A TÉR FOGALMÁRÓL A TOPOLÓGIÁBAN

P. SZ. ALEKSZANDROV

Előadta az ünnepi ülésszak 1952 december 15-én tartott ülésén

A nem-euklideszi geometria megalkotásának egyik alapvető következménye annak a ténynek a felismerése volt, hogy az euklideszi geometria rendszere nem az egyetlen elgondolható geometriai rendszer. Ilymódon felmerült a geometriai idomok különböző, ezeket vagy amazokat az axiómákat kielégítő, rendszerei tanulmányozásának problémája. A geometriai idomok különböző ilyen rendszerei („sokaságok"* vagy „absztrakt terek") alkotják a különféle geometriai ismeretágak (a különféle „geometriák") tanulmányainak tárgyát.

Bennünket a jelen referátumban azok az axiómatikusan bevezetett geometriai relációk érdekelnek, amelyeket topológiaiaknak neveznek és amelyek tanulmányozásával a topológia foglalkozik.

A határérték és a folytonosság alapvető topológiai fogalmai axiómatikus tanulmányozásának utjára elsőkként *Maurice Frèchet*, francia matematikus és *Riesz Frigyes*, a kiváló magyar matematikus léptek, kb. ugyanabban az időben, 1906 körül. *Frèchet* értekezésében olyan, manapság a matematikában már biztos helyet elfoglaló fogalmakat vezetett be, mint amilyenek a metrikus tér, a kompaktság és a teljesség fogalmai; ezenkívül *Frèchet* értekezése számos kísérletet tartalmaz arra nézve, hogy eljussunk a topológiai tér fogalmához, azaz, hogy axiómatikus útat találjunk az alapvető topológiai relációkhoz (a halmaz határpontja, a leképezés folytonossága) *közvetlen úton,* elkerülve a távolság fogalmát. Azonban ebben a tekintetben *Frèchet* nem aratott sikert: a topológiai tér fogalma számos, általa javaslatba hozott változata közül egyik sem tekinthető sikerültnek. Másrészt kb. ugyanebben az időben *Riesz F.* megformulázza a topológiai tér axiómáit, közvetlenül axiómatizálva a határpont fogalmát és ilymódon eljut a topológiai terek azon osztályához, amely a T_1-*terek* osztálya elnevezés alatt a mai topológiában teljesen végleges helyet foglalt el.

Így tehát a *topológiai* tér fogalma első sikeres bevezetéséért a tudomány *Riesz F.*-nek tartozik hálával. Emellett igen nevezetes dolog, hogy *Riesz F.* ugyanekkor a topológiai tér direkt axiómatikáját is javaslatba hozta, azaz egy oly axiómatikát, amely közvetlenül érinti a topológiailag invariáns relációkat (az adott esetben a halmaz és a halmaz határpontjai halmaza közötti relációkat) és amely nem használ fel semilyen segédapparátust (mint amilyen pl. a környezetek rendszerének fogalma). Erre az utóbbi fogalomra építette fel a topológiai terek axiómatikáját 1914-ben *Hausdorff* az ő híres, a halmaz-

* Oroszul: Многообразия, németül: Manningfaltigkeiten. (Lektor megjegyzése.)

elméletről szóló könyvében. *Hausdorff* axiómatikája definiálja a Hausdorff-féle vagy T_2-terek elnevezése alatt ismert tereket. Ez az osztály szűkebb, mint a *Riesz* által bevezetett T_1-terek osztálya és közöttük megkülönböztetést tehetünk az erősebb, ú. n. Hausdorff-féle szeparációs axióma segítségével.

Jelenleg a topológiai tereknek a szeparációs axiómák szerinti osztályozása már teljesen meg van határozva és alakja a következő: a szó széles értelmében vett topológiai tér fogalma nem tételez fel semilyen szeparációs axiómát: topológiai tér alatt a tetszőleges természetű (a tér pontjainak nevezett) oly elemek halmazát értjük, melyben bizonyos, az illető tér nyílt halmazainak nevezett részhalmazok ki vannak emelve; emellett teljesültnek tételezzük fel a topológiai tér következő axiómáit:

A nyílt halmazok bármely számának összege és véges számú nyílt halmaz metszete, nyílt halmaz; az egész tér és az üres halmaz nyíltak.

A zárt halmazokat úgy határozzuk meg, mint a nyílt halmazok kiegészítéseit. Nyilvánvaló, hogy a zárt halmazok kielégítik a következő feltételeket: a zárt halmazok bármely számának metszete és véges számú zárt halmaz összege, zártak; az egész tér és az üres halmaz, zárt halmazok. Ebből folyik, hogy az R tér valamennyi, az M halmazt tartalmazó, zárt halmazának metszete $[M]$, a legkisebb zárt halmaz, amely az M halmazt magában foglalja; az $[M]$ halmazt az M halmaz *zárt burkának* nevezzük, annak pontjait pedig *érintési pontoknak*.

A lezárás művelete, amely kölcsönös megfelelőségbe hozza minden M halmazzal az M zárt burkát, kielégíti a következő feltételeket:

1. $[M_1 \cup M_2] = [M_1] \cup [M_2]$
2. $M \subseteq [M]$
3. $[[M]] = [M]$
4. Az üres halmaz zárt burka üres: $[\Lambda] = \Lambda$.

Lehetséges volna a topológiai teret úgy definiálni, hogy azt követeljük, hogy valamely adott R halmaz minden M részhalmaza részére meg legyen határozva egy $[M]$ zárt burok olyképpen, hogy emellett teljesülnek az 1—4-feltételek; ezután a zárt halmazok úgy volnának meghatározva, mint oly halmazok, amelyek saját zárt burkukkal egybeesnek, a nyílt halmazok pedig mint olyan halmazok, amelyek a zárt halmazokat kiegészítik. Az ilyen módon definiált topológiai terek pontosan ugyanazok, mint amelyeket kezdetben a nyílt halmazok útján definiáltunk. A topológiai tér fogalma bevezetésének ez a módja *Kuratowsky*tól ered (1922), aki ilymódon a topológikus tér mai *legszélesebb* fogalmának szerzője.

A topológiai terek osztályának fokozatos csökkentését a szeparabilitás folytonosan erősödő axiómáinak bevezetése útján valósítjuk meg. Nevezzük valamely adott halmaz (valamely adott pont) környezetének az oly tetszőleges nyílt halmazt, amely ezt a halmazt (ezt a pontot) magában foglalja. A szeparabilitás egymásután következő axiómái a következő módon formulázhatók meg:

T_0 *axióma (Kolmogorov).* A térnek bármely két különböző pontja közül legalább az egyiknek van egy oly környezete, amely a másik pontot nem foglalja magában.

T_1 *axióma (Riesz).* A tér bármely tetszőleges két különböző pontja közül mindegyiknek van egy oly környezete, amely nem foglalja magában a másik pontot.

T_2 *axióma (Hausdorff).* A tér bármely két különböző pontjának vannak egymást nem metsző környezetei.

T_3 *axióma.* Bármilyen legyen is az x pont és az e pontot nem tartalmazó Φ zárt halmaz, az x pontnak és a Φ halmaznak vannak egymást nem metsző környezetei.

T_4 *axióma.* Bármely két egymást nem metsző zárt halmaznak vannak egymást nem metsző környezetei.

Riesz T_1 axiómája ekvivalens azzal a követeléssel, hogy bármely egy pontból álló halmaz zárt legyen. Ennek folytán a zárt halmazok (környezetek útján történő) szeparabilitásából nem következik a pontok szeparabilitása. Hogy az egész rendszert ne tegyük túlságosan bonyolulttá, T_1-tereknek, vagy Riesz-féle tereknek azokat a topológiai tereket fogjuk nevezni, amelyek a T_1 axiómát kielégítik, míg azokat a T_1-tereket, amelyek a T_3, ill. T_4 axiómákat elégítik ki, T_3-, ill. T_4-tereknek fogjuk nevezni.

A T_3-tereket, másszóval *reguláris*, a T_4-tereket pedig *normális* tereknek nevezik.

A környezetek útján való szeparabilitás mellett, amely a topológiai terek imént elvégzett osztályozásának alapjául szolgált, van még egy másik a szeparabilitáshoz vezető út is, nevezetesen az ú. n. *funkcionális szeparabilitás.* Azt fogjuk mondani, hogy valamely adott R T_1-térnek két Φ_0 és Φ_1 zárt halmaza funkcionálisan szeparálható, ha létezik egy oly, az egész R térben értelmezett és abban folytonos f* valós függvény, amely a Φ_0 halmaz valamennyi pontjában a 0 értéket, a Φ_1 halmaz valamennyi pontjában az 1 értéket veszi fel és valamennyi $x \in R$ pontban kielégiti az $0 \leqq f(x) \leqq 1$ egyenlőtlenséget.

P. Sz. Urysohn bebizonyította azt, az Urysohn-féle lemma néven ismeretes, nevezetes tételt, mely abból áll, hogy normális térben bármely két egymást nem metsző zárt halmaz funkcionálisan szeparálható. Minthogy másrészt nyilvánvaló, hogy bármely két funkcionálisan szeparálható halmaz környezetek útján is szeparálható, ennélfogva Urysohn lemmája értelmében a funkcionális szeparáció követelése a szóbanforgó tér valamennyi egymást nem metsző zárt halmazpárjára alkalmazva, ekvivalens a környezetek útján való szokásos szeparáció követelésével. Azonban ha csak azt követeljük, hogy a T_1-tér min-

* Az X topológiai tér f leképezését az Y topológiai térre folytonosnak nevezzük, ha minden az Y-ban nyilt halmaz teljes inverz képe az X-ben nyílt halmaz; az X-térben értelmezett valós folytonos függvény e térnek folytonos leképezése a számegyenesre.

den pontja, minden ezt a pontot nem tartalmazó zárt halmaztól legyen funkcionálisan szeparálható, úgy a terek új, rendkívül fontos osztályát kapjuk, amely szűkebb, mint a reguláris terek osztálya és szélesebb mint a normális terek osztálya. A tereknek ezt az osztályát *A. N. Tyihonov* vezette be 1925-ben, a teljesen reguláris terek osztálya elnevezés alatt. Ezeket a tereket T_ϱ-tereknek, vagy Tyihonov-féle tereknek is nevezik. A Tyihonov-féle terek jelentősége különösen a bikompakt terek elméletével kapcsolatosan válik világossá, amelyre még rátérünk; ez a jelentőség azzal kapcsolatos, hogy a tér teljes regularitásának sajátsága (eltérően a normalitás sajátságától), úgy szólván örökölhető sajátság, azaz, ha valamely tér ezzel a sajátsággal bír, úgy minden az illető térben fekvő halmaz is bír ezzel a sajátsággal.*

A topológikus tér fogalmának egy további specializálása két egymástól teljesen különböző irányban megy végbe: ezek közül az első abból a követelésből áll, hogy a térben megszámlálható bázis álljon fenn.**

Ez a követelés *P. Sz. Urysohn* alapvető tétele értelmében kifejezi azt a feltételt, amely szükséges és elegendő ahhoz, hogy a normális tér a Hilbert-féle térben fekvő valamely halmazzal homeomorf legyen.

Ha ehhez a követeléshez hozzátesszük még a véges dimenzió követelését,*** úgy megkapjuk azt a feltételt, amely szükséges és elegendő ahhoz, hogy a tér egy ilyen vagy olyan dimenziószámú euklideszi térben fekvő halmazzal homeomorf legyen.

Ilyen módon megkapjuk a topológikus terek általános elmélete előtt álló első alapvető feladat megoldását, — nevezetesen a legáltalánosabb idomok: a szó legszélesebb értelmében vett topológikus terek „logikai leengedését" a Hilbert vagy euklideszi tér ponthalmazaihoz: *a normalitás* (sőt már a regularitás is****) *a megszámlálható bázis fennállásával együtt* teljesen karakterizálja topológiai szempontból a *Hilbert-féle térben fekvő halmazokat, a*

* Minden az R topológiai térben fekvő M halmaz topológiai tér: M-ben nyiltaknak tekintjük az oly halmazokat, amelyek az M halmaznak az R tér nyílt halmazaival való metszetei.

** A topológikus tér bázisának e tér nyílt halmazai bármely oly rendszerét nevezzük, amely azzal a sajátsággal rendelkezik, hogy a térnek *bármely* nyílt halmaza bizonyos a rendszer elemeit alkotó halmazok összege.

*** A dimenzióelmélet nem tartozik bele a jelen referátum tárgykörébe, ennélfogva arra szorítkozom, hogy csak induktív módon említem meg a dimenzió definícióját. Üres halmaznak a -1 dimenziót tulajdonítjuk; feltételezzük, hogy már definiálva vannak az $n-1$ dimenziójú terek. Azt mondjuk, hogy az R topológikus térnek n dimenziója van, ha a térnek van olyan bázisa, mely bázis elemeinek határai oly dimenzióval birnak, amely $\leqq n-1$ és ha ugyanakkor a szóbanforgó térben nincsenek olyan bázisok, melyek elemeinek határai az $n-2$ dimenzióval birnának. Valamilyen az R topológikus térben fekvő Γ nyílt halmaz határa alatt a Γ halmaz azon érintési pontjainak halmazát értjük, melyek nem tartoznak bele ebbe a halmazba, tehát a $[\Gamma]-\Gamma$ halmazt.

**** Amint azt *A. N. Tyihonov* kimutatta, minden megszámlálható bázisú reguláris tér normális.

regularitás, a megszámlálható bázis fennállása és a véges dimenzió követelménye együtt, a maguk összességében, *szolgáltatják az euklideszi terekben fekvő halmazokat.*

Az „elementáris“ ponthalmazok (azaz a Hilbert-féle és euklideszi terekben fekvő halmazok) topológiai jellemzésének problémájával szorosan össze van kötve a topológikus terek második nagy problémája, a *metrizáció problémája,* azaz a szükséges és elegendő feltételek megkeresése ahhoz, hogy a topológikus tér homeomorf legyen egy metrikus térrel. Minthogy minden metrikus tér normális és a Hilbert-féle tér is metrikus, ennélfogva az imént közölt Urysohn-féle tétel, amely arról szól, hogy minden megszámlálható bázissal biró normális tér homeomorf valamilyen a Hilbert-féle térben fekvő halmazzal, a következő módon formulázható meg: *Ahhoz, hogy a megszámlálható bázissal biró tér metrizálható legyen* (azaz egy metrikus térrel homeomorf legyen) *szükséges és elegendő, hogy a nevezett tér normális legyen.*

A metrizáció általános problémája — megszámlálható bázis térben való létezésének a feltételezése nélkül — három évtizeden át nem volt megoldható, annak ellenére, hogy különböző szerzők erre számos kísérletet tettek. Igaz ugyan, formálisan adódtak bizonyos megoldásai ennek a problémának, nem is egyszer, de e megoldások egyike sem (az elsőt közülük *P. Sz. Alekszandrov* és *P. Sz. Urysohn* 1923-ban adták meg) volt sikeresnek és véglegesnek tekinthető, tekintettel a kikötött feltételek nehézkes voltára. Végül egy minden tekintetben kimerítő megoldást adott meg 1950-ben *Ju. Szmirnov,* fiatal szovjet tudós. Nevezzük valamely adott topológikus térben fekvő halmazok bármely rendszerét lokálisan végesnek, ha a tér bármely pontjának van oly környezete, amely a szóbanforgó rendszernek csupán végesszámú elemeit metszi. Szmirnov tétele a következő módon formulázható meg: ahhoz, hogy *valamilyen topológikus tér metrizálható legyen, szükséges és elegendő, hogy ez a tér reguláris legyen és legyen olyan bázisa, amely előállítható mint legfeljebb megszámlálhatóan végtelen sok, nyilt halmazok lokálisan véges rendszerének összege.* Ez a nevezetes eredmény speciális esetként magában foglalja *Urysohn* metrizációs tételét: minthogy bármely tér megszámlálható bázisa természetesen előállítható mint megszámlálhatóan végtelen sok olyan rendszer összege, melyek mindegyike csak egy elemből áll, ennélfogva valamely megszámlálható bázisú tér metrizálhatóságához szükséges és elegendő annak reguláris volta.

Ju. Szmirnov metrizációs feltételének szükségessége közvetlenül következik minden metrikus tér *Stone* által már korábban bebizonyított parakompaktsága sajátságából — abból a tulajdonságból, mely abból áll, hogy a metrikus tér minden fedésébe* beírható egy lokálisan véges fedés. A feltétel

* Fedés alatt itt és a továbbiakban nyilt halmazok oly rendszerét értjük, melyek összege az egész adott tér. Azt mondjuk, hogy a β fedés be van írva az α fedésbe, ha a β fedés minden eleme, az α fedésnek legalább egy elemében benne foglaltatik.

elégséges voltát egy oly módszer útján bizonyíthatjuk be, amely bizonyos mértékig magában véve is érdekes. Nevezetesen *Ju. Szmirnov* kimutatja, hogy minden az ő feltételeit kielégítő adott τ súlyú* R topologikus tér homeomorf valamely oly halmazzal, amely a τ súlyú H^{τ} általánosított Hilbert-féle térben fekszik.**

Az R térnek a H^{τ}-ba való keresett topologikus leképezését a következő módon szerkesztjük meg. Mindenekelőtt *Ju. Szmirnov* metrizációs feltételéből levezethetjük, hogy az R tér nem csak reguláris, hanem normális is és hogy abban bármely zárt halmaz nyílt halmazok megszámlálható számának metszete és következésképpen bármely zárt halmaz valamely folytonos függvény nullhelyeinek halmaza.

Most vegyük az R tér γ bázisát, amely a nyílt $\Gamma_{n\alpha}$ halmazok lokálisan véges $\gamma_n = \{\Gamma_{n\alpha}\}$ rendszerei megszámlálható számának összege. Θ-val jelöljük valamennyi $\theta = (n\alpha)$ pár halmazát, amelyek a γ bázis $\Gamma_{n\alpha}$ elemeinek jelölésére szolgálnak. Minthogy R normális és minden R-ben zárt halmaz, valamely az R-ben folytonos függvény nullhelyeinek halmaza, ennélfogva minden $\Gamma_{n\alpha}$-ra megszerkeszthetjük a $p_{n\alpha}$ folytonos függvényt, amely minden $x \in R$-re nézve kielégíti a $0 \leq p_{n\alpha}(x) \leq 1$ egyenlőtlenséget és az $R - \Gamma_{n\alpha}$ halmaz valamennyi pontjában és csak ezekben a pontokban nullává válik. Minthogy a γ_n rendszer lokálisan véges, ennélfogva minden adott n mellett $x \in R$ pontban csak véges számú $p_{n\alpha}$ függvény különbözik nullától. Ennélfogva az $1 + \sum p_{n\alpha}^2(x)$ összegnek bármely $x \in R$ pontra értelme van és ez az összeg az egész R térben folytonos pozitív függvény. Ennek folytán pedig a

$$q_{n\alpha}(x) = \frac{p_{n\alpha}(x)}{\sqrt{1 + \sum\limits_{\alpha} p_{n\alpha}^2(x)}}$$

függvények is az egész R térben meghatározottak és folytonosak, és e mellett

$$\sum_{\alpha} q_{n\alpha}^2(x) < 1, \quad \sum_{\alpha} (q_{n\alpha}(x) - q_{n\alpha}(y))^2 < 2.$$

* Valamely topologikus tér súlyának a legkisebb olyan τ kardinális számot nevezzük, hogy a térben τ számosságú bázis legyen. Ilymódon a megszámlálható bázissal biró terek $\aleph_0$ súlyú terek.

** A τ súlyú H^{τ} általánosított Hilbert-féle tér a következő módon épül fel. Ennek a térnek pontjai $\xi(\theta)$ függvények, amelyek valamilyen τ számosságú tetszőleges Θ halmazon vannak definiálva, és kielégítik a következő feltételeket:

a) a $\xi(\theta)$ függvény értékei valós számok, amelyek legfeljebb megszámlálhatóan végtelen sok θ argumentum értékére különbözhetnek nullától.

b) A $\sum\limits_{\theta \in \Theta} (\xi(\theta))^2$ sor konvergens. Ugyanúgy mint a közönséges Hilbert-féle térben a ξ és η pontokra a $\sum\limits_{\theta \in \Theta} (\xi(\theta) - \eta(\theta))^2$ sor konvergens és a $\sqrt{\sum (\xi(\theta) - \eta(\theta))^2}$ nem negatív számot a ξ és η pontok közötti távolságnak nevezzük. Könnyű meggyőződni arról, hogy ez a definició a metrikus tér valamennyi távolság-axiómáját kielégíti.

Ha most azt vesszük fel, hogy $\xi_{n\alpha}(x) = \frac{1}{2^n} q_{n\alpha}(x)$, úgy azt látjuk, hogy a $\xi_{n\alpha}(x)$ rendszer, ahol x az R tér tetszőleges pontja, $\theta = (n\alpha)$ pedig befutja az egész Θ halmazt, a H^{τ} tér pontja, amelyet egyuttal $f(x)$-szel jelölünk. Az R térnek a H^{τ}-ba való ilymódon meghatározott f leképezése topológikus, ami által teljessé is válik *Ju. Szmirnov* tételének bizonyítása. Megjegyezzük, hogy könnyű megszerkeszteni egy Hausdorff-féle nem reguláris tér példáját, melynek oly bázisa van, amely előállítható mint megszámlálhatóan végtelen sok lokálisan véges rendszer összege.

Ama számos munka közül, amelyeket az utóbbi években az absztrakt topológia (amint néha nevezik a topológikus terek elméletének) kérdéseiről írtak, azok többsége egy vagy más módon összefügg a *bikompakt tér* fogalmával. Mint ismeretes bikompaktnak az oly topológikus teret nevezzük, amelyben teljesül az ú. n. Borel—Lebesgue-féle tétel, azaz amelyben a nyílt halmazok minden rendszere, amelyek összege az egész tér, véges alrendszert tartalmaz, amely ugyancsak befedi az egész teret („minden fedés magában foglal egy véges fedést"). A bikompakt topológikus terek úgy is definiálhatók, mint olyan topológikus terek, amelyekben a nem üres zárt halmazok *minden* (nem csak megszámlálható) teljesen rendezett csökkenő rendszerének nem üres metszete van, valamint úgy is, mint olyan terek, amelyekben minden végtelen halmaznak legalább egy teljes felhalmozódási pontja van. Emellett az M végtelen halmaz teljes felhalmozódási pontján oly pontot értünk, melynek minden környezete az M halmazt oly részhalmazában metszi, amelynek ugyanaz a számossága van, mint az egész M halmaznak.

A bikompakt topológikus terek között a legérdekesebbek és a legfontosabbak a *bikompakt Hausdorff-féle terek, amelyeket egyszerűen bikompaktumoknak neveznek.*

Valamennyi bikompaktum normális tér is úgy jellemezhető, mint oly normális tér, amely minden őt tartalmazó normális térben zárt; mi több, ezek minden őket tartalmazó Hausdorff-féle térben zártak és az a reguláris tér, amely minden őt tartalmazó Hausdorff-féle térben (vagy esetleg csak minden őt tartalmazó reguláris térben) zárt, bikompaktum.

Az a Hausdorff-féle tér, amely minden őt tartalmazó Hausdorff-féle térben zárt, lehet nem bikompakt is. Azonban ha ezt a minden Hausdorff-féle térben való zártság sajátságát nem csak magától az adott Hausdorff-féle R tértől követeljük, hanem annak minden zárt részhalmazától is, úgy R ismét bikompaktum lesz.*

A bikompakt terek elméletének alapjait *P. Sz. Alekszandrov* és *P. Sz. Urysohn* rakták le „A kompakt topológikus terekről" c. emlékiratukban, már

* Ezt a nehéz tételt hipotézis alakjában *P. Sz. Alekszandrov* és *P. Sz Urysohn* mondották ki és az első ízben *M. Stone* bizonyította be; egyszerű, de továbbra is igen nehéz bizonyítást később *Sz. V. Fomin* adott.

30 évvel ezelőtt. Ennek az elméletnek kifejlesztése mindenekelőtt *A. N. Tyihonov* munkáiban található, aki levezette az ő híres meghatározását, bármely számú topológikus térnek topológikus szorzatáról és bebizonyította azt a fontos tételt, amely szerint tetszőleges számú bikompaktum szorzata bikompaktum. *Tyihonov* speciálisan vizsgálat alá vonta az ő „kockáit", azaz az olyan bikompaktumokat, amelyek tetszőleges adott kardinális számú szakasz topológikus szorzatai. *Tyihonov* bebizonyította, hogy ezek a kockák az univerzalitás következő sajátságával rendelkeznek: bármely, adott tetszőleges τ súlyú teljesen reguláris tér homeomorf valamilyen oly halmazzal, amely ugyanolyan súlyú Tyihonov-féle kockában, azaz a $[0;1]$ szakasz τ példányának topológikus szorzatában fekszik.

Visszaemlékezve arra, hogy valamennyi bikompaktum normális tér és hogy a teljes regularitás sajátsága átörökölhető, az imént megformulázott a „beágyazásról szóló" Tyihonov-féle tételből a következő további fontos eredményt vezetjük le: *minden teljesen reguláris tér és csak a teljesen reguláris tér homeomorf, egy bikompaktumban fekvő halmazzal.*

*Tyihonov*nak a beágyazásról szóló tétele *Urysohn* arról szóló tételének általánosítása, mely szerint lehetséges bármely (teljesen) reguláris teret, melynek megszámlálható bázisa van, a Hilbert-féle alapparallelepipedonba topológikusan beágyazni, minthogy a Hilbert-féle alapparallelepipedon $\aleph_0$ súlyú Tyihonov-féle kocka. *Urysohn tétele, annak Tyihonov által adott általánosítása és Szmirnov metrizációs tétele azt mutatják, hogy milyen kényszerítő erővel törnek be a végtelen dimenziós koordinátaterek és ezekkel együtt — a valós szám — az absztrakt topológia oly területére, mely a valós számoktól teljesen függetlennek látszik.* Ennek általános alapja abban az Urysohntól eredő nevezetes tételben rejlik, amelyet fentebb Urysohn lemmájának neveztünk.

A *Tyihonov* értelemben vett topológikus szorzás fogalma más nevezetes topológikus szorzatok gyanánt definiálható terek vizsgálatára vezetett. Ezek között rámutatunk a D^τ térre — a τ súlyú diszkontinuumra —, amely a két izolált pontból álló tér, (egyszerű pontkettős) τ példányának szorzata, és az F^τ térre, amely az összefüggő pontkettősnek nevezett tér τ példányának szorzata. Összefüggő pontkettősön az egyetlen összefüggő T_0-teret értjük. Ez két pontból áll: e térbe a két pont egyike az egyetlen valódi nyílt részhalmaz (a másik pont következésképpen az egyetlen valódi zárt részhalmaz). A D^τ és F^τ terek a következő univerzalitási sajátságokkal rendelkeznek: bármely τ súlyú T_0-tér homeomorf az F^τ tér valamilyen részhalmazával és következésképpen* kölcsönösen egyértelmű és folytonos képe valamilyen a D^τ térben fekvő halmaznak: minden τ súlyú bikompaktum valamilyen a D^τ térben fekvő zárt halmaznak folytonos képe.

Amint tudjuk minden kompaktum, azaz megszámlálható súlyú bikompaktum, a $D^{\aleph_0}$ Cantor-féle diszkontinuum folytonos képe; ha $\tau > \aleph_0$, úgy nem minden

* Nyilvánvalóan minden F^τ tér a D^τ térnek kölcsönösen egyértelmű és folytonos képe.

τ súlyú bikompaktum az egész D^τ tér folytonos képe; azokat a bikompaktumokat, amelyek a D^τ diszkontinuumok folytonos képei, *diadikusok*nak nevezzük, ezek nyilvánvalóan a terek oly legkisebb osztályát alkotják, amely tartalmazza az izolált pontpárt, és amely osztály zárt a folytonos leképezés és a topológikus szorzás operációival szemben. Ez az osztály különleges tanulmányozást érdemel: a diadikus bikompaktumok sok nevezetes sajátsággal birnak, melyek közül néhányat *N. A. Sanin* állapított meg. Így pl. minden folytonosan rendezett halmaz, amely a maga természetes topológikus rendjében diadikus bikompaktumot alkot, hasonló a számegyenes valamely szakaszához; a diadikus bikompaktum nem állítható elő teljesen rendezett (bármilyen hatványú) rendszer összege alakjában, mely rendszer növekvő, sehol sem sűrű részhalmazokból áll stb.

Az összefüggő pontkettős fentemlített példája azt mutatja, hogy ha a topológikus tér fogalmát elegendő általánossággal fogjuk fel (nevezetesen ha a T_0-tereket vizsgáljuk), úgy véges halmaznak is lehet nem triviális topológiája. A véges T_0-terek és általában az oly T_0-terek, amelyekben (bármely véges vagy végtelen számban vett) nyílt halmazoknak nem csak az összege, hanem a metszete is nyílt, *diszkrét terek* néven ismeretesek. A diszkrét terek speciális esetét alkotják a szimpliciális komplexusok.

* * *

A bikompaktumok arról nevezetesek, hogy azok valamennyien és csak azok kaphatók meg egy sajátságos határátmenet útján, a véges diszkrét terekből, sőt a véges szimpliciális komplexusokból kiindulva. Ez a körülmény nagy elvi jelentőséggel bir, minthogy éppen ez volt az alapja annak, hogy a kombinatórikus topológia komplexusainak alapvető fogalmait és módszereit átvitték bikompaktumokra, és mindenek előtt kompaktumokra.

Azt a határátmenetet, amelyre itt gondolunk, én szerkesztettem meg az 1925—29 években, kezdetben a kompaktumokra. A határátmenetet azután *A. G. Kuros* a tetszőleges bikompaktumok esetére általánosította. Az ú. n. „projekciós spektrum", amely ennek a közelítő eljárásnak lényegét alkotja, további fejlődést nyert *Freudenthal, Sztinrod, Čech, Lefsetz* és sok más kutató munkáiban és ebben a kiszélesített alakjában hatékony eszközévé vált állandóan nemcsak a topológiának, hanem a topológikus csoportok elméletének és az utóbbi alkalmazásainak is.

Képzeljük el az X_α topológikus terek egy olyan ú. n. irányított* halmazát, melynél ha ezen halmazban X_β következik X_α után (amit egyszerűen a következőképpen írunk le: $\beta > \alpha$), akkor adott egyuttal az X_β tér egy $\tilde{\omega}^\beta_\alpha$ folytonos leképezése a X_α térbe, melyet projekciónak nevezünk és amely a tranzitivitás feltételeit kielégíti: ha $\gamma > \beta > \alpha$, úgy $\tilde{\omega}^\gamma_\alpha = \tilde{\omega}^\beta_\alpha \tilde{\omega}^\gamma_\beta$.

* Irányított halmaznak nevezünk egy részben rendezett halmazt, ha bármely két elemhez tartozik egy oly harmadik elem, mely mindkét elem után következik.

Projekciós spektrumnak nevezzük az X_α terek irányított halmazát, az ezen tereket összekötő $\tilde{\omega}_\alpha^\beta$ projekciókkal együtt és $\{X_\alpha, \tilde{\omega}_\alpha^\beta\}$-vel jelöljük.

Nevezzük a spektrum *szálának* az $x_\alpha \in X_\alpha$ pontok minden halmazát, melyben minden X_α-ból egy-egy elem van,* amelyek kielégítik a következő feltételt: $\beta > \alpha$ esetében mindenkor fennáll, hogy $\tilde{\omega}_\alpha^\beta x_\beta = x_\alpha$. *A szálak topológikus teret alkotnak:* bármely X_α-ban vegyünk egy tetszőleges Γ_α nyílt halmazt és jelöljük O_{Γ_α}-val valamennyi szál halmazát, „amely keresztül halad Γ_α-n", azaz ama $\xi = \{x_\alpha\}$ szálak halmazát, melyekre nézve $x_\alpha \in \Gamma_\alpha$.

Az O_{Γ_α} halmazok és azok valamennyi lehetséges összege alkotják az adott spektrum összes szálaiból álló térnek a nyílt halmazait. Ez a szálak tere, amit az adott projekciós spektrum limesének is neveznek és lim $\{X_\alpha, \tilde{\omega}_\alpha^\beta\}$-vel jelölnek.

E fogalomnak különböző speciális esete és változata létezik. A legfontosabb speciális esetek közül egyeseket megkapunk, ha feltételezzük, hogy valamennyi X_α bikompaktum. Ekkor, mint ahogy azt nem nehéz belátni, az $X = \lim \{X_\alpha, \tilde{\omega}_\alpha^\beta\}$ limesztér zárt halmaz valamennyi X_α tér topológikus szorzatában és következésképpen bikompaktum.

Különösen fontos eset az, amikor valamennyi X_α bikompakt topológikus csoport, az $\tilde{\omega}_\alpha^\beta$ projekciók pedig folytonos homomorfizmusok. Ekkor a limesztér is csoport a következő koordinátánkénti szorzással: ha $\xi = \{x_\alpha\}$, $\eta = \{y_\alpha\}$ két szál, úgy $\xi\eta = \{x_\alpha y_\alpha\}$. Ezt a módszert arra, hogy adott X_α csoportokból kiindulva új csoportokat szerkesszünk, széles körben alkalmazzák, speciálisan a Betty-féle csoportok különböző analógiáinak meghatározásánál. A módszert más célokra is alkalmazzák. Fussa be pl. α az összes $\alpha = 1, 2, 3, \ldots$ természetes számértékeket és legyen minden X_α oly tér, amely 2^n izolált pontból áll. A pontok mindegyike valamilyen

$$(i_1 \ldots i_n)$$

kombináció, melyben valamennyi i_k 0-val vagy 1-gyel egyenlő. A projekciókat a következőképpen definiáljuk:

$$\tilde{\omega}_n^{n+1}(i, \ldots i_{n+1}) = (i, \ldots i_n).$$

A limesztér a teljes Cantor-féle halmaz.

A második példában vegyük fel ujból, hogy $\alpha = 1, 2, 3, \ldots$ Az X_α tér a $|z| = 1$ kör a komplex változó síkján. Rögzítettnek tekintve az $m_\alpha \geqq 2$ egész számok

$$m_1, m_2, \ldots m_\alpha, \ldots$$

sorozatát, definiáljuk minden α-ra a projekciót mint $X_{\alpha+1}$ leképezését X_α-ra, amelyet a

$$z_\alpha = z_{\alpha+1}^{m_\alpha}$$

formula szolgáltat.

* Az általánosság korlátozása nélkül feltételezhetjük, hogy az X_α tereknek nincsenek páronként közös pontjaik.

A limesztér a legáltalánosabb szolenoid — egydimenziós kontinuum a háromdimenziós térben, amely a sorban egymásba skatulyázott C_α gyűrűalakú testek (ezek homeomorfak egy közönséges torusz belsejének zárt burkával) metszete, melyek közül $C_{\alpha+1}$ C_α belsejében található és benne m_α-szor csavarodik körül.

A projekciós spektrumok másik határesetét megkapjuk, ha feltételezzük, hogy valamennyi X_α véges diszkrét T_0-tér. Ekkor az $X = \lim \{X_\alpha, \tilde{\omega}_\alpha^\beta\}$ limesztér, melyet ebben az esetben a spektrum *teljes* limeszének fogunk nevezni, — szintén T_0-tér. Azonban itt emellett a teljes limesz mellett érdekes megvizsgálni még más határalakzatokat is, nevezetesen az ú. n. alsó és felső határokat. Szoritkozzunk ezek közül az elsőnek a definíciójára. Azt fogjuk mondani, hogy a $\zeta = \{x_\alpha\}$ szál magában foglalja a $\zeta' = \{x'_\alpha\}$ szálat, ha minden α-ra nézve fennáll,* hogy $x'_\alpha \in [x_\alpha]$. A szálat minimálisnak nevezzük, ha az semilyen tőle különböző szálat nem foglal magába. A szóbanforgó spektrum teljes limeszének részhalmazát, mely valamennyi minimális szálból áll, a spektrum alsó határának nevezzük. A projekciós spektrum alsó határa szintén bikompakt tér. Ez a bikompakt tér Hausdorff-féle tér, ha a spektrum kielégíti a következő szeparabilitási feltételt:

(H). *Bármilyen legyen is a két $\xi' = \{x'_\alpha\}$ és $\zeta'' = \{x''_\alpha\}$ minimális szál, találhatunk egy olyan α-t, hogy az X_α-ban ne létezzék semmi olyan x_α pont, amelynek zárt burka tartalmazza mind az x'_α mind az x''_α pontokat.***

Így tehát a spektrumnak a (H) feltételt kielégítő alsó határa egy bikompaktum.

Bebizonyítható a megfordított állítás is, nevezetesen, hogy minden bikompaktum valamilyen oly spektrumnak alsó határa, mely spektrum kielégíti az imént megfogalmazott (H) szeparabilitási feltételt.

Ez a spektrum a következő módon épül fel. Vizsgáljuk az R tér egymást páronként nem metsző $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_i$ nyílt halmazainak bármilyen véges rendszerét, mely halmazoknak összege, az R-ben mindenütt sűrű. Az X_α diszkrét tér pontjait alkotja a definíció értelmében valamennyi $(\alpha; i_1, \ldots, i_r)$ alakú lehetséges kifejezés, ahol $[\Gamma_{\alpha i_1}] \cap \ldots [\Gamma_{\alpha i_r}] \neq \Lambda$ (mint mindenkor Λ az üres halmaz). Azon célból, hogy X_α-ban topológiát vezessünk be (vagy ami ugyanaz, hogy az X_α halmazt részben rendezetté tegyük), vegyük fel, hogy

$$(\alpha; j_0, \ldots, j_q) \leqq (\alpha; i_0, \ldots, i_p),$$

ha $i_0, \ldots, i_p$ néhány index a $j_0, \ldots, j_q$-k közül.

* A véges diszkrét terek vizsgálata pontosan ekvivalens a véges részben rendezett halmazok vizsgálatával: vegyük fel, hogy $x'_\alpha \leqq x_\alpha$, ha az adott X_α diszkrét tér x'_α pontja beletartozik az ugyanezen α tér x_α pontjából álló halmaz zárt burkába.

** Azaz nem létezik olyan x_α, melyre nézve egyidejűleg fennállana, hogy $x_\alpha \geqq x'_\alpha$ és $x_\alpha \geqq x''_\alpha$ (ha X_α-át úgy tekintjük, mint részben rendezett halmazt).

Tegyük fel, továbbá, hogy $\beta > \alpha$, ha a $\beta = \{\Gamma_{\beta_1}, \ldots, \Gamma_{\beta_t}\}$ rendszer az $\alpha = \{\Gamma_{\alpha_1}, \ldots, \Gamma_{\alpha_s}\}$ rendszernek finomítása (továbbosztása), azaz, ha minden $\Gamma_{\beta j}$ bennefoglaltatik valamelyik (és ekkor nyilvánvalóan egyetlen)* Γ_{α_i}-ben.

A projekciókat a következőkképen értelmezzük: minden $\Gamma_{\beta j}$-nek egy egyetlen azt magában foglaló Γ_{α_i} felel meg. Ez a következő definíciót szolgáltatja:

$$\tilde{\omega}_\alpha^\beta(\beta, j) = (\alpha, i).$$

Ezek után vegyük fel, hogy

$$\tilde{\omega}_\alpha^\beta(\beta; j_0, \ldots, j_q) = (\alpha, \tilde{\omega}_\alpha^\beta(\beta, j_0), \ldots, \tilde{\omega}_\alpha^\beta(\beta, j_q)).$$

(A kifejezés egybeeső elemeit csak egyszer vesszük számításba.)

Ez a definíció teljessé teszi az $\{X_\alpha, \tilde{\omega}_\alpha^\beta\}$ spektrum felépítését; ezt a spektrumot az adott R tér spektrumának nevezzük; e spektrum definíciójánál az R tér bikompakt voltát nem használtuk fel; ha R bikompaktum, úgy spektrumának van egy alsó határa, amely homeomorf az R térrel.

A bikompakt terek elméletének különböző kérdései közül a legutóbbi 10—15 év alatt a legnagyobb fejlődésen azok a kérdések mentek át, amelyek a bikompakt topológikus bővítésekre, nevezetesen, a teljesen reguláris terek ilyen bővítésére vonatkoznak.

Tyihonov ama alapvető eredményéből, mely szerint lehetséges minden teljesen reguláris R teret beágyazni egy bikompaktumba, tudniillik az ugyanolyan súlyú Tyihonov-féle kockába, mint amilyen súlyú az adott R tér, következik, hogy *minden teljesen reguláris R térnek van bikompakt bR bővítése*, vagyis oly bikompaktum, amelynek az adott tér mindenütt sűrű részhalmaza: ahhoz, hogy megkapjuk a bR bikompakt bővítést, melynek ugyanaz a τ súlya van, mint magának R-nek, elegendő R-t beágyazni a τ súlyú Tyihonov-féle kockába és ott a zárt burkot venni.

Ezzel kapcsolatosan felmerült valamely adott teljesen reguláris R tér valamennyi bikompakt bővítése tanulmányozásának kérdése általában és ez a kérdés egy nagy érdekes elmélet tárgyául szolgált. Mindenekelőtt valamely adott teljesen reguláris R tér bikompakt bővítései természetes módon részben rendezett halmazt alkotnak: a b_2R bővítés a b_1R bővítés után következik, ha létezik a b_2R térnek b_1R-re való olyan folytonos leképezése, amely mozdulatlanul hagyja R valamennyi pontját. Megállapítható, hogy az R tér valamennyi bikompakt bővítéseinek ilyen módon részben rendezett halmazában van egy legnagyobb elem — azon αR bikompakt bővítés, amely azzal a sajátsággal rendelkezik, hogy az R pontjainak fixen tartása mellett folytonosan leképezhető az R tér bármilyen bikompakt bővítésére. Ez az αR maximális (vagy Čech-féle) bikompakt bővítés egyértelműen meg van határozva maximalitási sajátságai által. Ez a bővítés a következő módon szerkeszthető

* Ekkor, amint azt könnyű belátni, valamennyi adott Γ_{α_i}-ben bennefoglaltatott $\Gamma_{\beta j}$ összege, oly halmaz, amely ebben a $\Gamma_{\alpha i}$-ben mindenütt sűrű.

meg. Az R tér nyílt halmazai γ rendszerét szabályosnak nevezzük, ha e rendszer minden Γ eleméhez a γ rendszerben találhatunk egy oly Γ' elemet, amely a Γ elemnek *alá van rendelve,* azaz, amely teljesen regulárisan van belefoglalva a Γ-ba (abban az értelemben, hogy Γ' és $R-\Gamma$ R-ben funkcionálisan szeparálhatók). Az R tér nyílt halmazai centrált* és szabályos rendszerét, amelyet nem tartalmaz semilyen tőle különböző centrált szabályos rendszer, az R tér *végének* nevezzük.

Könnyű belátni, hogy az R tér tetszőleges x pontja valamennyi környezetének rendszere egy vég. Azonosítva a tér minden pontját azon véggel, amely a pont környezeteiből áll, az R teret úgy tekinthetjük, mint a tér valamennyi vége halmazának részhalmazát. Ebbe a halmazba topológiát a következő módon vezetünk be: legyen Γ valamilyen tetszőleges nyílt halmaz az R-ben; jelöljük O_Γ-val valamennyi oly vég halmazát, melyeknek egyik eleme a Γ halmaz. Az O_Γ halmaz és az ilyen halmazok valamennyi lehetséges összegei definíció értelmében nyílt halmazok az R tér valamennyi vége αR terében. Már láttuk, hogy magát az R teret tekinthetjük úgy, mint az αR térben fekvő halmazt. Az R térnek ez a belefoglalása az αR-be, topológikus belefoglalás és emellett R mindenütt sűrű halmaza az αR térnek. Ilymódon αR az R tér bikompakt bővítése és ugyanez az αR bővítés egyúttal maximális is.**

Ha az alárendelés fogalmát szigorítjuk, azaz nem valamennyi Γ-ba regulárisan belefoglalt nyílt Γ' halmazt tekintjük Γ-hoz alárendelt halmaznak, hanem csak egyeseket ezek közül, úgy hogy emellett betartassanak bizonyos természetes követelések, úgy — minden alkalommal megfelelő *alárendelési szabályt* választva — megkaphatjuk az R térnek nem csak maximális, hanem bármely előre megadott bikompakt bővítését.

Megjegyezzük végül, hogy bármilyen normális R tér spektrumának alsó határa az R térnek maximális bikompakt αR bővítése.

Jelenleg valamely adott teljesen reguláris tér bikompakt bővítései egészen új szempontból vonják magukra a figyelmet. Nevezetesen az ú. n. egyenletes topológia szempontjából. Ismeretes az egyenletes terek („Egyenletes struktúrák") *A. Weil* által javaslatba hozott definíciója. Ezt a definíciót nem tartom kimerítőnek és teljesen kielégítőnek, már azért sem, mert az valami olyan speciális konstrukción alapul, amely a topológikus tér környezetei rendszerével (bázisával) analóg. Ettől a hiánytól mentes a *V. A. Jefremovics* által javaslatba hozott szomszédsági tér fogalma, mely a két halmaz közötti szomszédság fogalmán alapul (teljesen ugyanúgy mint ahogy a közönséges topológia alapját valamely pontnak a halmazhoz való szomszédsága alkotja: „valamely pont szomszédos egy halmazzal, ha beletartozik annak zárt bur-

* Halmazok valamilyen rendszerét akkor nevezzük centráltnak, ha bármely véges alrendszerének nem üres a metszete.

** Az αR tér első felépítését *E. Čech* adta meg 1937-ben, az itt közölt felépítés *E. Čech*étől teljesen különbözik és ezt 1939-ben én hoztam javaslatba.

kába"). *Igy tehát bármily pontoknak nevezett elemek P halmaza definicó értelmében szomszédsági tér, ha részhalmazai között be van vezetve egy szomszédsági reláció, azaz, ha bármely két $A \subseteq P, B \subseteq P$ mennyiségre nézve meg van állapítva, vajjon azok egymással szomszédosak-e vagy sem.* (Ha két halmaz nem szomszédos, úgy azokat egymástól távolesőknek nevezzük.) Emellett feltételezzük, hogy teljesítve vannak a következő feltételek: „a szomszédsági tér axiómái" (ezeket *V. A. Jefremovics* hozta javaslatba):

1. *Ha az A halmaz a B halmazzal szomszédos, úgy a B halmaz is szomszédos az A halmazzal;*

2. *Két A_1 és A_2 halmaz összege akkor és csak akkor szomszédos a B halmazzal. ha az A_1 és A_2 halmazok közül legalább az egyik szomszédos a B halmazzal;*

3. *Két a és b pont akkor és csak akkor szomszédosak, ha azok egybeesnek;*

4. *Minden P halmaz távolesik az üres halmaztól;*

5. *Bármely két távoleső A és B halmaz belefoglalható két egymást nem metsző U és V halmazba, amelyek olyanok, hogy A távolesik $P - U$-tól és B távolesik $P - V$-től. Megjegyzés:* az $U \supseteq A$ halmazt, amely kielégíti azt a feltételt, hogy az A a $P - U$-tól távolesik, az A halmaz „szomszédsági környezetének" nevezzük.

Maga az elmélet megalapítója, *V. A. Jefremovics* kimutatta, hogy minden szomszédsági térbe természetszerűen bevihető topológia (az A halmazhoz szomszédos p pontot az A halmaz érintési pontjának nevezzük), és hogy ebben a topológiában minden szomszédsági tér teljesen reguláris topológikus tér. Megfordítva minden teljesen reguláris térbe bevezethető és pedig általában véve különböző módokon, a halmazok közötti szomszédság* úgy, hogy teljesülnek az 1—5 feltételek. Ilymódon a természetes út a szomszédsági terekhez a következőkből áll: adott a teljesen reguláris R tér; megkeresendők az „általa generált" szomszédsági terek; (azaz mindazok a P szomszédsági terek, amelyek az R tér pontjaiból állnak, és amelyekben a természetes topológia éppen az R teret adja meg nekünk).

Természetesen az X szomszédsági tér Y szomszédsági térre való egyenletesen folytonos leképezésének nevezünk minden olyan leképezést, mely mellett két az X-ben szomszédos halmaz átmegy az Y-ban szomszédos két halmazba. Világos, hogy az ilyen leképezések az X és Y szomszédsági terek természetes topológiája értelmében is folytonosak lesznek. A szomszédsági terek speciális esetét alkotják a metrikus terek (amelyekben szomszédosak az oly halmazok, amelyek egymástól nulla távolságban fekszenek) és a topoló-

* A szomszédság teljesen reguláris R térbe való bevezetésének egyik módja abból áll, hogy két halmazt távolesőknek nyilvánítunk, ha azok R-ben funkcionálisan szeparálhatók.

gikus csoportok. Emellett, mint ahogy azt *V. A. Jefremovics* megjegyezte, a metrikus terek leképezéseinek szokásos egyenletes folytonossága egybeesik a szomszédság értelmében vett egyenletes folytonossággal.

Minden *A. Weil* értelemben vett egyenletes struktúra szintén egyértelműen határozza meg a szomszédságot, de egy és ugyanazon szomszédsági tér általában sok egyenletes teret generál. Ilymódon a fogalmak kölcsönös kapcsolata: teljesen reguláris tér, szomszédsági tér, egyenletes tér, ha így fejezhetjük ki magunkat, az első fogalomnak a másodikra és a másodiknak a harmadikra való fokozatos széthasadásából áll.

Igen érdekesnek, és messzire előtérbe hozottnak látszik a topológiai (teljesen reguláris) terek és a szomszédsági terek közötti kölcsönös viszonylatok kérdése. Itt a dolgok állása teljesen világos, hála *Ju. Szmirnov* következő tételének: *a valamely adott teljesen reguláris R tér által generált szomszédsági terek kölcsönösen egyértelműen megfelelnek az R tér bikompakt bővítéseinek: az R tér minden bR bikompakt bővítésének megfelel egy teljesen meghatározott P_b szomszédsági tér, amelyet R generál, nevezetesen, két halmazt P_b-ben szomszédosnak tekintünk, ha azok zárt burkai bR-ben metszik egymást; emellett ilyen úton megkaphatjuk valamennyi R által generált szomszédsági teret, mindegyiket csak egyszer.* Természetes gondolat, hogy a $P_{b''}$ szomszédsági tér a $P_{b'}$ szomszédsági tér után következik (mind a két tér egy és ugyanazon topológikus teret generálja), ha a $P_{b''}$ térnek a $P_{b'}$-re való azonos leképezése egyenletesen folytonos. Ez a sorrend pontosan megfelel a bikompakt bővítések sorrendjének: a $P_{b''}$ szomszédsági tér akkor és csak akkor következik a $P_{b'}$ után, ha a $P_{b''}$-t generáló $b''R$ bikompakt bővítés (a már korábban megállapított értelemben) a $P_{b'}$ által generált $b'R$ bikompakt bővítés után következik.

Egyben *Ju. Szmirnov* a következő kérdésre is válaszol: mikor van az adott teljesen reguláris R térnek csak egyetlen bikompakt bővítése, vagy (ami a mondottak értelmében ugyanaz) csak egyetlen szomszédsági definíciója. Kiderül, hogy R bikompaktságának feltétele, amely triviális módon elegendő,* egyáltalán nem szükséges. Viszont a szükséges és elegendő feltétel arra, hogy az adott R térnek egyetlen bikompakt bővítése legyen, abból áll, hogy R-ben ne létezzék semilyen funkcionálisan szeparálható nem-bikompakt zárt halmazpár: pl. valamennyi ω_1-nél kisebb rendszám tere (melyben természetes rendszám topológia áll fenn) nem bikompakt, ennek ellenére egyetlen bikompakt bővítéssel bír és következésképpen a szomszédság egyetlen meghatározását engedi csak meg.

A valamely adott teljesen reguláris R tér bikompakt bővítései és az R által generált szomszédsági terek közötti *Ju. Szmirnov* által megállapított kölcsönösen egyértelmű vonatkozás nagy elvi jelentősége abból áll, hogy ilyen

* A szomszédságnak a bikompaktumon való meghatározása egyetlen voltát vizsgálatainak legelején megállapította *V. A. Jefremovics.*

módon a szomszédsági tér fogalmának teljes redukcióját valósítjuk meg, a bikompakt bővítés régebbi fogalmára. Ez a redukció természetesen nem akadályozza a szomszédsági terekkel kapcsolatos speciális problematika létezését (megjegyezzük pl., hogy amint azt *V. A. Jefremovics* kimutatta, az euklideszi és a hiperbolikus sík két különböző szomszédsági teret alkot amelyeket egy és ugyanazon „topológiai sík" generál).

Szmirnov alapvető tételéből az is kijön, hogy minden őt magában foglaló szomszédsági térben zárt szomszédsági tér szükségszerűen bikompakt. Ez azt mutatja, hogy a teljes terek szomszédsági definícióira vonatkozó kérdés nem dönthető el a metrikus terekkel való analógia alapján és külön megközelítést igényel. A teljes metrikus terek osztályozásának feladatát *Szmirnov* szintén megoldotta, de itt nem mehetünk bele most ennek a kérdésnek tárgyalásába. Csak a következő érdekes eredményt említjük meg, amely a szó szokásos értelmében teljes, metrikus terekre vonatkozik: ahhoz, hogy valamilyen R metrikus tér teljes legyen, szükséges és elegendő, hogy a bikompakt bővítésben, amely a szóbanforgó metrikus teret mint szomszédsági teret generálja, csak magának az R-nek pontjai elégítsék ki a megszámlálhatóság első axiómáját.

Itt nincs most időm arra, hogy érintsem a *Szmirnov* által bebizonyított tételeket a szomszédsági terek és az *A. Weil* értelmében vett egyenletes terek közötti kölcsönös vonatkozásokra nézve, és csak az eredeti publikációkra utalhatom azokat, akiket ez a kérdés érdekel.

Befejezve ezt a szükségszerűen rövid áttekintést, azt remélem, hogy ez mindazonáltal képet fog adni, jelenleg a topologikus terek elméletében fennálló érdekes kutatási irányokról, és úgy tűnik nekem, hogy ezek között azok a kutatások, amelyek a szomszédsági terekkel kapcsolatosak, leginkább megérdemlik továbbfejlesztésüket.

IRODALOM

[1] П. С. Александров: „О понятии пространства в топологии" Успехи матем. наук, 2., *1* (1947), 5—57.

[2] В. А. Ефремович: Инфинитезимальные пространства, ДАН СССР, 76., *3* (1951), 341—343.

[3] В. А. Ефремович: Геометрия близости 1, Математический сборник, 31., *1* (1952), 189—200.

[4] Ю. М. Смирнов: О метризации топологических пространств, Успехи матем. наук, *6*, (1951), 100—111.

[5] Ю. М. Смирнов: Отображение систем открытых множеств. Матем. Сборник 31., *1* (1952), 152—166.

[6] Ю. М. Смивнов: О пространствах близости в смысле В. А. Ефромовича, дан СССР, 84., *5* (1952), 895—898.

[7] N. Bourbaki: Actualités scientifiques et industrielles, 858, 1942.