AZ ALGEBRA FEJLŐDÉSÉRŐL, KÜLÖNÖS TEKINTETTEL A HAZAI ALGEBRAI KUTATÁSOKRA

FUCHS LÁSZLÓ

Előadta az 1953. május 29-én tartott nyilvános osztályülésen

I. Bevezetés

A matematikának napjainkban végbemenő hatalmas mértékű fejlődésében döntő szerepet játszanak az algebrai kutatások. Hiszen gondoljunk csak arra, hogy a matematika különféle ágainak új fejezeteire milyen megtermékenyítő hatással volt — és van most is — a modern algebrában kibontakozó, egészen újszerű s csodálatos perspektívákat megnyitó probléma-látás és tárgyalásmód. Így egészen természetes, hogy világszerte mind nagyobb érdeklődéssel fordulnak a kutatók az algebrai problémák felé; ennek nyomán pedig a fejlődés még hatalmasabb lendületet vesz. Hazánkban is, különösen a felszabadulás után, rohamos fejlődésnek indultak az algebrai kutatások, és ma már ott tartunk, hogy a magyar matematikában az analízis elvitathatatlan vezető szerepe mellett főként az algebra terén dicsekedhetünk igen értékes eredményekkel.

Gyorsan fejlődő tudományágaknál sok esetben fennáll annak a veszélye, hogy a fejlődés nem a helyes irányban történik, s különösen fennáll ennek veszélye speciális jellegénél fogva a modern algebrában. Éppen ezért nagy örömmel üdvözöljük a Magyar Tudományos Akadémia III. Osztályának azt a határozatát, hogy megvizsgálja: helyes irányban fejlődnek-e a hazai algebrai kutatások és milyen módon lehetne a kutatásokat még hathatósabban elősegíteni? Az Akadémia Matematikai Bizottsága 1952. évi november 29-i ülésén egy-két algebrista bevonásával már tárgyalta ezt a kérdést és úgy határozott, hogy az 1953. évi akadémiai nagygyűlés alkalmával e kérdést a nyilvánosság bevonásával újra megvitatja. Ezért megbízta a jelen referátum készítőjét, hogy a november 29-i ülés anyagát összefoglalóan, megfelelő módon kibővítve ismertesse. Mielőtt ezen feladatomnak eleget tenném, legyen szabad megjegyeznem, hogy e referátum a magyar algebrai kutatók által a felszabadulás óta elért eredményeket veszi alapul; készítésénél felhasználtam az 1951-ben a Szovjetunióban az algebra fejlődéséről lefolyt roppant érdekes és tanulságos vita anyagát, valamint *Szele Tibor*nak az 1951. évi akadémiai nagygyűlésen tartott kitűnő beszámolóját. Főként az említett ülésen kialakult álláspontot ismertetem, de sok helyen mások, vagy a magam véleményét említem meg.

Az algebra a matematikának egyik legrégibb ága. A számokkal való számolás szabályainak a felismerése, valamint ismeretlenek meghatározására vonatkozó adhoc eljárások jelentik az algebra kezdő stádiumát. Komolyabb, tudományosabb formát akkor kezd ölteni, mikor a már ismert eljárások szisztematikus tárgyalására kerül sor (*Diophantos*, majd *al Chwarizmi*). A fejlődés gyors ütemben csak *Vietá*val, az igen alkalmas szimbolika bevezetése után indul meg: megállapítják a betűkkel való számolás szabályait, majd fokozatosan az egyenletek megoldásának problémája kerül előtérbe. A magasabbfokú egyenletekkel kapcsolatban felmerülő számos igen nehéznek bizonyuló probléma szolgál a fejlődés rúgójául. Így például a gyökjelekkel való megoldhatóság kérdése vezette *Galois*t azon módszerek és fogalmak megalkotására, amelyekkel döntő módon befolyásolta az egész algebra fejlődését. A XIX. században a matematikának rohamléptekkel való előretörése szükségessé tett újabb mennyiségi formákkal való számolást (kvaterniók, mátrixok, geometriai transzformációk stb.). Ezzel párhuzamosan a Bolyai—Lobacsevszkij-féle geometria és az analízis halmazelméleti megalapozására irányuló vizsgálatok hatásaképpen kialakul az axiomatikus módszer fejlett formája. A századforduló után jelentősen megváltozik az algebra arculata. Kezdik észrevenni, hogy a matematika különféle ágaiban felbukkanó és azonos műveleti szabályoknak eleget tevő mennyiségek számára egységes tárgyalásmód kínálkozik, ha eltekintünk e mennyiségeknek és a köztük értelmezett műveleteknek konkrét jelentésétől. Egyre céltudatosabban és mind határozottabb formában összpontosítják a figyelmet csupán a műveleteknek előre megadott és alkalmas módon kiszemelt tulajdonságaira, igen általános tételeket állapítanak meg az axiomatikus módszer segítségével, és maguk a kutatók is meglepődve tapasztalják, hogy az eredmények előre nem is sejtett mértékben nyernek alkalmazást a matematikán belül, de az elméleti fizikában is. Az absztrakt csoport, test, gyűrű, majd háló* fogalmának kialakulása és a hozzájuk fűződő kutatások megindulása jelentik e ragyogó fejlődés legfontosabb állomásait. Az a nagymértékű, mintegy dinamó-szerű kölcsönhatás, amely az algebra ezen új ága és a matematika többi ága között fennáll, hatalmas nyereséget jelentett az egész matematika számára és igen sok kutatót vonzott e terület munkásainak sorába. Kifejlődnek az algebra egyes határterületein a matematikának fontos és ma is nagy iramban fejlődő ágai (folytonos csoportok elmélete, topologikus algebra stb.), és egyre dúsabb termést hoznak az algebrának fiatal hajtásai.

Az algebrának ez a nagymértékű és sokirányú fejlődése igen nehézzé teszi a mai algebra felosztását. A már említett szovjet algebrai vita alkalmával többen is megpróbálkoztak az algebrának különböző szempontok szerint való felosztásával, de egyik sem bizonyult kielégítőnek. Úgy látszik, e téren még sok elvi kérdés vár tisztázásra. Annyi azonban bizonyosnak látszik, hogy szigorú felosztás a fejlődés mai stádiumában aligha lehetséges. A továbbiakban ilyen felosztásra nem lesz szükségünk: tárgykörönként osztályozva tekint-

* *Háló*nak nevezzük az angol *lattice*nek megfelelő fogalmat.

jük végig a fontos hazai eredményeket. Egy dologra azonban már előljáróban utalnom kell. A számelmélet hovatartozásáról még nem alakult ki egyöntetű vélemény. Bár *A. G. Kuros* szovjet akadémikus és *Rédei László* lev. tag véleménye szerint a számelmélet az algebra részének tekintendő, a többség álláspontját fogadva el, a számelméletet — akár fontosságát, akár módszereit tekintjük — nem degradálhatjuk az algebra egyik alfejezetévé, hanem a matematika önálló, külön ágának kell számítanunk, és ezért referátumomban nem fogok kiterjeszkedni a számelméleti eredményekre.

Hazánkban számottevő algebrai kutatások csak a múlt század második fele óta folynak. Egyre több és értékesebb eredmény, fontos módszer fűződik magyar kutató nevéhez. Hogy csak a legkiválóbbakat említsük: *Hunyady Jenő*, *Kőnig Gyula*, *Rados Gusztáv*, *Kürschák József*, *Bauer Mihály*, *Haar Alfréd*, de ezenkívül sok más matematikus, köztük *Fejér Lipót* is, folytatott algebrai irányú vizsgálatokat. Közvetlenül a felszabadulás előtti időben csupán három kutató működik az algebra területén: *Bauer Mihály* a Galois-elméletben, az algebrai számtestek elméletében, *Hajós György* a csoportelméletben, *Rédei László* pedig az algebrai számtestek elméletében ért el figyelemreméltó eredményeket. *Bauer Mihályt* azonban tanításában korlátozzák, sok kutató matematikus külföldre kényszerül, és így nem tud *Bauer* körül kialakulni egy magyar algebrai iskola. A fiatal *Sándor Gyula*, nagy algebrai ígéretünk a fasizmus áldozata lett. Gyökeres változást hozott e téren is a felszabadulás. Az algebra terén működő kutatók száma szinte ugrásszerűen emelkedett, tehetséges fiatal kutatók tűntek fel, akik már eddig is sok értékes eredménnyel járultak hozzá a magyar matematikai iskola jó hírnevéhez, és egyre határozottabb formában bontakoznak ki annak a magyar algebrai iskolának körvonalai, amely a világhírű magyar analízis iskola nyomdokain halad. A kutatók számának növekedésével együttjárt a kutatási terület spektrumának jelentős kiszélesedése, kivált az absztrakt algebrában: a Galois-elmélet, az algebrai számtestek elmélete és a csoportelmélet bizonyos kérdései helyett ma már a csoport- és a gyűrűelmélet legtöbb fejezetében, emellett pedig az algebra számos más ágában és egy-egy határterületen munkálkodnak kutatóink és érnek el világviszonylatban is figyelemreméltó eredményeket.

Minek köszönhető mármost az algebrának ez a hatalmas fellendülése? Ennek két oka van. Az egyik az algebrának már említett, világszerte megfigyelhető hatalmas előretörése, amelynek nyomán számos, algebrai hagyományokkal rendelkező országban intenzív algebrai kutatások indultak meg. A másik ok pedig az a hatalmas méretű változás, amely tudományos életünkben felszabadulásunk nyomán bekövetkezett. Kormányzatunk tervszerű és egyre intenzívebb tudománypártoló intézkedései, kutatóink erkölcsi és anyagi megbecsülése, a kutatómunka biztosítása, a kutatás lehetőségének egyre szélesebb körök előtt való megnyitása, tudományos utánpótlásunk részére a gondtalan tanulás lehetőségének biztosítása — egész tudományos életünk fellendüléséhez vezetett és igen örvendetes, hogy ilyen szép eredményeket hozott létre az algebrai kutatásokban is. Algebristáink élték a nekik nyujtott lehetőségekkel és meggyőződésünk, hogy már a közeljövő is újabb sikereket fog hozni, újabb eredményekkel fogja gazdagítani a magyar algebrát.

II. Eredményeink

Áttérek most a felszabadulás óta elért fontosabb eredmények ismertetésére. E néhány év alatt algebristáink oly sokoldalú, az algebrának sok kérdéskörét felölelő, kiterjedt tudományos munkásságot fejtettek ki, hogy az eredményeknek még futólagos ismertetésénél sem törekedhetünk teljességre. Egyes, nálunk kevéssé kultivált tárgykörökről csak épphogy említést tehetek — az idevágó eredmények ismertetését nehezen lehetne megvalósítani a rendelkezésemre álló idő keretein belül. Főként a tulajdonképpeni algebrára szorítkozom, az alkalmazási és határterületekről csak röviden fogok szólni, erre nem is érzem magam hivatottnak.

A klasszikus algebrai kérdések nem állottak kutatóink érdeklődésének középpontjában, bár szép eredményekkel e téren is dicsekedhetünk. *Turán Pál* a Descartes-féle jelszabályhoz hasonló alsó korlátot adott a pozitív gyökök számára vonatkozóan; egy másik, alapvető jellegű dolgozatában többek közt kimutatta, hogy a polinomok Hermite-féle kifejtése kapcsolatba hozható egy a gyököket tartalmazó sávval, továbbá több cikkben foglalkozott polinomok gyökeinek approximatív meghatározásával. A Newton-féle gyökközelítő eljárásról írt *Rényi Alfréd* és *Barna Béla*. *Szőkefalvi-Nagy Gyula* számos cikkét szentelte különféle kérdések vizsgálatának, amelyek túlnyomó részben bizonyos polinomok gyökeinek elhelyezkedésére, értékkészletére, abszolút értékére, racionális törtfüggvények pólusaira stb. vonatkoznak. Ezen eredmények egy része klasszikus tételek általánosításai, más része újabb keletű, sok esetben magától a szerzőtől származó eredményeknek továbbfejlesztése.

A mátrix-elmélet terén az *Egerváry Jenő*től és *Gyires Bélá*tól származó újabb eredményeket említhetjük meg. *Egerváry* a mátrixoknak alkalmas kanonikus alakban való előállítása révén jelentős mértékben egyszerűsítette a mátrix-kalkulus bizonyos problémáinak tárgyalását. Eredményeinek már eddig is sok alkalmazása van. A lineáris egyenlőtlenségrendszerek megoldhatóságára vonatkozóan *Surányi János* kapott érdekes eredményt.

Az algebrai struktúrák elméletében különösen gazdag terméssel dicsekedhetünk a csoport- és gyűrűelmélet terén. E területeken is a faktorizáció-probléma és a bővítés-elmélet, valamint a végtelen Abel-csoportok elmélete állott az érdeklődés homlokterében. A faktorizáció-probléma gyökerei a felszabadulás előtti időre nyúlnak vissza. A Minkowski-féle nevezetes megoldatlan problémát *Hajós György* véges Abel-csoportokra vonatkozó faktorizációs kérdéssé fogalmazta át, majd a csoportelméletbe átültetett problémát végleg megoldotta — ezzel a tudományos világ nagy elismerését vívta ki. A felszabadulást követően *Rédei Lászlónak* és *Szele Tibornak* sikerült *Hajós* eredeti bizonyítását nagy mértékben egyszerűsíteni. Újabb eredmények is születtek e téren: a Minkowski-féle probléma általánosítását kimondó Keller-féle sejtésnek *Hajós* csoportelméleti átfogalmazását adta, ezzel a problémát a dimenzió-számtól függetlenné tette s nagy lépést haladt a kérdés elintézése felé. *Hajós* és *Rédei* ciklikus csoportok faktorizációjának kérdésével is foglalkoztak.

Egy másfajta faktorizáció-problémát vetett fel *Szép Jenő:* ez egy csoportnak két alcsoport szorzatára való bontására vonatkozik. Analóg kérdésekkel foglalkozott *Széptől* függetlenül *Zappa* olasz matematikus is. A *Szép* által alkalmazott módszer kitűnő eszköznek bizonyult egyszerű csoportok vizsgálatánál, amely téren magának *Szépnek*, valamint *Rédeinek* vannak becses eredményei. A Zappa—Szép-féle szorzásnak megfelelő bővítés-problémának a Schreier-féle bővítés-elmélettel való analógiája vezette *Rédei Lászlót* arra, hogy az általa kidolgozott nagyjelentőségű ferde szorzat fogalmának segítségével addig egymástól elszigetelten álló konstrukcióknak egységes és igen általános tárgyalását adja. Emellett érdekes új eredmények is adódtak. Vizsgálatai komoly külföldi visszhangra is találtak; nálunk *Rédei* több cikkén kívül *Steinfeld Ottónak*, *Szélpál Istvánnak*, *Szendrei Jánosnak* és *Fuchs Lászlónak* vannak csatlakozó eredményei. Lényegileg szintén a bővítés-elméletbe vágó eredmény *Fuchsnak* két csoport vagy gyűrű összes szubdirekt összegeinek meghatározására adott konstrukciója.

A végtelen Abel-csoportok elméletében, ebben a szerte a világon az algebrai kutatások élvonalában szereplő elméletben, szintén szép sikereket könyvelhetünk el. A legjelentősebb eredmény *Szele Tibor* nevéhez fűződik, akinek sikerült átültetni *E. Steinitz* klasszikus testelméleti eredményeinek lényeges részét az Abel-csoportok elméletébe, kidolgozva az Abel-csoportok algebrai és transzcendens bővítésének elméletét. *Szele* eredményei számos fontos és alapvető tételt foglalnak magukban. Itt említjük meg, hogy az úgynevezett algebrailag zárt Abel-féle csoportok egyenletrendszereire vonatkozóan érdekes eredményt kapott *Gacsályi Sándor.*

A végtelen Abel-csoportok direkt felbontásával kapcsolatos vizsgálatok során kutatóink igen nagy mértékben támaszkodtak szovjet tudósok által elért eredményekre; így többek közt értékes ösztönzést és indíttatást nyertek *A. G. Kuros* és *L. Ja. Kulikov* munkáiból. Számos szovjet eredményt foglal magában *Szele Tibornak* ciklikus direkt szummandra vonatkozó kritériuma. Ciklikus csoportok direkt összegére való felbonthatóságot vizsgálnak p-csoportokban, ill. tetszőleges csoportban *Kertész Andor* és *Fuchs László.* Eredményeik több fontos felbontási tételt speciális esetként tartalmaznak. *Kertész* jól alkalmazható kritériumot talált direkt irreducibilis csoportokra való bonthatóságra.

Az említetteken kívül számos speciális kérdést oldottak meg kutatóink az Abel-csoportok elméletében. Ezek közül kiemeljük *Szelétől* a p-csoportok endomorfizmus-gyűrűje centrumának meghatározását, valamint a direkt összeg fogalmának egy általánosítását. A többi dolgozat közül jónéhány, speciális tulajdonságokkal rendelkező Abel-csoportoknak teljes leírását szolgáltatja (*Rédei, Szele, Kertész, Szélpál, Szendrei, Fuchs*). A nem-kommutatív csoportok elméletében *Rédei, Szele* és *Szép* dolgozatait említjük meg, amelyek számos speciális problémát vitatnak meg.

A csoportfogalom általánosítása terén elért eredményünk aránylag kevés van. Megemlítendő *Rédei*től a Schreier-féle bővítés-problémának általánosítása félcsoportokra, *Szász Gábor*tól az asszociativitás-feltételek függetlenségének igazolása, valamint a *Kalmár László* által adott egyszerű bizonyítás a Markov—Post-tételre, amely szerint a félcsoportok szóproblémája algoritmikus eljárással nem oldható meg. Ugyancsak *Kalmár* nevéhez fűződik a valós számok Cantor-féle bevezetésére *B. L. van der Waerden* által adott algebrizált eljárásnak a tökéletesítése.

A gyűrűk elméletében is széles területet ölelnek fel a kutatások. *Rédei* és *Szele* két hosszú dolgozatban foglalkozott olyan kérdésekkel, amelyek adott gyűrűben értelmezett függvényeknek polinom-alakban történő előállításával kapcsolatos problémák körül forognak. Ugyancsak *Rédei*nek sikerült a feltételek megfelelő módosításával kiterjeszteni az algebra (hiperkomplex rendszer) fogalmát úgy, hogy ezek az ú. n. dupla-algebrák már nem teszik szükségessé az alapgyűrű kommutativitását. Ide sorolandó még *Fuchs*nak több dolgozata, amelyekben kommutatív gyűrűk ideáljainak különféle felbontásaival és az ezek közötti kapcsolatokkal foglalkozik.

Szele Tibor, ill. *Rédei László* és *Steinfeld Ottó* azt az érdekes problémát tették vizsgálat tárgyává, hogy mennyire van determinálva egy gyűrű additív csoportja, ill. multiplikatív struktúrája által. Vizsgálataik sok meglepő eredményre vezettek.

A *Kürschák József* vizsgálatai nyomán megindult és azóta igen sokat fejlődött értékelés-elméletet sikerült *Fuchs László*nak egy további lépéssel általánosítani. Az eredmény lehetőséget nyujt arra, hogy az integritási tartományok bizonyos tulajdonságait egy részben rendezett csoport egyszerűbb struktúrájában vizsgáljuk.

A gyűrűelméletben felvetett számos speciális kérdéssel is foglalkoztak kutatóink (*Rédei, Szele, Steinfeld, Szélpál, Szendrei, Fuchs*). Több cikk olyan gyűrűk karakterizálására irányuló vizsgálatokat tartalmaz, amelyek speciális tulajdonsággal rendelkeznek (pl. minden részgyűrű ideál vagy minden részgyűrűben van egységelem, vagy pl. *Szendrei*nek legfrissebb eredménye: olyan gyűrűk, amelyek direkt szummandjai bármely, őket ideálként tartalmazó gyűrűnek stb.).

A rendezett struktúrák elméletének egyes kérdéseivel foglalkozott *Fuchs László, Szele Tibor* pedig érdekes eredményre jutott a nem-kommutatív testek elrendezhetőségére vonatkozóan.

Háló-elméleti vonatkozásban — ezen elméletnek az újabb algebrában lévő szerepéhez képest — csak kevés eredményt könyvelhet el a magyar matematika. Mindazonáltal örvendetes ténynek kell tekintenünk, hogy *Szász Gábor* személyében már eredményesen működő háló-elméleti érdeklődésű kezdő kutatónk is van. *Szász Gábor* eredményei félig moduláris hálókra, ill. a komplementum fogalmának általánosítására vonatkoznak, továbbá sikerült neki a disztributív hálók axiómarendszerének függetlenségét kimutatni. *Fuchs* a kommutatív gyűrűk ideálelméletében egyes régebbi eredményeknek adta háló-elméleti tárgyalását.

Gyengén állunk algebrai könyvek dolgában. A felszabadulás óta algebrai tárgyú könyv csak kettő készült el, ezek is csak kéziratban. Az egyik *Szele Tibor* bevezető algebrai tankönyve, a másik pedig *Rédei László*nak a csoport-, gyűrű- és testelmélet számos kérdéskörét felölelő, komoly studiumra alkalmas kézikönyve. Ezek a munkák még ez évben elhagyják a sajtót.

Az algebra határterületein felmerülő problémák nem foglalkoztatták kellő mértékben kutatóinkat, néhány fontosabb eredményről azonban itt is beszámolhatunk. A matematikai logikával kapcsolatos kutatásokról már tettem említést; az algebra transzfinit módszereivel csupán egy dolgozat *(Szele)* foglalkozik. A geometriával határos területről már hivatkoztam *Szőkefalvi-Nagy Gyulá*nak kiterjedt vizsgálataira; ugyancsak *Szőkefalvi-Nagy Gyula* nevéhez fűződnek egyes, a geometriai szerkesztések elméletébe vágó kutatások is. Igen kevés történt algebrai számelméleti vonatkozásban. Itt *Rédei*nek az osztálytestek elméletében végzett bizonyos régebbi vizsgálatainak átdolgozásáról és továbbfejlesztéséről kell szólanom. Megemlítem még *Dénes Péter*nek a Fermat-féle problémakörrel kapcsolatos és algebrai számelméleti jellegű vizsgálatait, továbbá *Fuchs*nak a relatív ideálnormára vonatkozó eredményét. A folytonos csoportelmélethez közelálló eredmények szép számmal találhatók *Aczél János* dolgozataiban. Ezek főként bizonyos függvényegyenletek megoldásaira vonatkoznak és algebrai szempontból is sok érdekeset tartalmaznak. *Rényi Alfréd*nak az eloszlások algebrájáról írt cikkében is találhatunk algebrai vonatkozásokat.

III. A kutatások analizálása

Végigtekintve a kutatóink által elért gazdag eredményeken, örömmel szögezhetjük le, hogy algebrai vonatkozásban is számottevő tényezővé vált a magyar matematika. Különösen szembetűnő ez a fejlődés, ha a dolgozatok évszámát figyeljük meg: évről-évre fejlődést mutatnak algebrai kutatásaink mind mennyiségben, mind színvonalban, mind pedig a problémák gazdagságában. Különösen nem-algebrista matematikus számára lesz tanulságos megvizsgálni, hogy mik tekinthetők a hazai algebrai kutatások legjelentősebb eredményeinek és hogy általában, milyen problémák, milyen módszerek karakterisztikusak a kialakulófélben lévő magyar algebrai iskolára.

Mindenekelőtt az tűnik fel, hogy a vezető szerepet az algebrai struktúrák elméletének különféle kérdései és ezen belül is a csoport- és gyűrűelméleti problémák viszik, bár — és ez szintén fontos momentum — egyéb területeken is értékes eredményekkel dicsekedhetünk. Igen örvendetes, hogy, a csoport- és gyűrűelméleten belül maradva is, a vizsgálatok elég széles területet ölelnek fel, igen fontos kutatási területeken munkálkodnak algebristáink. A legfontosabb eredményeink is e területről valók: a faktorizáció-probléma és a bővítés-elméleti kérdések terén elsősorban *Rédei László* és *Hajós György*, azonkívül *Szép Jenő*, a végtelen Abel-csoportok elméletében pedig *Szele Tibor* eredményei emelendők ki. Nem lenne azonban tökéletes ez az értékelés, ha nem említenők meg a *Rédei* és *Szele* által egyéb területeken is kifejtett úttörő munkásságot, valamint fiataljaink által megoldott néhány igen szép és fontos problémát.

Ezekután nézzük meg a hazai algebrai kutatások jellemző vonásait. Elsőnek említem meg azt a törekvést, amely ugyan még nem tekinthető algebránk döntő jellemvonásának, de elsőrendű fontosságú és sok kutatásban már megnyilvánult. Ez a kisebb-nagyobb elméletek megalkotására és elszórt speciális esetek összefoglalására való törekvés. Ez figyelhető meg pl. *Rédei*nek a ferde szorzatról szóló két alapvető dolgozatában, vagy *Szelé*nek az Abel-csoportok algebrai lezárásáról, valamint ciklikus direkt szummand létezéséről szóló dolgozataiban, s legyen szabad itt a ciklikus csoportok direkt összegére való bontásról szóló saját dolgozatomat is megemlítenem.

Egy másik karakterisztikus sajátság az említettel bizonyos tekintetben ellentétes: sok cikk speciális tulajdonságokkal rendelkező csoportok, gyűrűk jellemzését tűzi ki feladatul (pl. csoportok, amelyeknek minden valódi alcsoportjuk kommutatív, vagy nem tartalmaznak két egymással izomorf alcsoportot stb.). Nem-algebrista matematikusok részéről bizonyára könnyen érheti az a vád az ilyen cikkek íróit, hogy túlságosan speciális és talán sokak számára kevéssé érdekes kérdésekkel foglalkoznak. Ezek a vádak azonban — ha egyáltalán felmerülnek — könnyen eloszlathatók, ha figyelembevesszük, hogy hasonló természetű kérdések pl. az analízisben igen sokat szerepelnek és nagy jelentőséggel bírnak (folytonos, de seholsem differenciálható függvények stb.). És hogy ezek a gyakran súlyos kérdéseket érintő vizsgálatok sokszor milyen fontos eredményekre és módszerekre vezettek, arra számos példát lehetne felhozni magyar szerzőkkel kapcsolatban is. Csak egyet említek: ilyen speciális problémák vizsgálata során merült fel *Szele Tibor*nál a direkt összeg általánosításának szükségessége, amely már nem egy további kutatásnál jutott szóhoz.

Végül pedig, de nem utolsósorban említem meg azt az igen egészséges és termékeny hatást, amelyet kutatásainkban a csoportelmélet, ill. a gyűrű- és testelmélet közötti analógiák felismerése jelentett. Ilyen összefüggések felkutatására irányuló törekvés és analóg problémák közös tárgyalása — talán ezek a magyar absztrakt algebrai kutatások legjellemzőbb sajátságai. Ez egészen speciális magyar irányzat, amely ilyen tudatosan és ilyen pregnánsan, úgy hiszem, sehol a világon nem nyilvánul meg.

Ha ki akarnók jelölni a magyar algebrai kutatások helyét világviszonylatban, akkor örömmel állapíthatjuk meg, hogy előkelő helyet foglalunk el. Nem dicsekedhetünk ugyan annyi és oly sok jelentős eredménnyel, az algebra szinte minden részére kiterjedő sokoldalú vizsgálatokkal, mint pl. a Szovjetunió, USA, Németország, vagy Franciaország, de büszkén jelenthetjük ki, hogy az említett államoktól eltekintve, algebrai kutatásunk az élvonalban halad. Az is nagy díszére válik a magyar matematikának, hogy olyan nagyjelentőségű és döntő szerepet játszó modern elmélet, mint az értékelés-elmélet megalapítása magyar kutató: *Kürschák József* nevéhez fűződik.*

Vitathatatlanul jelentős sikereink mellett komoly hiányosságai is vannak algebrai kutatásainknak, amelyeket alaposan meg kell vizsgálnunk. Kutatóink vizsgálatai felölelik ugyan az algebrának számos ágát, mégis meg kell állapítanunk, hogy a szorosabb értelemben vett algebrán belül és az algebrának a matematika többi ágaival szomszédos határterületein igen fontos diszciplinák alig vannak, vagy egyáltalán nincsenek képviselve. Így pl. keveset foglalkoztak kutatóink a hálók elméletével, amely pedig ma már közel oly fontos és átfogó szerepet tölt be a matematikában, mint a csoportelmélet. Ugyancsak hiányzanak a Galois-elméletbe és az általános testelméletbe vágó eredmények, és nem szerepelnek kellő súllyal a lineáris algebra területéről vett problémák sem. Legifjabb kutatóink elhanyagolják a funkcionális algebra kérdéseit s nem talál követőre *Szőkefalvi-Nagy Gyula* munkássága sem az algebrai geometria terén, pedig ő egyik legkitűnőbb szakértője a polinomok geometriájának. Szinte teljesen figyelmen kívül hagyják kutatóink a topológikus algebra, a Lie-csoportok és algebrák területét — egy olyan területet, amely iránt világviszonylatban meglehetősen nagy érdeklődés nyilvánul meg. Szomorúan kell megállapítanunk, hogy a hiányzó vagy alig kultivált területek között olyanok is akadnak, amelyeken értékes hagyományokkal rendelkezünk *(Bauer Mihály, Haar Alfréd)*. Érezhető hiányossága algebránknak a határterületekkel és alkalmazásokkal való kapcsolatoknak a szegénysége. Így pl. hiányoznak a funkcionál-analízis által felvetett algebrai problémák, a differenciálalgebra, valamint a gyakorlati életben és a természettudományokban felmerülő algebrai vonatkozású kérdések vizsgálata. Egészen fehér foltot jelent a hazai matematika térképén a reprezentáció-elmélet, amely pedig igen komoly tényező a csoportok és az algebrák elméletében, és amelyből napjainkban a Szovjetunióban az analízisnek egy fontos új ága sarjad ki. Egyedül a matematikai logikával való kapcsolataink bizonyultak eredményeseknek, ami főként *Kalmár László*-nak köszönhető.

* Legyen szabad felhívnom a figyelmet arra, hogy az idén van 40 éve, hogy *Kürschák* alapvető dolgozata a Crelle Journalban megjelent.

Arra természetesen nem gondolhatunk, hogy a felsorolt hiányosságok erőszakos beavatkozással egyhamar kiküszöbölhetők. Nem is lenne helyes, ha ezt nem az egészséges fejlődéstől várnók. Megfelelő irányítás, meggyőzés, gondos és alapos nevelés azonban jelentős javulást idézhet elő. Különösen annak érdekében van sok tennivaló, hogy algebristáink nagyobb szeretettel és intenzívebben forduljanak az algebrának a matematika egyéb ágaiban, a fizikában és a gyakorlatban való alkalmazásainak kérdései felé. Az már ma minden algebrista előtt világos, hogy ezek a vizsgálatok nemcsak az illető tudományág fejlődését segítik elő, hanem ezáltal sokat, sőt egyes esetekben igen sokat nyerhet maga az algebra is. Igen nagy hasznát vehetnők ebben a vonatkozásban a szovjet algebristák gazdag tapasztalatainak és reméljük, hogy — részben a Szovjetunióban tanuló *Kis Ottó* aspiráns közvetítésével — ezek el is jutnak majd kutatóinkhoz.

IV. A publikációk

Az absztrakt algebrai vizsgálatoknál fennáll annak veszélye, hogy az algebrai tartalom rovására az absztrakció nyomul előtérbe és ennek folytán bizonyos öncélúság nyilvánul meg a kutatásokban. Ezért fontos dolog megvizsgálni, hogy algebristáink nem szakadnak-e el túlságosan a valóságtól, nem térnek-e le a helyes útról az érdektelen túl-absztrakt felé. Hiszen alig jelent problémát magunk által konstruált struktúrákat gyártani halomszámra és olcsó siker a definíciókból ismert módszerek alkalmazásával kihozott triviális következményekből futószalagon írni a cikkeket. Ilyen kutatások azonban — ha bizonyos esetekben érdekes eredményekre is vezetnek — nem értékesek: nem többek egyszerű logikai tornánál. Természetesen éles határt nem lehet vonni az érdekes és érdektelen között, hiszen nem egyszer fordul elő az, hogy egy-egy cikk értékelésében megoszlanak a vélemények. Ez persze valóban komoly s jelentős eredményeknél nemigen szokott előfordulni. Jól tudjuk, hogy egy dolgozat helyes megítélésében problémát az okoz, hogy nem lehet annak alapján dönteni, van-e a cikkben hiba vagy nincs. Egészen hibátlan cikk is lehet menthetetlenül rossz, ha teljesen érdektelen, mesterkélt problémát vitat meg. Kétségtelen, ez komoly óvatosságra kell hogy intse a kutatót.

Kuros akadémikus a moszkvai algebrai vita alkalmával elhangzott felszólalásában szintén rámutatott arra, hogy igen könnyű dolog különféle struktúrákat életrehívni, „elméleteket“ kidolgozni, de semilyen tudomány ilyen módon nem fejlődhetik. Ezzel természetesen távolról sem az absztrakció, az általánosításra irányuló törekvések ellen szól: ennek jogosultságát értelmetlen és tudományellenes dolog lenne tagadni, hiszen akkor el kellene vetni a csoportfogalom számos igen termékenynek bizonyuló általánosítását is. De még az ellen sem lehet kifogást emelni, hogy egy-egy axióma jelentőségének megvizsgálása céljából olyan struktúrákat teszünk vizsgálat tárgyává, amelyekben egy *fontos* algebrai struktúra összes többi axiómái fennállanak a megvizsgálandótól eltekintve. A százlábúval kapcsolatos közismert hasonlat erős túlzás, hiszen ilyen axióma-elhagyással keletkezett a matematikának az a nevezetes ága, amelyet ma Bolyai—Lobacsevszkij-féle geometria néven tart számon a tudományos világ. — Az absztrakció másik formája: mikor egy fontos tulajdonság kivizsgálása céljából az axiómákat gyengítjük, szintén nem kifogásolható (feltéve, hogy ezt nem viszik túlzásba a kutatók), hiszen ez is a tudomány fejlődését segíti elő.

Kérdés mármost, hogy mi a helyzet nálunk e téren. Úgy tűnik, hogy elég jó. Öncélúság, vagy higítás útján történő általánosítás nem kisérőjelensége algebrai kutatásainknak. Hiányosság azonban, hogy egyes helyeken a nyert eredmények nincsenek eléggé kiaknázva. Algebristáinknak mindenképpen arra kell törekedniök, hogy eredményeiknek minél szélesebb körben való alkalmazását nyujtsák, hiszen a nagymértékű alkalmazhatóság egyik próbaköve annak, hogy a kutatás helyes irányban történt. A konkrét struktúrákkal kapcsolatos eredmények kicsiny száma nemcsak nálunk, hanem világszerte mutatkozó hiányosság. Kutatóinknak egyre nagyobb gondot kellene fordítaniok átfogóbb, nagyobb jelentőségű kérdések vizsgálatára, a maguk problémái mellett olyanokra is, amelyek szerte a világon az algebrai kutatások középpontjában állanak. Ezeket a nagy és alapvető problémákat kellene elsősorban fiataljaink figyelmébe is ajánlani.

Még néhány szót a publikációkkal kapcsolatban. Úgy tűnik, hogy aránylag sok a rövidlélekzetű, kisebb dolgozat, bár kétségtelen, hogy ezek túlnyomórészben egy-egy érdekes és fontos részletkérdést vitatnak meg. Ezzel kapcsolatban érdemes felvetni azt a kérdést, hogy ez nem jelenti-e algebrai kutatóink erejének elaprózását: vajjon nem lenne-e helyesebb több kisebb problémát felölelő, nagyobb dolgozatoknak a publikálása? Mielőtt e kérdést érdemben elintéznők, két igen lényeges szempontot kell figyelembevennünk. Először azt, hogy az algebrai bizonyítások az algebra természeténél fogva igen tömörek, rövidek, sokszor egészen komoly és nehéz tételek bizonyítása is elintézhető néhány sorban. Innen van az, hogy egy 3—4 oldalas algebrai cikk átlagban véve kb. 6—10 oldalas, ugyanolyan fajsúlyú s azonos szellemi megerőltetést kívánó (klasszikus) analízis tárgyú cikknek felel meg. A rövid cikkek tehát az algebra természetéből folynak. A másik, nem kevésbbé fontos szempont az, hogy több rokontémájú, de nem a *legszorosabban* egymáshoz kapcsolódó eredménynek egy nagyobb dolgozatban való megjelentetése azért nem látszik kívánatosnak, mert ez igen megnehezíti az irodalomban való tájékozódást. Szinte minden matematikusnak nem kis bosszúságot okozott az, hogy erejét már megtárgyalt, de „eltemetett" kérdések vizsgálatára pazarolta. A matematikai cikkek számának hatalmas mérvű növekedése azt eredményezte, hogy a kutatók saját munkájuk irodalmi vonatkozásait sokszor csak a referáló folyóiratokból ismerik meg. Ilyen szempontból pedig kívánatosabbnak látszik a nem összegyűjtött közlés. Az indokolatlan elaprózás természetesen elítélendő és az sem helyeselhető, ha valaki rövid cikkekre specializálja magát. Olyan esetekben, mikor eredményeinknek közvetlen folytatását várjuk saját magunk kutatásaitól, nem szabad a meglévő eredmények publikálásával sietni, hiszen ha sikerül továbbfejlesztenünk eredményeinket, gyakran az új eredmények a régieket új, érdekesebb megvilágításba helyezik. A gyors és részletekben való publikációt indokolhatja, ha a prioritást kell biztosítani; ez azonban nem gyakori eset.

V. A kutatók

A kutatóink számában beállott örvendetes növekedésről és ennek okairól már bevezetőben szólottam. Legyen szabad ehelyütt újból hangsúlyoznom, hogy a közeljövőben további komoly fejlődésre számíthatunk; erre a reményre feljogosít bennünket az a körülmény, hogy növekvő létszámú és színvonalú egyetemi hallgatóságunk egyre nagyobb érdeklődést mutat a tudományos kérdések iránt és az évről-évre egyetemeinkről kikerülő kutató-jelöltek egyre inkább beváltják a hozzájuk fűzött reményeket.

A fiatal algebrista kutatók feltűnése és az, hogy ezek eredményei jórészt az őket irányító tapasztaltabb kutatók érdeklődési területeihez kapcsolódnak, valamint a szép számmal szereplő közös dolgozat ékesen tanúskodik az algebristáink között kialakult egészséges szellemről. Kutatóink nem egymástól elszigetelten, részleteredményeiket egymás elől eltitkolva, csupán egyéni becsvágytól fűtve végzik munkájukat, hanem ellenkezőleg: egymást tanácsokkal segítve, a fiatalokat támogatva és irányítva. Erről a már említetteken kívül az a tény is tanúskodik, hogy sok olyan kutatási terület is van, ahol három-négy algebrista is munkálkodik, egymás eredményeit kiegészítve, fejlesztve. Igen gyümölcsözőnek bizonyult az a szokás, hogy a vizsgálatok egyes fázisaiban vagy az eredmények publikálása előtt közlik egymással — még a helyileg távolabb működő kutatókkal is — az elért eredményeket, ill. a felmerülő problémákat. Nagy szolgálatot tesz e téren a Bolyai János Matematikai Társulat az előadóülésekkel. Ezáltal sok esetben nyert értékes gyarapodást a megjelenő dolgozat részben a tárgyhoz fűzött észrevételek, részben pedig az addig figyelembe nem vett eredményeknek a vizsgálatba való bevonása révén. Fiatal s kutatómunkájuk kezdetén álló algebristáink sok értékes tanácsot és útmutatást nyertek fejlettebb kutatóinktól, de ugyanakkor emezek is igen sokat köszönhetnek a fiatalabbak, tanítványaik észrevételeinek. Sok fontos és értékes megjegyzésért, érdekes probléma felvetéséért lehetnek algebristáink hálásak a nem-algebrista matematikusoknak is.

Nem mulaszthatjuk el, hogy ehelyütt meg ne említsük azt a nagy és értékes segítséget, amelyet a kibontakozó magyar algebrai iskola feje: *Rédei László* nyujt algebrai kutatóinknak. Közvetlen környezetében működik algebristáinknak mintegy a fele, de útmutató tanácsai minden algebristához eljutnak. Igen nagy hatással van algebristáinkra *Szele Tibor* is, akinek irányítása mellett nem egy fiatal kutató ért el szép eredményeket. Főként *Rédei* és *Szele* intenzív nevelőmunkájának, inspiráló hatásának köszönhető, hogy az utóbbi években a szegedi és a debreceni egyetem egymásután nevelte ki az algebrai utánpótlást. A budapesti egyetemen az algebra terén, a vidéki egyetemekkel összehasonlítva, elmaradás észlelhető, de bizonyos javulás már itt is mutatkozik.

A fiatal kutatókkal kapcsolatban rá kell mutatnunk egy igen fontos problémára. Az egészen természetes, hogy a fiatalság a tudományban is különös vonzalommal viseltetik az új, a modern iránt, és ezért nagy szeretettel és lelkesedéssel fordul a matematikának újonnan kifejlődött ágai, így az absztrakt algebra felé is, bizonyos mértékig elhanyagolva a klasszikus irányzatokat. Félő azonban, hogy kellő ismeretek megszerzése nélkül vetik magukat a kutatásra, csábítja őket az, hogy aránylag kevés előtanulmánnyal is publikálható eredményeket érhetnek el. Emellett azonban látókörük nem fejlődik, nem látnak tovább a maguk egészen szűk területénél. Ezért különös nyomatékkal kell hangsúlyozni azt, hogy a megfelelő alapismeretek elsajátítása, a kellő perspektíva megszerzése a matematika minden fontos területén, és ezen belül az algebra klasszikus s modern ágaiban és alkalmazásaiban, nemcsak azért elengedhetetlen feltétele a jó kutatómunkának, mert ennek birtokában a kutató algebrista eredményeinek jobb kiaknázását remélheti, hanem azért is, mert ez bizonyos mértékben megóvja az algebristát attól, hogy öncélnak tekintse új eredmények publikálását és érdektelen kérdésekre pazarolja energiáját. Hadd emeljük itt ki *N. J. Vilenkin* felszólalását a szovjet algebrai vitában, aki bebizonyította, hogy a legjelentékenyebb eredmények mindig a konkrét esetekben felmerült problémák során keletkeznek. Az algebrában is az igazi fejlődés útját a konkrétan felmerülő algebrai struktúrák jelzik. Fiatal algebrai kutatóinktól, elsősorban aspiránsainktól, ezért helyes lenne megkívánni, hogy algebrai tanulmányaik mellett beható ismereteket szerezzenek speciális algebrai studiumuknak a matematika többi ágaiban és a gyakorlatban való alkalmazása terén is.

Az utóbbi időben kutatóink egyre behatóbban tanulmányozzák a szovjet algebristák kimagasló eredményeit és ezt igen jól érvényesítik a maguk kutatásai közben. Különösen csoportelméleti vonatkozásban járt ez gazdag eredménnyel. A szovjet algebristákkal való kapcsolataink azonban igen gyengék, e téren komoly elmaradás jelentkezik, pedig értékes hagyományokra is hivatkozhatunk *(Bauer* és *Csebotarjov).* A közeljövőnek egyik fontos feladata kell hogy legyen a szovjet algebrai iskolával való kapcsolat felvétele és kiépítése. Más kiváló külföldi algebristákkal való együttműködést is tovább kell fejleszteni és újabb kapcsolatokat teremteni, elsősorban a baráti államok kutatóival. Magyar algebristák külföldi publikációi, valamint külföldi algebristáknak magyar folyóiratokban megjelent cikkei tanúskodnak amellett, hogy ezek a kapcsolatok igen gyümölcsözőknek bizonyultak és nem csekély mértékben járultak hozzá a magyar algebra nemzetközi elismeréséhez.

Algebristákkal kapcsolatban vetődött fel, de nem speciális algebrista, hanem általános matematikus-probléma: az időhiány kérdése. Mindig a legnagyobb örömmel szögezzük le, hogy míg a felszabadulás előtti időben sok kiváló matematikusunk nem tudott megfelelő munkához jutni, sokan nélkülözni voltak kénytelenek, vagy kivándorolni kényszerültek, addig most államunk méltó módon gondoskodik a kutatókról, biztosítva oktató és kutató munkájukat. Sőt, egyetemeink nagymérvű fejlődése sokkal több jólképzett matematikus beállítását tenné szükségessé, mint amennyi jelenleg rendelkezésre áll. Azonban az a tény, hogy nagy a hiány megfelelő káderekben, jelentős terheket ró a kutató matematikusokra. A kötelező előadások mellett — speciális előadásokra, szemináriumokra csak nagyon kevés idő jut — a sok hosszú értekezlet és a nagy adminisztrációs munka sok értékes időt és energiát von el a kutatás elől. Ezen igen nehéz lenne lényegesen változtatni, hiszen tudósaink gazdag tapasztalataira, tanácsaira okvetlenül szükség van a tudományos élet és a felsőoktatás irányításában, azonban szükségesnek látszik, hogy ezt a kérdést illetékesek alaposabban megvizsgálják és fontolóra vegyék, miként lehetne több időt biztosítani a kutatómunka céljaira.

VI. *Javaslatok*

A fentiekben igyekeztünk, a rendelkezésünkre álló időhöz mérten, összefoglalni a hazai algebrai eredményeket, ezeket analizálni és rámutatni a fennálló hiányosságokra, nehézségekre. Ezzel azonban nem szabad megelégednünk, hanem minden erőnkkel arra kell törekednünk, hogy mindezt felhasználva, elősegítsük az algebrának a helyes úton való fejlődését és kiküszöböljük a munkánkban jelentkező hibákat, hiányosságokat. Ennek érdekében legyen szabad a következő javaslatokat tennem:

1. *A kutatási terület kiszélesítése.* Ez vonatkozik egyfelől az algebra területén belül maradva, másfelől a matematika többi ágaival és a gyakorlattal való kapcsolatokra kiterjesztve. Mindezt azonban úgy kell megvalósítanunk, hogy közben még intenzívebben fejlesztjük tovább azokat a területeket, ahol szép és jelentős eredményekkel dicsekedhetünk. Nem vagyunk nagy ország, és így természetesen nem rendelkezünk akkora kutatógárdával, hogy a fontos területek mindegyikén egyenlő mértékű kutatást folytathassunk. Nem is lenne helyes, ha erre törekednénk, mert ez erőnk szétforgácsolására vezetne, és bizonyára kevesebb értékes eredményt is tudnánk csak felmutatni. Viszont helyes volna, ha amellett, hogy egyre növekvő lendülettel folytatjuk a kutatást a magyar algebra súlyponti területein: a csoportelmélet és a gyűrűelmélet vonalán, fokozatosan kiterjesztenénk vizsgálatainkat éppen azokra az elméleti és gyakorlati vonatkozású problémákra is, amelyekkel ezek szorosan összefügg-

nek. Így igen fontos lenne a folytonos csoportok elméletének, a háló-elméletnek és a gyakorlati kérdések vizsgálatának tervszerű és erőteljes fejlesztése.

2. *A publikációk színvonalának emelése.* A hazai algebrai kutatások már elérkeztek arra a fokra, hogy komoly igényeket támasszunk a publikációkkal szemben. Arra törekedjünk, hogy a vizsgált problémát minél alaposabban megvitassuk, minél több ismert eredménnyel hozzuk kapcsolatba és igyekezzünk eredményeinknek minél szélesebb körben való alkalmazását is adni. A dolgozat megírásánál járjunk el a legnagyobb körültekintéssel. Gondoljunk arra, hogy egy gyenge, féligsikerült vagy kevesetmondó dolgozat többet árt a cikkírónak, mint amennyit 1—2 szép és ügyes dolgozat használni tud.

Fontos feladata lenne algebristáinknak egyes ismertetésszerű, eredmény-összefoglaló cikkek közlése a magyar matematikusok számára. Jó lenne, ha a III. Osztály Közleményei egyik feladatául tűzné ki az ilyen cikkek közlését.

3. *Algebrai tárgyú könyvek kiadásának fokozása.* Tudjuk, hogy egy-egy jó tankönyv, vagy monográfia milyen nagy segítséget jelent a kutatóknak, kezdőknek és fejlettebbeknek egyaránt. Amikor örömmel szögezzük le, hogy a felszabadulás után megjelent matematikai könyvek száma milyen örvendetesen nagy, sajnálattal kell megállapítanunk, hogy ezek közt szorosabb értelemben vett algebrai tárgyú munka egyáltalán nem szerepel. Remélhetőleg hamarosan javulás következik be ebben a vonatkozásban is. *Szele Tibor* bevezető algebrai tankönyve, *Rédei László* nagy algebrai kézikönyve, valamint *A. G. Kuros* kitűnő csoportelméleti tankönyvének fordítása ez év folyamán megjelenik. Ezeken kívül további tankönyvek és fordítások kiadása van folyamatban. Igen örvendetes volna, ha a fejleszteni kívánt területek mindegyikén rövidesen megjelenhetne egy-egy jó tankönyv, akár magyar szerzőtől, akár pedig fordításban.

4. *A fiatalok tervszerű és alapos nevelése, különös tekintettel az algebra határterületeire és alkalmazásaira.* Ennek fontosságát már fentebb kifejtettem, most csak újból, nyomatékosan alá kívánom húzni.

5. *Más kutatási területek matematikusaival való kapcsolatok elmélyítése.* Ezen a téren bőven akad tennivalónk. Helyes lenne, ha nem-algebrista matematikusaink fokozottabb mértékben fordulnának algebrai természetű problémáikkal algebristáinkhoz, viszont algebristáink nagyobb érdeklődést mutatnának a matematika különféle ágaiban felmerülő algebrai problémák iránt. Különösen fontos lenne az Alkalmazott Matematikai Intézettel való szoros és állandó kapcsolat megteremtése.

6. *Kapcsolatok kiépítése és továbbfejlesztése kiváló külföldi algebristákkal, elsősorban a Szovjetunió és a baráti államok algebrai kutatóival.* Felesleges ecsetelnem, hogy a kiváló külföldi tudósokkal való tudományos együttműködés milyen nagy mértékben lendítheti előre a hazai kutatásokat. Igen sokat várhatunk a szovjet csoportelméleti iskolával való kapcsolatoktól.

7. *A magyar algebra, s általában a magyar matematika történetének feldolgozása, kiváló algebristáink munkásságának ismertetése.* Kiváló elődeink

emlékének méltó formában való megörökítése elsőrendű feladatunk kell hogy legyen.

Befejezésül, szeretnék hálás köszönetet mondani az algebristák nevében legfelsőbb tudományos fórumunknak, a Magyar Tudományos Akadémiának és III. Osztályának, hogy a hazai algebra helyzetének ilyen széleskörű megvitatásával hathatós segítséget nyujt algebrai kutatóinknak. Meggyőződésünk, hogy ez a vita igen értékes lesz mindnyájunk számára és mi algebristák igen sokat fogunk belőle tanulni s nagy hasznát fogjuk venni további kutatómunkánkban. Nagy örömmel várunk és hálával fogadunk minden bírálatot és tanácsot, és minden erőnkkel azon fogunk munkálkodni, hogy minél szebb és értékesebb eredményekkel gazdagítsuk a magyar algebrát.

HOZZÁSZÓLÁSOK

SZELE TIBOR:

Fuchs László előadása tökéletes képet nyujtott a hazánkban folyó algebrai kutatások helyzetéről és e kutatásokkal kapcsolatban felmerülő problémákról. Azzal kell kezdenem hozzászólásomat, amivel *Fuchs László* előadása végződött, hogy t. i. én is köszönetet mondjak a Magyar Tudományos Akadémiának azért, hogy algebristáink kutatómunkáját e vitaülés megrendezésével is elősegíti. Köszönetemet fejezem ki továbbá *Fuchs László*nak is rendkívül fontos és értékes munkájáért, amelyet az elhangzott kitűnő előadás elkészítésére fordított.

Fuchs László előadása annyira alapos, minden részletre kiterjeszkedő beszámoló volt, és a felvetődött problémákkal kapcsolatban is annyi konkrét megoldási lehetőségre mutatott rá, hogy hozzászólásomban jórészt arra szorítkozhatom, hogy a magam részéről is kiemeljek és aláhúzzak az előadásból néhány olyan részletet, amelyeket a legfontosabbnak tartok.

Mindenekelőtt azt akarom kiemelni, hogy *Fuchs László* előadása rendkívül szépen domborította ki azt a viszonyt, amelyben a hazánkban folyó algebrai kutatások mai helyzete van a felszabadulás előttihez képest. Kitűnt az előadásból, hogy matematikai életünk a felszabadulás előtti időkben sem szűkölködött kiváló, nem egyszer világhírű eredményeket elérő algebristákban, mégis rendkívül nagy jelentőségű változás következett be a felszabadulással a hazánkban folyó algebrai kutatások vonalán is. Azelőtt nem beszélhettünk egységes és sajátos jelleget mutató magyar algebrai iskoláról. Ma már ez az iskola lényegében kialakult és további fejlődéséhez a legszebb reményeket fűzhetjük. Mindezt Népköztársaságunk messzemenő és tervszerű tudománypártoló politikájának köszönhetjük, és annak, hogy az algebra területén dolgozó kutatóink — számos más tudományos munkaterület tudósaihoz hasonlóan — örömmel és készséggel ragadták meg és használták fel mindazokat a nagyszerű lehetőségeket, amelyeket ez a magas színvonalú államvezetés számukra nyujtott.

Egy további igen lényeges részlete *Fuchs László* előadásának az, amelyben az élenjáró szovjet csoportelméleti és modern algebrai iskolával már eddig fennálló kapcsolataink jövőbeli elmélyítésének és kiszélesítésének súlyponti fontosságát domborítja ki. Ezen a ponton örömmel fűzhetek hozzá az elhangzott előadáshoz néhány kiegészítő megjegyzést saját tapasztalataimból. 1947-ben figyeltem fel azokra, a modern matematika fejlődésében új korszakot megnyitó nagyjelentőségű eredményekre, amelyeket az *O. Ju. Smidt* és *A. G. Kuros* akadémikusok vezetése alatt működő szovjet csoportelméleti iskola az utóbbi évtizedek alatt elért. 1948 óta pedig módomban áll közvetlen levelezést folytatni e világhírű csoportelméleti iskola több tagjával. Azok az új eredmények és új módszerek, amelyeket ilyen módon megismerhettünk, döntően befolyásolták azt a kutatómunkát, amelyet a végtelen csoportok elmélete terén tanítványaimmal együtt folytatunk. A legújabb igen hatékony szovjet módszerek alkalmazásával számos olyan problémát tudtunk a közelmultban megoldani, amelyeket azelőtt csaknem reménytelenül nehéznek kellett tartanunk. Tanítványaim fejlődését és tudományos haladását is a szovjet eredményekben és módszerekben való elmélyedő tájékozódás mozdítja elő leghatékonyabban. Ki kell emelnem pl. legtehetségesebb tanítványom, *Kertész Andor* aspiráns egyik eredményét, amely *Kulikov* szovjet matematikus vizsgálatainak tanulmányozása alapján keletkezett, és *Kulikov* egyik nagyfontosságú tételének általánosítását tartalmazza. *Kulikov* tételének *Kertész*től eredő általánosítása élesebb eredményt tartalmaz, mint *J. Dieudonné* francia matematikus egyidejűleg publikált általánosítása. Meg vagyok győződve arról, hogy a hazánkban folyó algebrai kutatásoknak újabb fellendülést fog adni az, ha sikerül kiszélesítenünk a szovjet tudósokkal és a szovjet tudománnyal eddig fennálló kapcsolatainkat.

Végül *Fuchs László* előadásának azt a részletét szeretném még kiemelni, amelyben a hazai algebristák előtt álló jövőbeli feladatokról, közelebbről a kutatások vonalán fennálló hiányosságok pótlásáról szól. Magam részéről is rendkívül nagy jelentőséget tulajdonítok annak, hogy épüljenek ki hazánkban is erős kapcsolatok a modern algebra és a határterületek között. Minthogy a legközelebbi célok kitűzése tekintetében nem kívánatos túlságosan tágra szabni a kereteket, két konkrét vonalat szeretnék megjelölni, amelyen haladva meggyőződésem szerint rövid időn belül kedvező eredményeket várhatunk az említett hiányosságok pótlása tekintetében. Tervszerűen meg kell szerveznünk a kutatómunkát egyrészt a topologikus csoportok, tágabb értelemben a topologikus algebra területén, másrészt a modern algebra eszközeinek és eredményeinek a funkcionális analízis körében való alkalmazásának területén. Mindkét kutatási irányra fel kell hívnunk kutatóink érdeklődését, fiatal algebristáinkat pedig tervszerűen rá kell nevelnünk az ilyen irányú vizsgálatokban való elmélyedésre, hogy így idővel önálló kutatómunkát is végezhessenek ezeken a fontos területeken. Ha ez sikerül, akkor teljességgel kiküszöbölődik majd annak veszélye, hogy a hazánkban folyó algebrai kutatások egyoldalúvá válnak. Egy ilyen irányú nagyméretű és tervszerű nevelő, valamint szervező munkához természetesen elengedhetetlenül szükség van arra is, amire *Fuchs László* szintén rámutatott előadásában, hogy t. i. több nyugodt munkaidő legyen biztosítva kutatóink számára. Meggyőződésem szerint tudományos életünk vezetői meg fogják találni ennek a fontos kérdésnek a megoldását is.

RÉDEI LÁSZLÓ lev. tag:

Fuchs László referátuma olyan részletes és alapos volt, hogy érdemben csak kevés hozzáfűznivalóm lesz. Elvi kérdésként merült fel a számelmélet hovatartozása. Természetesen a számelméletből csak az elemi- és algebrai számelméletet számítom az algebrához, minthogy tárgyuk a 0 karakterisztikájú prímtest és ennek végesfokú testbővítései. Persze beszélhetünk algebrai számelméletről, de csak mint az algebra egyik kutatási területéről. Megvilágításul néhány példát említek. *Dedekind* az általa megteremtett ideálelmélet felépítését olyan eszközökkel végezte, amelyek a mai gyűrűelméletnek is alapjait képezik. Világos tehát, hogy *Dedekind* az algebrai számelmélet megalapozása közben egyszersmind algebrista volt. *Hensel* megteremtette a p-adikus számokat, az ő nyomán *Kürschák* az értékeléselméletet. Vajjon *Hensel* nem volt-e algebrista, amikor az első példát nyujtotta az értékelésre, vagy *Kürschák* nem nevezhető a számelmélet kutatójának? Nyilvánvaló, hogy a számelméletnek az algebrától való elválasztása erőszakos, de káros is, mert ha valaki úgy akar foglalkozni az algebrai számelmélettel, hogy az algebra egyéb területeit a lehetőségig mellőzi, akkor szűklátókörűen jár el. Szó volt a referátumban az algebra fejlődéséről. Azt merem mondani, hogy az algebra a matematikának nemcsak egyik legrégibb, hanem a legrégibb ága, sőt egyáltalán az emberi művelődésnek egyik legősibb területe. Úgy hiszem, hogy az algebra még a geometriánál is régebbi tudomány. Az iskolában is előbb tanítjuk a számokkal való műveleteket, mint a geometriát. Kifejlesztés tekintetében persze a geometriáé az elsőség, korai axiómatizálása folytán. Az algebra fejlődése sokkal lassúbb volt, első rendszeres feldolgozása *Steinitz* nevéhez fűződik, aki forradalmi lendülettel az izomorfia fogalmat az algebra élére állította, s a testelméletet axiómatizálta és kiépítette. Nyomában *E. Noether* hasonlót végzett a gyűrűelméletben, s végül csak *van der Waerden* tankönyvei óta, tehát mintegy 25 éve beszélhetünk mai értelemben vett modern algebráról. Eszerint az algebra mint önálló rendszeres tudomány igen fiatal, amelyben nagyon sok a tennivaló az alapok tisztázása, s a többé-kevésbbé elszigetelten fejlődött fejezetek összekapcsolása körül, amit más szavakkal a referens is említett. Az algebrának ez a fiatal volta egyik magyarázata nagy vonzóerejének, amelynél fogva hazánkban is sok kutatót foglalkoztat. Ez egyáltalán nem túlméretezett, hanem szükséges. Erre nézve hadd említsek egy igen kirívó példát. Jóllehet az asszociativitás kérdése az algebrának egyik alapköve, mégis az asszociativitásaxiómák függetlenségének megvizsgálását — mint a referátum is említette — éppen csak az utóbbi hónapban végezte el *Szász Gábor*. Örvendetes, hogy ez a kutatás hazánkban történt. A különböző fejezetek öszszekapcsolásából *Fuchs László*nak egyik munkáját kell hangsúlyoznom, amelyben kimutatta két fontos gyűrű-, illetve csoportelméleti fogalomnak, a Jacobson-féle radikálnak és a Frattini-féle csoportnak egymással való meglepő azonosságát. Az alapok tisztázását célozza az a nagyszabású tevékenység is, amit *Szele Tibor*, s vele együtt *Kertész Andor* és *Fuchs László* a szovjet vizsgálatokhoz csatlakozva az Abel-féle csoportok struktúraproblémája körül végeznek. Általában megállapítható, hogy hazai algebristáinkat szinte kizárólag az alapvető fontosságú kérdések érdeklik. További ilyen példa a csoportok faktorizációjának vizsgálata, amit két különböző irányban *Hajós György* és *Szép Jenő* alapoztak meg. Becsesek azok a referens előtt még bizonyára ismeretlen legújabb vizsgálatok, amelyeket *Szendrei János* és *Steinfeld Ottó* a Schreier-féte gyűrűbővítés Jacobson-féle radikáljának és a gyűrűk prímideáljainak vizsgálata körül végeztek. Úgy vettem ki a referátumból, mintha a referens mentegetné a hazai algebrai cikkek rövidségét. Én ezt nem látom indokoltnak, hanem úgy vélem, hogy elegendő mértékben szerepelnek terjedelmes cikkek és nem túl sok az aránylag rövid cikk. Az algebra elhanyagolt területei közül megemlítem az algebrai függvénytestek elméletét, amelynek hazánkban nincs művelője. Az egyébként igen részletes referátumban hiányolom a hazai kutatások külföldi visszhangjának ismertetését, bár kétségtelen, hogy ezzel a referátum terjedelme túlságosan felduzzadt volna. Hangsúlyozni szeretném azonban, hogy hazai algebrai kutatásaink sikere azok külföldi visszhangján is jól lemérhető. Például *Fuchs László, Szele Tibor* és *Szép Jenő* dolgozatai nagy külföldi visszhangot keltettek. *Fuchs László* és *Szele Tibor* említették a hazai algebrai vizsgálatok felvirágzásának örvendetes okait. Ehhez csupán azt fűzöm hozzá, hogy ennek a felvirágozásnak kormányzatunk és az Akadémia nagyvonalú tudományfejlesztő politikája mellett fontos tényezője az is, hogy algebristáink egymással szoros kapcsolatban végzik munkájukat. Ennek az együttműködésnek, amely jelentősen hozzájárul a kutatások sikeréhez, látható jele az aránylag igen nagy számú társszerzők által írt dolgozat.

SZÉP JENŐ:

Azt javaslom, hogy a Matematikai Lapokban ismertetés jelenjen meg időnként arra vonatkozólag, hogy a matematika egyéb területein miféle struktúra problémák merülnek fel, speciálisan milyen konkrét algebrai problémák érdeklik a más területen dolgozókat.

KALMÁR LÁSZLÓ lev. tag:

Mindenekelőtt pár szót az algebrának nálunk elhanyagolt, illetve továbbfejlesztendő irányairól. Ezek között említette az előadó a topológikus algebrát. Az a véleményem, hogy itt nagyobb nehézségek vannak, mint az algebra más határterületein. Ugyanis a topológikus algebra az algebrának a matematika egy olyan ágával, a topológiával határos területe, amelyet nálunk kevéssé művelnek. Könnyebb megteremteni a kapcsolatot a matematika olyan ágaival, amelyekben dolgozik egy-két szakember, aki meg tudja mondani, mit vár a matematika kérdéses ága az algebristától. Javasolom, hogy a Magyar Tudományos Akadémia tűzze tárgysorra legközelebb a geometria fejlesztését is és vitassa meg, mit lehetne különösen a topológia fejlődése érdekében tennünk.

A számelmélet és az algebra kapcsolatának kérdése régóta vitatott kérdés, felmerült már a Szovjetunióban lefolyt algebrai vita kapcsán is. Nem értek egyet *Rédei* tagtárssal abban, hogy a számelmélet az algebrának része. *Rédei* tagtárs azt mondja, hogy az algebra fejlődése szempontjából káros volna a számelmélet elválasztása az algebrától. Véleményem szerint még károsabb volna magán a számelméleten belül szétválasztani a különböző módszerekkel dolgozó területeket. A számelmélet fejlődésének biztosítéka éppen e területek egysége, amely a különböző módszerek ellenére fennáll és amely a közös problémákból származik. Gondoljunk pl. arra, hogy az analitikus számelmélet a maga legfontosabb problémáit az elemi számelmélettől kapta, amelyet *Rédei* tagtárs az algebrai számelmélet egy speciális fejezetének tekint; az analitikus számelmélet módszereit azután átvitték az algebrai számtestek ideáljainak vizsgálatára is. Hová sorolná *Rédei* tagtárs a *Waring*-problémát, amelyet *Hilbert* algebrai úton oldott meg, *Hardy* és *Littlewood* pedig analitikus módszerekkel?

A számelmélet és az algebra történetileg külön fejlődtek, mai fejlettségi fokukon pedig az absztrakció különböző fokain állnak. Az algebra a maga problémáit absztraktabb módon fogalmazza meg és általánosabban tárgyalja, mint a számelmélet. Már ez is nehézséget okozna, ha a számelméletet az algebra részének akarnók tekinteni.

Azzal sem értek egyet, hogy az algebra a matematika legrégibb fejezete volna. Az iskolára való hivatkozás nem meggyőző; a matematika története egészen mást mutat, t. i. hogy a geometria régebbi mint az algebra.

Azzal kapcsolatban, hogy a matematika más ágain dolgozó matematikusok adjanak problémákat az algebristáknak, megemlítek egy algebrai problémát az analízis azon új felépítésével, helyesebben tovább-építésével kapcsolatban, amelyet *Gombás* tagtárs előadásához tett hozzászólásomban említettem. Ebben a felépítésben fontos szerepet játszanak olyan $a(\varepsilon)$ függvények, amelyekre azonosan (azaz minden pozitív ε-ra) teljesül valamely $|a(\varepsilon)-a|\leq\varepsilon$ egyenlőtlenség. Az ilyen függvényeket fel lehet arra is használni, hogy a valós számok *Dedekind*-féle, vagy *Cantor*-féle bevezetése helyett ezek segítségével vezessük be a valós számokat. Természetesen nem minden (pozitív racionális ε-ra definiált) ilyen $a(\varepsilon)$ függvény alkalmas erre, hanem azok és csak azok az $a(\varepsilon)$ függvények, amelyekre azonosan teljesül az $|a(\varepsilon)-a(\eta)|\leqq\varepsilon+\eta$ egyenlőtlenség. E függvények halmazában mindenekelőtt egy ekvivalencia-relációt kell definiálnunk: azok és csak azok a függvények ekvivalensek, amelyek ugyanannak a számnak „közelítő függvényei". Könnyű látni, hogy ehhez szükséges és elegendő, hogy a kérdéses $a(\varepsilon)$ és $b(\varepsilon)$ függvények azonosan teljesítsék az $|a(\varepsilon)-b(\varepsilon)|\leqq 2\varepsilon$ egyenlőtlenséget. Ennek az ekvivalencia-relációnak ekvivalencia-osztályai talán algebrai szempontból is érdekes struktúrát alkotnak az itt szóbajövő összeadás és szorzás műveleteire nézve. Az összeg definiciója egyszerű: az $a(\varepsilon)$ és $b(\varepsilon)$ függvényekkel reprezentált osztályok összegét az $a\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)+b\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ függvény reprezentálja. A szorzat definícióját nem írom fel; az a mód vezet hozzá, ahogyan két szám szorzatát tetszőleges ε pontossággal megközelíthetjük, ha a tényezőket ugyancsak tetszőleges pontossággal meg tudjuk közelíteni. Természetesen előbb-utóbb ki kell derülnie, hogy ez a struktúra izomorf a valós számok testével.

Még néhány apró megjegyzés a referátumhoz. Bántóan hangzik a magyarban a direkt szummand kifejezés. Az Akadémia egyízben már hozott határozatot terminológiai kérdésben, matematikai szakkifejezésre vonatkozólag. (Lattice = háló.) Ajánlom a direkt szummand helyett a direkt összeadandó szakkifejezést.

Az előadó több izben használta a „mennyiség" kifejezést, amikor általános struktúrák elemeiről volt szó. Véleményem szerint helyesebb ilyenkor a „mennyiségi forma" kifejezés használata, amelyet tudomásom szerint *Kolmogorov* szovjet akadémikus vezetett be a matematikáról szóló enciklopédia-cikkében, amikor *Engels*nek a matematika tárgyáról adott meghatározása dialektikus továbbfejlesztésének lehetőségéről beszél.

*Fuchs László*nak azzal a megállapításával, hogy az axiómatikus módszer a *Bolyai*-geometriával kapcsolatban alakult ki, nem értek egyet. Természetesen *Bolyai*nak és *Lobacsevszkij*nak fontos érdemei vannak az axiómatikus módszer fejlesztése terén is; maga az axiómatikus módszer azonban legalább is *Euklides*zig vezethető vissza.

Azt sem helyeslem, hogy *Fuchs László* a speciális vizsgálatok között sorolta fel azoknak a csoportoknak vizsgálatát, amelyeknek minden valódi részcsoportja kommutatív. Valójában ezeket a vizsgálatokat is egy rendszerező törekvés hozta létre, amelynek célja a nem kommutatív csoportok osztályozása.

VINCZE ISTVÁN:

Fuchs László kartárs két pontban utalt azokra a feladatokra, amelyek a gyakorlattal kapcsolatosak és amelyek az algebristák előtt állnak. Ezek között szerepel az AMI-val való kapcsolat. Örömmel ragadjuk meg az alkalmat a kapcsolat felvételére és máris megjelölhetek egy területet az algebristák és az AMI közötti együttműködésre. A szűrő láncok elméletében lépten-nyomon használják az algebra módszereit. Itt Budapesten is dolgozik ennek a módszernek egy kiváló művelője, *Henyei Zoltán*, aki az algebristáktól függetlenül folytatja vizsgálatait. Az AMI meg fogja hívni egy előadás tartására és ezen az előadáson szívesen fogjuk látni az algebristákat is.

A szovjet algebrai vitaanyagra hivatkozva megemlítem, hogy a lineáris egyenletrendszerek numerikus megoldása terén vannak jelentős szovjet eredmények. *A. A. Abramov* a Csebisev-polinomok sajátságainak felhasználásával olyan módszereket dolgozott ki, amelyek lehetővé teszik sokismeretlenü lineáris egyenletrendszer megoldásának iterációs eljárás segítségével való lényeges meggyorsítását. *Ju. V. Linnik* a sokszögű kábelek darabjainak racionális összeillesztésére a primitív gyökök elméletét alkalmazta, továbbfejlesztve az ilyen irányú eredményeket.

Szeretnék néhány szót szólni az algebra elsőbbségével kapcsolatban. Persze nem mérhetjük az algebra kezdetét az aritmetika kezdetével. Azt hiszem, hogy az algebra kezdetének megjelölésénél legalább is követelmény az algebrai betűkifejezések használata. Ez elég jó objektív időszakhoz kötődik, ugyanúgy, mint ahogy a geometriai fogalmak kialakulásának kezdetét is figyelemmel tudjuk kísérni. Ezzel kapcsolatban *Rédei László* lev. tag említést tett arról, hogy az algebra forradalmi fejlődéséről csak az utolsó néhány évtizedben beszélhetünk. Meg vagyok győződve róla, hogy az algebra fejlődése során is voltak ugrásszerű fejlődések és érdekes volna megállapítani, hogy mikor voltak ezek, mi volt társadalmi hátterük. *Fuchs László* is hangsúlyozta, hogy a mostani társadalmi átalakulás milyen gyökeres átalakulást jelentett az algebra művelésében hazánkban. Azt hiszem, hogy a matematika története ilyenszerű kérdéseinek tisztázása is hozzátartozik tudományos feladatainkhoz.

FUCHS LÁSZLÓ válasza:

Csak egészen röviden szeretnék a hozzászólásokra reflektálni és ezekkel kapcsolatban néhány megjegyzést tenni. Mindenekelőtt nagyon köszönöm a hozzászólóknak, hogy észrevételeikkel, megjegyzéseikkel kiegészítették referátumomat és ezzel hozzájárultak a vitaülés színvonalának emeléséhez. Külön köszönöm *Szele Tibor*nak, hogy felszólalásában a referátum egyes részeit újabb szempontokkal világította meg és kiemelt olyan momentumokat, amelyek nem nyertek fontosságukat megillető hangsúlyt a referátumban.

Rédei László és *Kalmár László* levelezőtagok hozzászólásukban kitértek a számelmélet hovatartozásának problémájára. Ezt a kérdést igen nehéz eldönteni, hiszen sok érv szól az ellen, hogy a számelméletet az algebra részének tekintsük, de sok érv szól mellette is.

Köszönöm *Rédei* professzor hozzászólását, amelyben a referátumban felvetett számos problémát érintett. Valóban hiánya referátumomnak az, hogy nem tartalmazta a hazai algebrai kutatások külföldi visszhangját. Itt szeretném megragadni az alkalmat és újból felhívni a figyelmet arra, amit a referátumban is érintettem: az eredmények alapos kiaknázását; t. i. a gyors külföldi reflektálás egyes esetekben — bár az esetek túlnyomó többségénél nem ez a helyzet — arra utalhat, hogy a cikkíró nem aknázta ki eléggé a tárgyalt kérdéskört.

Szép Jenő javaslatát nagyon köszönöm. Ezt igen egészséges ötletnek tartom, mert ilyen ismertető cikkek által nemcsak maguk az algebristák, hanem más matematikusok is megismerkedhetnek ezekkel a kérdésekkel, kiegészíthetik ezeket az általuk ismert eredményekkel és így a matematika fejlődését jelentős mértékben segíthetjük elő. Az algebristáknak az Alkalmazott Matematikai Intézettel való kapcsolatára vonatkozó javaslatot *Vincze István* részéről szintén köszönöm. Igen örvendetes lenne, ha már a közeljövőben megvalósulhatna ez a kapcsolat.