ORTOGONÁLIS POLINOMOK ERŐS $(C, 1)$-SZUMMÁLHATÓSÁGÁRÓL

FREUD GÉZA

Bemutatta Alexits György r. tag. az 1952. június 16-án tartott felolvasó ülésen

Bevezetés

Tandori Károly[7] bebizonyította, hogy *Hardy* és *Littlewood*[4] Fourier-sorok erős $(C, 1)$-szummálhatóságára vonatkozó tétele az ortogonális polinom-sorok egy széles osztályára általánosítható. *Tandori* tétele pontosan a következőket mondja:

$p_0(x), p_1(x), \ldots$ legyen az (a, b) intervallumban a $w(x) \geqq 0$ súlyfüggvényekhez tartozó normált ortogonális polinomok sorozata. A szokásos módon $p_n(x)$ legyen a pontosan n-edfokú polinom és $p_n(x)$ kifejtésében x^n együtthatója legyen pozitív. Ha most (a, b) egy (α, β) belső részintervallumában

$$|p_n(x)| \leqq k \qquad (n = 0, 1, 2) \ldots \tag{1}$$

(k n-től független), továbbá $w(x)[f(x)]^2 \in L$ (a továbbiakban rövidítve: $f \in L^2(w)$), akkor az

$$f(x) \sim \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu p_\nu(x), \; a_\nu = \int_a^b f(x) p_\nu(x) w(x)\, dx \tag{2}$$

ortogonális sorfejtés (α, β)-ban majdnem mindenütt erősen $(C, 1)$-szummálható $f(x)$-hez.

Bebizonyítjuk, hogy ez a tétel lényegesen általánosítható, éspedig az (1) feltétel az annál sokkal gyengébb

$$\sum_{\nu=0}^{n} [p_\nu(x)]^2 = O(n) \tag{3}$$

feltétellel helyettesíthető. Ezen felül megmutatjuk, hogy a (3) teljesülését is csak egy rögzített x értékre kell feltételeznünk; ebben az esetben a (2) sor az x helyen $(C, 1)$-szummálható, ha az alább részletezett (4) lokális feltétel teljesül.

Ezen általánosítás azért jelentős, mert (3) *biztosan teljesül, ha a $w(t)$ súlyfüggvénynek az x hely egy (akármilyen kis) környezetében pozitív alsó korlátja van.*

Bár a klasszikus Jacobi-féle polinomokra (1) teljesül, nem ismerünk olyan általános, a súlyfüggvényre vonatkozó kritériumot, amiből (1) következne. A szakirodalomban ismert kritériumok (*Bernstejn*,[1] *Geronimusz*,[3] *Ko-*

*rous**,[5] *Szegő***)[6] erős megszorításokat tesznek a súlyfüggvényre; ennek megfelelően viszont többet állítanak, mint (1).

Tételek

I. tétel: Az x helyen ($a < x < b$) *teljesüljön* (3), $f \in L^2(w)$ *és legyen*

$$\varphi_x(h) = \int_x^{x+h} [f(t) - f(x)]^2 w(t)\, dt = O(|h|), \tag{4}$$

akkor

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=0}^{n} |s_\nu(x) - f(x)| = 0. \tag{5}$$

Ha (3) *és* (4) *az* (a, b)*-nek egy* (α, β) *belső részintervallumában egyenletesen teljesül, akkor* (5) *is* (α, β) *minden belső részintervallumában egyenletesen teljesül.*

II. tétel: Az (a, b) *egy belső* (α, β) *részintervallumában legyen*

$$w(x) > m > 0, \tag{6}$$

akkor a (3) *becslés* (α, β) *minden belső részintervallumára egyenletesen teljesül.*

Ha $f \in L^2(w)$, akkor (4) az (a, b) ortogonalitási intervallumban majdnem mindenütt teljesül (*Tandori*[7]) és így a (2) ortogonális kifejtés (α, β)-ban majdnem mindénütt $(C, 1)$-szummálható. Ezen felül *Zygmund*[8] egy tételéből következik:

III. tétel: Ha (a, b)*-nek egy E részhalmazán* (3) *teljesül, akkor a* (2) *ortogonális kifejtés E majdnem minden pontjában erősen* $(C, 1)$*-szummálható* $f(x)$*-hez.****

Ha

$$M > w(x) > m > 0, \quad \text{ha} \quad \alpha \leqq x \leqq \beta. \tag{7}$$

Akkor a II. tétel szerint (3) az (α, β) minden belső részintervallumában egyenletesen teljesül; ha ezen felül $f(x)$ (α, β)-ban folytonos, akkor a (4) becslés (α, β) minden belső részintervallumára egyenletesen érvényes. Ebből az I. tétel szerint következik, hogy

IV. tétel: A $w(x)$ *súlyfüggvény tegyen eleget a* (7) *egyenlőtlenségnek és* $f(x)$ *legyen* (α, β)*-ban folytonos; akkor a* (2) *ortogonális kifejtés részletösszegeinek számtani közepei* (α, β) *minden belső részintervallumában egyenletesen* $f(x)$*-hez tartanak.* (*Fejér* approximációtételének általánosítása.)

* Lásd még *I. P. Natanson* Konstruktív Függvénytan 3. tétel, 277.

** 12. 1. 6. tétel, 291.

*** Mint ismeretes, az erős $(C, 1)$-szummálhatóság azt jelenti, hogy

$$\lim_{n = \infty} \frac{1}{n+1} \sum [s_\nu(x) - f(x)]^2 = 0.$$

Az I. tétel bizonyítása

Legyenek n és $\nu \leqq n$ nemnegatív egészszámok, (2) következtében

$$s_\nu(x) = \sum_{r=0}^{\nu} a_r p_r(x) = \int_a^b k_\nu(x,t) f(t)\,dt, \tag{8}$$

ahol

$$k_\nu(x,t) = \sum_{r=0}^{\nu} p_r(x) p_r(t) = \gamma_\nu \frac{p_{\nu+1}(x)p_\nu(t) - p_\nu(x)p_{\nu+1}(t)}{x-t}, \tag{9}$$

ahol a Schwarz-féle egyenlőtlenség szerint

$$\begin{gathered} 0 < \gamma_\nu = \int_a^b p_\nu(t) p_{\nu+1}(t) w(t)\,dt \leqq \\ \leqq \Big(\int_a^b [p_\nu(t)]^2 w(t)\,dt\Big)^{1/2} \Big(\int_a^b |t| [p_{\nu+1}(t)]^2 w(t)\,dt\Big)^{1/2} \leqq \operatorname{Max}(|a|, |b|). \end{gathered} \tag{10}$$

Tekintettel (8) és (9)-re

$$s_\nu(x) - f(x) = A_\nu - \gamma_\nu p_{\nu+1}(x) B_\nu + \gamma_\nu p_\nu(x) B_{\nu+1}, \tag{11}$$

ahol

$$A_\nu = \int_{x-\frac{c}{n+1}}^{x+\frac{c}{n+1}} k_\nu(x,t)[f(t)-f(x)] w(t)\,dt, \tag{12}$$

$$B_\nu = \int_a^{x-\frac{c}{n+1}} \frac{f(t)-f(x)}{t-x} p_\nu(t) w(t)\,dt + \int_{x+\frac{c}{n+1}}^{b} \frac{f(t)-f(x)}{t-x} p_\nu(t) w(t)\,dt. \tag{13}$$

A $c > 0$ állandót válasszuk úgy, hogy a $a < x-c < x+c < b$ (12), (9), (3) és (4)-ből, tekintettel arra, hogy $\nu \leqq n$:

$$\begin{gathered} |A_\nu| \leqq \Big(\int_{x-\frac{c}{n+1}}^{x+\frac{c}{n+1}} [f(t)-f(x)]^2 w(t)\,dt\Big)^{1/2} \Big(\int_a^b [k_\nu(x,t)]^2 w(t)\,dt\Big)^{1/2} = \\ = O(n^{-1/2}) \Big(\sum_{r=0}^{\nu} [p_r(x)]^2\Big)^{1/2} = O(1) \end{gathered} \tag{14}$$

(13) következtében B_ν a ν indexű együtthatója az

$$F(t) = \begin{cases} 0, \text{ ha } x - \dfrac{c}{n+1} < t < x + \dfrac{c}{n+1} \\ \dfrac{f(t)-f(x)}{t-x}, \text{ ha } t < x - \dfrac{c}{n+1}, \text{ vagy } t > x + \dfrac{c}{n+1} \end{cases}$$

függvénynek. Tehát a Bessel-féle egyenlőtlenség következtében, tekintettel (4)-re:

$$\sum_{\nu=0}^{n+1} B_\nu^2 \leqq \int_a^{x-\frac{c}{n+1}} [F(t)]^2 w(t)\,dt + \int_{x+\frac{c}{n+1}}^{b} [F(t)]^2 w(t)\,dt =$$

$$= \left[\frac{\varphi_x(t-x)}{(t-x)^2}\right]_a^{x-\frac{c}{n+1}} + \left[\frac{\varphi_x(t-x)}{(t-x)^2}\right]_{x+\frac{c}{n+1}}^{b} + 2\int_a^{x-\frac{c}{n+1}} \frac{\varphi_x(t-x)}{(t-x)^2}\,dt + \tag{15}$$

$$+ 2\int_{x+\frac{c}{n+1}}^{b} \frac{\varphi_x(t-x)}{(t-x)^3}\,dt = 0(n).$$

Tehát

$$\sum_{\nu=0}^{n} (|p_\nu(x)|\,|B_{\nu+1}| + |p_{\nu+1}(x)|\,|B_\nu| \leqq 2\left(\sum_{\nu=0}^{n+1} [p_\nu(x)]^2\right)^{1/2} \left(\sum_{\nu=0}^{n+1} B_\nu^2\right)^{1/2} = o(n) \tag{16}$$

(10), (11), (14) és (16) következtében (5) teljesül. Q. e. d.

Ha (3) és (4) (α, β)-ban egyenletesen teljesül, akkor (α, β) minden rögzített belső $(\alpha_0 \beta_0)$ részintervallumába eső x pontokra a c állandót ugyanakkorának választhatjuk. Ennek következtében (15) is (α_0, β_0)-ban egyenletesen teljesül.

A II. tétel bizonyítása

Ismeretes, hogy $k_n(x, x)$ a felső határa $|\pi_n(x)|^2$-nek, ha $\pi_n(x)$ végigfut azon legfeljebb n-edfokú polinomokon, amelyek kielégítik az

$$\int_a^b |\pi_n(t)|^2 w(t)\,dt \leqq 1 \tag{17}$$

feltételt.*

A továbbiakban éppen azt a polinomot jelöljük $\pi_n(t)$-vel, amely az x helyen a $|\pi_n(x)|^2 = k_n(x, x)$ felső határt tényleg felveszi. A $w(x) \geqq m > 0$ feltételből és (17)-ből következik, hogy

$$m \int_a^b |\pi_n(t)|^2\,dt \leqq 1,$$

tehát ugyanezen Szegő-féle lemma alapján

$$m\,|\pi_n(x)|^2 = m\,k_n(x, x) \leqq \sum_{\nu=0}^{n} [p_\nu^*(x)]^2, \tag{18}$$

ahol $p_\nu^*(x)$ az (α, β) intervallumban $w^*(x) \equiv 1$ súlyfüggvényhez tartozó

* Lásd *Szegő* loc. cit.[6], 3. 1. 3 tétel 38.

ν-edfokú ortogonális polinom. Könnyen belátható, hogy

$$p_\nu^*(x) = \sqrt{\frac{2\nu+1}{\beta-\alpha}}\, P_\nu\left(-1+2\frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}\right), \tag{19}$$

ahol $P_\nu(x)$ a ν-edfokú Legendre-féle polinomot jelenti, a szokásos $P_\nu(1)=1$ normálással. Laplace egy klasszikus becslése szerint $(-1, +1)$ minden belső részintervallumában u-ban egyenletesen*

$$P_\nu(u) = 0(\nu^{-1/2}) \tag{20}$$

(18), (19) és (20)-ből kapjuk tehát, hogy

$$k_n(x, x) = \sum_{\nu=0}^{n} [p_\nu(x)]^2 = 0(n). \tag{21}$$

Ugyanezt a gondolatmenetet, amely a (18) egyenlőtlenséget szolgáltatta, *Erdős Pál* és *Turán Pál*[2] használták először, a Lagrange-féle interpoláció alapfüggvényeinek becslésére.

Magyar Tudományos Akadémia
Alkalmazott Matematikai Intézete.

IRODALOM

[1] *S. Bernstein,* Sur les polynomes orthogonaux relatifs á un segment fini, Journal de Math. (9), *9* (1930), 127—177. és *10* (1931), 219—286.

[2] *P. Erdős—P. Turán,* On interpolation, III, Annals of Math., *41* (1940), II. Lemma 524—525.

[3] Я. Л. Геронимус: Об ортогональных полиномах В. А. Стеклова, Доклады Ак. Наук СССР *83* (1952), 5—8.

[4] *G. H. Hardy* és *J. E. Littlewood,* Sur la série de Fourier d'une fonction á carré sommable, C. R. Acad. Sci. Paris, *156* (1913), 1307—1309.

[5] *J. Korous,* O rozwoji funkci jedné reálné proménné v radu jistich orthogonálnich polinomu. Rozpravy Ceske Akadémie (2), *48* (1938), 12.

[6] *G. Szegő,* Orthogonal polynomials, Amer. Math. Soc. Coll. Publ. XXIII. kötet (1939).

[7] *K. Tandori,* Über die Cesárosche Summierbarkeit der orthogonalen Polynomreihen, Acta Math. Acad. Sci. Hung. *3* (1952), 73—82.

[8] *A. Zygmund,* Un theoreme sur les séries orthogonales, Studia Math., *2* (1930), 181—182.

* Lásd *I. P. Natanson* Konstruktiv Függvénytan (143) képlet, 294.