

BOLYAI JÁNOS ÉLETE ÉS MUNKÁSSÁGA

ALEXITS GYÖRGY r. tag

Előadta az ünnepi ülészak 1952. december 14-én tartott ülésén

Bolyai János, minden idők egyik legnagyobb matematikusa tragikus sorsú lángész volt. Sorsa nem csupán egyéni tragédia. Visszatükröződik benne a magyar nép minden olyan haladó szellemű gondolkodójának a harca is, aki sikra mert szállni az igazságért s ezért összeütközésbe került az uralkodóosztály felfogásával. *Bolyai* egy tudományos eszme érvényesüléseért küzdött, s ez az eszme forradalmi volt. Egy-egy tudományág mozgása pedig nem elszigetelt jelenség. Robbanásszerű haladását nemcsak az illető tudományág belső fejlődése készíti elő, hanem a társadalom szerkezetében beállott sokezer kisebb-nagyobb változás is, amelyek az élet bonyolult hajszálcősrendszerén felszívódnak a tudományos szemléletbe, hogy végül egy lángeszű alkotó művén keresztül forradalmasítsák a tudományt. A forradalom pedig, még ha az elvont tudomány területén játszódik is le, a haladó uralkodóosztály gyűlöletét váltja ki.

Bolyai János 1802 december 15-én született Kolozsvárt, anyai nagyapja, *Benkő József* kirurgus házában. Két éves koráig Domáldon nevelkedett, apja, *Bolyai Farkas* nemesi birtokán. A család 1804-ben Marosvásárhelyre költözött, ahová *Bolyai Farkast* meghívták a református kollégium matematika, fizika és kémia tanárának.

János már zsenge gyermekkorában rendkívüli matematikai tehetséget árult el. Négy éves korában ismerte a kör, a sugár és a középpont fogalmát, az ellipszist, sőt a „sinus“ fogalma sem volt idegen számára. Kilenc éves korában apja rendszeres tanulásra fogta. Ekkor már *Euklidesz* könyveiből és *Euler* algebrájából tanult. Matematikára szinte nem is kellett tanítani, mert az újonnan hallott tételt azonnal felfogta és a bizonyítást is előrelátta. „Mint az ördög előmbe ugrott — beszéli el apja¹ — és sürgette, hogy menjek tovább.“ Tizenhárom éves korában már az infinitezimális számításban is jártas volt. A rigorozumot 1817-ben tette le a marosvásárhelyi kollégiumban; ezzel elnyerte a jogot a főiskolai tanulmányokra.

Bolyai Farkas azt szerette volna, hogy fia Göttingenben matematikát tanuljon *Gauss*, a „princeps mathematicorum“ vezetése mellett. Tekintve, hogy *Farkast* *Gauss*hoz ifjúkori barátság fűzte, levelet írt neki, amelyben kérte, fogadja házába *János* fiát.

Az idők távlatában azonban némileg elhidegült barátságuk nem bírta el *Farkas* túlságosan közvetlen stílusban megfogalmazott kérésének a próbáját, s így levelére nem kapott választ. Ezzel megszűnt minden lehetősége annak, hogy *János* gondos és magasfokú matematikai képzésben részesüljön.

Magyarországon abban az időben nem lehetett magas fokon matematikát tanulni. *Bolyai János* tizenöt éves korában bizonyára tudott már annyi matematikát, amennyit bárhol az országban tanulhatott volna. Komoly képzést akkoriban csak Göttingenben, vagy Párisban kaphatott volna. Ehhez pedig *Farkasnak* nem volt pénze, hiszen évi 400 forint fizetéséből és a hozzájáruló természetbeni járandóságokból még Marosvásárhelyt is csak szerényen tudott családjával megélni. Fia külföldi taníttatását tehát csupán a nagybirtokos arisztokrácia mecénáskodása tehetette volna lehetővé, amire a közkedvelt *Farkas* az akkori szokások szerint számíthatott is. De ha valaki mecénás, akkor azt is megszabja, milyen célt kíván pénzével támogatni. Már pedig a konzervatív erdélyi arisztokráciát alig érdekelte a matematika, annál inkább a Habsburg-ház politikája. *Farkasnak* tehát nem lehetett reménye arra, hogy fia párisi vagy göttingeni tanulmányait pénzeljék a nagybirtokos arisztokraták, de azt esetleg remélhette, hogy a bécsi hadmérnöki akadémia tanulmányi költségeit elvállalják, mert ez politikai szempontból is érdekelhette őket. A Habsburgokhoz hű nagybirtokos arisztokrácia ugyanis szinte kötelességének érezte, hogy a magyar köznemesség fiait hozzásegítse az osztrák katonatiszti pályához: így akarták a „rebellis“ köznemesség sorait gyengíteni azzal, hogy fiaikból és rokonaikból Bécsben császárhű janicsárokat neveltetnek. *Farkasnak* egy évi munkával sikerült is elérnie, hogy *János* bécsi neveltetési költségeinek terhére — ami négy év alatt mintegy 8000 forintot tett ki — néhány arisztokrata magára vállalja. *Bolyai János* tehát 1818-ban, a felvételi vizsga sikeres letétele után belépett a bécsi hadmérnöki akadémiára.

Az akadémia tanterve szerint *Jánosnak* még három évig kellett matematikát tanulnia, a negyedik évben ennek helyébe katonai tárgyak léptek. Az akadémia szelleme nyilván megfelelt az akkori osztrák katonai felfogásnak: kincstári ízű világnézetre nevelték növendékeiket. De ettől eltekintve is, az akadémián nem matematikus kutatókat, hanem katonai mérnököket akartak képezni. A matematika terén tehát csak azt a tudományos technikát kívánták meg, amire abban az időben egy hadmérnöknek szüksége lehetett. *Bolyai János* tehát Bécsben egyáltalában nem részesült olyan matematikai képzésben, amilyenre a későbbi kutató nyugodtan építhetett volna. A tudomány képviselőivel való érintkezés módját sem ismerhette meg az akadémián, hiszen a katonai intézmény zárt nevelési rendszere nem is tette lehetővé a szabad mozgást. Tudjuk, hogy vasárnaponként egy tanulótársával *Meiselerhez*, az akkoriban jónevű bécsi hegedűművészhez járt, akinél vonósnégyesben játszott. Az a tény, hogy *Meiseler*, a virtuóz hegedűs a fiatal *Bolyait* vonósnégyesébe bevette, mindenesetre arra mutat, hogy *János* már akadémista korában is kiválóan kezelhette a hegedűt, amint ezt életrajzirói kivétel nélkül meg is említik. Matematikus ismeretsége csak egy volt: *Szász Károly*, aki akkoriban Bécsben nevelősködött. De *Szász* maga sem volt alkotó matematikus. A vele való beszélgetések szintén nem sokat használhattak *János* tudományos fejlődésének.

Bolyai János élete folyását megpecsételte az a körülmény, hogy katonai pályára kényszerült, mert ezzel a tudományos foglalkozáshoz vezető összes kapuk bezárultak előtte. Katonai pályája sablonosan indult: Az akadémia kiváló eredménnyel való elvégzése után, 1823-ban alhadnagyként a temesvári erődítéshez osztották be, 1826-ban Aradra helyezték át, 1827-ben főhadnaggy lett. Az akkoriban erősen mocsaras alföldi terepen való tevékenysége során maláriát kapott és — későbbi panaszai alapján feltehetően — ízületi gyulladást. E két megbetegedés elharapózása később gyakori zavarokat váltott ki szervezetében. Éppen betegségére való tekintettel 1830-ban Lembergbe helyezték át, állomáshelyét azonban csak 1831-ben foglalta el. Utazás közben még kolerát is kapott, mint azt egy öccsének írt levelében említi: „1831-ben Lembergbe menve Besztercén a cholérát legelőbb kiállottam... gyenge lábon éreztem magamat“.²

Apjával 1825-ben, Marosvásárhelyt tett látogatásakor találkozott *János*, majd másodszor Lembergbe való utazása alkalmával, ismeretlen helyen. Mindkét alkalommal heves vitáik voltak a nem-euklideszi geometria kérdéséről. *János* rendkívül merész, több, mint két évezred megkövesedett tudományos előítéletét szétzúzó forradalmi elméletét *Farkas* nem volt képes maradéktalanul követni. Második találkozásukkor azzal váltak el, hogy *János* megírja elméletét a Tentamen függelékeként s a különlenyomatot *Farkas* megküldi *Gauss*-nak: ítéljen ő, helyes vagy helytelen-e *János* elmélete.

Az ok, ami miatt még olyan kitűnő matematikus is, mint *Farkas* nem tudta *János* gondolatait végig követni, tulajdonképpen egy több évezredes előítéletben rejtett. Ez az előítélet abban a metafizikus felfogásban áll, hogy a világ örök és változatlan törvényeknek van alávetve s ezek matematikai visszatükröződése *szükségszerűen* csak az euklideszi geometria lehet. Igaz, hogy már az ókorban kritika tárgyává tették az euklideszi geometria alapját jelentő, úgynevezett V. posztulátumot, mert az nem fejez ki olyan nyilvánvalóságot, mint a többi axióma. De ebből a kritikából csak azt a hibás következtetést vonták le, hogy az V. posztulátum tartalma nem axióma, hanem olyan tétel, amely bizonyára *bebizonyítható* a geometria többi axiómája alapján. Az euklideszi geometria *szükségszerűen* igaz voltát valló merev, metafizikus világgépet tehát az V. posztulátum kritikája sem változtatta meg, csupán az történt, hogy exakt bizonyítást kerestek az a priori igaznak tartott meggyőződés igazolására.

Az V. posztulátum geometriai tartalma a legegyszerűbben a következő: *Proklostól* származó fogalmazásban fejezhető ki: egy s síkban adott P ponton át bármely e egyeneshez egyetlen párhuzamos húzható. Ez az axióma valóban nem olyan nyilvánvaló, mint a többi, mert nem finit jellegű, vagyis a tér véges átmérőjű részén nyert tapasztalatok alapján közvetlenül lehetetlen meggyőződni az axióma állításának a fizikai térben való megvalósulásáról. Ez a körülmény volt az oka, hogy több, mint kétezer esztendeig keresték az V.

posztulátum bizonyítását, amely nélkül az euklideszi geometria s ezzel az egész akkori világkép logikailag megalapozatlan maradt.

Az V. posztulátum problémájának ókori kritikáját az arab kultúra matematikusai folytatták. Európában e téren 1663-ban *Wallis* tett jelentős lépést előre; amikor kimutatta, hogy az V. posztulátum ekvivalens a következő állítással: vannak tetszőleges nagyságú hasonló háromszögek. A következő lépést 1733-ban *Saccheri* tette meg, majd *Lambert*, *D'Alembert*, *Fourier*, *Monge*, *Carnot*, *Laplace*, *Lagrange*, *Bolyai Farkas*, *Schweikart*, *Taurinus* és *Gauss* gondolatai érintették a kétezeresztendős probléma megoldását. Igen jellemző az előítéletek erejére, hogy *Lambert* az V. posztulátum hamis voltának feltevéséből nem tudott ellentmondásra bukkani, ezért nem publikálta művét, s az csak halála után, 1786-ban jelent meg. *Taurinus* pedig már 1826-ban csak filozófiai jellegű előítéletekre alapíthatta meggyőződését, hogy t. i. az euklideszi geometria mégiscsak az egyetlen igaz térelmélet. A legjellemzőbb azonban *Gauss* viselkedése, aki nagy vonalakban látta ugyan, hogy az V. posztulátumot más axiómával helyettesítő nem-euklideszi geometria logikailag egyenlően jogosult az euklideszi geometriával, de ennek az elvnek a közfelfogással való szöges ellentéte miatt nem merte publikálni e téren elért eredményeit.

Bolyai János alkotásának nagyszerűsége éppen annak a forradalmi merészségű gondolatnak a *konzekvens kidolgozásában* rejlik, amely szerint az V. posztulátum helyettesíthető a következő axiómával: az s síkban adott P ponton át bármely P -t nem tartalmazó e egyeneshez végtelen sok nem metsző (párhuzamos) egyenes húzható. *Bolyai János* az *Appendix* néven ismert lángeszű művében levonta ennek az axiómának a következményeit és kimutatta, hogy az ilyen módon nyert nem-euklideszi geometriánál logikailag semmivel sem szükségszerűbb az V. posztulátum igaz voltán alapuló euklideszi geometria. *Bolyai János* tehát exakt módszerrel megdöntötte azt a kétezeresztendős előítéletet, amely az euklideszi felfogást *a priori* egyedül lehetségesnek minősítette s ezzel új geometriai világképet alkotott, mint már 1823 november 3-án írta apjának: „semmiből ujj, más világot teremtettem.“ Felfedezésének merészségére valóban ráillik az igazi tudomány sztálini jellemzése,³ amely szerint a haladó tudománynak „...megvan a bátorsága, elszántsága arra, hogy a régi hagyományokat, normákat, szabályokat összetörje, ha elavulnak, ha a haladás fékezőivé válnak, s új hagyományokat, új normákat, új szabályokat tud teremteni.“

Bolyai Farkas — ugyanúgy, mint a kor többi matematikusának túlnyomó többsége — fia elméletének ezt a rendkívüli merészségét nem tudta teljesen követni. A felfedezéssel szemben tanúsított ellenállása érthető, mert az *Appendix* eszméi nemcsak a matematikai érvelés követelését kívánták meg az egykorú olvasótól, hanem azt is, hogy beleélje magát egy olyan gondolatvilágba, amely homlokegyenest ellenkezik az évezredek óta szentnek és sérthetetlennek képzelt gondolkodási formákkal. Aki *Bolyai János* nem-euklideszi geometriáját követni

akarta, annak tudomásul kellett vennie, hogy abban a háromszög szögeinek összege nem 180° , hanem kevesebb ennél, hogy csupán az egybevágó háromszögek lehetnek hasonlók, hogy nincs tetszőlegesen nagy területű háromszög, hogy a kör négyszögesítésének feladata könnyen megoldható, — és még számos más, meglepő állítás is igaz. Épp ezért *Bolyai* gondolatainak megértése nem csak matematikai tudást követelt, hanem morális erőt is, amely képes szembeszállni a korabeli társadalom *ideológiai jellegű* előítéleteivel.

Az Appendix különlenyomatai már 1831 júniusában elkészültek. Tudjuk, hogy *Farkas* 1831 június 20-án küldött egy példányt *Gauss*nak, ez azonban elveszett. Az újabb példányt 1832 januárjában kapta meg *Gauss*, akinek válaszelevele 1832 március 6-án kelt. *Gauss* válasza, mint ismeretes, igen furcsa hangú. Az idevonatkozó rész a következő:⁴

„Most valamit fiad munkájáról. Ha azzal kezdem, „*hogy nekem ilyent nem szabad dicsérenem*“, bizonyára egy pillanatra meghökkensz: de mást nem tehetek, ha dicséreném, ez azt jelentené, hogy magamat dicséreném, mert a mű egész tartalma, az út, melyet követett és az eredmények, amelyekre jutott, majdnem végig megegyeznek részben már 30—35 év óta folytatott elmélkedéseimmel. Valóban ez rendkívül meglepett. Szándékomban állt, hogy saját munkámból, melyből egyébként mostanáig csak keveset tettem papirostra, életemben semmit sem hozok nyilvánosságra. A legtöbb embernek nincs is meg a helyes érzéke aziránt, amin ez a dolog múlik, és én csak kevés emberre akadtam, aki különösebb érdeklődéssel fogadta azt, amit vele közöltem. Erre csak az képesít, hogy ha nagyon élénken érezzük, mi az, ami tulajdonképpen hiányzik, és ezzel a legtöbb ember nincs tisztában. Ellenben szándékomban állt, hogy idővel mindent úgy írjak meg, hogy legalább ne pusztuljon el velem együtt. Nagyon meglepett tehát, hogy most már e fáradságtól megkímélhetem magam, és nagyon örvendek, hogy éppen régi barátom fia az, aki engem ilyen csodálatos módon megelőzött.“

Megdöbrentő ez a levél, amelyben *Gauss* mintegy jogot formál *Bolyai János* alkotására! Igaz, hogy levelei, naplójegyzetei és felületelméleti kutatásai alapján tudjuk, hogy *Gauss* sokat megpillantott a nem-euklideszi geometriából. Eredményeit azonban nem dolgozta ki egységes elméletté, nem lehetett tehát erkölcsi alapja egy olyan levél megírására, amelynek óvatos fogalmazásából kicsendül ugyan az elismerés hangja, de egyszersmind egy bizonyos prioritási igény is. Erre annál kevésbé volt erkölcsi alapja, mert nem lehet tudni, meddig jutott el ilyen irányú vizsgálataiban, azt azonban pontosan tudjuk, hogy a nem-euklideszi geometriára vonatkozó eredményeit miért nem publikálta: *Gauss* — saját szavai szerint — félt „a beóciaiak kiáltozásától“, félt a közvéleménynek az elmélet merészsége miatti esetleges felháborodásától. Tudta, hogy egy olyan elmélet, amely szerint *lehetséges*, hogy a világról alkotott matematikai képünk hamis, legalábbis a tudomány-terén forradalmi gondolat. A Szent Szövetség terrorisztikus elnyomástól terhes uralma idején

pedig még a tudomány terén lejátszódó forradalmaktól is rettegett az uralkodóosztály. Gauss tehát *társadalmi okokból* nem mert a nyilvánosság elé lépni eredményeivel. Mondjuk meg őszintén: az *udvari tanácsos Gauss* nem volt elég bátor ahhoz, hogy a *matematikus Gauss* gondolatainak szárnyalását követni merete volna.

Bolyai János — igen helyesen — elsősorban a közérdek szempontjából ítélte meg a Gauss-okozta sérelmet. Jogosan írta,⁵ hogy a Gauss által felhozott okok, amelyek miatt tartózkodott eredményei publikálásától, „erőtlenek és semmisek: mert hisz a tudományban... mindig arról van szó, hogy szükséges és közhasznú, de még homályos dolgokat tisztázzunk...“ Abban is teljesen igaza van, hogy az átlagos képességű embereknek éppen a legjelentősebb eszmékkal szembeni értetlensége „értelmes embernek nem szolgálhat okul arra, hogy csak felületest és középszerűt alkosson és a tudományt lethargikusan csak az örökölt állapotban hagyja... Bizony nem ebben áll az élet, a munkálkodás és az érdem.“

Bolyai János Gauss levelét azonban nemcsak a tudományos közérdek szempontjából ítélte meg, Gauss visszavonulása a lángeszű alkotás nyilvános elismerése elől súlyos válságba kergette az évek óta beteg, katonai pályájától szabadulni vágyó, pattanásig feszült idegzetű embert. Tévedés volna azt hinni, hogy *Bolyait* egyszerűen sértett hiúsága keserítette el. Sokkal többről volt szó! A katonai pályát már évek óta meggyűlölte, szolgálatát még egészséges állapotban sem szívesen látta el. De a katonaságtól csak akkor szabadulhatott volna meg, ha helyette matematika-tanárként működhetett volna. Ezt pedig csak Gauss elismerésének ajánlata tudta volna biztosítani számára. Gauss levele tehát annyit jelentett, hogy *Bolyai* előtt még lángeszű felfedezésének nyilvánosságra hozatala után is zárva maradt a tudományos pálya kapuja. Elkéseredésének kibontakozására igen jellemzőek a reá vonatkozó katonai iratok adatai.

Bolyainak előző állomáshelyén nézeteltérései lehettek a tisztikar egyes tagjaival, akik őt ezért veszekedő egyénnek minősítették. *Zimmer* alezredest, *Bolyai* lemergi parancsnokát bízták meg a vizsgálattal, aki 1831-ben, vagyis mielőtt még Gauss válasza megjött volna, így jellemzi Jánost:⁶ „Semmi sem észlelhető ebből a veszekedő hajlamból vagy elviselhetetlenségből, ellenkezőleg, inkább félnék és nagyon jóindulatú embernek ismert.“ *Bolyai János* tehát 1831-ben, amikor még remélhette, hogy művének sikere révén megszabadul a katonai szolgálat nyűgétől és esetleg matematika-tanárként tudományos kutatással foglalkozhat, „félnék és nagyon jóindulatú“ emberként viselkedett. Amikor azonban Gauss leveléből világossá vált előtte, hogy nyomasztó helyzetéből még lángeszű alkotása sem menti ki, elkéseredett. Magatartásának megváltozását világosan mutatják az 1831. évre és 1832. évre vonatkozó minősítési lapjai:⁷

1831-ben

Kedélyalkata: *csendes és jóindulatú*
 Magatartása a polgársággal: *jó*
 a csapattestnél: *jó és*
 tisztelettel viseltetik előljárói iránt
 alantásaival: *jó*
 Játékos-e: *Nem*

1832-ben

nagyon ingerlékeny és indulatos
ismeretlen
kerül minden érintkezést a tisztekkel
szófukar
szenvedélyes sakkjátékos és sok időt
fordít erre a hajlamára.

Bolyai János elkeseredése nemcsak emberi szempontból érthető, hanem még inkább azért, mert tisztán látta, hogy a nem-euklideszi geometria jelentősége túlnő a matematika „belső ügyén“. Ez a felfedezés nemcsak a geometriáról, hanem az anyagi világról általában vallott tudományos felfogást is megváltoztatta. Az abszolút geometria ugyanis implicite azt a döntő jelentőségű felismerést tartalmazza, hogy a geometriának bármely axiómarendszere nem közvetlenül írja le az anyagi valóság térviszonyait, hanem a térszemlélet olyan absztrakt továbbfejlesztése, amely speciális esetként magában foglalja ugyan a valóságos fizikai tér leírását is, de matematikai és fizikai megismerésünk fejlődésével együtt *maga is további fejlődésre képes*. Az euklideszi geometria egyedüli helyességét valló hitben tükröződő merev *metafizikus* világgépnek az abszolút geometria többféle lehetőséget egyetlen egységbe foglaló *dialektikus* világgépével való helyettesítése új tudományos korszakot nyitott meg, amelyben még a geometria véglegesnek látszó axiómatikája is állandóan fejlődő ismeret.

Bolyai János, mint említettük, teljesen tudatában volt felfedezése korszakalkotó voltának és azt is látta, hogy miben áll felfedezésének világnézeti jelentősége. A *Tér tudománya* 1834 körül írt bevezetésében ugyanis megállapítja, hogy a geometriai megismerés nem jelenti az anyagi világ egyszersmindenkori, végleges visszatükrözését, hanem a kornak a természetről való ismeretéhez mérten „meg kell elégednünk a lehető legjobb tárgyalással.“⁸ *Bolyai* eszerint világosan látta, hogy a geometriában visszatükröződő világgép fejlődő, nem *metafizikus*, hanem *dialektikus*.

Lehetetlen egy pillanatra ki nem térnünk a térfogalomnak arra a *dialektikus* fejlődésére, amely *Bolyai* és *Lobacsevszkij* alapvető felfedezésének hatására megindult.

Riemann, *Helmholtz* és *Lie* vizsgálatai kiteljesítették a *Bolyai* és *Lobacsevszkij* által elindított folyamatot. Eredményeik nem születhettek volna meg a nem-euklideszi geometria első felfedezése nélkül. A mai differenciálgeometria tehát szoros, szinte közvetlen kapcsolatban áll *Bolyainak* és *Lobacsevszkijnek* a nem-euklideszi geometria megalapozására vonatkozó eszméivel. A matematikai térfogalom azonban csak akkor emelkedhetett a mai általánosság fokára, amikor e század elejére megérett az a felismerés, hogy a klasszikus geometria

¹⁰ Matematikai és Fizikai Osztály Közleményei. III. o.

és a ponthalmazelmélet látszólag különböző gondolatvilága az absztrakt matematikai tér fogalmában egyesül szoros egységgé. Az absztrakt tér ötlete általános alakban először *Fréchet* munkáiban szerepel,⁹ aki egyrészt a pontsorozatok konvergenciájának, másrészt a távolság fogalmának axiómatikus tárgyalására alapította a matematikai tér elméletét. A legáltalánosabb absztrakt térfogalmat azonban csak az a felismerés alakíthatta ki, amely szerint a topologikus tér egyetlen ismertetőjele, hogy benne a torlódási pontok és az izolált pontok megkülönböztethetők. Ezt a döntő lépést *Riesz Frigyes*¹⁰ tette meg. Az őt követő fejlődés igen szétágazó; jelentős eredménye azonban, hogy megteremtette a különböző absztrakt tér-típusok közötti kapcsolatot, amit legvilágosabban *Urysohn*¹¹ nevezetes tétele illusztrál. Ennek *Tyihonov*¹² által adott bővítése szerint ugyanis minden megszámlálható bázisú reguláris topologikus tér homeomorf a Hilbert-tér alaptéglájának egy részhalmazával. *Urysohn* tétele tehát eltüntette az absztrakt topologikus tér és a szemléletesebb koordinátatér közötti éles határt.

*Bolyai János*nak a tér szerkezetére vonatkozó gondolatai a tér tudományának rendkívüli fejlődését indították meg. Ez a fejlődés egyrészt lehetővé tette, hogy szinte amorfnak látszó halmazok is beleilleszkedjenek a matematikai térfogalom rendjébe, másrészt azt is sikerült elérni, hogy a metrikus terek kiterjedt osztályában jellemezzük a náluk szemléletesebb geometriai tulajdonságú euklideszi és nem-euklideszi tereket. Ahhoz, hogy az ilyen jellegű eredményekből is megemlítsünk egyet, szükségünk van a következő fogalomra: nevezzük egy p, q pontpár középpontjának az r pontot, ha távolságaik eleget tesznek a $\overline{p\bar{r}} = \overline{q\bar{r}} = \frac{\overline{p\bar{q}}}{2}$ feltételnek. Egy metrikus teret regulárisan konvexnek

mondunk, ha bármely pontpárjának egy és csakis egy középpontja van, ezenkívül minden p, q pontpárhoz található egy r pont oly módon, hogy q a p, r pontpár középpontja legyen. Mármost például *Busemann*¹³ kimutatta, hogy a *Minkowski*-metrikájú háromdimenziós nem-euklideszi terek azonosak az olyan háromdimenziós regulárisan konvex, teljes terekkel, amelyek ezenkívül még egy, *Busemann* által határkör-axiómának nevezett feltételnek tesznek eleget.

Bolyai eszmevilága az alapja a térfogalom e hatalmas fejlődésének. A matematikai fogalomalkotásnak ez a gazdag tárháza adta kezünkbe a mai fizikai világkép kialakításához szükséges eszközöket is. Ennek köszönhető az általános relativitáselmélet és a kvantum-mechanika számos fejezetének matematikai kifejtése.

Bolyai Jánost 1832-ben kinevezték másodosztályú kapitánynak, és Olmützbe helyezték át. Utazás közben szekere felborult, s az egyébként is betegeskedő *Bolyai* agyrázkódást szenvedett. A hadsereg főparancsnokság elrendelte felülvizsgálatát és 1833 május 28-án kelt rendeletével *Bolyai János* másodosztályú mérnökkari kapitányt félrokkantként nyugállományba helyezte évi 280 forint nyugdíjjal, melyet a nagyszabeni hadipénztárnak kell havi részletekben folyó-

sítania. Ezzel *Bolyai János* katonai pályafutása végétért, 1833 június 16-án elindulhatott haza, Marosvásárhelyre.

Marosvásárhelyt körülbelül egy évig apjánál lakott. Ezalatt az idő alatt elkeseredett viták voltak egymással. E viták természetéről szinte semmit sem tudunk, több apró jelből azonban arra következtethetünk, hogy részben tudományos, részben világnézeti ellentétek merülhettek fel közöttük. *Farkas* alapján véve haladó, az enciklopédisták racionalista szellemének hatása alatt álló ember volt, de életkörülményei arra kényszerítették, hogy felfogását ne merje nyíltan képviselni. Ezzel szemben *János* minden tekintetben radikális elveit korlátlan nyíltsággal hirdette, sőt igen fontosnak tartotta, hogy az ember vélt igazát bárkivel szemben harcosan képviselje. Érthető, hogy *Farkas*, akit a marosvásárhelyi korlátolt kispolgárság is uszított „hálátlan és rideg” fia ellen, nem tűrte *János* magatartását, amely az idők folyamán még *Farkas* társadalmi helyzetét is veszélyeztethette volna. Egy súlyos vita után *Farkas* kiutasította házából *Jánost*. Később testvére, *Bolyai Antal* közbenjárására mégis megengedte, hogy Domáldra költözzék és ott *Farkas* birtokán gazdálkodjék. Erre *János*nak igen nagy szüksége volt, mert az évi 280 forintos nyugdíj még a nyers megélhetést is alig biztosította.

Bolyai János 1834-ben költözött Domáldra, egy kiskükküllőmegeyi nyomorúságos faluba,* ahol 1846-ig, tehát 12 évig élte a kultúrvilágtól elszakadt falusi remete életét. Ennek ellenére Domáldon is dolgozott, bár a tudományos tevékenységhez semmiféle segédeszköze sem volt. Ebből az időből származik a lipcsei Jablonowsky-társaságnak a komplex számok elmélete fejlesztésére kítűzött pályázatára küldött *Responsio*. A *Responsio* megírását *Farkassal* való levélbeli tudományos vita előzte meg, amelyben *János* rámutatott *Farkas*nak a komplex számok megalapozását tárgyaló elméletének egy hibájára. Erre vonatkozó levelét így végzi:¹⁴ „Most már nints mód, hogy meg ne legyen győződve, hogy theoriája össze van omolva; bármily hosszas homályom vagy tévelyem eloszlátása nekem éldelet, gyönyör 's reménylem Kegyednek is az lesz.“ *Farkas*nak azonban „homálya eloszlátása“ nem volt „éldelet s gyönyör“, ezért apa és fiú között különös, szinte sportszerű versengés indult meg a pályázattal kapcsolatban. Mindketten elküldték pályamunkájukat Lipcsébe, de egyikük sem részesült jutalomban. Helyettük *Kerekes Ferenc*, debreceni kollégiumi tanár sablónos dolgozata nyerte el a pályadíj felét.

Az 1837-ben írt *Responsio* nyolc oldalas, vázlatos, mégis sok és mély gondolatot tartalmazó munka. *Bolyai János* a komplex számokat négy egység bevezetésével értelmezte, és célzott arra, hogy négynél több egység bevezetésével hasonló elmélet nem építhető fel, mert akkor például nem volna igaz, hogy a négyzetgyökvonás kétértékű művelet. *Bolyai János* tehát ugyanabban az évben talált rá elméletére, amikor *Hamilton* a kvaterniók elméletét meg-

* Mint jellemző adatot megemlítjük, hogy Domáldnak még 100 évvel később, 1930-ban is csak 871 lakosa volt.

alkotta. *Bolyai* mély matematikai éleslátására mutat, hogy a *Responsio*ban a hatványt komplex kitevőre is e^x Mac-Laurin-sorával értelmezte, ami ugyan már *Eulernél* is szerepel, *Bolyai* azonban arra is felhasználja, hogy a logaritmust komplex argumentum esetén is értelmezze, mint e^x inverz függvényét. Kétségtelen, hogy a *Responsio* minden elnagyoltsága mellett, önmagában is elég lenne ahhoz, hogy *Bolyai János*nak helyet biztosítson a matematika történetében..

János domaldi gazdálkodásával *Farkas* nem volt megelégedve: 1846-ban *Jánost* kitevette Domáldról, a birtokot pedig bérbe adta. *János* családjával együtt beköltözött Marosvásárhelyre, ahol a domaldi tartózkodás alatt megtakarított pénzén egy kis házat építtetett.

Bolyai János Marosvásárhelyt teljes visszavonultságban, szinte robinzoni magányban élt. Társadalmi elszigeteltségére jellemző, hogy ifjúkori barátja *Szász Károly*, négy évi marosvásárhelyi tartózkodása alatt „ő nem kereste fel, vagy inkább nem merete felkeresni, nehogy magát is rossz hírbe keverje”.¹⁵ A marosvásárhelyi konzervatív polgárok a merészen haladó gondolkodású *Bolyai Jánostól* annyira irtóztak, hogy *Stäckel*, a század elején ottjárt ismert német *Bolyai*-kutató ezt írta¹⁶: „Még negyven évvel halála után lehetett észlelni, hogy Marosvásárhelyt mennyire gyűlölt és megvetett volt *Bolyai János* neve“.

Az 1848-as év igen jelentős *Bolyai János* életében. A szabadságharc riadója kizozdította őt teljes visszavonultságából. Mint volt tiszt, legszívesebben katonai szolgálatot teljesített volna, de ebben megakadályozta állandó betegeskedése. Egy 1848 elején írt levélben¹⁷ a következőket olvashatjuk: „...nagyon gyenge egészségem miatt ... a hadnak útjára * teljességgel alkalmatlan vagyok és legalább magánszolgálat által ügyöközhetek, hogy a Köz-Jót előmozdítsam, ... bizonyos lévén az, hogy amíg csak egy megelégtelen van: addig senki tökélyes boldog állapottal nem dicsekedhetik“. Amikor azonban a székely csapatok októberben Radnónál győzelmet arattak, s utána október 30-án, *Sánta* huszárőrnagy szállásán többen bizalmas tanácskozást tartottak a további hadműveletekről, *Bolyai János* is felkelt betegágából. *Deák Farkas*, az erdélyi történetíró egy naplótöredékben¹⁸ elbeszéli, hogy ezen a tanácskozáson „*Bolyai* egy tiszta, szabatos tervvel állott elő, mely ... Szeben, Fehérvár és egész Erdély megtisztítását magába foglalá ... új évre az Egész Erdélyt a Magyar Kormány kezébe adni ígérte.“ „E tervet nem fogadták el, — folytatja *Deák*, — ... mert a vezérek és parancsnokokban nem volt elég önmérséklet magokat megtagadva az ő parancsnoksága alá adni s nem különösen azért, mert *Droschner* reactionarius, *Zsombori* ** pedig ingadozó volt s így a két szak-ember a lehető legjobb tervet leginkább igyekeztek megbuk-

* E két szó olvasása bizonytalan.

** *Droschner* és *Zsombori* törzstisztek a honvédség katonai szakértőiként vettek részt a tanácskozáson.

tatni.“ — Szinte elképesztő, hogy *Deák* a forradalmak történetének mennyire jellegzetes vonását írja le naplójában: az ellenség becsempészi a forradalom vezérkarába a maga embereit, akik a „szakember“ álarca mögé bújva kimutatják a jóról, hogy rossz, a rosszról pedig hogy jó, — és katasztrófát idéznek elő. Marosvásárhelyt is ez történt: a fegyelmezetlen székely csapatokat a császári sorkatonaság szétverte, *Gedeon* osztrák altábornagy bevonult Marosvásárhelyre és szabad rablást engedélyezett, *Bolyai János* pedig, mint *Deák* írja „... visszatért a magány életbe, melyet csak e pillanatban hagyott volt el ...“.

Bolyai János különösen *Bem* sikerein fellelkesülve, később is többször forgatta elméjében, hogy elmegy a harctérre, de ebben betegeskedése mindannyiszor megakadályozta. A szabadságharc utáni elnyomatás idején valósággal begubózott. De még a szabadságharc alatt kezébe került egy tudományos mű, amely rendkívüli módon felkeltette figyelmét. Ez volt *Lobacsevszkij: Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien* című, 1840-ben megjelent értekezése.

Bolyai János Lobacsevszkij munkáját *Farkastól* kapta meg, aki egy véletlen folytán értesült róla. Amikor a művet elolvasta, megdöbbenve vette tudomásul, hogy annak tartalma teljesen megegyezik az *Appendixével*. Először arra gyanakodott, hogy *Lobacsevszkij* talán nincs is, hanem *Gauss* rejtőzik az álnév mögött, maga a mű pedig az *Appendixből* szerkesztett plágium. Erre a feltevésre *Gauss*nak az az állítólagos magatartása szolgáltatott okot, hogy egy beszélgetés során megdicsérte volna *Lobacsevszkij* munkáját, az *Appendixre* azonban egyáltalában nem akart emlékezni. Akár igaz volt ez az eset, akár — ami valószínűbb — nem, *Jánossal* elhitették, hogy megtörtént. Ilyen körülmények között természetesen jogos volt az a gyanúja, hogy a *Geometrische Untersuchungen* az ő gondolatainak *Gauss* közbejöttével való eltulajdonításából keletkezett. Különösen érthető ez a gyanakvás, ha meggondoljuk, hogy *Bolyai János* a tudományos világtól évtizedek óta elzárva élt, tájékozatlan volt a problémának az *Appendix* megjelenése előtti fejlődéséről, s most arról értesült, hogy több mint kétezer év sikertelensége után a nem-euklideszi geometriának már a harmadik felfedezője jelentkezik. A számára érthetetlen tény előtt állva, valamint *Gauss* régebbi valóságos és újabb vélt magatartásától felháborodva, teljesen érthető, hogy először plágiumra gondolt. Épp ezért *Lobacsevszkij* munkájához gondos jegyzetet készített, hogy felfedezze, nincs-e benne olyan hiba, amelyből egy esetleges plágium kiviláglanék. *Bolyai*, noha jegyzeteiben *Lobacsevszkij* munkájának kisebb-nagyobb hibáit keményen megkritizálta, maga is felismerte, hogy *Lobacsevszkij* vele egyívású lángész. Észrevételei egyik helyén például a következő, cikornyás táblabíró-stílusú mondattal fejezte ki *Lobacsevszkij* iránti elismerését¹⁹: „Ily éleken járva 's högyökön állva, suppartja ki nagyon gyönyörűn és Nemesen, jelesen, derekason főszmájében Lobatsewskij, a kötélén 's dróton táncoló legnagyobb, ügyösb 's finomabb művészek módjára a gömbháromszög-tan ön-állóságát.“

Ami a két zseniális szerző prioritását illeti, csak az lehet az álláspontunk, hogy *a prioritás kérdését még felvetni sem helyénvaló*. Kétségtelen ugyan, hogy *Lobacsevszkij* műve előbb, még pedig legfeljebb két évvel előbb²⁰ jelent meg nyomtatásban, mint *Bolyaié*. Ugyanakkor azonban azt is tudjuk, hogy *Bolyai* a leglényegesebb alap gondolatot már 1823-ban felfedezte, amikor apjának azt írta, hogy „semmitől egy ujj más világot teremtettem“, míg *Lobacsevszkij* abban az időben még nem talált rá a megoldás útjára, mint az 1823 évi kéziratos geometriájából kiviláglik. De mindketten már 1825-ben megírták eredményeiket: *Bolyai* kéziratát 1826 elején átadta volt matematika tanárának, *Wolter* századosnak, *Lobacsevszkij* pedig ugyancsak 1826 elején bemutatta munkáját a kazáni egyetem fizika-matematika karának. Mindkét kézirat elveszett. Ezek a tények megcáfolhatatlanul bizonyítják, hogy a két lángeszű alkotó lényegileg ugyanabban az időben, egymástól függetlenül fedezte fel a nem-euklideszi geometriát.

Nagyszerű alkotásuk tárgyalási módja természetesen különböző. *Bolyai* több szerkesztési feladatot tárgyal, így például bebizonyítja, hogy a nem-euklideszi geometriában a kör négyszögesítése megoldható, míg *Lobacsevszkij* elsősorban arra törekszik, hogy a nem-euklideszi geometriában is megtalálja a szokásos geometriai számítások elvégzésére szolgáló képleteket. Ezek a módszerbeli különbségek minden valószínűség szerint a két tudós társadalmi körülményeiből fakadnak. *Bolyainak*, a világtól elzárkózott remetének csak papír és tinta állt rendelkezésre, ezért elsősorban azokra az elméleti jellegű következtetésekre szegezte tekintetét, amelyeket elzárkózottságában is módjában állt ellenőrizni. *Lobacsevszkij* viszont egyetemi tanár és képzett csillagász volt, aki első perctől fogva remélte, hogy tapasztalati úton sikerül meghatározni a fizikai tér euklideszi vagy nem-euklideszi természetét, ezért elsősorban azokat az eszközöket kereste, amelyeket a csillagászati gyakorlat e kérdésnél felhasználhat.

Bolyai geometriai érdeklődését felrázta *Lobacsevszkij* művének a megismerése: 1850 körül kezdett foglalkozni a *Raumlehre* kéziratával, amelyre 1855-ig minduntalan visszatért. A reánk maradt töredékből és az erre vonatkozó, cédulákra írt feljegyzésekből kiviláglik, hogy *Bolyai János* ebben a munkájában is jelentős, új gondolatokkal foglalkozott. A töredék legértékesebb része talán az, amely a görbék és felületek általános elméletével foglalkozik. Ez azt mutatja, hogy *Bolyai*, megelőzve számos más kutatót, felismerte a görbék és felületek topológiájának a fontosságát. A görbéket egyszerűekre és csomósokra osztotta fel. A felületek közül az általa egyszerű felületnek nevezett alakzatok fajainak a felsorolását tűzte ki célul. Egyszerű felületen — úgy látszik — a kétdimenziós sokaságot kell érteni. *Bolyai* megkülönböztetett teljes és átlukasztott felületeket; ez kétségkívül arra a törekvésre mutat, hogy a felületek fajait az összefüggésszámmal igyekezett jellemezni. Igen mély geometriai szemléletet rejt magában a következő meglátása²¹: „Lehet valamely

tetszés szerinti egyszerű felületről tetszés szerinti számmal lyukakat kiemelni, e helyekre csöveket illeszteni és ezeket páronként egyesíteni. A legáltalánosabb esetben az egyszerű felület ilyen természetű.“ Ehhez hozzáfűzi: „Bebizonyítását meg kell vizsgálni!“.

Teljesen jogos *Bolyainak Euler* poliédertétele bizonyítására vonatkozó megjegyzése²² is, amely szerint a „felséges Euler-féle tétel . . . nem kellő általánossággal van bizonyítva, mert nem minden polyeder-relatio nyerhető gúla lenyeseése útján“. Sajnos, nem ismerjük *Bolyai* saját bizonyítását, ezért azt sem tudjuk, milyen többszörösen összefüggő poliéderekre találta meg az Euler-tétel valamilyen általánosítását, amikor azt jegyezte fel²³, hogy „az Euler-féle relatio bebizonyítását a gyűrűalakú polyederek és üreges sík-terek eseteire is“ sikerült elvégeznie.

Bolyai 1856 körül ismét foglalkozni kezdett azzal a kérdéssel, hogy vajjon a nem-euklideszi rendszer a háromdimenziós térben is ellentmondásmentes-e. Igen világosan látta, hogy ha a sík geometriájában az euklideszi és a nem-euklideszi rendszer egyaránt ellentmondás nélküli is, ebből a tényből még nem lehet következtetni a háromdimenziós tér euklideszi vagy nem-euklideszi viszonyaira. E tekintetben *Bolyai* némileg messzebb jutott el, mint *Lobacsevszkij*, aki megelégedett azzal, hogy a nem-euklideszi síkgeometria ellentmondásmentes. *Bolyai* úgy akarta a kérdést eldönteni, hogy ha az A, B, C, D csúcspontú tetraéderen kívül felvesz egy E pontot, akkor ez az öt pontból álló konfiguráció meghatároz 10 élet, 10 háromszöget és 30 lapszöget. Ezek trigonometrikus összefüggéseire alkalmazva az abszolút trigonometria képleteit, azt remélte, hogy ezen az úton az ellentmondásmentesség kérdése eldönthető. Egy ideig tévedésbe esett, mert egy számítási hiba következtében azt hitte, sikerült bebizonyítania a háromdimenziós tér szerkezete alapján, hogy az V. posztulátum, vagy más néven XI. axióma mégis szükségszerűen igaz. Meg is kezdte egy dolgozat megfogalmazását, amelynek címe²⁴: „Bebizonyítása a Földön mindmáig kétséges volt világhírű, és, mint az egész tér és mozgás tudományának alapjául szolgáló mindenekfelett fontos XI. Euklidesz-féle axiómának. *Bolyai* *Bolyai* János nyugalmazott mérnökkari kapitánytól.“ De a bevezetésen túl nem jutott, mert közben rájött a számítási hibára. Élete végéig nem sikerült bebizonyítania a nem-euklideszi térgeometria ellentmondásmentességét. Ezt, mint ismeretes, csak jóval *Bolyai János* halála után végezték el.

Bolyai Farkas 1856-ban bekövetkezett halála után *János* 1857-ben a város végére, a katolikus temető melletti Kálvária-utcába költözött, ahol egy egészen kicsi házacskát bérelt. Itt élt egyedül, állandóan betegeskedve, teljesen munkaképtelenül. Csak *Gergely* öccsének írt néha egy-egy levelet családi ügyeiről és betegségéről. A tudományos munkásság örömeire visszapillantva ezt írta 1857-ben²⁵: „ . . . részesültem a menyország megismerésében is, — melyet minden szigorú életmódom mellett is semmi anyagi kincsért nem adnék — részesülhet minden épen teremtett egyén, ha szorgalmasan és lel-

kesen ügyökszik magát kiművölni.“ Később már szinte mindig ágyban feküdt és lázas volt. Állandóan fázott, még nyáron is bárányszerű sapkában aludt. Mi volt a baja, nem tudjuk. Egyik panasza, hogy mindkét lába bokától felfelé dagadt és fáj, talán előrehaladt ízületi gyulladás tünete lehetett. Végül 1860 január 18-án tüdőgyulladással ágyának dőlt és nemsokára haldokolni kezdett. Január 27-én a háztartását vezető Szöts Julianna a következő drámai levelet írta *Bolyai Gergelynek*²⁶: „Akartam tudatni, de míg egészségesebb volt nem engedte, most akarhatja ellen is Kapitány úr jan. 18. rosszul lett, de mind beszélt sokszor kértem, hogy írjon az ötse után, de ő a költségtől félt, most már 26-dik Január éljelen 10 órákor a szava elállott az álta nem tud semmit magáról minden minutumban várom a halálát mit tudok csinálni vele. Ara kérem a Tek Urat, hogy siessen a bátyához tudja ki tőle ha még életbe kapja hogy a pénzét is kinél tartotta, mert itthon nekünk sohasem mondotta tsak kérem minél előbb siessen jöjön ki alázatosan esedezik Szöts Júla szolgáló.

Míg a levelet megírtam adig meghólt így már nints mit tagadni a kapitány Ur nints többé“.

Temetésén a kötelező katonai kíséreten kívül csak három ember vett részt. Sirja jeltelen maradt, s amikor *Schmidt Ferenc*, a *Bolyaiak* első magyar kutatója 1893-ban kereste a felismerhetetlenné vált sírt, csupán egy ember tudta megmutatni, hol nyugszik az örök emlékezetű *Bolyai János*: a munkában megöregedett *Szöts Júla* szolgáló...

Bolyai János életét bizvást tragédiának nevezhetjük. mert nagyszerű felfedezése hosszú ideig meg nem értetten kallódott, ő maga pedig kénytelen volt külön magányában álmodozni arról a világról, amelyben az ész és a tudás győz az ostoba erőszak fölött. Sikertelenségének döntő oka, hogy a 19. század első felében az exakt tudományos kutatásnak Magyarországon, sőt az egész Habsburg-monarchiában nem volt megfelelő társadalmi talaja. Az exakt természettudományok, de különösen az absztrakt jellegű matematika művelése ugyanis csupán olyan társadalom számára fontos, amelynek termelési módja szükségessé teszi a matematika eredményeinek a termelésben való közvetlen vagy közvetett felhasználását. Nem véletlen, hogy az ókorban az iparos és hajózó görögök fejlesztették legmagasabb fokra a matematikát. Az sem véletlen, hogy a 17. században éppen Angliában és Franciaországban indult meg hatalmas lendülettel az újkori matematika fejlődése, vagyis ott, ahol az ipari fejlődés és a földrajzi felfedezések kiaknázása fontos társadalmi szükségletként jelentkezett. A matematika iránt tehát mindig azok a társadalmak érdeklődtek, melyeknek ideológiáját a korhoz képest fejlett termelőerők és fejlett termelési viszonyok határozták meg.

Bolyai korában a hazai termelőerők fejletlenségére jellemző, hogy 1841-ben Magyarországon 6 gőzgép működött 74 lóerőnyi teljesítménnyel, az osztrák iparban 231 gőzgépet használtak, míg például Franciaország ugyanakkor mintegy 4000 gőzgéppel rendelkezett. Nálunk gépek helyett a jobbágyok és

zsellérek középkori módszerekkel való kizsákmányolása szolgáltatta a termeléshez szükséges energiát. Az ipar feudális viszonyok között haldokló céhmesterséget vagy legfeljebb néhány manufaktúrát jelentett és teljesen alárendelt szerepet játszott.

Az akkori magyar társadalom termelőerőinek és a velük kapcsolatos termelési viszonyoknak elmaradt volta olyan ideológiát határozott meg, amelyben alig jutott szerepe az exakt tudományos kutatásnak. A feudális kizsákmányolást körömszakadtáig védelmező uralkodó osztály sem az exakt kutatást nem támogatta, sem azokat, akik az exakt természettudományok eredményeire alapítják világnézetüket. *Bolyai János* pedig ezt tette. Nemcsak, hogy matematikai kutatással akart foglalkozni, hanem a világ minden kérdését, a társadalom problémáit is tudományos módszerekkel szerette volna megoldani. Ennek a magatartásnak szükségszerű következményeként előbb vagy utóbb ellentétbe kellett kerülnie mindenkivel, aki az akkori szokványos világnézetet vallotta. *Bolyai János életének tragikus folyása tehát nem véletlen személyi kapcsolatok és egyéni tulajdonságok eredménye, hanem a nagyot alkotó lángész és gyökeres reformok után kutató ember vergődése az akkori elmaradt magyar társadalmi rendszer karmaiban.*

Bolyai János filozófiai érdeklődésű gondolkodó volt. A matematika mellett természettfilozófiai és társadalmi problémák is foglalkoztatták. Merész gondolatai következetes racionalistát állítanak elénk, aki — különösen a matematika filozófiája terén — lényegében materialista eszméket hirdetett.

Igen figyelemreméltó például, hogy *Bolyai János* a komplex számok elméletéről szólva a *Responsio* 11. §-ában a következőket írja²⁷: ... csak is olyan dolgok, és így csak olyan mennyiségek lehetnek a *józan** kutatás tárgyai, amelyek valóban megvannak (pl. anyagiak, a testi vagy külső világ részei, vagy legalább elgondolhatók és lehetségesek)“. *Bolyai* tehát elutasított minden önkényes matematikai fogalomalkotást, s így a matematikai idealizmus vagy materializmus kérdésében *határozottan a materializmus oldalára állt*. Még a komplex számokat is a valóság egyik sajátos visszatükrözésének tekintette, holott az ő korában általános volt az a meggyőződés, hogy a komplex számok képzeletbeli dolgok, amelyek nem az anyagi valóságot írják le.

*Bolyai János*nak azonban nemcsak egyes megjegyzései, hanem az *Appendix* egész tartalma, a matematikai térről vallott felfogása is arról tanuskodik, hogy tudományos módszere lényegében materialista. Már geometriája keletkezéséről is azt írja²⁸, hogy az euklideszi szemlélet elvetésére kellett elhatároznia magát „... minthogy azt tartottam, hogy a természetet nem szabad kényszeríteni, a természetet nem szabad ábrándok szülte agyrémek szerint formálni, hanem akarnunk kell észszerűen és természetes módon az igazságot, vagy magát a természetet látni, és hogy meg kell elégednünk a *lehető legjobb*** tárgyalás-

* *Bolyai* eredeti aláhúzása.

** *Bolyai* eredeti aláhúzása.

sal". — *Bolyai* tehát a világot objektív valóságnak tartotta, amelynek a leírása a matematika feladata. E leírás nem lehet önkényes „ábrándok szülte agyrémek szerint“ formált, hanem tőlünk független, objektív igazságokat kell kifejeznie. Ez az álláspont megfelel annak a nézetnek, amelyet *Engels* a materializmus ismertetőjelének minősített²⁹: „a materialista természetszemlélet egyszerűen azt jelenti, hogy a természetet olyannak vesszük, amilyen, anélkül, hogy valamit is hozzáadnának, ami a természettől idegen“. Említésre méltó, hogy *Bolyai* azt is felismerte, hogy a természet visszatükrözését szolgáló fogalmaink maguk is fejlődnek, tehát minden konkrét történeti helyzetben „meg kell elégednünk a *lehető legjobb* tárgyalással“.

A nem-euklideszi tér ellentmondásmentessége nagy csapást mért *Kant* idealista elméletére, amely a teret *a priori* szemléletnek tartja, a róla alkotott matematikai kép tehát szükségszerűen végleges, fejlődésképtelen. *Bolyainak* a matematikai térfogalom bővítését eredményező felfedezése azonban éppen azt igazolta, hogy a fizikai térnek akár euklideszi, akár nem-euklideszi volta *a priori* egyenlően jogosult, ezért a kanti idealizmus, vagy a fizikai térnek bármely más metafizikus felfogása hamis. Az Appendixnek tehát a matematikai tartalma *önmagában* is jelentős lépés a világ dialektikus materialista szemlélete felé.

Bolyai tudatosan is szembezállt a metafizikai szólamok türességével: „A skolasztikus metafizika — írta a *Raumlehre*-ben³⁰ — legnagyobb részben túlfeszített, beteges, az emberi tudás területén nem kellően tájékozott erők nyomorúságos szüleménye, mert ami tudományában biztos, az a matematikához, az egyetlen, igazi alaptudományhoz tartozik, a többi pedig csupa szörzálhasogatás, amely eltérít bennünket a leghasznosabb és leggyümölcsözőbb tudományok felséges mezejétől“. Ez a megjegyzés minden esetre kritikája, ha nem is materialista kritikája a metafizikának: *Bolyai* következetes racionalista volt, ezért várt mindent a matematikától.

Bolyai János világnézetére igen jellemző, hogy a világot — *Laplace*hoz hasonlóan — összefüggő egésznek tartotta, amelyben minden egyes részecske törvényszerű összefüggésben áll a világ bármely más részével, így ezek mozgásai kölcsönösen meghatározzák egymást. „Az egész világ részei között — írta *Bolyai*³¹ — szükséges és szoros törvényszerűség van, vagyis az egész világ egy, mégpedig tökéletesen organizált élő egész. Bármely csekély része, például egy porszem nélkül az egész fönn nem állhatna... másfelől pedig bármely nagy rész is, például az egész világ maga egy porszem híjával, elégtelen az egész világ folyását igazgatni...“ Érdemes összehasonlítani *Bolyainak* ezt a gondolatát a dialektikus materializmus álláspontjával, amely a természetet „nem egymástól elszakított... tárgyak, jelenségek véletlen halmozásának tekinti, hanem összefüggő egységes egésznek, amelyben az egyes tárgyak, jelenségek szerves kapcsolatban állnak egymással. függenek egymástól és felélelezi egymást“.³²

Bolyai János eszméinek racionalista alapja természetesen gyengíti *Bolyai* materializmusának a következetességét. Meglátszik ez egy feljegyzéséből³³, amely a tér és idő objektív létezésének kérdésére vonatkozik. „Vajjon az idő és a tér valóban meg vannak-e, — írja — vagy csak látszólagosak, annak az értelmes és eszes gondolkodóra (filozófusra) nézve éppen olyan közönyösnek kell lennie, és minden további vizsgálatán kívül kell maradnia, amint ez a dolog a legszigorúbb értelemben eldönthetetlen és különben ezek az eszmék olyanoknak látszanak, amelyeknek valóságos dolgokra kell vonatkoznia. Úgy látszik ugyanis, mintha az idő és tér létezésének látszata (eszméje) helyes volna és túlmennék a kellő határon, ha ez iránt még további kételyeket támasztanánk...“ — Ime a következetes racionalizmus *Bolyai Jánost* a tér és idő objektív létezésének kérdésében egy kissé ingadozóvá teszi, hiszen ezt a problémát is racionalista módon akarja eldönteni, holott ez a „legszigorúbb értelemben“, vagyis matematikai módszerrel eldönthetetlen. Valóban, a matematikai módszer *formálisan* ugyanarra az eredményre vezet, akár látszatnak, akár valóságnak tartjuk a teret. De *Bolyai* mégsem rekedt meg a tiszta racionalista kételkedés holtpontján, hanem a materialista nézet felé hajlott, mert szerinte „túlmennék a kellő határon“, vagyis észszerűtlenné válnék világnézetünk, ha a tér és idő objektív létezése tekintetében „további kételyeket támasztanánk“.

Bolyai János társadalmi kérdések iránt is érdeklődött, kortársai szemében szélsőségesnek, sőt esztelennek tűnő reformterveket szőtt. Különösen élete végén, 1850 és 1855 között foglalkozott sokat egy „*Üdvtan*“ gondolatával, amely egyrészt a társadalom utópista szocialista reformját, másrészt a tudományoknak egy *Comte* eszméire emlékeztető enciklopédiáját tartalmazta volna. Az *Üdvtan* még vázlatosan sem készült el, csupán töredékes feljegyzésekből és kortársai róla alkotott véleményéből rekonstruálhatjuk tartalmát.

Bolyai társadalmi reformterveinek haladó jellege elsősorban abban áll, hogy felismerte az osztályelnyomás következtében keletkezett nyomorúságot, de nem volt hajlandó — a korabeli szokáshoz hasonlóan — kenetes frázisokkal, túlvilágra szóló ígéretekkel elintézni a kérdést, hanem módszert keresett a társadalmi bajok mielőbbi leküzdésére. Az volt a véleménye³⁴, hogy a „társadalom nyomorúsággal, szerencsétlenséggel teljes, de nem szükségképpen, hogy ilyen legyen. A teljes üdv megtalálható már itt a földön.“ Szerinte a társadalmi bajok fő oka az egyes emberek önző individualizmusa, ennek helyébe a közérdek tiszteltbentartásának kell lépnie. Egyik feljegyzése³⁵ szerint „... szomorú és kétes, sőt önmagára nézve ... is legveszélyesebb ... a mások elnyomásán s romjaira építeni akarni önboldogságot!“ Más helyen ezt írta³⁶: „Egyáltalában semmiféle egyéni üdv nem létesíthető vagy nem állhat fenn a közüdv nélkül“.

Bolyai János úgy gondolta, hogy a termelést közösen, munkamegosztásos alapon kell végezni, a termékek elosztását pedig az általános egyenlőség elvei szerint kell végrehajtani. Az ilyen szocialista jellegű társadalmat *Bolyai* szerint pusztán erkölcsi tanítás, belátás fogja létrehozni. „...Csak szellemi erőszak vagy-is meg-győzés, győzelem és ön-kényttés át-idomulás, ujja születés vezethetnek üdvre, s erős remény szerént, leg-alább a 2000-ik év betelése előtt — persze minden ábrány nélkül szolva — eljövend annak is az órája“ — írta egyik levelében³⁷. Az „ön-kényttés át-idomulást“ az fogja létrehozni, hogy az emberek megismerik és megtanulják az *Üdvtant*, s ezzel erkölcsük megjavulnak. „Az üdv egyik jelentékeny és lényeges részét alkotja az *Üdvtannak* megtanulása, a másikat, nem kevésbé nemeset és jeleset az *Üdvtannak* megfelelő életmód.“³⁸

Bolyai János ezek szerint utópista szocialista volt az utópisták minden erényével és hibájával. A társadalmi rendszer megváltoztatására vonatkozó gondolatainak erénye, hogy az osztályelnyomó kizsákmányoló hatalmat meg akarja szüntetni. Ez teszi *Bolyai* reformeszméit haladóvá. Hibája, hogy naiv, utópista, mert egyáltalában nem ismeri a társadalom mozgását meghatározó anyagi erőket. E naivitás oka természetesen nem *Bolyai* személyében keresendő. A valódi ok ugyanaz, mint az összes utópista álmodozás esetében, hogy tudniillik: „A jövő társadalmának fantasztikus rajza oly időben támad, amikor a proletariátus még felette fejletlen, tehát maga is fantasztikusan fogja fel saját helyzetét, a társadalom átalakítására irányuló első sejtelmes törekvéseit.“³⁹

Százötven esztendő telt el *Bolyai János* születése óta. Ezalatt Magyarországon és a szűkebb hazáját magában foglaló Romániában is a munkásosztály vezetésével, „ábrány nélkül szolva“, megvalósult az a világ, amelyben lehetetlenné vált „a mások elnyomásán építeni akarni önboldogságot“. Ebben az új világban a tudománynak és a tudósoknak is más szerepe van, mint akkor volt, amikor még — *Bolyai Jánossal* szolva — az „arany-bálványt s krajcár-Istent imádók s egyedül a pengő vagy kész pénzbe hívők s bízók s annak hangjában gyönyörködők“⁴⁰ uralkodtak a dolgozó nép fölött. Ahol a hatalmat a dolgozók vették a kezükbe, ott a tudomány az egész nép közügyévé vált, s a tudós nemcsak néhány szakember, hanem az egész nép számára alkot. *Bolyai* közönsége ma már az egész haladó emberiség. A Szovjetunióban kiadták az Appendixet, nálunk most jelent meg magyarul. A Román Népköztársaság *Bolyairól* nevezte el a magyar egyetemet és megünnepli születésének százötven éves évfordulóját. Mi is *Bolyai Jánosról* neveztük el szegedi matematikai intézetünket és társulatunkat. Halhatatlan alkotása eljut üzeminkbe, ahol előadások száza ismertetik meg nagyságát a magyar munkásosztállyal. A tudományt szomjazó dolgozók milliói adják meg ma *Bolyainak* az elmaradt megbecsülést, s a dolgozók egészséges világában *Bolyai János* emberi alakja is megújnodva és megtisztulva áll előttünk. Óriás volt ő a tudomány alkotó

munkásai között. Világraszóló felfedező, aki képes volt minden erejével kutatni az igazságot, az igazság pedig végső fokon mindíg a dolgozó nép haladását szolgálja. S a felszabadult nép százötven év után forró szeretettel öleli magához az igazságért oly sokat szenvedett lángeszű fiát.

IRODALOM

¹ Szily Kálmán: Adatok Bolyai Farkas életrajzához. Értekezések a matematikai tudományok köréből, XII. kötet 1. füzet (Budapest 1884.) 33.

² Magyar Tudományos Akadémia Könyvtárának kéziratára. A levél 1857-ből való.

³ Sztálin: Beszéd a főiskolák tudományos munkásai fogadásán. Lenin, Válogatott művek, I. kötet, Szikra, 1949. 4.

⁴ Bolyai Farkas és Gauss Frigyes Károly levelezése (Budapest, 1899), 108—113.

⁵ Stäckel: Id. mű I. 92—93.

⁶ Magyar Tudományos Akadémia Könyvtárának kéziratára.

⁷ Magyar Tudományos Akadémia Könyvtárának kéziratára.

⁸ Stäckel: Id. mű I. 223.

⁹ M. Fréchet: Sur quelques points du calcul fonctionnel, Rend. Circ. Mat. Palermo 22 (1906), 174.

¹⁰ Riesz F.: A térfogalom genezise, Math. és Phys. Lapok 15 (1906), 97—122 és 16 (1906), 145—161. Stetigkeitsbegriff und abstrakte Mengenlehre, Atti IV. Congr. Internazionale dei Matematici, Roma, II. k. (1908), 18.

¹¹ P. Urysohn: Der Hilbertsche Raum als Urbild der metrischen Räume, Mathem. Annalen 92 (1924), 302—304.

¹² A. Tychonoff: Über einen Metrisationssatz von P. Urysohn, Mathem. Annalen 95 (1926), 189—142.

¹³ H. Busemann: Über die Geometrien, in denen die „Kreise mit unendlichem Radius die kürzesten Linien sind.“ Mathem. Annalen 106 (1932) 140—160.

¹⁴ Stäckel: Id. mű I. 122.

¹⁵ Stäckel: Id. mű I. 171.

¹⁶ Stäckel: Id. mű I. 171.

¹⁷ Magyar Tudományos Akadémia Könyvtárának kéziratára.

¹⁸ Batta István: Adalék Bolyai János életéhez. Akadémiai Értesítő XXIX. (1918), 445

¹⁹ Stäckel: Id. mű I. 148.

²⁰ Lobacsevszkij első ilyen tárgyú nyomtatott műve a Kazanszkij Vesztnyik 1829—1830 évfolyamában jelent meg, az Appendix 1831-ben.

²¹ ²² ²³ Stäckel: Id. mű I. 178—179.

²⁴ Stäckel: Id. mű I. 182.

²⁵ ²⁶ Magyar Tudományos Akadémia Könyvtárának kéziratára.

²⁷ Stäckel: Id. mű II. 247.

²⁸ Stäckel: Id. mű I. 223.

²⁹ Engels: Feuerbach és a német filozófia alkonya. Szikra 1949. 57.

³⁰ Stäckel: Id. mű I. 186.

³¹ Bedőházi János: A két Bolyai (Marosvásárhely 1897), 379.

³² Sztálin: A leninizmus kérdései. Szikra. 1951. 670.

³³ Stäckel: Id. mű I. 259.

³⁴ *Bedőházi*: Id. mű 384.

³⁵ Magyar Tudományos Akadémia Könyvtárának kéziratára.

³⁶ *Stäckel*: Id. mű I. 188.

³⁷ Magyar Tudományos Akadémia Könyvtárának kéziratára.

³⁸ *Stäckel*: Id. mű I. 187.

³⁹ *Marx-Engels*: Válogatott művek. Szikra. 1949. I. 39.

⁴⁰ Magyar Tudományos Akadémia Könyvtárának kéziratára.