

FEJÉR LIPÓT EGY SORELMÉLETI TÉTELÉRŐL

FREUD GÉZA

Bemutatta Turán Pál r. tag az 1952. június 16-án tartott felolvasó ülésen

Fejér Lipót^{1,2} bebizonyította, hogy ha az

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad (1)$$

függvény $|z| < 1$ -re reguláris, korlátos és egyrétű, akkor az (1) hatványsor minden olyan $z = e^{i\varphi}$ helyen konvergens, ahol a

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} f(re^{i\varphi}) = f(e^{i\varphi}) \quad (2)$$

radiális határérték létezik és a sor összege ott egyenlő $f(e^{i\varphi})$ -vel. Fejér bizonyítása azon a felismerésen alapul, hogy a $w = f(z)$ leképezés a $|z| < 1$ kört olyan tartományba viszi át, melynek területe véges:

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} |f'(re^{i\varphi})|^2 r d\varphi dr = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n |a_n|^2 < \infty. \quad (3)$$

Ebből Fejér tétele egyszerű becslésekkel levezethető.

Megmutatjuk, hogy a (3) becslés és ennek következtében Fejér tétele is, akkor is érvényes marad, ha $f(z)$ már nem egyrétű, de az egységgörbén reguláris, korlátos és egyrétű $\varphi_1(z), \varphi_2(z), \dots, \varphi_n(z)$ függvényeknek racionális egész függvénye:

$$f(z) = \sum_{k_1, k_2, \dots, k_n=0}^N c_{k_1, k_2, \dots, k_n} \varphi_1^{k_1} \varphi_2^{k_2} \dots \varphi_n^{k_n}. \quad (4)$$

A továbbiakban az egységgörbén belsejében reguláris és korlátos függvényeket, amelyek (1) hatványsora eleget tesz a (3) feltételnek, Fejér-féle függvényeknek fogjuk nevezni. Tehát speciálisan az egységgörbén belsejében reguláris, korlátos és egyrétű függvények Fejér-féle függvények. (3)-ból következik, hogy egy Fejér-féle függvény (1) hatványsora minden olyan $z = e^{i\varphi}$ helyen konvergál, ahol a (2) határérték létezik és összege $f(e^{i\varphi})$. Behizonyítjuk az alábbi tételt:

Tétel: A Fejér-féle függvények gyűrűt alkotnak.

Ez az alábbi két segédtevéből következik:

I. segédtevé: Ha $f_1(z)$ és $f_2(z)$ Fejér-féle függvény, akkor $f(z) = f_1(z) + f_2(z)$ is Fejér-féle függvény.

Bizonyítás. Miután $f_1(z)$ és $f_2(z)$ az egységgörbén korlátosak, ugyanott $f_1(z) + f_2(z)$ is korlátos lesz. Legyen

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{1n} z^n; \quad f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} z^n. \quad (5)$$

akkor $\sum_{n=1}^{\infty} n |a_n|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} n |a_{1n} + a_{2n}|^2 \leq 2 \sum_{n=1}^{\infty} n |a_{1n}|^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} n |a_{2n}|^2 < \infty$, miután az $f_1(z)$ és $f_2(z)$ Fejér-féle függvények együtthatói eleget tesznek a (3) feltételnek.

II. Segédteétel: Ha $f_1(z)$ és $f_2(z)$ Fejér-féle függvények, akkor $f(z) = f_1(z)f_2(z)$ is Fejér-féle függvény.

Bizonyítás: $f_1(z)f_2(z)$ az egységkörben korlátos, miután mind a két tényező korlátos. k legyen $f_1(z)$ és $f_2(z)$ közös korlátja. Akkor

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^{2\pi} |f'(re^{i\varphi})|^2 r d\varphi dr &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} |f'(re^{i\varphi}) f_2(re^{i\varphi}) + f_1(re^{i\varphi}) f_2'(re^{i\varphi})|^2 r d\varphi dr < \\ < k \int_0^1 \int_0^{2\pi} |f_1'(re^{i\varphi})|^2 r d\varphi dr + k \int_0^1 \int_0^{2\pi} |f_2'(re^{i\varphi})|^2 r d\varphi dr < \infty. \end{aligned}$$

Még csak annyit kell megjegyeznünk, hogy $f(z) \equiv 1$ és általánosabban $f(z) \equiv a_0$ is triviális módon Fejér-féle függvény. Ennek következtében (4) is elemé a Fejér-féle függvények gyűrűjének, amivel állításunkat bebizonyítottuk.

Turán Pál egy egyszerű példájából* következik, hogy a korlátosság feltétele nem hagyható el. Legyen ugyanis

$$f_1(z) = f_2(z) = \sum_{n=2}^{\infty} \alpha_n z^n \quad \alpha_n = \frac{1}{n \log^{\frac{5}{8}} n}.$$

Könnyen belátható, hogy $\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = +\infty$, tehát $f(z)$ az egységkörben nem korlátos. Legyen

$$[f(z)]^2 = \sum_{n=4}^{\infty} \beta_n z^n,$$

akkor

$$\beta_n = \sum_{r=2}^n \alpha_r \alpha_{n-r} > \frac{1}{n \log^{\frac{5}{8}} n} \int_1^n \frac{dx}{x \log^{\frac{5}{8}} x} =$$

$$\frac{8}{3} \left(\frac{1}{n \log^{\frac{1}{4}} n} - \frac{(\log 4)^{\frac{3}{8}}}{n \log^{\frac{5}{8}} n} \right) > \frac{1}{2} \frac{1}{n \log^{\frac{1}{4}} n}, \quad \text{ha } n > 150.$$

Tehát a $\sum n |\beta_n|^2$ sor majoránsa a divergens $\frac{1}{4} \sum_{n=150}^{\infty} \frac{1}{n \log^{\frac{1}{2}} n}$ sornak és így maga is divergál.

Tehát az egységkör belsejében reguláris függvények, amelyek a (3) feltételnek eleget tesznek, de nem szükségképpen korlátosak, nem alkotnak gyűrűt.

Magyar Tudományos Akadémia
Alkalmazott Matematikai Intézete.

IRODALOM

1. *L. Fejér*: Über die Konvergenz der Potenzreihe an der Konvergenzgrenze in Fällen der konformen Abbildung auf die schlichte Ebene, *Schwarz Festschrift* (Springer, 1914) 42–53.
2. *L. Fejér*: Fourierreihe und Potenzreihe, *Monatshefte für Math.* 28, (1917), 64–76.

* Szóbeli közlés.