyan legfeljebb ν -ed fokú polinom, melyre

$$|g_1(\xi) - h_{1,\nu}(\xi)| < \frac{c_2}{\nu}. \quad (20)$$

A $g_2(\xi)$ -et $g_2(\cos \vartheta)$ alakban $h_{2,\nu}(\cos \vartheta)$ cosinus-polinommal közelítjük:

$$h_{2,\nu}(\cos \vartheta) = A_n \int_{-\alpha}^{+\alpha} \left(\frac{\sin \frac{\mu}{2}(\theta - \vartheta)}{\sin \frac{1}{2}(\theta - \vartheta)} \right)^4 d\theta = A_n \int_{\vartheta - \alpha}^{\vartheta + \alpha} \left(\frac{\sin \frac{\mu}{2}\theta}{\sin \frac{1}{2}\theta} \right)^4 d\theta, \quad (21)$$

ahol

$$\mu = \left[\frac{\nu}{2} \right], \text{ és}$$

$$\begin{aligned} A_n^{-1} &= \int_{-\pi}^{+\pi} \left(\frac{\sin \frac{\mu}{2}\theta}{\sin \frac{1}{2}\theta} \right)^4 d\theta = 2\pi\mu^2 \left[1 + \sum_{k=1}^{\mu} \left(1 - \frac{k}{\mu} \right)^2 \right] = \\ &= \frac{2\pi}{3} \mu(2\mu^2 + 1) \end{aligned} \quad (22)$$

(22)-höz felhasználtuk a (10) egyenlőséget. (L. Natanson⁶, 87. o.)

Legyen először $\alpha < \vartheta \leq \frac{\pi}{2}$, akkor található olyan c_3 pozitív állandó, hogy

$$\frac{1}{\sin \frac{1}{2} \theta} < \frac{c_3}{\theta} \quad \text{ha} \quad \vartheta - \alpha < \theta < \vartheta + \alpha,$$

tehát

$$\int_{\vartheta-\alpha}^{\vartheta+\alpha} \left(\frac{\sin \frac{\mu}{2} \theta}{\sin \frac{1}{2} \theta} \right)^4 d\theta < c_8 \int_{\vartheta-\alpha}^{\infty} \frac{du}{u^4} < \frac{c_4}{(\theta - \alpha)^3} \quad (23)$$

és így (21), (22) és (23) alapján $\mu = \left\lfloor \frac{\nu}{2} \right\rfloor$ miatt

$$0 < h_{2,\nu}(\cos \vartheta) < \frac{c_5}{\nu^3(\vartheta - \alpha)^3} \quad (24)$$

és hasonlóan igazolható, hogy $0 \leq \vartheta \leq \alpha$ esetén

$$0 < 1 - h_{2,\nu}(\cos \vartheta) < \frac{c_6}{\nu^3(\alpha - \vartheta)^3} \quad (25)$$

(18), (20), (24) és (25)-ből következik (17) és pedig

$$P_\nu(\cos \vartheta) = h_{1,\nu}(\cos \vartheta) + e[1 - h_{2,\nu}(\cos \vartheta)].$$

Becslés egy polinom együtthatóinak összegére

Egy ismert, Bernsteintől származó tétel szerint ha

$$\pi_\nu(\xi) = \sum_{k=0}^{\nu} a_k \xi^k \quad (26)$$

és

$$|\pi_\nu(\xi)| \leq M \quad \text{ha} \quad 0 \leq \xi \leq 1, \quad (27)$$

akkor

$$|a_k| \leq \gamma_k M, \quad (28)$$

ahol

$$T_{2,\nu}(\xi) \equiv \sum_{k=0}^{\nu} \gamma_k \xi^{2k} = \frac{1}{2} [(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})^{2\nu} + (\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})^{2\nu}] \quad (29)$$

a 2ν -ed fokú Csebisev polinom. Tekintettel a Descartes-féle jelszabályra, a $\{\gamma_k\}$ együtthatósorozat előjele alternáló, tehát

$$\sum_{k=0}^{\nu} |\gamma_k| = (-1)^\nu T_{2,\nu}(\sqrt{-1}) = \frac{1}{2} (\sqrt{2} + 1)^{2\nu} + \frac{1}{2} (\sqrt{2} - 1)^{2\nu}, \quad (30)$$

tehát (28) és (30) következtében

$$\sum_{k=0}^{\nu} |a_k| < M (\sqrt{2} + 1)^{2\nu},$$

vagyis

III. segédttétel. Legyen

$$r_r(\xi) = \sum_{k=0}^r \alpha_k \xi^k, \quad |r_r(\xi)| \leq M \quad \text{ha} \quad 0 \leq \xi \leq 1,$$

akkor

$$\sum_{k=0}^r |\alpha_k| < M e^{c_8 r}, \quad (31)$$

ahol $c_8 = 2 \log(\sqrt{2} + 1)$.

$\int f(t) d\tau(t)$ becslése egy rövid szakaszon

A (3) összefüggésben legyen $\alpha = 1$, azaz

$$\int_{t=0}^{\infty} f(t) e^{-st} d\tau(t) = \frac{A}{s} [1 + r(s)]. \quad (32)$$

$r(s)$ -re legyen érvényes a (4) becslés, és nem jelent megszorítást, ha feltesszük, hogy $s < 1$. (32)-ben helyettesítsünk s helyére $(k+1)s$ -t:

$$\begin{aligned} \int_{t=0}^{\infty} f(t) (e^{-st})^k e^{-st} d\tau(t) &= \frac{A}{(k+1)s} + \frac{A}{s} \frac{r\{(k+1)s\}}{k+1} = \\ &= \frac{A}{s} \int_0^1 \xi^k d\xi + \frac{A}{s} \frac{r\{(k+1)s\}}{k+1} \end{aligned} \quad (33)$$

és így, ha

$$p_r(\xi) = \sum_{k=0}^r \alpha_k \xi^k, \quad (34)$$

akkor (33)-ból

$$\int_0^{\infty} f(t) p_r(e^{-st}) d\tau(t) = \frac{A}{s} \int_0^1 p_r(\xi) d\xi + \frac{A}{s} \sum_{k=0}^r \frac{\alpha_k r\{(k+1)s\}}{k+1}. \quad (35)$$

Legyen most speciálisan

$$p_r(\xi) = Q_r(\xi) = \sum_{k=0}^r \alpha_k \xi^k, \quad (36)$$

ahol $Q_r(\xi)$ az I. segédttételben definiált polinom, tehát (7) és a III. segédttétel alapján

$$\sum_{k=0}^r |\alpha_k| < e^{c_8 r}$$

és ebből (4) felhasználásával következik, hogy

$$\left| \sum_{k=0}^r \frac{\alpha_k r\{(k+1)s\}}{k+1} \right| \leq s^r \sum_{k=0}^r |\alpha_k| < s^r e^{c_8 r}. \quad (37)$$

Tehát tekintettel (7), (8), (9)-re, felhasználva (35), (36) és (37)-et

$$\frac{1}{4} \int_{\frac{\alpha}{s}}^{\frac{\alpha+(4r)^{-1}}{s}} f(t) d\tau(t) < \int_0^{\infty} f(t) Q_r(e^{-st}) d\tau(t) \leq \frac{A}{s} \left(\frac{1}{r} + s^r e^{c_8 r} \right). \quad (38)$$

Végezzük el az alábbi helyettesítést:

$$s = 1/x, \quad \nu = \frac{\varepsilon}{2c_8} [\log x] + 1,$$

akkor (38)-ból lesz:

$$\left(\alpha + \frac{1}{4\nu} \right) x \int_{\alpha x}^x f(t) d\tau(t) < Ax \left(\frac{c_9}{\log x} + e^{c_9 x^{-\frac{\varepsilon}{2}}} \right) < Ac_{10} \frac{x}{\log x}, \quad (39)$$

ahol c_{10} csak ε -től függ.

A főtétele bizonyítása

A (35) összefüggésben legyen $p_r(\xi) \equiv P_r(\xi)$ a II. segéd-tételben definiált polinom. Akkor (17) miatt a $\{P_r(\xi)\}$ sorozat $0 \leq \xi \leq 1$ -re ν -től független korlát alatt marad, tehát a III. segéd-tétel szerint, ha $P_r(\xi) \equiv \sum_{k=0}^r b_k \xi^k$, (37)-hez hasonlóan igazolható, hogy

$$\left| \sum_{k=0}^r \frac{b_k r! (k+1) s_j^k}{k+1} \right| \leq c_{11} s^\varepsilon e^{c_9 \nu},$$

ahol c_{11} csak ε -től függ, amiből következik, hogy

$$\left| \int_0^\infty f(t) e^{-st} P_\nu(e^{-st}) d\tau(t) - \frac{A}{s} \int_0^1 P_\nu(\xi) d\xi \right| < Ac_{11} s^\varepsilon e^{c_9 \nu} \quad (40)$$

(17)-ből leolvasható, hogy

$$\int_0^1 |g(\xi) - P_\nu(\xi)| d\xi < \frac{c_2}{\nu} + c_2 \int_0^1 \text{Min} \left(1, \frac{1}{\nu^3 |\xi - e^{-1}|^3} \right) d\xi < \frac{c_{12}}{\nu}. \quad (41)$$

Becsülni akarjuk $\int_0^\infty f(t) e^{-st} [g(e^{-st}) - P_\nu(e^{-st})] d\tau(t)$ -t. Legyen ismét

$$s = 1/x, \quad \nu = \frac{\varepsilon}{2c_8} [\log x] + 1 \quad (42)$$

(39) és (17) alapján

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty f(t) e^{-t/x} [g(e^{-t/x}) - P_\nu(e^{-t/x})] d\tau(t) \leq \\ & \leq \frac{c_2}{\nu} \int_0^\infty f(t) e^{-t/x} d\tau(t) + c_2 \int_0^\infty f(t) e^{-t/x} \text{Min} \left(1, \frac{1}{\nu^3 |e^{-1} - e^{-t/x}|^3} \right) d\tau(t) \leq \\ & \leq \frac{2c_2}{\nu} \int_0^{x \left(1 + \frac{c_{14}}{\nu^{3/2}} \right)} f(t) e^{-t/x} d\tau(t) + c_2 \int_{x \left(1 - \frac{c_{14}}{\nu^{3/2}} \right)}^{x \left(1 + \frac{c_{14}}{\nu^{3/2}} \right)} f(t) e^{-t/x} \text{Min} \left(1, \frac{1}{\nu^3 |e^{-1} - e^{-t/x}|^3} \right) d\tau(t). \end{aligned} \quad (43)$$

Az utolsó egyenlőtlenséghez felhasználtuk, hogy található olyan c_{14} állandó, melyre

$$|e^{-1} - e^{-t/x}| < \frac{1}{\nu^{2/3}} \text{ből következik, hogy } x \left(1 - \frac{c_{14}}{\nu^{2/3}}\right) \leq t \leq x \left(1 + \frac{c_{14}}{\nu^{2/3}}\right).$$

(32) és (42)-ből

$$\frac{2c_2}{\nu} \int_0^x f(t) e^{-t/x} d\tau(t) < c_{10} \frac{x}{\log x} \quad (44)$$

(43)-ban az utolsó integrált $\frac{x}{4\nu}$ hosszúságú szakaszokra osztjuk és felhasználjuk (39)-et:

$$\begin{aligned} & \int_{x \left(1 - \frac{c_{14}}{\nu^{2/3}}\right)}^{x \left(1 + \frac{c_{14}}{\nu^{2/3}}\right)} f(t) e^{-t/x} \operatorname{Min} \left(1, \frac{1}{\nu^3 |e^{-1} - e^{-t/x}|^3}\right) d\tau(t) \leq \\ & \leq \int_{x \left(1 - \frac{1}{4\nu}\right)}^{x \left(1 + \frac{1}{4\nu}\right)} f(t) e^{-t/x} d\tau(t) + \sum_{k=1}^{4c_{14}\nu^{1/3}} \frac{c_{15}}{\nu^3 k^3} \int_{x \left(1 + \frac{k}{4\nu}\right)}^{x \left(1 + \frac{k+1}{4\nu}\right)} f(t) d\tau(t) \leq \\ & \leq A c_{10} \frac{x}{\log x} \left(1 + c_{15} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}\right) < c_{16} A \frac{x}{\log x}. \end{aligned} \quad (45)$$

Itt felhasználtuk, hogy $|e^{-t/x} - e^{-1}| > c_{17}^{-1} |t/x - 1|$, ha $1/3 < t/x < 2/3$, ami elég nagy ν -re teljesül. Hasonlóan kapjuk, hogy

$$\int_{x \left(1 - \frac{c_{14}}{\nu^{2/3}}\right)}^{x \left(1 + \frac{c_{14}}{\nu^{2/3}}\right)} f(t) e^{-t/x} \operatorname{Min} \left(1, \frac{1}{\nu^3 |e^{-1} - e^{-t/x}|^3}\right) d\tau(t) < c_{16} A \frac{x}{\log x} \quad (46)$$

(16), (40), (41), (42), (43) és (44)-ből leolvasható, hogy

$$\int_0^x f(t) d\tau(t) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-t/x} g(e^{-t/x}) d\tau(t) = Ax + \varphi(x), \quad (47)$$

ahol

$$|\varphi(x)| < \frac{c_{17}}{\log x}. \quad (48)$$

Q. e. d.

IRODALOM

¹ A Tauber-tipusú tételek rendkívül kiterjedt irodalmának ismertetésére nem akarunk kitérni; a legfontosabb munkák jegyzékét az érdeklődő olvasó megtalálhatja *G. H. Hardy: Divergent Series* c. könyvében [Oxford, Clarendon Press, 1949] 175. o.

² А. Г. Постников: Остаточный член в тауберовой теореме Харди и Литтльвуда. Доклады А. Н. С. С. С. Р. 77 (1951).

³ *J. Korevaar*: An estimate of the error in Tauberian theorems for power series. *Duke Math. Journal* 18 (1951).

⁴ *G. Freud*: Restglied eines Tauberschen Satzes, I. *Acta Math. Ac. Sci. Hung.* 11, 299—308.

⁵ *Erdős Pál és Turán Pál*: On a problem in the theory of uniform distribution, II. c. dolgozatukban (*Indagationes Mathematicae*, 10 (1948)) hasonló becsléseket használnak egy más probléma megoldására.

⁶ Lásd pl. *I. P. Natanson*: *Konstruktiv Függvénytan*. Akadémiai Kiadó, Budapest 1952.

⁷ *S. N. Bernstein*: Sur la meilleure approximation de $|x|$ par des polynômes de degrés donnés dans un segment finit. *Acta Math.* 37 (1919).