A BOLYAI—LOBACSEVSZKIJ GEOMETRIA HATÁSA A GEOMETRIA FEJLŐDÉSÉRE

VARGA OTTÓ lev. tag

Előadta az ünnepi ülésszak 1952. december 15-én tartott ülésén

Bolyai János felfedezésének hatását a geometria fejlődésére a következő szempontokból kívánom tárgyalni:

Elsőször is azokat a vizsgálatokat ismertetjük, amelyek módszerileg *Bolyai János* szintetikus tárgyalását követik. E vizsgálatok eredménye a geometria modern axiómatikus megalapozásához vezet. Másodszor vázoljuk azokat a vizsgálatokat, amelyek más szempontból vezettek *Bolyai János* eredményeihez. Ezekből a szempontokból kiindulva azonban már *Bolyai János* felfedezésénél lényegesen általánosabb geometriákhoz jutottak. Az új szempontok közül az egyik a Cayley—Klein-féle projektív felfogáson át a geometriák csoportelméleti megalapozásához, míg a másik szempont *Riemann* híres habilitációs előadásából indul ki és végeredményben különböző geometriai diszciplinák differenciálgeometriai megalapozásához vezet. Ismeretes, hogy a nem-euklideszi geometria előhirnökei *G. Saccheri* (1667—1733), *H. Lambert* (1728—1777), *A. M. Legendre* (1752—1833) vizsgálatai *Euklidesz*nek szintetikus-axiómatikus módszerét követik. E vizsgálatok azonban csak a párhuzamossági axióma körül mozogtak, és céljuk annak kimutatása volt, hogy ez az euklideszi axióma a többi axiómából következik. *Bolyai* és *Lobacsevszkij* már céltudatosan az euklideszi axiómával ellenkező, nem-euklideszi hiperbolikus párhuzamossági axiómából indultak ki és olyan rendszert igyekeztek kiépíteni, amely egy, az euklideszi geometriával egyenlően lehetséges geometriát ad. E célból, mint tudjuk, főleg fontos planimetriai, sztereometriai, trigonometriai és analitikus geometriai tételeket vezettek le. Nagymértékben tisztázatlan marad azonban az euklideszi geometria felépítésében szereplő többi posztulátum és definíció. Ismeretes, hogy *Euklidesz*nél több olyan definíció szerepel, amely nem tartalmaz matematikai állítást. Azt a követelményt sem sikerült azonban szigorúan keresztülvinni, hogy a definíciók és axiómák felsorolása után minden további tétel ezekből logikus úton levezethető legyen. Az itt felmerülő hézagoknak legfőbb oka az volt, hogy egy sereg, a szemléletből átvett definiálatlan fogalom csúszott be. Fejlett geometriai axiómatika nélkül még *Bolyai* és *Lobacsevkij* sem tudták a mai követelményeket kielégítő módon bizonyítani azt, hogy az euklideszi párhuzamossági axióma nem következménye a többi axiómának. *Bolyai* és *Lobacsevszkij* abban látták ennek bizonyítását, hogy az abszolút trigonometria ellentmondásmentes. De egy trigonometriarendszer még nem teljes geometriai rendszer, hanem ennek csak egy része. *Bolyai* maga ezzel az érveléssel nem elégedett meg, mert jóval az Appendix megjelenése után ebben az irányban még vizsgálatokat folytatott, amint ezt *Stäckel*[1] kiderítette. *Euklidesz* tárgyalásának kritikai vizsgálata a geometriai alapjainak axiómatikus megalapozásához vezetett. E vizsgálatok csak a mult század végén és e század elején nyertek bizonyos értelemben befejezést. Az euklideszi és nemeuklideszi geometriának a mai követelményeknek legjobban megfelelő axiómatikus megalapozását *D. Hilbert*[2] adta. *Hilbert* az euklideszi térgeometria megalapozásánál a pontot, az egyenest és a síkot definiálatlan alapelemekként tekinti. Ezek között relációkat ír elő. A relációk leírásához az „illeszkedni", „összetartozni", „között", „egybevágóság", „folytonosság" kifejezéseket használja. E relációk a geometriának az axiómáit képezik. *Hilbert*nél az euklideszi geometria axiómatikája öt csoportra tagozódik. Ezekből az első és második csoport helyzetgeometriai jellegű, t. i. az első csoport az alapelemek illeszkedésére vonatkozik, míg a második csoport pontoknak az egyenesen való elrendezéséről, valamint a síknak egy egyenessel történő két részre osztásáról szól. A harmadik csoport a tér mozgását az egybevágósági axiómákkal írja le. Negyedik helyen következik az euklideszi párhuzamossági axióma, míg az ötödik csoport a folytonosság két axiómájából áll. *Hilbert*nél a folytonossági axiómák az archimedeszi és egy ú. n. teljességi axiómából tevődnek össze. E tárgykörre vonatkozó legtöbb más tárgyalásnál a teljességi axióma helyett a Cantor-féle axióma szerepel. A Hilbert-féle axióma ettől alapvetően eltér, mert lényegében azt fejezi ki, hogy az adott rendszer más elemekkel nem bővíthető ki úgy, hogy az első három axiómacsoport érvényben maradjon. Az egyes axiómacsoportokra vonatkozólag megjegyezzük, hogy az első két helyzetgeometriai csoportot először *M. Pasch*[3] vezette be és tárgyalta teljes szigorúsággal. A harmadik axiómacsoportnál két álláspont lehetséges: az egyik az, hogy a mozgást definiálatlan alapfogalomként vezetjük be és megfelelő axiómákkal a többi alapfogalmakkal vonatkozásba hozzuk. A másik az, hogy ezt a fogalmat a kongruencia fogalmával helyettesítjük. *Hilbert* ebből az utóbbi álláspontból indult ki. Az első szempontra, amely az euklideszi és nemeuklideszi geometria megalapozásán túl, más geometriai rendszerek jellemzésére is alkalmas, később még visszatérek. *Hilbert* kimutatta, hogy axiómarendszere eleget tesz azoknak a követelményeknek, amelyeket egy szigorúan felépített axiómarendszertől meg kell követelni. T. i. hogy az axiómarendszer ellentmondásmentes, az egyes axiómacsoportok egymástól függetlenek és az axiómarendszer teljes legyen. Az ellentmondásmentességet úgy bizonyítja, hogy a geometriai rendszert aritmetizálja. Az így nyert aritmetikai modell nem egyéb, mint a közönséges Descartes-féle analitikus geometria. Így az axiómarendszer ellentmondásmentes, amennyiben az aritmetika is az. Az egyes csoportok függetlenségének bizonyítására szintén megfelelő aritmetikai modellekből indul ki. Itt elsősorban a párhuzamossági axióma függetlenségét kell említeni, mert ez jelenti a nem-euklideszi geometria létezését. *Hilbert* művében a *Klein*-től[4] származó modellt tárgyalja. E célból az előbb említett Descartes-féle analitikus geometriában egy gömböt kell tekinteni, és a szerkesztendő geometriának pontjai a gömb belsejében fekvő pontok. Egyeneseken és síkokon a közönséges egyeneseknek és síkoknak a gömb belsejébe eső részét értjük. E pontokra, egyenesekre és síkokra az illeszkedési és rendezési axiómákat úgy értelmezhetjük, mint a teljes Descartes-féle analitikus geometriában. Az egybevágósági axiómák azzal teljesíthetők, hogy olyan transzformációkat tekintünk, amelyeknél a gömb önmagába és egyenesek egyenesekbe mennek át. Szakaszok, szögek és háromszögek akkor egybevágóak, ha ezeknél a kollineációknál egymásba mennek át. A szakaszok ilyen egybevágósága mellett az archimedeszi posztulátum is könnyen bevezethető. Végül a Cantor-féle folytonossági axióma, — mivel csupán rendezési axiómákon alapul — feltételeink alapján tehát teljesül. Ezzel olyan modellt nyerünk, amelyben az összes felsorolt axióma teljesül, a párhuzamossági axióma kivételével. Utóbbi nyilvánvalóan nem igaz. Ilyen módon egyúttal a nem-euklideszi geometria lehetősége is ki van mutatva. Különösen figyelemreméltóak a folytonossági axiómákra vonatkozó Hilbert-féle vizsgálatok. Az erre vonatkozó eredmények egyik alapvető következménye az, hogy a projektív geometria folytonossági axiómák nélkül nem alapozható meg. Hogy a folytonossági axiómák közül a teljességi, vagy ha úgy tetszik a Cantor-féle axióma, a többi axiómától független, csupán a Descartes-féle analitikus geometriában pontok és egyenesek koordinátáinak azokat a számokat kell vennünk, amelyeket a racionális számtestből kiindulva, a pozitív elemekre nézve kvadratikus lezárással nyerünk. De az archimedeszi axióma is független a többi axiómától. Ehhez *Hilbert* egy nem-archimedeszi számtestet szerkesztett a következő módon. A t határozatlant a racionális műveleteknek és az $|\sqrt{1+\omega^2}|$ műveletnek vetette alá, ahol ω bármilyen már e műveletek alapján nyert függvényt jelent. A testműveletek a formális számolási műveletek alkalmazásával értelmezhetők. A rendezést a következőképpen állapítja meg: Ha a és b a testnek két eleme, akkor $a > b$, amennyiben $a - b$ elegendő nagy t-re pozitív értékű. A testnek az 1 és t eleme már nem tesz eleget az archimedeszi axiómának. Ha e nem-archimedeszi számtestből kiindulva az analitikus geometriát felépítjük, akkor az első négy axiómacsoport teljesül, a folytonossági axiómacsoport azonban nem. *Hilbert* folytonossági axiómacsoporttal kapcsolatos vizsgálatainak még egy másik vonatkozásban is nagy jelentősége van. Ez arra az előbbi megjegyzésünkre vonatkozik, melyet a projektív geometria megalapozásáról tettünk. E vizsgálatnak lényege a Pappus-féle, vagy másnéven speciális Pascal-féle tétel szerepe a geometria megalapozásában. Megszerkesztett egy nem-kommutatív számrendszert, amelyet a Desargues-féle tétellel való kapcsolata miatt Desargues-féle számrendszernek nevezett. E számrendszer azonkívül, hogy nem-kommutatív, nem folytonos, mert ugyancsak *Hilbert* mutatta ki, hogy egy archimedeszileg elrendezett számrendszer szükségképpen kommutatív. Ezzel a számrendszerrel szerkesztett analitikus geometriában érvényes az első két helyzetgeometriai jellegű axiómacsoport, valamint a párhuzamossági axióma. Érvényes továbbá a Desargues-féle háromszögtétel. E tétel alapján egy szakaszkalkulus vezethető be és ez olyan számrendszert eredményez, amely a kiinduló nem-kommutatív számrendszerrel izomorf. A Desargues-féle tételen alapuló szakaszkalkulusban azonban a szorzás akkor és csak akkor kommutatív, ha a Pappus-tétel érvényes. Az előbb említett izomorfizmus miatt következik tehát, hogy egy geometriában csupán helyzetgeometriai axiómákra — a párhuzamossági axiómát is ideszámítva — folytonossági feltételek nélkül a Pappus-tétel nem érvényes. Ez az eredmény a projektív geometriára alkalmazva azt jelenti, hogy ez csupán helyzetgeometriai axiómákkal nem alapozható meg.

A nem-archimedeszi geometriával kapcsolatosan rá kell mutatni *M. Dehn*[5]-nek azon vizsgálataira, amelyek a párhuzamossági és folytonossági axiómákra vonatkoznak. Kimutatta, hogy van olyan nem-archimedeszi geometria, amelyben az euklideszi geometria összes tételei érvényesek, de egy ponton át egy egyeneshez végtelen sok párhuzamos létezik. Azt is kimutatta, hogy a hiperbolikus geometria párhuzamossági axiómája sem teljesül.

Végül *Hilbert*[6] a kétdimenziós Bolyai—Lobacsevszkij geometriának olyan megalapozását adta, amelyben csak az első három síkra vonatkozó axiómacsoport, valamint a hiperbolikus párhuzamossági axióma szerepel.

Rátérünk most a nem-euklideszi geometriának a projektív geometrián át történő megalapozására. Már előbb említettük a párhuzamossági axióma függetlensége bizonyításául szolgáló Klein-féle modellt. *Hilbert* tárgyalásában ezt a modellt a már teljesen kiépített euklideszi geometriába vezette be. A modell ilyen bevezetése alkalmas volt a párhuzamossági axióma függetlenségének bizonyítására, viszont nem ad módot a nem-euklideszi geometriának az euklideszi geometriától független felépítésére. *Felix Klein* nem az euklideszi, hanem a projektív geometrián át vezeti be e modellt és ilyen formában a Bolyai—Lobacsevszkij geometriának lényegesen új megalapozását adja. *F. Klein* megalapozásában két szempontból indul ki. Az első a Cayley-féle[7] projektív metrikának fogalma, a második a projektív geometriának metrikus fogalmaktól mentes felépítése. Ismeretes, hogy a Cayley-féle projektív metrikához úgy jutunk, hogy a projektív térben egy másodrendű, ú. n. abszolút alakzatot tüntetünk ki. Ha megadunk két A és B pontot, akkor ezek összekötő egyenesének az abszolút alakzattal két P és Q metszéspontja lesz. Hasonlóan húzhatunk az ab szög síkjában a szög csúcspontjából az abszolút alakzathoz p és q érintőket. A tér azon kollineációinál, amelyeknél az abszolút alakzat invariáns, az $(ABPQ)$ és $(abpq)$ kettősviszonyok olyan invariánsok, amelyek csupán a pontpártól, illetve az egyenes pártól függnek. Ha a kettősviszony függvényei közül azokat keressük ki, amelyek a távolságtól kívánt additív tulajdonsággal rendelkeznek, ezeket egy konstans tényezőtől eltekintve a kettősviszony logaritmusa határozza meg. A szögnél e konstans értékeként $\frac{i}{2}$-t vesszük, mert ilyen formában a teljes szögre a 2π értéket kapjuk. *F. Klein*[4] innen a következő úton az euklideszi, a Bolyai—Lobacsevszkij-féle és egy másik, ú. n. elliptikus nem-euklideszi geometriához jutott. Először is a projektív geometriának az euklideszi geometriától független axiómatikus megalapozását vázolta. E tekintetben már *v. Staudt*[8] csupán helyzetgeometriai axiómák alapján a projektív geometriát messzemenően kifejlesztette. A *Staudt*-nál hiányzó folytonossági feltételek *Klein*[9], *J. Lüroth, H. G. Zeuten* és *Darboux*[10] vizsgálataiban zárultak le véglegesen. *Klein* még egy másik alapvető szempontot is vázol, t. i. a projektív geometriának olyan axiómákkal való jellemzését, amelyek csak egy korlátos térrészre vonatkoznak. *Klein* e vázlatos vizsgálatait azonban csak *M. Pasch*[3] oldotta meg kielégítően. Az axiómákban alapelemekként a ponton kívül nem az egyenes és a sík, hanem csak a szakasz és a síkrész szerepelnek és ilyen értelemben az axiómák csak egy korlátos térrészre vonatkoznak. A sugársorok, illetve sugárnyalábok középpontjaival a tér ideális pontokkal bővíthető ki. Ha most a *Hilbert*nél szereplő első, második és ötödik axiómacsoportot a megfelelő Pasch-féle axiómákkal helyettesítjük és ezekhez a megfelelő egybevágósági axiómákat hozzácsatoljuk, akkor az a kollineációs csoport, amelynél két egybevágó alakzat egymásba megy át, azzal van jellemezve, hogy egy bizonyos polárrendszerrel felcserélhető. E polárrendszer koincidencia felülete éppen Cayley-nek abszolút alakzatához vezet. Ezen abszolút alakzatra három típust nyerünk.

Az első eset az, amikor az abszolút alakzat elliptikus felület. Pontokat, egyeneseket és síkokat a Klein modellnél már előbb említett módon a felület belsejére kell korlátozni. Szakaszok távolságánál a Cayley-féle képletben a k konstanst valósnak kell választani. A szögmetrikánál e konstans $\frac{i}{2}$. Ez a geometria azonos a Bolyai—Lobacsevszkij geometriával. Egy egyeneshez egy erre nem illeszkedő pontból a két párhuzamost úgy kapjuk, ha e pontot az egyenesnek az abszolút alakzattal való két metszéspontjával összekötjük.

A második esetben az abszolút alakzat teljesen képzetes. Ennek a geometriának szintere az egész projektív tér. Ebben azonban egy síkban fekvő egyenespárnak mindig van metszéspontja. E geometriában tehát párhuzamosak egyáltalán nem léteznek. Ez az ú. n. elliptikus nem-euklideszi geometria. Ha a Hilbert-féle rendszerben a párhuzamossági axiómától eltekintünk, tehát az ú. n. abszolút geometriát vizsgáljuk, akkor bizonyítható, hogy egy nem az egyenesen fekvő ponton át az egyeneshez legalább egy párhuzamos létezik. Az abszolút geometria tehát csak az euklideszi és a Bolyai—Lobacsevszkij geometriában folytatható. A látszólagos ellentmondás, amelyet az elliptikus geometria jelent, rögtön megszűnik, ha tekintetbe vesszük, hogy az elliptikus sík egyenesei zárt vonalak, mint a projektív síkéi, de az abszolút geometria Hilbert-féle axiómarendszere ezt a lehetőséget éppen kizárja. A Pasch-féle helyzetgeometriai axiómák éppen azért, mert korlátos térrészre vonatkoznak, az egyenesnek nyílt vagy zárt voltára nem jelentenek feltételt, s így alapul szolgálhatnak mind a két fajta geometria megalapozásához. A Cayley-féle távolság képletben a konstanst tiszta képzetesnek kell választanunk, míg a szögképletben a konstans változatlanul $\frac{i}{2}$.

A harmadik esetben az abszolút alakzat egy teljesen képzetes másodrendű görbévé fajul el. A tér pontjaiból, síkjaiból és egyeneseiből az abszolút alakzat síkjához tartozó pontokat ki kell zárni. E térben minden egyeneshez egy rá nem illeszkedő ponton keresztül pontosan egy párhuzamos létezik, mivel az egyenes az alakzat síkját éppen egy pontban metszi. E pontnak az adott ponttal való összekötő egyenese a szóbanforgó párhuzamost adja. A térnek mozgásai azok a kollineációk, amelyeknél az abszolút alakzat és vele együtt az abszolút alakzatnak síkja invariáns marad. Ez a geometria az ú. n. ekviform, vagy parabolikus geometria. A szögmetrika megfelelően értelmezhető, a Cayley-féle képlettel, mint a Bolyai—Lobacsevszkij és az elliptikus geometriában. A szögképletnek ezt a projektív formáját ebben az esetben már *E. Laguerre*[11] is ismerte.

A parabolikus geometriából kiindulva az euklideszi geometriát a következő két feltétellel jellemezhetjük. 1. Két közös ponttal rendelkező szakasz egybevágó, ha egy olyan parallelogramma szomszédos oldalait alkotják, amelyek átlói egymásra merőlegesek. — 2. Két párhuzamos szakasz egybevágó, ha egy parallelogramma szembenfekvő oldalait képezik. 1. és 2. alapján megállapítható két tetszőlegesen fekvő szakasz egybevágósága. A Cayley—Klein-féle projektív felfogásban tehát a két nem-euklideszi geometria és az euklideszi geometria a projektív geometriának alárendelhető s így e felfogással már túljutottunk *Bolyai* koncepcióján.

Továbbmenve látni fogjuk, hogy e projektív felfogásból a geometriának ugyancsak *Klein*től származó csoportelméleti megalapozása következik. Előbb azonban még néhány megjegyzést kell fűznünk az elmondottakhoz.

A *Klein*-féle felfogásban magának a projektív geometriának megalapozása lényeges szerepet játszik. E diszciplínának axiómatikus megalapozásánál a többi axióma közül különösen a folytonossági axiómák ugranak ki. Míg t. i. a helyzetgeometriai axiómák részben szemléletes tényeket fejeznek ki, vagy olyan tételekből állanak, amelyeket akkor is vizsgálat tárgyává kellene tenni, ha nem axiómatikáról lenne szó, — gondoljunk pl. a projektív sík axiómatikus felépítésénél szereplő Desargues-féle háromszögtételre — addig a folytonossági axiómák mesterkéltek és csupán azt a célt szolgálják, hogy a projektív geometriát a szokott analitikus modellel előállíthassuk. A modern fejlődés a következő irányban haladt: Csupán illeszkedési axiómák segítségével, ha pedig a síkra szorítkozunk, a Desargues-tétel axiómaként történő hozzácsatolásával egy pontszámítás vezethető be, amely először valamilyen egyenesnek pontjaira vonatkozik, és ott egy testet indukál. Mivel ilyen módon a különböző egyenesekhez hozzárendelhető testek izomorfok, ezért a projektív geometriához egy test rendelhető hozzá. Kimutatható, hogy a projektív geometria teste tetszőlegesen választható. Ennek alapján a következő testaxióma vezethető be:

A projektív geometriának teste tetszőleges test.

E testaxióma még nem szabályozza a geometria folytonosságát; ezt úgy érjük el, hogyha a következő *folytonossági axiómát* vezetjük be:

A projektív geometriai testnek elemei egy topológikus teret képezzenek, amely összefüggő és lokálisan bikompakt.

Már előbb említettük, hogy a test bevezetése valamilyen egyenesből indul ki s így a folytonossági axióma, mely e testre vonatkozólag feltételt jelent, lényegében csak az egyenes folytonosságának fogalmát fejezi ki topológikusan. Ha feltételezzük, hogy a test kommutatív, vagy ami ugyanaz, hogy a Desargues-féle axióma helyett a Pappus-tételt választjuk axiómaként, akkor a folytonossági axióma alapján *L. S. Pontrjagin*[12] tétele következik:

A projektív geometria teste vagy a valós, vagy a komplex számok teste.

A szovjet geometriai iskolának ezzel az eredményével a projektív geometria kielégítő megalapozást nyert.

A Cayley—Klein-féle projektív felfogáshoz csatlakozik a geometriának két általánosítása, amelyek *Minkowski*tól[13] és *Hilbert*től[14] származnak. A Minkowski-féle geometriához szintén egy abszolút alakzat kitüntetésével jutunk. Vonatkoztassuk az affin-teret egy x^i $(i=1,\ldots,n)$ Descartes-féle koordinátarendszerre. E térben tekintsünk a koordinátarendszer kezdőpontját magábanfoglaló konvex testet. E test határfelülete képezze az abszolút alakzatot. Ha a tér tetszőleges x^i pontját a koordinátarendszer θ kezdőpontjával összekötjük, és meghatározzuk az így nyert sugárnak a felülettel alkotott ξ^i metszéspontját, akkor az $0, x^i$ és ξ^i pontok osztóviszonyának abszolút értéke konvex testünk $F(x)$ távolságfüggvényét adja. Az abszolút alakzat felületét akkor az $F(x)=1$ egyenlet határozza meg. A távolságfüggvény a következő

1. $F(x)>0,$ ha $x^i \neq 0$
2. $F(\mu x)=\mu F(x),$ ha $\mu>0$
3. $F(x+y) \leqq F(x)+F(y)$

centroaffinitásokkal szemben invariáns tulajdonságokkal jellemezhető. *Minkowski* két x^i, y^i pont d távolságát a $d(x,y)=F(y-x)$ relációval értelmezi. A távolságfüggvény 1.—3. tulajdonságai alapján következik, hogy az így bevezetett távolság e fogalmaktól kívánt 1. $d(x,y)>0$, ha $x^i \neq y^i$ és 2. $d(x,y)+$ $+d(y,z)=d(x,z)$ sajátságokkal rendelkezik. *Minkowski* e geometriát számelméleti célokra vezette be és a most felsorolt tulajdonságokat *Golab*[15] és *Hürlen*[16] mutatták ki. Ezekből a tulajdonságokból már következik, hogy ebben a geometriában az egyenesek a legrövidebb vonalak. Ez azonban még a következő módon is bizonyítható: Egy differenciálható $x^i=x^i(t)$ görbének ívére a távolság definíciójából következik az $s = \int_{t_0}^{t_1} F(\dot{x})dt$ paraméterinvariáns kifejezés. Ehhez az integrálhoz tartozó variációs problémának extremálisai azonban az affin térnek közönséges egyenesei. Ilyen értelemben e geometria a projektív geometriával összeférhető. Megjegyezzük, hogy a távolság csak transzlációkkal szemben invariáns s így ezek képezik a Minkowski-féle geometriának mozgásait.

Hilbert geometriájához a legegyszerűbben úgy jutunk, hogyha az előző problémák megfordítását vetjük fel, t. i. a projektív térnek azon összes metrikus geometriáit keressük, amelyekben az egyenesek a legrövidebb vonalak s azonkívül minden egyenes végtelen hosszal rendelkezik. *Hilbert* e problémát a következőképpen oldja meg: Az összes ilyen geometriát úgy kapjuk, ha kitüntetünk egy zárt konvex felületet és a geometria pontjait a konvex test belsejére korlátozzuk, továbbá két A, B pont távolságát a Cayley—Klein-féle $d = c \log (ABXY)$ képlettel határozzuk meg, ahol X, Y ismét az A, B pontokat összekötő egyenesnek a konvex felülettel alkotott metszéspontjai. E távolságfogalom ismét teljesíti a tőle követelt és előbb 1. és 2.-vel jelzett tulajdonságokat, amelyekből következik, hogy az egyenesek a legrövidebb vonalak. *Hilbert* bizonyítása a háromszögegyenlőtlenségre vonatkozóan a következőn alapul: ha az A és B pontokat rögzítve hagyjuk, és a konvex testet úgy módosítjuk, hogy az AB egyenesen az X' közelebb essék A-hoz, mint X, továbbá az Y' közelebb essék B-hez, mint Y, akkor az új abszolút alakzatra vonatkozólag a rögzített AB pontpárnak $\bar{d}$ távolsága nagyobb a d távolságnál. Tekintsünk most egy olyan síkot, amelyben az A, B pontok, valamint egy C pont fekszenek. Az AC és BC oldalak metszik a sík konvex görbéjét az U, V, illetve a Z, T pontokban. Az U, Z és a T, V pontok összekötő egyenesei egy W metszéspontot határoznak meg. Az ABC sík pontjában az eredeti konvex görbe helyett az UTW háromszöget tekintjük új konvex görbének. Az AB egyenes a háromszöget két X', Y' pontban metszi, amelyeknek helyzete AB-re vonatkozólag olyan, ahogyan azt előbb említettük. Az ABC háromszög oldalainak távolságára most már könnyen levezethető az $\overline{\overline{AB}} = \overline{AC} + \overline{CB}$ reláció, amelyben $\overline{\overline{AB}}$ a pontok távolsága az UTV háromszögre vonatkozóan, míg $\overline{AC}$ és $\overline{CB}$ az eredeti görbére vonatkoztatott távolság. Az előbbi megjegyzésből következik a háromszögegyenlőtlenség.

Miként az ekviform geometriát és ennek alapján az euklideszi geometriát egy síkban elfajuló másodrendű görbe határozza meg, hasonlóképpen ebben az esetben is a Minkowski geometria úgy áll elő, ha a konvex felület egy síkban fekvő konvex görbévé fajul el.

Most rátérek a geometriának csoportelméleti megalapozására. Az axiómatikára vonatkozó megjegyzéseimben már rámutattam arra, hogy az egybevágósági axiómák helyett alapfogalomként közvetlenül a mozgást is bevezethetnénk. Az előbb említett Klein-féle felfogásban az euklideszi és nemeuklideszi geometriából ez a szempont világosan kidomborodik. Ugyanis a geometriákat úgy is lehetne jellemezni, hogy a projektív tér kollineációs csoportjának azokat az alcsoportjait tekintjük, amelyeknél a három említett abszolút alakzat invariáns marad. A metrikus alapfogalmak most már e csoportoknak invariánsaiként adódnak és ezzel ezek a geometriák egyértelműen meg vannak határozva. *F. Klein*[17] az ú. n. Erlangeni Programmban a csoportelmélet és a geometria közötti összefüggést világosan kifejtette. Az ő felfogása szerint valamilyen geometriát a legáltalánosabban úgy jellemezhetünk, ha valamilyen sokaságból indulunk ki és egy azon értelmezett transzformációs csoportot tekintünk. A geometria akkor e csoport invariáns elmélete. Lényeges az, hogy *F. Klein* ennek az elvnek fontos következményeire mutatott rá, amelyek lehetővé teszik bizonyos geometriák ekvivalenciájának kimutatását. E következményeket *Klein* átviteli elvnek (Übertragungsprinzip) nevezte. Ennek lényege két észrevételből adódik.

Az adott A sokaságot leképezhetjük egy A' sokaságra. A-val együtt az adott B transzformációs csoport átmegy egy vele hasonló B' csoportba. A két csoport izomorfizmusa miatt ezeknek invariánselmélete azonos s így a két geometria is ekvivalens. Ennek az első szempontnak illusztrálására *F. Klein*-nak egy példáját említjük. Projiciáljunk egy másodrendű felületet sztereográfikusan egy síkra. A felületponton átmegy két alkotó, amely a síkot két pontban metszi. A síknak azok a projektív transzformációi, amelyek e két pontot változatlanul hagyják, megadják a másodrendű felületnek azokat az önmagára való projektív leképezéseit, amelyek a projekciós centrumot változatlanul hagyják. Ha a felület ellipszoid, akkor a síknak most említett két pontja egy képzetes pontpár és ebből következik, hogy a síknak az előbb értelmezett csoportja éppen az elemi geometriát adja. E geometria tehát ekvivalens egy másodrendű felület ama projektív geometriájával, amelynek egy fixpontja van.

A második észrevétel a következő: Az A sokaság pontjaiból egy M alakzatot ragadhatunk ki, pl. a projektív térben egy egyenest. Ez az alakzat függjön N számú paramétertől. Az M alakzatot akkor egy N dimenziójú A' sokaság pontjaként foghatjuk fel. Az alakzatra ható B csoport most az A' sokaságnak transzformációs csoportja lesz s az így keletkezett geometria az M alakzatnak A'-beli geometriájával ekvivalens. E második észrevétel megvilágítására megemlítjük, hogy *Klein* miként tárgyalta a háromméretű projektív tér egyeneseinek geometriáját. A tér egyeneseit hat vonalkoordinátával jellemezhetjük, amelyek egy kvadratikus relációnak tesznek eleget. E hat koordinátát egy hatdimenziós projektív tér pontjaiként foghatjuk fel, amelyek éppen azon a másodrendű hiperfelületen feküsznek, amelyet a kvadratikus reláció jellemez. Igy a háromméretű tér egyeneseinek geometriája ekvivalens a hatméretű projektív tér ama geometriájával, amelynek abszolút alakzata az említett másodrendű hiperfelület.

Az átviteli elvnek fontos következményei voltak a körök és gömbök geometriájára. Kimutatható, hogy a Möbiusz-féle körgeometria ekvivalens a háromdimenziós ponttérnek azzal a metrikus geometriájával, amelynek abszolút alakzata a gömbfelület. A Laguerre-féle körgeometria viszont ekvivalens a háromdimenziós projektív térnek azzal a geometriájával, amelynek az abszolút alakzata a végtelen távoli síkban fekvő ellipszis. A Lie-féle körgeometria egy négydimenziós projektív tér metrikus geometriájával ekvivalens. Az abszolút alakzat nem elfajuló és szignatúrája 1-gyel egyenlő.

A Klein-féle csoportelméleti felfogás az euklideszi és nem-euklideszi geometriák megalapozásához már feltételezi a projektív geometria teljes megalapozását. Azokat a vizsgálatokat, hogy e geometriák az alapulvett sokaságnak egy topológikus jellemzése után csupán csoportelméleti eszközökkel megalapozhatók-e, *H. Helmholtz*[18] kutatásai indították meg. *S. Lie*[19] e vizsgálatokat az általa megalapított csoportelmélettel összefüggésbe hozta és a *Helmholtz* által még nem határozottan körvonalazott fogalmakat szabatosan fejezte ki s így az előbb említett kérdést teljesen meg tudta oldani. E vizsgálatokban szereplő transzformációs csoportok differenciálhatók s ezek a vizsgálatok összefüggésben vannak *Riemann*nak a geometriák differenciálgeometriai eszközökkel történő megalapozásával. Mi tehát a Helmholtz—Lie-féle kutatásokat csak az említett Riemann-féle vizsgálatok tárgyalása után részletezzük.

A problémának differenciálhatósági feltételektől mentes megoldását *D. Hilbert*[20] adta meg. *Hilbert* vizsgálatait csupán a síkgeometriára vonatkozólag végezte. A síkot topológikusan úgy értelmezi, hogy az leképezhető az aritmetikai sík pontjaira. Mozgásokon a síknak olyan önmagára való kölcsönös és egyértelmű leképezését érti, amelyeknél egy Jordan-görbe irányítása változatlanul marad. Valamilyen mozgáshoz tartozó transzformációhoz létezzék az inverze is. Azt a mozgást, amelynél egy M pont rögzítve marad, M pont körüli forgásnak nevezi. E definíciók után a következő három axiómát vezeti be.

I. Két mozgás egymásutáni elvégzése ismét mozgás.

Ezzel azonos:

I. A mozgások csoportot alkotnak.

II. Ha A és M a sík két különböző pontja, akkor az A pont egy M körüli forgásnál végtelen sok pontba megy át.

Hilbert az ilyen forgással nyert ponthalmazt valódi körnek nevezi, mert dolgozatában kimutatja, hogy a valódi kör az aritmetikai síknak egy körével homeomorf. Ennek alapján a II. axióma a következő, vele azonos formában fejezhető ki:

II. Minden valódi kör végtelen sok pontból áll.

III. Ha egy olyan mozgás létezik, amely valamilyen A, B, C ponthármast egy A', B', C' ponthármas tetszőleges szomszédságába visz át, akkor létezik olyan mozgás, amely az A, B, C ponthármast az A', B', C' ponthármasba viszi át.

E három axióma alapján *Hilbert* kimutatta, hogy a szóbanforgó geometria az euklideszi, vagy a Bolyai—Lobacsevszkij-féle geometria. Már megjegyeztük, hogy *Hilbert* a valódi kör és az aritmetikai kör homeomorfizmusát mutatta ki, ami lényegében abban áll, hogy egy M pont körüli forgási csoport és a közönséges euklideszi forgási csoportok izomorfok. A valódi egyenes bevezetése a következő lépésekkel történik: Nevezzük az AB pontpárt szakasznak, akkor két szakasz egybevágó, ha egy mozgással egymásba vihetők át. Egy M pont körüli forgást félforgásnak nevezünk, hogyha az kétszer egymásután végezve az azonos mozgáshoz vezet. Ha most már A, B, C három olyan pont, hogy A a B körüli félforgással C-be megy át és ugyanakkor a C az A-ba megy át, akkor B az AC szakasz felezőpontja. Ha az A és B pontokból kiindulva a felezésnek ezt a folyamatát korlátlanul folytatjuk és a keletkező ponthalmaznak sűrűsödési helyeit is hozzácsatoljuk, akkor az A és B pontokat összekötő valódi egyeneshez jutunk. Az AB pontokat összekötő valódi egyenes félforgásokkal és további felezésekkel teljes valódi egyenessé bővíthető ki. *Hilbert* kimutatja, hogy a valódi egyenest két pontja egyértelműen meghatározza. Kimutatja továbbá, hogy a pontra és valódi egyenesre vonatkozó síkbeli illeszkedési, rendezési axiómák igazak. Ha még háromszögeket is tekintünk, akkor a kongruencia axiómák is érvényesek. Mivel a sík topológikusan volt értelmezve, ezért a folytonossági axiómák is teljesülnek. Ami az egyenesek kölcsönös helyzetét illeti, ezekre vonatkozólag vagy az euklideszi, vagy a Bolyai—Lobacsevszkij posztulátum lehetséges. Ezzel ki van mutatva, hogy az adott axiómarendszerrel az euklideszi vagy a Bolyai—Lobacsevszkij geometria jellemezhető.

A most elmondottakban a geometria projektív és csoportelméleti szempontból történő megalapozásának néhány fontosnak látszó mozzanatát ismertettük, amelyekből egyrészt az látható, hogy a Bolyai—Lobacsevszkij-féle geometria más szempontból hogyan fogható fel, másrészt kitűnik, hogy ezen az alapon hogyan lehet újabb geometriai rendszerekhez eljutni.

A geometriai kutatásoknak egy harmadik új irányzatát *B. Riemann* híres habilitációs előadása: „Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen"[21] jelenti. Ez a tereknek differenciálgeometriai jellemzése.

Klein Erlangeni Programmjának tárgyalásánál már szó volt arról, hogy a geometriai tér bizonyos N-méretű sokaság, amelyen egy transzformációs csoport van értelmezve. Nem emeltük ki ezzel kapcsolatban még azt, hogy a sokaság fogalma szabatos értelmezést kíván. Ennek szükségességét először *Riemann* látta, aki az említett előadásában, amely az Erlangeni Programmot 18 évvel előzte meg, az első lépéseket tette meg a sokaság fogalmának értelmezéséhez. Egy rekurrens eljárással jut el arra, hogy az n-méretű térnek egy pontja rendezett szám n-esekkel jellemezhető, tehát a sokaság az aritmetikai tér bizonyos tartományának homeomorf képe. Megjegyezzük, hogy a dimenziónak a Riemann-féle értelmezéséhez analog értelmezését *H. Poincaré*[22] adta. A *Riemann* által értelmezett geometria két fogalmon alapul.

1. Az n-méretű sokaságon, amelyben a pontnak nevezett elem egy rendezett x^i $(i=1,\ldots,n)$ szám n-es.

2. A mérés fogalmán, amely szerint megkívánjuk, hogy egy pont környezetében a mérést Pythagoras tétele határozza meg.

A második követelmény részletesebben annyit jelent, hogy az ívelem négyzete a dx^i koordinátadifferenciálokban egy oly pozitív definit kvadratikus forma, amelynek együtthatói a pontkoordináták függvényei. *Riemann* az ívelemből kiindulva egy olyan kifejezést vezetett be, amely a felületelemnek függvénye. E függvényt a tér görbületi mértékének nevezi. Ha a felületelemet a Plücker-féle $(\varDelta x)^{ik}$ koordináták határozzák meg, akkor e görbületi mérték olyan hányados, amelynek mind a számlálója, mind a nevezője a $(\varDelta x)^{ik}$ koordinátákban kvadratikus forma. A nevezőben álló forma a felületelem négyzetének a mértéke. A számlálóban szereplő kvadratikus formulát úgy kapja, hogy az ívelem négyzetének előállításában a másodrendű tagokon kívül negyedrendűeket is tekintetbe vesz. *Riemann* megállapítja, hogy a térben egy alakzat szabadon mozgatható legyen, és e mozgásnál az alakzat mérési viszonyai ne változzanak, annak szükséges és elegendő feltétele az, hogy a görbületi mérték állandó legyen. Amennyiben ez az állandó negatív, vagy pozitív, éppen a Bolyai—Lobacsevszkij, illetve az elliptikus nem-euklideszi geometriát kapjuk. Ha az állandó zéró, akkor a tér az euklideszi térrel azonos.

Riemann második hipotézisét, mely szerint a tér lokálisan euklideszi, a következőképpen indokolja meg:

Először feltételezi, hogy az n-méretű térben minden vonal minden vonallal mérhető. Ha tehát egy görbét mérni akarunk, azt felbonthatjuk mérhető elemi részekre. Ha egy ilyen elemi részt az x^i és x^i+dx^i pontok határoznak meg, akkor ennek a résznek a hosszát a dx^i vonalelemhez tartozó ds ívelemnek nevezi. A mérték additivitása miatt feltételezi, hogy az ívelem a dx^i-kben elsőfokú homogén függvény, amely nem függ a dx^i vonalelem irányításától. Az ívelemnek további meghatározásához *Riemann* nem-szomszédos pontok távolságát is felhasználja. Ha $\underset{0}{x}^i$ egy rögzített pont és x^i egy változó, de $\underset{0}{x}^i$-től állandó távolságú pont, akkor e pontok távolságát az $F(x,\underset{0}{x})$ függvény határozza meg. E függvény az $\underset{0}{x}^i$ pont környezetében minden x^i-re növekszik, tehát $\underset{0}{x}^i$-ben minimuma van. Feltételezi, hogy e függvény legalább kétszer folytonosan differenciálható. A minimum feltétel miatt a függvény differenciáljában a lineáris tagok eltünnek és a dF a

$$dF=\sum_{i,k}\frac{\partial^2 F(x,\underset{0}{x})}{\partial x^i\,\partial x^k}\,dx^i\,dx^k$$

alakot veszi fel. De az $\underset{0}{x}^i$ pontból kiinduló dx^i vonalemhez tartozó ívelem négyzete e kifejezéstől csak egy, az $\underset{0}{x^i}$ ponttól függő állandóban különbözhetik. Az ívelem négyzete tehát tényleg a differenciáloknak egy kvadratikus formája. *Riemann*nak ez a megindokolása azonban hézagos, mert hallgatólag fel kell tételeznie, hogy két nem-szomszédos pontnak is van távolsága, ami az általános Riemann-terekben általában nem teljesül. Amikor az általános Riemann-terek között az euklideszi és a két nem-euklideszi geometriát azzal jellemzi, hogy az idomok torzítás nélkül, szabadon mozgathatók, implicite olyan folytonos és tranzitív transzformációs csoport létezését feltételezi, amelynél az ívelemet jellemző kvadratikus differenciálforma invariáns.

Riemann második hipotézisének megindokolása és az euklideszi és a nem-euklideszi geometriák megalapozása teljesen kielégítő módon a már említett *Helmholtz*[18] és Lie-féle[19] vizsgálatoknak köszönhető. E vizsgálatokban mérésről nincsen szó, hanem csak arról, hogy az n-méretű térben, — amely *Riemann* első hipotézise szerint az aritmetikai térnek homeomorf képe — a szabad mozgathatóságot egy G folytonos transzformációs csoporttal értelmezik a következő módon:

Ha P a térnek egy tetszőleges pontja és $M_1, \ldots, M_k, \ldots, M_{n-1}$ e ponton átmenő felületelemek az első dimenziótól az $n-1$ dimenzióig, akkor rögzített P mellett a G-nek transzformációi az M_1-et egy tetszőleges M_1'-be az M_1-en átmenő M_2-t az M_2'-be egy M_k-t, amely az előző $M_1, M_2, \ldots, M_{k-1}$ elemeken megy át egy tetszőleges $M_1, \ldots, M_{k-1}$-en átmenő M_k'-be viszi át. Amennyiben $k=n-1$, az egymásra illeszkedő $M_1, \ldots, M_{n-1}$ felületelemek rendszere csak az azonos transzformációnál marad változatlanul.

Ilyen feltételek mellett *Lie* bizonyította be szigorúan, hogy a tér csupán az euklideszi, vagy a két nem-euklideszi térrel lesz azonos. Ilyen térben azonban az ívelem négyzetét kvadratikus differenciálforma határozza meg, és ehhez az ívelemhez tartozó görbületi mérték állandó.

Tekintsünk most el attól, hogy a térnek szabad mozgathatósága egy G tranzitív csoporttal van biztosítva és tételezzük fel a következőket. Az a vektortér, amely egy pontból kiinduló dx^i vonalelemekből áll, bármilyen P pontban a következő értelemben rendelkezzék szabad mozgathatósággal:

A dx^i-kre hasson egy P_n projektív csoport, amely a P-ből kiinduló $M_1, \ldots, M_{n-1}$ felületelemeket az előbb említett módon transzformálja, nevezetesen az azonos transzformáció az egyetlen, amely egy egymásra illeszkedő $M_1, \ldots, M_{n-1}$ elemrendszert változatlanul hagy.

Ilyen feltétel mellett létezik a dx^i-kben a P_n csoporttal szemben invariáns kvadratikus forma. Ha két vonalelemet akkor tekintünk egybevágónak, amenynyiben van a P_n-nek olyan transzformációja, amely a két vonalelemet egymásba viszi át és ha az egybevágó vonalelemek hosszát egyenlőknek tekintjük, akkor az ívelem négyzete éppen *Riemann* második hipotézisét elégíti ki. Ezzel a szintén *S. Lie*től származó megállapítással *Riemann* második hipotézisének mély értelme feltárul.

Ha a térnek a szabad mozgathatóságában kifejezésre jutott homogenitását mint főtulajdonságot tekintjük, akkor úgy látszik, hogy *Riemann* munkája hiábavaló volt, mert végül is csak az euklideszi és nem-euklideszi térnek van jelentősége. *Riemann* azonban másképpen gondolkozott erről. Azt mondja, hogy a térnek a metrikáját olyan belső okok determinálják, amelyek különösen a fizika segítségével magyarázhatók meg. *H. Weyl*[23] *Riemann* e gondolatait úgy interpretálja: „Állítja, hogy a tér egy formátlan háromméretű sokaság és csak a teret kitöltő matéria formálja ezt és határozza meg a metrikáját". *Einstein* relativitás elmélete ezt az állítást fényesen igazolta.

Mostanáig a *Riemann* geometriát egy bizonyos koordinátarendszerben tekintettük. *Riemann* második hipotézisének Lie—Helmholtz-féle elemzése független a koordinátarendszertől. A kvadratikus formának tehát koordinátainvariánsnak kell lennie. Nyilvánvaló azonban, hogy a Riemann geometriában bármilyen geometriai tényt kifejező relációnak függetlennek kell lennie a koordinátarendszertől. Egy ilyen koordinátainvariáns kalkulust *G. C. Ricci*[24] vezetett be. A kalkulus algebrai alapját a tenzoralgebra képezi. A tenzort lényegében bizonyos rendszámú felületelemek határozzák meg és ezeknek rendszáma meghatározza a tenzor rendszámát is. Az analitikus része pedig szintén koordinátainvariáns differenciáloperátorok bevezetéséből áll. Ilyen módon a közönséges és parciális deriváció helyébe egy invariáns, illetve kovariáns deriváció lép. Az első a mennyiségek tenzoriális jellegét nem változtatja meg, míg a második a tenzorok rendszámát egy egységgel növeli. Egy Descartes-féle koordinátarendszerre vonatkoztatott euklideszi térben e derivációk a közönséges deriválási műveletekre redukálódnak. E fogalmak lényegesen áttekinthetőbbé váltak, amikor *Levi—Civita*[25] a Riemann-térben vektoroknak egy görbe mentén való párhuzamos eltolását értelmezte. E párhuzamos eltolás a vektorok hosszát és a vektorok által bezárt szöget változatlanul hagyja. A párhuzamos eltolás segítségével az invariáns differenciált lényegében úgy értelmezhetjük, mint a közönséges derivációt. Amennyiben valamilyen vektort önmagával párhuzamosan egy másodrendű felületelemen fekvő infinitezimális zárt görbén vezetünk körül, a kezdő- és véghelyzet különbségvektora éppen azt a negyedrendű tenzort adja, amely a Riemann-féle görbületi mértéket határozza meg. Ez az ú. n. Riemann—Christoffel-féle görbületi tenzor. Innen adódik a görbületi mérték koordinátainvariáns jellege. Ide kapcsolódik a Riemann geometriának a következő alapvető problémája. Meghatározandó a differenciálinvariánsoknak olyan rendszere, amely szükséges és elegendő a tér jellemzésére. Ilyen rendszer megadása után tehát eldönthető, hogy két Riemann-tér ekvivalens-e, azaz hogy ívelemük koordinátatranszformációval egymásba átvihető-e. Ezt az alapvető problémát *E. B. Christoffel*[26] oldotta meg. Eredménye modern terminológiával kifejezve a következő:

A differenciálinvariánsoknak rendszere az ívelemet meghatározó kvadratikus differenciálformán kívül azokból a formákból áll, amelyeknek együtthatói a görbületi tenzor, illetve a tenzorból kovariáns derivációval nyerhető tenzorok.

Ebből az következik, hogy a görbületi tenzor és a kovariáns deriváció művelete elegendő a tér koordinátainvariáns jellemzéséhez.

Megállapítható, hogy a differenciálgeometria segítségével megalapozható terek, a mi tárgyalásunkban tehát az általános Riemann-terek, nem tartoznak azok közé a geometriák közé, amelyek a Klein-féle csoportelméleti szempont alapján értelmezhetők. Mert ha ez így volna, akkor ez a tér szabad mozgathatóságát vonná maga után és az az előző megállapítások szerint nem az általános Riemann-terekre, hanem csupán az euklideszi és a két nem-euklideszi geometriára vezetne. *J. A. Schouten*tól[27], majd *E. Cartan*tól[28] olyan vizsgálatok indultak ki, amelyeknek célja a Klein-féle csoportelméleti felfogásnak olyan kibővítése, amelybe az újonnan felfedezett geometriák is besorolhatók. E célból *Schouten* a következőképpen járt el:

J. A. Schouten eljárása a következő: Tekintsünk a tér valamely pontjában értelmezett vektor n-élt, és egy tetszőleges, a P pontba visszatérő görbét. Ha az n-élt párhuzamosan eltoljuk e görbe mentén, amig ismét P-be visszatér, akkor a párhuzamos eltolás tulajdonságaiból következik, hogy ezt az n-élt az eredeti n-élbe a forgáscsoportnak egy transzformációjával átvihetjük. Ha most a P ponton áthaladó összes zárt görbét tekintjük, akkor kimutatható, hogy a hozzátartozó forgások a forgási csoportnak egy G alcsoportját képezik. E G csoport izomorfizmusoktól eltekintve független a választott n-éltől. Kimutatható továbbá, hogy ezzel az eljárással a tér minden pontjához hozzárendelhető összes csoport egymással izomorf, tehát ugyanazt az absztrakt csoportot jelenti.

A térnek valamely pontjában értelmezett vektor n-élt a tér lokális euklideszi volta miatt mindig lokális euklideszinek tekinthetjük. *E. Cartan* az előbb említett zárt görbét a pontjaiban értelmezett lokális euklideszi terekkel együtt izometrikusan képezi le az n-méretű euklideszi térre. E leképezésnél a zárt görbéből nyílt görbét kapunk, és P-nek mint kezdő- és végpontnak két képpontja lesz. A P pontban nyert két n-él képei egy transzlációval és egy forgással fedésbe hozhatók. Ha ezt az eljárást a P-hez tartozó összes zárt görbékre elvégezzük, akkor a most említett transzformációk a mozgási csoportnak olyan M alcsoportját határozzák meg, amely független a P ponttól, és homogén része azonos a G csoporttal. Ez az M csoport a Riemann-féle tér ú. n. holonómia-csoportja. Egyes szerzők már a G csoportot is így nevezik.

E csoport még a következő alapvető tulajdonsággal is rendelkezik. Tekintsünk két P és Q pontot, és az ezekhez tartozó lokálisan euklideszi tereket, és e két pontot összekötő valamilyen görbét. Ha ξ^i egy vektor P-ben, akkor ezt a P-nek lokális terében pontként foghatjuk fel. Hogyha a Q-hoz tartozó lokális térben ehhez a ponthoz azt a pontot rendeljük hozzá, amely a ξ^i vektornak Q-ba való párhuzamos eltolásával áll elő, akkor e két lokális tér között egy kongruens leképezést nyerünk, Az összes bármilyen lokális terek között előálló kongruens leképezések éppen az M csoportot határozzák meg.

Az *M* holonómia-csoport a Riemann-teret a következő értelemben határozza meg:

Ha az euklideszi térnek egy *M* alcsoportjából indulunk ki, akkor kimutatható, hogy az mindig egy Riemann-térnek holonómia-csoportjaként tekinthető és a Riemann-teret ez jellemzi is. Az erre vonatkozó vizsgálatokat, amelyek egyúttal a Riemann-tér megszerkesztésére vezetnek, *G. Laptyev*[29] kielégítő módon fejezte be. *Laptyev* adott Lie-féle csoportból kiindulva a Riemann-térnél általánosabb típusú tereket is szerkesztett. E terek szerkesztésénél lényeges szempont a csoportnak a Lie-féle operátorok segítségével történő előállítása. Ezeknek lineáris kombinációval a csoportnak bármilyen infinitezimális transzformációja meghatározható. A Riemann-féle tér esetén a szerkesztésnél egy n-méretű sokaságból indulunk ki és ennek elemeit lokális euklideszi tereknek tekintjük. Két tetszőleges szomszédos lokális térnek kongruens leképezését az adott csoport infinitezimális transzformációja határozza meg. Ez azonban a párhuzamos eltolást is meghatározza. A metrikának, amely a lokális terek euklideszi volta miatt amúgy is lokálisan euklideszi, olyannak kell lennie, hogy e metrikából levezethető párhuzamos eltolás az előbb nyert párhuzamos eltolással megegyezzék. E lépéseknek tényleges kivitele csupán parciális differenciálegyenletek megoldását kívánja.

A Riemann-geometriának két főproblémáját vizsgáltuk meg. Az ekvivalencia-problémát, valamint a geometria alárendelését csoportelméleti szempontoknak a holonómia-csoport segítségével. A térnek kizárólagos alapeleme a pont volt. A Riemann-geometriában azonban az egyeneseknek is van közvetlen analogonja, t. i. a metrika által meghatározott geodetikus vonalak. E vonalak fontos szerepét még a Riemann-geometria most vázolt kifejlesztése előtt *Beltrami* vette észre. *Beltrami* ezeknek a vonalaknak segítségével a két nem-euklideszi geometriának és az állandó görbületű tereknek azonosságát mutatta ki. *Beltrami*[30] olyan Riemann-terek egymásra való leképezését tanulmányozta, amelyeknél geodetikus vonalak geodetikus vonalakba mennek át. Nevezetesen azt az esetet vizsgálta meg, amikor az adott tér olyan térre képezhető le, amelynek geodetikus vonalai lineáris egyenletekkel állíthatók elő. Ez azt jelenti, hogy az adott tér leképezhető az euklideszi térre. *Beltrami* arra az eredményre jutott, hogy ilyen leképezés akkor és csak akkor lehetséges, ha az adott tér állandó görbületű. A nem-euklideszi geometriával való összefüggést két dolgozatban tárgyalta; az egyik a kétdimenziós esetre vonatkozik[31], — a másik tetszőleges dimenzióra[32]. E dolgozatokban kimutatja, hogy amennyiben a görbület egy negatív állandó, akkor a fentemlített leképezésnél a térnek pontjai egy hipergömb belsejébe esnek. A geodetikus vonalak tehát a hipergömb húrjai lesznek. A kép különböző dimenziójú síkjainak az eredeti térben totálgeodetikus sokaságok felelnek meg. Ha most a hipergömböt abszolút alakzatnak tekintjük, akkor az ennek segítségével képezett Cayley-féle metrikában az ívelem pontosan megegyezik az eredeti tér ívelemével. Ebből következik, hogy e tér geometriája a Bolyai—Lobacsevszkij-geometriával azonos. Pozitív görbület esetén a tér az egész euklideszi térre képezhető le. Ha abszolút alakzatnak egy nem-elfajuló teljesen képzetes másodrendű felületet veszünk, akkor a hozzátartozó Cayley-féle metrikának íveleme megegyezik az eredeti tér ívelemével. A geometria tehát az elliptikus geometriával azonos.

Az előzőkből következik, hogy az állandó görbületű terekben totálgeodetikus felületek a második dimenziótól egészen az $(n-1)$-edik dimenzióig léteznek és ezeknek képei az euklideszi képtérben megfelelő dimenziójú közönséges síkok. Állandó görbületű terekben tehát minden pontban, minden irányban léteznek totálgeodetikus sokaságok. *F. Schur*[33] kimutatta, hogy ha a Riemann-tér két pontján át bármilyen irányban fektethetők totálgeodetikus felületek, akkor ez a tér bármilyen pontjára nézve is lehetséges és a tér állandó görbületű. *Beltrami* gondolatára visszatérve ki kell emelnünk, hogy ő lényegében csak a geodetikus vonalakat és ezeknek leképezéseit használta fel. Ez a gondolat olyan geometriáknak a kialakulásához vezetett, amelyeknek elemei a ponton kívül másodrendű differenciálegyenletekkel meghatározott pályagörbék. E pályagörbe-geometriának alapjait *H. Weyl*[34], *L. P. Eisenhart*[35], *O. Veblen*[36] és *T. Y. Thomas*[37] fektették le. Ahogy a Riemann-geometria az euklideszi geometriának általánosításaként tekinthető, úgy a pályagörbék geometriája a projektív geometriának általánosítása. Ez ugyanis egy tiszta helyzetgeometria, amelynek tárgya olyan tulajdonságok kivizsgálása, amelyek a pályatartó leképezéseknél változatlanok maradnak. Ebben az összefüggésben *B. Kagan*nak[38] szubprojektív terekre vonatkozó vizsgálatait kell említenünk. *Kagan* olyan pályageometriát vizsgált meg, amelyben a pályagörbe egy megfelelő koordinátarendszerben egy közönséges kétdimenziós síkban fekszik. Feltételezi továbbá, hogy az összes pályagörbéhez tartozó ilyen sík a tér egy rögzített pontján megy át. Azok a koordinátarendszerek, amelyekben ez a tulajdonság változatlan marad, éppen a szubprojektív térnek csoportját alkotják.

A nem-metrikus pályageometria és a Riemann-geometria közé még olyan geometria sorolható be, amely a Riemann-geometriának *H. Weyl*-től[39] származó affin általánosítása. Ezt a geometriát az jellemzi, hogy az n-méretű tér lokális vektorterei között egy, a lokális tereket összekötő görbéktől is függő affin leképezés van értelmezve. Az affinösszefüggést bizonyos Γ^i_k paraméterek határozzák meg. Ezeket az tünteti ki, hogy koordinátatranszformációkkal szemben bizonyos transzformációs törvénynek tesznek eleget.

Amennyiben egy n-méretű sokaság valamilyen pontjához tartozó vektortértől nem követeljük a szabad mozgathatóságot, akkor az ívelem négyzetét már nem a koordinátadifferenciálokban kvadratikus forma határozza meg. Erre az esetre már *Riemann* is rámutatott habilitációs előadásában, de az így keletkező metrikus geometriát csak *P. Finsler*[40] építette ki disszertációjában. A ds ívelemet most egy $F(x, dx)$ függvény adja meg, amely a dx^i-kben elsőfokú pozitív homogén. E geometria egyeneseit most az $\int F(x, \dot{x})\, dt$ variációs problémához tartozó extremálisok képezik, ezek tehát a térnek pályagörbéi. A tér most csupán egy rögzített irány környezetében mozgatható szabadon. Ez annyit jelent, hogy most nem egy ponthoz, hanem egy vonalelemhez tartozik egy lokális euklideszi tér. Célszerű tehát a teret nem pont-, hanem vonalelemsokaságként felfogni.

E geometriának koordinátainvariáns kalkulusát *L. Berwald*[41] dolgozta ki először. *Berwald* azonban még nem tekintette a teret vonalelemsokaságként s így az általa bevezetett invariáns derivációhoz tartozó párhuzamos eltolásnál a vektorok hossza nem marad változatlanul. Pedig e tulajdonság a Riemann-térben a Levi—Civita-féle párhuzamos eltolásnak éppen egyik főtulajdonsága.

E. Cartan[42] a sokaságot már vonalelemsokaságként tekinti s így sikerült neki 1934-ben a megfelelő invariánskalkulust bevezetnie. Ha most nem zárt görbét, hanem egy vonalelemsokaságot tekintünk, amelynél a kezdő és végső vonalelem megegyezik, akkor a vektorok párhuzamos körülvezetésével három görbületi tenzorhoz jutunk. Ezek közül az egyik speciálisan a Riemann-geometria esetével a Riemann—Christoffel-féle görbületi tenzorra redukálódik, míg a másik két tenzor eltűnik. E tenzor segítségével *Berwald*[41] a Riemann-féle görbületi mértéket a Finsler-térre általánosította. E tenzor egyébként egy egyszerűbb tenzorral, az ú. n. főgörbületi tenzorral helyettesíthető, amelyet *Varga Ottó*[43] vezetett be. Ismeretes, hogy a Riemann-tér esetében valamilyen felületelemhez tartozó görbületi mérték megegyezik annak a felületnek Gauss-féle görbületével, amelyet azok a geodetikus vonalak határoznak meg, amelyek a felületelem kezdőpontján mennek át és ezt érintik. Ilyen felületet a felületelem kezdőpontjában geodetikusnak nevezünk. *Varga Ottó*[44] kimutatta, hogy a Finsler-féle tér egy felületeleméhez és annak egy bizonyos irányához tartozó Berwald-féle görbület megegyezik az ugyancsak a felületelem kezdőpontjában meghatározható geodetikus felületnek az adott irányhoz tartozó, *Finsler*től származó belső görbületével. E Finsler-féle belső görbület olyan felületeknél, amelyeknek metrikáját egy kvadratikus forma határozza meg, a Gauss-féle görbületre redukálódik. A Finsler-geometriának differenciálinvariánsok egy rendszerével történő jellemzését, — ami ismét a tér ekvivalenciaproblémájával azonos —, *Varga Ottó*[43] oldotta meg. Arra az eredményre jutott, hogy a metrikát meghatározó $F(x, dx)$ függvényhez tartozó alaptenzor a főgörbületű tenzor, valamint két más, a Riemann-tértől való eltérést jellemző tenzor és ezeknek kovariáns derivációi egy teljes invariáns rendszert adnak.

Ebben az esetben is a *Beltrami* vizsgálatoknak megfelelően felvethetjük azt a kérdést, milyen Finsler-terek képezhetők le egymásra úgy, hogy pályagörbéik egymásba menjenek át. E leképezéseket *L. Berwald*[45] tanulmányozta először. Szempontunkból itt is az az eset érdekes, amikor az adott tér olyan térre képezhető le, amelynek pályagörbéi lineáris egyenletekkel határozhatók meg. Az ilyen tereket röviden síkprojektívnak nevezzük. Ebben az esetben azonban nem következik, hogy a térnek Berwald-féle görbületi mértéke állandó. Amennyiben még azt is megköveteljük, hogy a tér görbülete egy negatív állandó legyen, és egy görbének a hossza független legyen az irányitásától, azaz $F(x, \dot{x}) = F(x, -\dot{x})$ akkor az így nyert terek pontosan megegyeznek — az előadásom elején említett — Hilbert terekkel, amelyeknek abszolút alakzata egy konvex felület. Amennyiben az állandó zéró, a Minkowszki-geometriát kapjuk. Míg azonban a Finsler-terek között a Hilbert-terek az előbb említett három tulajdonsággal jellemezhetők: t. i. 1. a tér síkprojektív, 2. állandó görbületű, 3. teljesül az $F(x, \dot{x}) = F(x, -\dot{x})$ reláció, addig a Minkowszki-geometriára ez nem érvényes, ugyanis léteznek olyan Minkowszki-geometriák amelyekre az $F(x, \dot{x}) = F(x, -\dot{x})$ nem teljesül. A Hilbert- és Minkowszki-féle tereknek, mint speciális Finsler-tereknek e jellemzése *P. Funk*tól[46] és *L. Berwald*tól[47] származik. *E. Cartan*[42] és *Varga Ottó*[48] kimutatták, hogy a Minkowszki-féle geometria mint speciális Finsler geometria, az utóbbi két tenzorának eltűnésével jellemezhető.

Végigtekintettünk a geometria, s különösképpen a differenciálgeometria újabbkori hatalmas fejlődésén. Hangsúlyoznunk kell, hogy e hatalmas fejlődést *Bolyai* és *Lobacsevszkij* zseniális alkotása inditotta el.

IRODALOM

1 *P. Stäckel:* „Untersuchungen aus der absoluten Geometrie aus Johann Bolyai's Nachlass." Természettudományi Értesítő *13* (1902).

2 *D. Hilbert:* „Grundlagen der Geometrie" 7. kiadás. Berlin, 1930.

3 *M. Pasch:* „Vorlesungen über neuere Geometrie" 2. kiadás. *Dehn*nel közösen. Berlin 1934.

4 *F. Klein:* „Über die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie." Előzetes jelentés. Nachrichten der kgl. Ges. der Wiss. Göttingen *17,* 1871. E dolgozat részletezése és továbbfejlesztése ugyanazon cím alatt két cikkben a Math. Ann. *4,* 1871., Math. Ann. *6,* 1873., vagy Gesammelte Mathematische Abh. 1.

5 *M. Dehn:* „Die Legendreschen Sätze über die Winkelsumme im Dreieck". Math. Ann. *53,* 1900.

6 *D. Hilbert* „ Neue Begründung der Bolyai—Lobatschefskyschen Geometrie" Math. Ann. *57,* 1903. és Grundlagen der Geometrie Anh. III.

7 *A. Cayley:* „Six Memoir upon Quantics." Lond. Trans. *149,* 1859., vagy Coll. Math. papers 2. — „A memoir on abstract geometry. Lond. Trans. *160,* 1870., vagy Coll. math. papers 6.

8 *Chr. von Staudt:* „Beiträge zur Geometrie der Lage". Nürnberg, 1849.

9 *F. Klein:* „Nachtrag zu dem zweiten Aufsatz über Nicht-Euklidische Geometrie". Math. Ann. 7, 1874., vagy Gesammelte Abh. *1.* E dolgozatban *Zeuten* és *Lüroth* észrevételei is le vannak közölve.

10 *E. Darboux:* „Sur les théorèm fondamental de la géometrie projective" Math. Ann. *17,* 1880.

11 *E. Laguerre:* „Notes sur la théorie des foyers." Nouv. Ann. *12,* 1853. p 64, vagy Oeuvres 2.

12 *L. S. Pontrjagin:* „Über stetige algebraische Körper". Annals of Math. *33,* 1932.

13 *H. Minkowski:* „Geometrie der Zahlen" Leipzig, 1896.

[14] *D. Hilbert:* „Über die gerade Linie als kürzeste Verbindung zweier Punkte." Math. Ann. *46,* 1895. vagy Grundlagen der Geometrie, Anh. 1.

[15] *St. Golab:* „Quelques problèmes métriques de la géométrie de Minkowski" Trav. Acad. Mines Cracovie *6,* 1932.

[16] *St. Golab* und *H. Härlen:* „Minkowskische Geometrie I—II." Mh. Math. und Phys. *38,* 1931.

[17] *F. Klein:* „Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen". Erlangen 1872. és Math. Ann. *43,* 1893.

[18] *H. Helmholtz:* „Über die Tatsachen die der Geometrie zu Grunde liegen." Medizinischer Verein zu Heidelberg *4,* 1866., vagy Wissenschaftl. Abt. *2,* és Göttinger Nachrichten 1868.

[19] *S. Lie—F. Engel:* „Theorie der Transformationsgruppen III." 5. fejezet, Leipzig, 1893.

[20] *D. Hilbert:* „Über die Grundlagen der Geometrie." Math. Ann. *56,* 1902. vagy Grudlagen der Geometrie, Anh. IV.

[21] *B. Riemann:* „Über die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen." Habilitációs értekezés 1854. Göttinger Abh. *13,* 1863.

[22] *H. Poincaré:* „Revue de métaphysique et de morale", 1918. 486.

[23] *H. Weyl:* „Raum-Zeit-Materie". 5. kiadás Berlin 1923.

[24] *G. C. Ricci:* „Sulla derivazione covariante ad una forma quadratica differenziale." Rend. Acad. Lincei 1887.

[25] *Levi—Civita:* „Nozione di parallelismo in una varietá qualunque." Rend. Circ. Mat Palermo *42,* 1917.

[26] *E. B. Christoffel:* „Über die Transformation der homogenen Differentialausdrücke zweiten Grades." Crelle's Journal *70,* 1869., vagy Gesammelte Math. Abh. 1.

[27] *J. A. Schouten:* „On the number of degrees of freedom of the geodetically moving systems". Proc. Kon. Acad. Wet. Amsterdam *21,* 1918.

[28] *E. Cartan:* „Les groupes des espaces généralisées." Acta Math. *18,* 1926.

[29] *G. Laptyev:* Dokladü Akad. Nauk. *71,* no. 4, 597—600, 1950.

[30] *E. Beltrami:* „Sulla Flessione delle Superficia Rigate." Annali di Matematica *7,* 1866

[31] *E. Beltrami:* „Saggio di interpretazione della geometria non-euklidea" Giornale di Matematiche, 1868.

[32] *E. Beltrami:* „Theoria fondamentale deglo spazie di curvature costante" Annali di Matematica, Ser. II. 2, 1868/69.

[33] *F. Schur:* „Über den Zusammenhang der Räume constanten Riemannschen Krümmungsmasses mit den projektiven Räumen". Math. Ann. 27, 1886.

[34] *H. Weyl:* „Einordnung der projektiven und konformen Auffassung." Göttinger Nachr. 1921.

[35] *L. P. Eisenhart:* „Spaces with corresponding paths." Proc. N. A. S. *8,* 1922.

[36] *O. Veblen:* „Projective and affine geometry of paths." Proc. N. A. S. *8,* 1922.

[37] *O. Veblen* and *T. Y. Thomas:* „The geometry of paths." Trans. Amer. Math. Soc. *25,* 1923.

[38] *B. Kagan:* „Sur les espaces soubprojectifs" C. R. Acad. Sci. Paris *191,* 1930; „Über eine Erweiterung von projektiven Raum und dem zugehörigen Absolut." Trudi szeminara po vektorn. i tenzorn. analizu. Moszkva 1, 1933.

[39] *H. Weyl:* „Reine Infinitesimalgeometrie." Math. Z. *2,* 1918.

[40] *P. Finsler:* „Über Kurven und Flächen in allgemeinen Räumen." Disszertáció, Göttingen 1918. és Basel 1951.

[41] *L. Berwald:* „Über Parallelübertragung in Räumen mit allgemeiner Massbestimmung." Jahresb. der Deutschen Math. Ver *34,* 1925; „Untersuchung der Krümmung allgemeiner metrischer Räume auf Grund des in ihnen herrschenden Parallelismus." Math. Z. *25,* 1926.

[42] *E. Cartan:* „Les espaces de *Finsler.*" Actualités scientifiques et industrielles *79,* Paris 1934.

[43] *O. Varga:* „Über affinzusammenhängende Räume von Linienelementen insbesondere deren Äquivalenz." Publ. Math. *1,* Debrecen, 1949.

[44] *O. Varga:* „Über das Krümmungsmass in Finslerschen Räumen." Publ. Math. *1,* Debrecen, 1949.

[45] *L. Berwald:* „Über Finslersche und Cartansche Geometrie. IV." Annals. of Math. *48,* 1947.

[46] *P. Funk:* „Über Geometrien bei denen die Geraden die Kürzesten sind." Math. Ann. *101,* 1929.

[47] *L. Berwald:* „Über die *n*-dimensionalen Geometrie konstanter Krümmung, in denen die Geraden die kürzesten sind." Math. Z. *30,* 1929.

[48] *O. Varga:* „Zur Begründung der Minkowskischen Geometrie." Acta Sci. Szeged *10,* 1943.