

BANACH TEREKBEN ÉRTELMEZETT NEMLINEÁRIS EGYENLETEKRŐL

FENYŐ ISTVÁN

Bemutatta Rényi Alfréd lev. tag az 1952. június 16-án tartott felolvasó ülésen

A matematikai fizika számos problémája tudvalevően nemlineáris algebrai egyenletekre vagy egyenletrendszerre, nemlineáris differenciál- és integrálegyenletekre, integrodifferenciálegyenletekre stb. vezet. Ezek gyakran mint valamilyen Banach-térben értelmezett nemlineáris egyenletek értelmezhetők, így tehát a Banach-terek nemlineáris egyenleteinek megoldása a matematikai fizika szempontjából fontos feladat.

Nemlineáris közönséges egyenletekkel vagy egyenletrendszerekkel és különböző speciális nemlineáris függvényegyenletekkel igen sok szerző foglalkozott, ezzel szemben az általános Banach-terek nemlineáris egyenleteiről aránylag keveset írtak. Pedig a Banach-terek egyenleteinek vizsgálata rendkívül sokféle nemlineáris egyenlet megoldhatóságára ad felvilágosítást, sőt a numerikus megoldásra egységes eljárást szolgáltat. Ezzel a kérdéssel újabban *L. V. Kantorovics* és tanítványai foglalkoztak¹. Lényegében a Newton-féle iterációs eljárást és annak közönséges egyenletek körében jólismert módosítását vitték át a Banach-terekben értelmezett egyenletekre.

Jelen dolgozat szintén a Banach-terek nemlineáris egyenleteivel foglalkozik. Egy ilyen egyenlet egyértelmű megoldhatóságának problémája úgy is megfogalmazható, hogy megvizsgálandó valamely Banach-térben értelmezett függvény inverz függvényének exisztenciája a tér valamely helyének környezetében. Ezzel kapcsolatban kimutatjuk, hogy ha *Fréchet* értelemben² differenciálható függvényről van szó, akkor a valós, differenciálható függvények inverz függvényeinek exisztenciájáról szóló közismert tétel majdnem szó szerint érvényes az általános Banach-terekben is. Természetes, hogy ez magában foglalja az implicit függvények exisztenciájáról szóló tételt is.

Rényi Alfréd felhívta figyelmemet arra, hogy a kimondott tétel nem egyéb, mint a módosított Newton-féle gyökközelítő eljárás analogonja a Banach térben és a tétel ennek konvergenciájára nézve ad elégséges feltételt. Ugyanerre vonatkozik *L. V. Kantorovics* egyik tétele³, de míg *Kantorovics* tételének kimondásában és a bizonyításában felhasználja a függvény második differenciálhányadosát és feltételezi, hogy az korlátos, addig itt pusztán az első differenciálhányados létét és folytonosságát kívánjuk meg. Ezzel a módosított Newton-féle eljárás konvergenciájára vonatkozó tétel egyszerűbb alakot nyer. Igaz viszont, hogy *L. V. Kantorovics* erősebb feltevései mellett az eljárás konvergenciája gyorsabb.

I. A Banach-térben értelmezett nemlineáris egyenletek megoldhatóságáról

Bebizonyítjuk a következőket:

1. tétel. Legyen $f(x)$ az X Banach-térben értelmezett nemlineáris operátor, mely az X teret az Y Banach-térre (vagy annak egy részére) képezi le. Ha

$$f(x_0) = y_0$$

és $f(x)$ az x_0 helyen Fréchet értelemben differenciálható és differenciálhányadosa az x_0 helyen folytonos, továbbá az $f'(x_0)$ lineáris operátornak van véges normájú egyértelmű inverze, akkor az

$$f(x) = y \quad (1)$$

egyenletnek van egy és csakis egy megoldása, ha y elég közel van y_0 -hoz.

Pontosabban: ha $f'(x_0)$ inverzét U_0 -al jelöljük és R annak a „gömbnek” a sugara, melyre az

$$\|U_0[f'(x) - f'(x_0)]\| \leq q \quad (2)$$

egyenlőtlenség teljesül*, ahol $0 < q < 1$, akkor minden olyan y elemre, melyre az

$$\|U_0(y - y_0)\| \leq R(1 - q) \quad (2')$$

egyenlőtlenség érvényes, létezik az (1) egyenletnek egy és csakis egy megoldása.

Bizonyítás. Az általánosság rovása nélkül feltehetjük, hogy $x_0 = 0$ és $y_0 = 0$. Ellenkező esetben $\xi = x - x_0$ és $\eta = y - y_0$ lineáris szubsztitúcióval ez az eset mindig elérhető.

Definiáljuk az X tér $\varepsilon(x)$ operátorát a következő módon:

$$\varepsilon(x) = f(x) - f'(0)x. \quad (3)$$

Ez az operátor nyilván differenciálható és differenciálhányadosa

$$\varepsilon'(x) = f'(x) - f'(0).$$

Miután feltettük, hogy $f(x)$ differenciálhányadosa a 0 elem helyén folytonos, ezért

$$\|\varepsilon'(x)\| \rightarrow 0 \quad \text{ha} \quad \|x\| \rightarrow 0.$$

Legyen x a szóbanforgó térnek az az eleme, mely az (1) egyenletet kielégíti, ekkor a (3) egyenlet így írható

$$\varepsilon(x) = y - f'(0)x.$$

Az $f'(0)$ operátorra tett feltevésünket figyelembevéve az

$$x = U_0[y - \varepsilon(x)] \quad (4)$$

egyenletre jutunk. Ezt megoldjuk a szukcesszív approximáció módszerével:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= U_0[y - \varepsilon(0)] = U_0 y \\ x_2 &= U_0[y - \varepsilon(x_1)] \\ &\dots \dots \dots \\ x_n &= U_0[y - \varepsilon(x_{n-1})] \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

* Ez azt jelenti, hogy $\|x - x_0\| \leq R$ minden olyan x elemre, melyre (2) érvényes.

Az így nyert $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ végtelen elemsorozat konvergencia és az (1) alatti egyenlet x megoldásához konvergál, feltéve, hogy y kielégíti a (2') feltételt. Az (5) alatti egyenletekből ugyanis

$$x_2 - x_1 = -U_0 \varepsilon(x_1) = -U_0 [\varepsilon(x_1) - \varepsilon(0)].$$

Erre az egyenletre alkalmazható a Lagrange-féle középértéktétel Banach térbeli analogonja⁴, ennek folytán

$$x_2 - x_1 = -U_0 \varepsilon'(\bar{x}_1) \cdot x_1,$$

ahol $\bar{x}_1 = \theta_1 x_1$ ($0 < \theta_1 < 1$). Ezért tehát $\|\bar{x}_1\| < \|x_1\|$. De

$$\|x_1\| = \|U_0 y\| < \frac{\|U_0 y\|}{1-q} \leq R,$$

így az x_1 elem és még inkább az $\bar{x}_1$ elem az R sugarú gömbbe esik. De akkor

$$\|U_0 \varepsilon'(\bar{x}_1)\| = \|U_0 [f'(\bar{x}_1) - f'(0)]\| \leq q$$

és

$$\|x_2 - x_1\| \leq q \|x_1\| = q \|U_0 y\|. \quad (6)$$

Az előbbihez teljesen hasonló módon

$$x_3 - x_2 = -U_0 [\varepsilon(x_2) - \varepsilon(x_1)] = -U_0 \varepsilon'(\bar{x}_2) (x_2 - x_1),$$

ahol

$$\bar{x}_2 = x_1 + \theta_2 (x_2 - x_1). \quad (0 < \theta_2 < 1).$$

Vegyük figyelembe, hogy (6) alapján

$$\begin{aligned} \|\bar{x}_2\| &\leq \|x_1\| + \|x_2 - x_1\| \leq \|x_1\| + q \|x_1\| = (1+q) \|x_1\| = (1+q) \|U_0 y\| \leq \\ &\leq \frac{\|U_0 y\|}{1-q} \leq R. \end{aligned} \quad (7)$$

Ez tehát azt jelenti, hogy $\bar{x}_2$ is az R sugarú gömbbe esik, vagyis

$$\|U_0 \varepsilon'(\bar{x}_2)\| \leq q.$$

Ennek folytán (6) figyelembevételével

$$\|x_3 - x_2\| \leq q^2 \|U_0 y\|.$$

Ezt az eljárást így folytathatnók és teljes indukcióval ki lehet mutatni, az

$$\|x_n - x_{n-1}\| \leq q^{n-1} \|U_0 y\| \quad (8)$$

egyenlőtlenség érvényességét minden pozitív egész n -re. Ebből viszont következik az $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ elemsorozat konvergenciája:

$$\begin{aligned} \|x_{n+k} - x_n\| &\leq \|x_{n+k} - x_{n+k-1}\| + \|x_{n+k-1} - x_{n+k-2}\| + \dots + \|x_{n+1} - x_n\| \leq \\ &\leq (q^{n+k-1} + q^{n+k-2} + \dots + q^n) \|U_0 y\| = q^n \frac{1-q^k}{1-q} \|U_0 y\|. \end{aligned}$$

Mivel $0 < q < 1$ azért ennek az egyenlőtlenségnek a jobb oldala elegendő nagy n mellett tetszőlegesen kicsiny. Hátra van még meggyőződni arról, hogy a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$$

elem az (1) egyenletnek valóban a megoldása. Az $f(x)$ folytonosságából következik, hogy a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x)$$

elem létezik. De x_n definíciója folytán

$$f(x_n) = y - f'(0)[x_{n+1} - x_n],$$

így

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f(x_n) - y\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|f'(0)\| \cdot \|x_{n+1} - x_n\| \leq \|f'(0)\| \|U_0 y\| \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0,$$

tehát

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x) = y.$$

A megoldás unicitása is könnyen igazolható. Tegyük fel ugyanis, hogy a (2) tartományban lenne két megoldás: x és ξ , vagyis

$$f(x) = y \quad \text{és} \quad f(\xi) = y,$$

akkor

$$f(x) - f(\xi) = f'(\bar{x}) \cdot (x - \xi) = 0$$

lenne, ahol $\bar{x}$ is nyilván a (2) tartományba esik*. Figyelembevételével ε definícióját, az előbbi egyenlet a következő alakba írható:

$$f'(0) \cdot (x - \xi) + \varepsilon'(\bar{x}) (x - \xi) = 0.$$

Ebből

$$x - \xi = U_0 \varepsilon'(\bar{x}) (x - \xi)$$

következik. Mivel $\bar{x}$ az R sugarú gömbbe esik, azért $\|U_0 \varepsilon'(\bar{x})\| \leq q$, tehát

$$\|x - \xi\| \leq q \|x - \xi\|,$$

ami csak úgy lehet, ha

$$x = \xi.$$

Az alkalmazások szempontjából nem érdektelen megemlíteni a bebizonyított tétel egy másik alakját, mely a közönséges függvények körében az implicit függvények existenciátételének analogonja.

1a. tétel. Legyen $F(x, y)$ az X és Y Banach-terekben értelmezett kétváltozós függvény (melynek értékkészlete is egy Banach-térbe esik), x_0 és y_0 olyan elempár, melyre az

$$F(x_0, y_0) = 0$$

egyenlet teljesül. Az F függvény legyen mindkét változójában folytonos és rögzített y_0 mellett az x_0 helyen Fréchet értelemben differenciálható. Erről a differenciálhányadosról tegyük fel, hogy az (x_0, y_0) helyen folytonos és véges normájú inverze van. Akkor az

$$F(x, y) = 0 \tag{9}$$

egyenletnek egy és csakis egy x megoldása van, ha y elég közel van y_0 -hoz.

* Ez a háromszögegyenlőtlenségből közvetlenül következik: $\bar{x} = \xi + \theta(x - \xi) = (1 - \theta)\xi + \theta x$ ($0 < \theta < 1$), ezért $\|\bar{x}\| \leq (1 - \theta)\|\xi\| + \theta\|x\|$. Ez azt jelenti, hogy $\|\bar{x}\|$ kisebb, mint $\|\xi\|$ és $\|x\|$ súlyozott számtani közepe, tehát kisebb mint $\max(\|x\|, \|\xi\|)$.

Pontosabban: legyen V_0 az $F'_x(x_0, y_0)$ lineáris operátor inverze és q annak a gömbnek a sugara, melyre rögzített y mellett

$$\|V_0[F'_x(x, y) - F'_x(x_0, y_0)]\| \leq q < 1, \quad (10)$$

akkor a

$$\|V_0 F(x_0, y)\| \leq q(1 - q) \quad (10')$$

egyenlőtlenséget kielégítő y mellett van (9)-nek egy és csakis egy megoldása.

Ezt az állításunkat nem bizonyítjuk be, ez szószerint ugyan úgy történhetik, mint az 1. tétel bizonyítása.

Megemlítjük még az 1. tétel és bizonyításának egy másik, az alkalmazások szempontjából talán nem érdektelen alakját*. Ez a módosított Newton-féle iterációs eljárás Banach-térbeli analogonjára vonatkozik.

2. tétel. Legyen az

$$f(x) = 0 \quad (11)$$

Banach-térben értelmezett egyenlet egyik „közelítő” megoldása x_0 ismert. Az $f(x)$ operátorról ugyanazokat a tulajdonságokat tételezzük fel, melyek az 1. tételben szerepeltek az x_0 helyre vonatkoztatva. Akkor az

$$x_n = x_{n-1} - U_0 f(x_{n-1}) \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (12)$$

iterációs eljárás konvergens és a (11) egyenlet egyik gyökéhez konvergál, ha

$$\|U_0 f(x_0)\| \leq r(1 - q), \quad (13)$$

ahol r annak a gömbnek a sugara, melybe tartozó x elemek az

$$\|U_0[f'(x) - f'(x_0)]\| \leq q < 1 \quad (14)$$

egyenlőtlenségnek tesznek eleget. Az eljárás az r sugarú gömbbe eső egyetlen megoldáshoz konvergál.

A (11) egyenlet az

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \varepsilon(x) = 0 \quad (15)$$

alakba is írható. Ebből

$$x = x_0 - U_0[f(x_0) + \varepsilon(x)].$$

Mivel

$$\varepsilon(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0) \cdot (x - x_0),$$

azért a (11), ill. (15) alatti egyenlet a következő egyenlettel ekvivalens:

$$x = x - U_0 f(x).$$

Szemmel láthatóan ez viszont a (4) alatti egyenlettel azonos. Ha tehát ezt megoldjuk a szukcesszív approximáció módszerével, akkor a (12) alatti egyenletrendszerre jutunk. Miután pedig a szóbanforgó egyenletre nézve az 1. tétel kikötései teljesülnek, állításunk igazolást nyert.

* A tétel ezen alakjára Rényi Alfréd hívta fel figyelmemet.

II. Néhány alkalmazás

1. Az 1. és 1a. tételek az implicit és az inverz függvény existenciájáról szóló közismert klasszikus tételeket szolgáltatják, ha a tételekben szereplő Banach-terek a valós vagy komplex számok terét jelentik. A 2. tétel pedig a valós egyenletekre vonatkozólag a módosított Newton-féle gyökközelítő eljárásra nézve ad újnak látszó konvergenciakritériumot.

2. Tekintsük az

$$y_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (16)$$

nemlineáris transzformációt. Az f_i függvények változóiban folytonos első parciális differenciálhányadosokkal bíró függvények. Ha X és Y tér gyanánt a szám n -esek terét értjük, melyben a normát így definiáljuk

$$\|x\| = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

és tekintetbe vesszük, hogy az $y = F(x)$ operátor differenciálhányadosa a (16) alatti egyenletrendszer Jacobi-féle determinánsa⁵, akkor az 1a. tétel alkalmazásával a következő, ugyancsak klasszikus tételt nyerjük:

Ha az $x_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ és $y_0 = (y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0)$ értékrendszerek kielégítik a (16) alatti egyenletrendszert és a

$$D = \left| \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_k} \right) \right|_{x_0, i, k=1}^n$$

determináns 0-tól különböző, akkor létezik n folytonos és n változós g_i függvény, melyre

$$y_i = f_i[g_1(y_1, \dots, y_n), \dots, g_n(y_1, \dots, y_n)] \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

teljesül, ha az $y = (y_1, \dots, y_n)$, elég közel van az $y_0 = (y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0)$ értékrendszerhez.

Ha a 2. tételt alkalmazzuk az

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

egyenletrendszerre, akkor ennek numerikus megoldására nyerünk konkrét eljárást. Az általános eset ismertetése helyett egy *Osztrovskij*től származó példát mutatunk be⁶, melyet *Kantorovics* is idéz saját tételének illusztrálására⁷. A szóbanforgó egyenletrendszer

$$f_1(x, y) \equiv 2x^3 - y^2 - 1 = 0$$

$$f_2(x, y) \equiv xy^3 - y - 4 = 0.$$

Kezdőelemként válasszuk az

$$x_0 = 1,2; y_0 = 1,7$$

értékrendszert. Az előbbieket alapján a második közelítést úgy kapjuk, ha megoldjuk a következő lineáris egyenletrendszert:

$$8,64 \Delta x_0 - 3,4 \Delta y_0 = -f_1(x_0, y_0) = 0,434$$

$$4,913 \Delta x_0 + 9,404 \Delta y_0 = -f_2(x_0, y_0) = -0,1956.$$

Ebből $x_1 = x_0 + \Delta x_0$, $y_1 = y_0 + \Delta y_0$. A következő közelítést az előbbihez hasonló

$$8,64 \Delta x_1 - 3,4 \Delta y_1 = -f_1(x_1, y_1)$$

$$4,913 \Delta x_1 + 9,404 \Delta y_1 = -f_2(x_1, y_1)$$

egyenletrendszer segítségével határozzuk meg. Ennek megoldása után a harmadik közelítés: $x_2 = x_1 + \Delta x_1$, $y_2 = y_1 + \Delta y_1$ stb.

Hátra van ennek az eljárásnak a konvergenciáját megvizsgálni. Ehhez alkalmazni fogjuk a 2. tételt. Könnyebb érthetőség kedvéért jelöljük a szóbanforgó operátort F -el, a tekintetbevett tér elemeit $a, b, \dots$ stb.-vel. Ekkor mint láttuk

$$F'(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix}$$

és $\|F'(a)\|$ egyik felső korlátja az $F'(a)$ -t meghatározó matrix elemeinek abszolút értékben legnagyobbika. Az operátor differenciálhányadosa az $a_0 = (x_0, y_0)$ helyen az előbbi egyenletrendszer determinánsa, melynek számértéke $D = 97,95$.

$$F'(a) - F'(a_0) = \begin{pmatrix} 6x^2 - 8,64 & -2y + 3,4 \\ y^3 - 4,913 & 3xy^2 - 10,404 \end{pmatrix}.$$

Mivel a másodrendű determináns aldeteminánsai maguk a determináns elemei, azért $F'(a_0)^{-1}$ olyan mátrix, melynek elemei (előjeltől eltekintve) az $F'(a_0)$ elemei osztva ezen mátrix determinánsával. Ennek normája így becsülhető tehát meg:

$$\|U_0\| = \|F'(a_0)^{-1}\| \leq \frac{9,404}{97,95} = 0,096.$$

Ha $q = 0,9$, akkor

$$\|U_0[F'(a) - F'(a_0)]\| \leq \|U_0\| \|F'(a) - F'(a_0)\| = 0,096 \|F'(a) - F'(a_0)\| \leq 0,9.$$

Annak a „gömbnek” a sugara, melyre az

$$\|F'(a) - F'(a_0)\| \leq \frac{0,9}{0,096}$$

egyenlőtlenség érvényes: $r = 0,725$. De akkor valóban

$$\|U_0 F(a_0)\| \leq \|U_0\| \|F(a_0)\| \leq 0,096 \cdot 0,434 \leq 0,0417 < 0,725 \cdot 0,1 = 0,0725.$$

Ebből az következik, hogy az előbbi iterációs eljárás konvergens és az egyenletrendszer egyik megoldását szolgáltatja.

3. Tekintsük a következő nemlineáris Volterra-típusú integrálegyenletet:

$$\varphi(x) + \int_0^x K(x, y, \varphi(y)) dy = f(x). \quad (0 \leq x \leq a) \quad (17)$$

Tegyük fel, hogy $K(x, y, 0) \equiv 0$ és $\frac{\partial K(x, y, \varphi)}{\partial \varphi}$ a φ -ben folytonos. X és Y

tér gyanánt válasszuk a C teret és figyelembevéve azt a közismert tényt, hogy a másodfajú inhomogén Volterra-típusú lineáris integrálegyenletnek mindig van egy és csakis egy megoldása a C térben, az 1. tétel alapján kimondhatjuk, hogy *elegendő kicsiny $\max_{0 \leq x \leq a} |f(x)|$ mellett a (17) egyenletnek egy és csakis egy megoldása van.*

Csupán azt tegyük most fel, hogy $\frac{\partial K(x, y, \varphi)}{\partial \varphi}$ a φ -ben folytonos. Oldjuk meg a szóbanforgó egyenletet a következő iterációs eljárással: induljunk ki egy alkalmas $\varphi_0(x)$ függvényből és ezzel képezzük az

$$f_0(x) = \varphi_0(x) + \int_0^x K(x, y, \varphi_0(y)) dy - f(x)$$

függvényt. Legyen

$$\varphi_1 = \varphi_0(x) - f_0(x) + \int_0^x \varrho_0(x, y) f_0(y) dy,$$

ahol $\varrho_0(x, y)$ jelenti a $K(x, y, \varphi_0(y))$ kétváltozós mag rezolvensét. Ha

$$f_1(x) = \varphi_1(x) + \int_0^x K(x, y, \varphi_1(y)) dy - f(x),$$

akkor

$$\varphi_2(x) = \varphi_1(x) - f_1(x) + \int_0^x \varrho_0(x, y) f_1(y) dy$$

stb. Tegyük fel, hogy a $0 \leq x \leq a$; $0 \leq y \leq a$ tartományban $|\varrho_0(x, y)| \leq \varrho$, továbbá legyen $0 < q < 1$ tetszőleges szám. Ha

$$\left| \frac{\partial K(x, y, \varphi)}{\partial \varphi} - \frac{\partial K(x, y, \varphi_0)}{\partial \varphi} \right| \leq \frac{q(1-\varrho)}{a} \quad \begin{array}{l} 0 \leq x \leq a \\ 0 \leq y \leq a \\ 0 \leq |\varphi| \leq r, \end{array}$$

akkor az előbbi módon képezett $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots$ függvénysorozat konvergens és a (17) egyenlet egyik megoldásához konvergál, ha a kiindulási $\varphi_0(x)$ függvény olyan, hogy

$$\left| f_0(x) - \int_0^x \varrho_0(x, y) f_0(y) dy \right| \leq r(1-q).$$

Ehhez teljesen hasonló tétel és eljárás állapítható meg a

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 K(x, y, \varphi(y)) dy = f(x) \quad (18)$$

alakú inhomogén Fredholm-típusú integrálegyenlet megoldhatóságáról. Így például az 1. tétel alapján állíthatjuk, hogy ha $K(x, y, 0) \equiv 0$ és λ a $\left(\frac{\partial K(x, y, \varphi)}{\partial \varphi} \right)_{\varphi=0}$ *magnak nem sajátértéke, akkor elegendő kicsiny $\max_{0 \leq x \leq 1} |f(x)|$ esetén a (18) egyenletnek egy és csakis egy megoldása van.*

4. *P. Lévy*⁸ rámutatott a következő alakú integrálegyenletek fontosságára:

$$\varphi(x) - \int_0^1 F(x, y; \varphi(y); \lambda) dy = 0. \quad (19)$$

Az adott F függvényről tegyük fel, hogy x és y -ban folytonos, φ és λ szerint parciálisan differenciálható és a parciális differenciálhányadosok folytonosak, továbbá, hogy $F(x, y; \varphi; 0) \equiv 0$. Az X tér legyen a komplex számok tere, Y pedig a C tér. A (19) egyenlet (9) alatti egyenlet-típusba tartozik, és rá alkalmazható az 1a. tétel állítása. Ennek alapján érvényes a következő:

Ha a $\left(\frac{\partial F(x, y; \varphi; \lambda)}{\partial \varphi}\right)_{\varphi=0, \lambda=0}$ kétváltozós magnak 1 nem sajátértéke, akkor elegendő kicsiny $|\lambda|$ mellett a (19) egyenletnek egy és csakis egy folytonos megoldása van.

P. Lévy hasonló tételének bizonyításánál F analitikus voltát is megkövetelte.

5. *A. Liapunov, E. Schmidt, L. Lichtenstein*⁹ rámutattak a következőkben tárgyalt nemlineáris integrálegyenletek nagy szerepére úgy a tiszta, mint az alkalmazott matematika szempontjából.

Legyenek

$$K_{mnj}(t; t_1, t_2, \dots, t_\varrho) \quad (0 \leq t \leq 1; 0 \leq t_i \leq 1)$$

valós vagy komplex értékű többváltozós függvények (m, n, j, ϱ nemnegatív egész számok, $\varrho \geq 1$, $m+n=\varrho$), melyek legfeljebb annyira nem folytonosak, hogy rájuk a klasszikus Fredholm-féle elmélet alkalmazható legyen. Egyszerűség kedvéért használjuk a következő jelöléseket

$$U_{mn}(x, y) = \sum_{j=1}^k \int_0^1 \dots \int_0^1 K_{mnj}(t; t_1, \dots, t_\varrho) y(t)^\alpha y(t_1)^{\alpha_1} \dots y(t_\varrho)^{\alpha_\varrho} x(t)^\beta x(t_1)^{\beta_1} \dots x(t_\varrho)^{\beta_\varrho} dt_1 \dots dt_\varrho,$$

ahol $\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_\varrho; \beta, \beta_1, \dots, \beta_\varrho$ nemnegatív egészszámok és

$$\alpha + \alpha_1 + \dots + \alpha_\varrho = m; \beta + \beta_1 + \dots + \beta_\varrho = n. \quad (20)$$

k jelenti a (20) alatti diofantikus egyenletek megoldásainak számát. Mármint tüzzük ki az

$$\begin{aligned} U(x, y) &= \sum_{m+n \geq 1} \sum_{j=1}^k U_{mn}(x, y) = \\ &= \sum_{m+n \geq 1} \sum_{j=1}^k \int_0^1 \dots \int_0^1 K_{mnj}(t; t_1, \dots, t_\varrho) y(t)^\alpha y(t_1)^{\alpha_1} \dots y(t_\varrho)^{\alpha_\varrho} x(t)^\beta x(t_1)^{\beta_1} \dots \\ &\quad \dots x(t_\varrho)^{\beta_\varrho} dt_1 \dots dt_\varrho = 0 \end{aligned} \quad (21)$$

nemlineáris integrálegyenlet megoldását, ahol a baloldal ú. n. reguláris integrálhatványsor¹⁰. $y(t)$ ismert, $x(t)$ pedig az ismeretlen függvény.

Nyilván $U(0, 0) = 0$. A Fréchet-féle differenciálhányados definíciója alapján

$$\begin{aligned} U'_x(0, 0) \cdot \Delta x &= \int_0^1 \dots \int_0^1 K_{010}(t; t_1, \dots, t_q) dt_1 \dots dt_q \cdot \Delta x(t) + \\ &+ \sum_{j=1}^q \int_0^1 \dots \int_0^1 K_{10j}(t; t_1 \dots t_q) \Delta x(t_j) dt_1 \dots dt_q = \\ &= A(t) \Delta x(t) + \int_0^1 B(t; \tau) \Delta x(\tau) d\tau, \end{aligned}$$

ahol

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \dots \int_0^1 K_{010}(t, t_1 \dots t_q) dt_1 \dots dt_q = A(t); \\ &\int_0^1 \dots \int_0^1 K_{011}(t; \tau, t_2, \dots, t_q) dt_2 \dots dt_q + \int_0^1 \dots \int_0^1 K_{012}(t; t_1, \tau, t_3, \dots, t_q) dt_1 dt_3 \dots dt_q + \\ &+ \dots + \int_0^1 \dots \int_0^1 K_{01q}(t; t_1, \dots, t_{q-1}, \tau) dt_1 \dots dt_{q-1} = B(t, \tau). \end{aligned}$$

Az 1a. tételt a szóbanforgó integrálegyenletre alkalmazva azt kapjuk, hogy ha $A(t) \neq 0$ ($0 \leq t \leq 1$) és $B(t, \tau)/A(t)$ kétváltozós magnak -1 nem sajátértéke, akkor minden $y(t)$ függvény mellett, melyre $\max_{0 \leq t \leq 1} |y(t)|$ elegendő kicsiny a (21) alatti egyenlet $x(t)$ -re egyértelműen megoldható. Ez E. Schmidt híres tétele. Ennek L. Lichtenstein által adott általánosításai is közvetlenül nyerhetők az 1a. tételből¹¹.

6. A bebizonyított tételek nemlineáris integrálegyenletrendszerek megoldhatóságának feltételeit és megoldási módszereit is szolgáltatják. Vegyünk például egy, az alkalmazások szempontjából is fontos esetet¹². Legyen

$$\begin{aligned} U_{mnp}^{(i)}(x; y, \eta) &= \sum_{j=1}^k \int_0^1 \dots \int_0^1 K_{mnpj}^{(i)}(t; t_1, t_2, \dots, t_q) x(t)^\alpha x(t_1)^{\alpha_1} \dots x(t_q)^{\alpha_q} \times \\ &\times y(t)^\beta y(t_1)^{\beta_1} \dots y(t_q)^{\beta_q} \eta(t)^\gamma \eta(t_1)^{\gamma_1} \dots \eta(t_q)^{\gamma_q} dt_1 dt_2 \dots dt_q \quad (i = 1, 2) \\ &\alpha + \alpha_1 + \dots + \alpha_q = m; \quad \beta + \beta_1 + \dots + \beta_q = n; \quad \gamma + \gamma_1 + \dots + \gamma_q = p; \\ &\quad \quad \quad q = m + n + p. \end{aligned}$$

A probléma: adott $x(t)$ függvény mellett keresendő az $y(t), \eta(t)$ függvenypár, mely eleget tesz a

$$\sum_{m+n+p \geq 1} \sum_{i=1}^2 U_{mnp}^{(i)}(x; y, \eta) = 0, \quad \sum_{m+n+p \geq 1} \sum_{i=1}^2 U_{mnp}^{(2)}(x; y, \eta) = 0 \quad (22)$$

integrálegyenletrendszernek. Ezekben az egyenletekben szereplő integrálhatványsorok az *E. Schmidt* által adott definíció szerint regulárisok. Legyen az X tér a C tér, az Y tér pedig a folytonos függvénypároknak a tere. Ebben a térben a norma definíciója:

$$\left\| \begin{pmatrix} y \\ \eta \end{pmatrix} \right\| = \max \left[\max_{0 \leq t \leq 1} |y(t)|, \max_{0 \leq t \leq 1} |\eta(t)| \right].$$

$\begin{pmatrix} y \\ \eta \end{pmatrix} = 0$, akkor és csak akkor, ha $y \equiv 0$ és $\eta \equiv 0$. A tér linearitásához szükséges műveletek definíciója:

$$\lambda \begin{pmatrix} y \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda y \\ \lambda \eta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ \eta_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_2 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 + y_2 \\ \eta_1 + \eta_2 \end{pmatrix}.$$

A (22) egyenletrendszer egyik megoldása: $x \equiv 0$; $y \equiv 0$; $\eta \equiv 0$. Az

$$F \left(x, \begin{pmatrix} y \\ \eta \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \sum_{m,n,p} \sum_{\alpha} U_{mnp}^{(1)}(x; y, \eta) \\ \sum_{m,n,p} \sum_{\alpha} U_{mnp}^{(2)}(x; y, \eta) \end{pmatrix}$$

operátor $\begin{pmatrix} y \\ \eta \end{pmatrix}$ változó szerint képezett Fréchet-féle differenciálhányadosa a $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ helyen és ezt alkalmazva a $\begin{pmatrix} \Delta y \\ \Delta \eta \end{pmatrix}$ elemre, nyilván a következő:

$$\begin{pmatrix} A^{(1)}(t) \Delta y(t) + \int_0^1 K_{0102}^{(1)}(t, t_1) \Delta y(t_1) dt_1 + B^{(1)}(t) \Delta \eta(t) + \int_0^1 K_{0012}^{(1)}(t, t_1) \Delta \eta(t_1) dt_1 \\ A^{(2)}(t) \Delta y(t) + \int_0^1 K_{0101}^{(2)}(t, t_1) \Delta y(t_1) dt_1 + B^{(2)}(t) \Delta \eta(t) + \int_0^1 K_{0011}^{(2)}(t, t_1) \Delta \eta(t_1) dt_1 \end{pmatrix},$$

ahol

$$A^{(1)}(t) = \int_0^1 K_{0101}^{(1)}(t, t_1) dt_1; \quad B^{(1)}(t) = \int_0^1 K_{0011}^{(1)}(t, t_1) dt_1$$

$$A^{(2)}(t) = \int_0^1 K_{0102}^{(2)}(t, t_1) dt_1; \quad B^{(2)}(t) = \int_0^1 K_{0012}^{(2)}(t, t_1) dt_1.$$

Tegyük fel, hogy

$$D(t) = \begin{vmatrix} A^{(1)}(t) & B^{(1)}(t) \\ A^{(2)}(t) & B^{(2)}(t) \end{vmatrix} \neq 0, \quad (0 \leq t \leq 1)$$

akkor az

$$A^{(1)} \Delta y + B^{(1)} \Delta \eta = \Delta z - \int_0^1 K_{0102}^{(1)}(t, t_1) \Delta y(t_1) dt_1 - \int_0^1 K_{0012}^{(1)}(t, t_1) \Delta \eta(t_1) dt_1$$

$$A^{(2)} \Delta y + B^{(2)} \Delta \eta = \Delta \zeta - \int_0^1 K_{0101}^{(2)}(t, t_1) \Delta y(t_1) dt_1 - \int_0^1 K_{0011}^{(2)}(t, t_1) \Delta \eta(t_1) dt_1$$

egyenletrendszerből

$$\begin{aligned} & \mathcal{A}y + \frac{1}{D} \int_0^1 \begin{vmatrix} K_{0102}^{(1)}(t, t_1) & K_{0102}^{(2)}(t, t_1) \\ B^{(1)}(t) & B^{(2)}(t) \end{vmatrix} \mathcal{A}y(t_1) dt_1 + \frac{1}{D} \int_0^1 \begin{vmatrix} K_{0012}^{(1)}(t, t_1) & K_{0012}^{(2)}(t, t_1) \\ B^{(1)}(t) & B^{(2)}(t) \end{vmatrix} \times \\ & \quad \times \mathcal{A}y(t_1) dt_1 = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} \mathcal{A}z & \mathcal{A}\zeta \\ B^{(1)} & B^{(2)} \end{vmatrix} \\ & \mathcal{A}y_1 - \frac{1}{D} \int_0^1 \begin{vmatrix} K_{0102}^{(1)}(t, t_1) & K_{0102}^{(2)}(t, t_1) \\ A^{(1)}(t) & A^{(2)}(t) \end{vmatrix} \mathcal{A}y(t_1) dt_1 - \frac{1}{D} \int_0^1 \begin{vmatrix} K_{0012}^{(1)}(t, t_1) & K_{0012}^{(2)}(t, t_1) \\ A^{(1)}(t) & A^{(2)}(t) \end{vmatrix} \times \\ & \quad \times \mathcal{A}y(t_1) dt_1 = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} \mathcal{A}\zeta & \mathcal{A}z \\ A^{(2)} & A^{(1)} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

következik. Ez $\mathcal{A}y$ és $\mathcal{A}y_1$ -ra nézve lineáris integrálegyenletrendszer, melynek a közismert Fredholm-féle elmélet alapján bármilyen $\mathcal{A}z(t)$, $\mathcal{A}\zeta(t)$ függvény-pár mellett van megoldása, ha a következő módon definiált magnak -1 nem sajátértéke:

$$x(t, t_1) = \begin{cases} \frac{1}{D(t)} [B^{(2)}(t) K_{0102}^{(1)}(t, t_1) - B^{(1)}(t) K_{0102}^{(2)}(t, t_1)] & \text{ha } 0 \leq t \leq 1; 0 \leq t_1 \leq 1 \\ -\frac{1}{D(t)} [A^{(2)}(t) K_{0102}^{(1)}(t, t_1) - A^{(1)}(t) K_{0102}^{(2)}(t, t_1)] & \text{ha } 0 \leq t \leq 1; 1 < t_1 \leq 2 \\ \frac{1}{D(t-1)} [B^{(2)}(t-1) K_{0102}^{(1)}(t-1, t_1) - B^{(1)}(t-1) K_{0102}^{(2)}(t-1, t_1)] & \text{ha } 1 < t \leq 2; 0 \leq t_1 \leq 1 \\ -\frac{1}{D(t-1)} [A^{(2)}(t-1) K_{0102}^{(1)}(t-1, t_1-1) - A^{(1)}(t-1) K_{0102}^{(2)}(t-1, t_1-1)] & \text{ha } 1 < t \leq 2; 1 < t_1 \leq 2 \end{cases} \quad (23)$$

Az 1a. tétel alapján kimondhatjuk tehát, hogy a (22) alatti nemlineáris integrálegyenletrendszernek egy és csakis egy $y(t)$, $y_1(t)$ megoldása van, ha $D(t) \neq 0$ és a (23) alatt definiált $x(t, t_1)$ magnak -1 nem sajátértéke, feltéve, hogy az adott $x(t)$ függvény abszolút értékének maximuma elegendő kicsiny.

Az eddigi példákhoz hasonlóan vizsgálhatók meg azok az integráldifferenciálegyenletek is, melyekben az ismeretlen függvény és annak differenciálhányadosai integrálhatványsorban szerepelnek.

7. A bebizonyított tételek differenciálegyenletekre és differenciálegyenlet-rendszerekre is alkalmazhatók. Ennek illusztrálására tekintsük a következő nemlineáris közönséges differenciálegyenletrendszert:

$$\frac{dx_k}{dt} = q_k(t; x_1, \dots, x_n) = y_k(t), \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (24)$$

a határfeltételek legyenek a következő homogén lineáris feltételek:

$$\Phi_k[x_1(0), \dots, x_1(0); x_1(1), \dots, x_n(1)] = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (25)$$

ahol Φ_k változóiban homogén lineáris függvény. Az X tér legyen a (25) határfeltételeknek elegettevő, differenciálható függvényekből álló függvény n -esek tere. Egyszerűség kedvéért tegyük fel például, hogy

$$\varphi_k(t, 0, 0, \dots, 0) \equiv 0. \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

Ha

$$\left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} \right)_{x_1=0, \dots, x_n=0} = \psi_{ik}(t),$$

akkor az

$$f(x) = \left\{ \frac{dx_k}{dt} - \varphi_k(t, x_1, \dots, x_n) \right\}$$

operátor Fréchet-féle differenciálhányadosa az $x=0$ helyen és alkalmazva a Δx elemre igen könnyű számítások alapján

$$\frac{d}{dt} \Delta x_i - \sum_{k=1}^n \psi_{ik}(t) \Delta x_k(t). \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

A lineáris differenciálegyenletek elméletéből közismert, hogy ez az operátor egyértelműen megfordítható, ezért tehát kimondhatjuk az 1. tétel alapján, hogy a (24) alatti differenciálegyenletrendszernek a (25) homogén lineáris határfeltételek mellett mindig van egy és csakis egy megoldása, feltéve, hogy

$$\max_{1 \leq i \leq n} \max_{0 \leq t \leq 1} |x_i(t)|$$

elegendő kicsiny.

Magyar Tudományos Akadémia
Alkalmazott Matematikai Intézete.

IRODALOM

- ¹ L. V. Kantorovics (Л. В. Канторович): О методе Ньютона. Труды матем. ин.-та Стеклова. XVIII. 1949. 104.
- ² M. Fréchet: Ann. de l'École Norm. Sup. 1925. 213.
- ³ L. V. Kantorovics¹ 127 old. 3. tétel.
- ⁴ L. A. Ljuszternyik (Л. А. Люстерник): Основные идеи функционального анализа. Успехи матем. наук. 1.
- ⁵ L. pl. Kantorovics¹ alatt id. mű 115.
- ⁶ Ostrovszkij: Comment. Math. Helv. 9. 1937.
- ⁷ Kantorovics: ¹ alatt id. mű 133.
- ⁸ P. Lévy: C. R. Paris 150. 899. 1910.
- ⁹ A. Liapunov munkái, melyek az örvénylő folyadékok stabilitására vonatkoznak (pl.: Sur un problème de Tschebisheff. Mém. de l'Ac. de St. Petersburg 17. 1905; Sur les figures d'équilibre... I, II, III, IV. Mém. de l'Ac. de Petersburg 5. 1908.)
- ¹⁰ L. Lichtenstein: Vorl. über einige Klassen nichtlin. Integralgleichungen u. Integro-differentialgleichungen. Berlin 1931.
- ¹¹ E. Schmidt: Zur Theorie der lin. und nichtlin. Integralgleichungen. III. Math. Ann. 65. 1908. p. 370.
- ¹² E. Schmidt: id. mű 377.
- ¹³ L. Lichtenstein: id. mű 10 és 16.
- ¹⁴ Az alkalmazásokat illetően L. Lichtenstein id. művét.