A LAGRANGE-FÉLE INTFRPOLÁCIÓ LEBESGUE-FÜGGVÉNYEIRŐL

FREUD GÉZA

Bemutatta Alexits György r. tag az 1953. április 6-án tartott felolvasó ülésen

Bevezetés

Legyen

$$\begin{array}{c} a \leqq x_{11} \leqq b \\ a \leqq x_{12} < x_{22} \leqq b \\ \cdots \\ \cdots \\ a \leqq x_{1n} < x_{2n} < \cdots < x_{nn} \leqq b \\ \cdots \\ \cdots \end{array} \tag{1}$$

és az (1) mátrix n-edik sorának elemeire, mint alappontokra képezett Lagrange-féle interpoláció x_{kn} alapponthoz rendelt alapfüggvénye legyen $l_{kn}(x)$. *G. Helly*[9] és *H. Hahn*[8] egy ismert tétele szerint az

$$L_n(f; x) = \sum_{k=1}^{n} f(x_{kn}) l_{kn}(x) \tag{2}$$

interpolációs sorozat konvergenciatulajdonságait a

$$\Lambda_n(x) = \sum_{k=1}^{n} |l_{kn}(x)| \tag{3}$$

Lebesgue-féle függvények szabják meg. *G. Faber*[5] egy tétele értelmében (lásd még *S. Bernstein,*[3] *Fejér Lipót*[6] akárhogyan is írjuk elő az (1) alappontmátrixot az (a, b) intervallumban, találhatók olyan, az (a, b)-be eső ξ_n számok, melyekre

$$\Lambda_n(\xi_n) > c_1 \log n, \tag{4}$$

ahol c_1 (és a továbbiakban $c_2, c_3 \ldots$) n-től független állandók *S. Bernstein*[3] kimutatta, hogy a (4) becslés pontos abban az értelemben, hogy $a = -1$, $b = +1$ esetén, amennyiben (1) n-edik sorának a $T_n(x)$ Csebisev-polinom gyökeit választjuk, akkor

$$\Lambda_n(x) = 0 (\log n) \tag{5}$$

$(-1, +1)$-ben egyenletesen. Szegő Gábor[12] bebizonyította, hogy (5) a $(-1, +1)$ intervallum minden belső részintervallumában egyenletesen érvényes még akkor is, ha az interpoláció alappontjainak nem a Csebisev-polinomokat, hanem a $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ Jacobi-polinomok gyökeit választjuk.

Ennél általánosabb érvényű, de (5)-nél gyengébb becsléseket találtak *J. Shohat*[11], továbbá *Grünwald Géza* és *Turán Pál*[7]: Legyen $\{P_n(x)\}$ a $p(x)$

L-integrálható súlyfüggvényhez tartozó ortogonális polinomok sorozata, az ortogonalitási intervallum legyen (a, b) és legyenek az x_{kn} alappontok $(k=1, 2, \ldots n)$ a $P_n(x)$ polinom gyökei. Eredményük szerint, ha minden $a \leqq x \leqq b$-re

$$p(x) \geqq m > 0; \text{ ill. } p(x)\sqrt{(x-a)(b-x)} \geqq m > 0;$$

akkor

$$\Lambda_n(x) = 0(\sqrt{n})$$

(a, b) minden belső részintervallumában egyenletesen, ill. az egész (a, b) ortogonalitási intervallumban egyenletesen. Várható, hogy a Jacobi-polinomok gyökhelyeinek (3) interpolációs sajátsága is elsősorban ezen polinomok ortogonalitásán mulik. Ennek ellenére *Szegő Gábor* (5) bizonyításához csak a Jacobi-polinomokra és első deriváltjaikra érvényes speciális becsléseket használ fel. Az alábbiakban egy, a Jacobi-polinomok gyökhelyeinek esetén lényegesen túlmenő, olyan általános tételt bizonyítunk be, amelyből *Szegő* tétele speciális esetként következik:

I. tétel. Legyen $\{P_n(x)\}$ *az* (a, b) *intervallumban a* $p(x)$ *L-integrálható nemnegatív súlyfüggvényre ortogonális és normált polinomok sorozata és képezzük a* $\{P_n(x)\}$ *gyökeiből az* (1) *interpolációs mátrixot. Ha* (a, b) *egy* (α, β) *belső részintervallumában*

$$0 < m \leqq w(x) \leqq M \tag{6}$$

és ugyanott

$$|P_n(x)| \leqq K; \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{7}$$

akkor az (5) becslés (α, β) minden belső részintervallumára egyenletesen teljesül.

A $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ Jacobi polinomok esetén $\alpha, \beta > -1$ mellett a súlyfüggvény L-integrálható és $(-1, +1)$ minden belső részintervallumában korlátos, továbbá a normált Jacobi-polinomok ugyanott egyenletesen korlátosak: tételünk Szegő tételét magában foglalja. De általánosabb annál, mert pl. *J. Korous*[10] (V. ö. Szegő Gábor[12] 157. o.) egy tételéből következik, hogy (7) akkor is teljesül, mégpedig a $(-1, +1)$ interpolációs intervallum minden belső részintervallumára egyenletesen, ha a $(-1, +1)$ ortogonalitási intervallumban az alábbi súlyfüggvényt választjuk:

$$w(x) = (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}\varphi(x),$$

ahol $\alpha > -1$, $\beta > -1$ és $(-1, +1)$-ben $\varphi \in \text{Lip } 1$ továbbá

$$\varphi(x) > k > 0.$$

Az I. tétel bizonyítása.

Miután $x_{1n}, x_{2n}, \ldots x_{nn}$ egyben a $w(x)$ súlyfüggvényhez tartozó n-edfokú Gauss-féle mechanikus kvadratúra alappontjai, tetszőleges legfeljebb $2n-1$-edfokú $\pi_{2n-1}(x)$ polinomra

$$\int_a^b \pi_{2n-1}(x) w(x)\, dx = \sum_{k=1}^{2} \lambda_{kn} \pi_{2n-1}(x_{kn}), \tag{8}$$

ahol $\lambda_{1n}, \lambda_{2n}, \ldots \lambda_{nn}$ a mechanikus kvadratúra Cotes-féle számai. Ennek következtében

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_{kn} = \int_a^b w(x)\, dx = c_2 \tag{9}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_{kn} [P_{n-1}(x_{kn})]^2 = \int_a^b [P_{n-1}(x)]^2 w(x)\, dx = 1 \tag{10}$$

és végül, tekintettel arra, hogy $l_{kn}(x_{in}) = \delta_{ik}$,

$$\int_a^b l_{km}(x) \pi_n(x) w(x)\, dx = \lambda_{kn} \pi_n(x_{kn}), \tag{11}$$

ahol $\pi_n(x)$ legfeljebb n-edfokú polinom. Helyettesítsünk (11)-be rendre $\pi_n(x)$ helyébe $P_0(x), P_1(x), \ldots P_{n-1}(x)$-et, akkor megkapjuk $l_{kn}(x)$-nek $\{P_n(x)\}$ szerint haladó ortogonális kifejtésének együtthatóit: a Christoffel—Darboux-képlet szerint tehát

$$l_{kn}(x) = \lambda_{kn} \sum_{\nu=0}^{n-1} P_\nu(x_{kn}) P_\nu(x) = \lambda_{kn} \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} \frac{P_{n-1}(x_{kn}) P_n(x)}{x - x_{kn}}. \tag{12}$$

Elemi becslés segítségével (lásd *Alexits György*)

$$0 < \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} < \text{Max}\,(|a|, |b|) = c_3. \tag{13}$$

Szükségünk lesz az alábbi segédtételekre:

I. segédtétel: (α, β) minden rögzített belső részintervallumába eső x_{kn} alappontok egyenletesen

$$0 < \lambda_{kn} = O\left(\frac{1}{n}\right). \tag{14}$$

Ennek bizonyítását lásd *Erdős Pál* és *Turán Pál*[4], V. lemma, 530.

II. segédtétel: Ugyancsak az (α, β) rögzített belső részintervallumába eső x_{kn}, $x_{k+1,n}$ alappontokra egyenletesen

$$x_{k+1,n} - x_{k,n} > \frac{c_4}{n}. \tag{15}$$

Lásd *Erdős Pál* és *Turán Pál*[4], VIII. tétel, 538.

Ezenkívül (12), (14) és (7) felhasználásával (α, β) minden belső részintervallumába eső x_{kn} és x értékekre egyenletesen

$$l_{kn}(x) = O(1). \tag{16}$$

Legyen most x az $(\alpha+h, \beta-h)$ intervallum egy tetszőleges pontja és $\alpha_1=\alpha+h/2$; $\beta_1=\beta-h/2$, végül az x-szel szomszédos két alappont legyen x_{in} és $x_{i+1,n}$.

Bontsuk fel (3) jobboldalán álló összeget három részre. Az első részben hagyjuk a $k=i$ és $k=i+1$-hez tartozó tagokat; a második részbe soroljuk azokat a tagokat, amelyek az előbbiektől különböznek és amelyekhez tartozó alappontok (α_1, β_1)-be esnek; végül a harmadik részbe soroljuk a többi alappontot. Ilyen módon, tekintettel (12), (7) és (13)-ra*

$$\begin{aligned} \Lambda_n(x) = \sum_{x=i}^{i+1} + \sum_{x_{kn}\in(\alpha_1\beta_1)}' + \sum_{x_{kn}\overline{\in}(\alpha_1\beta_1)} < c_5 + |P_n(x)| \Big\{ \frac{c_6}{n} \sum_{x_{kn}\in(\alpha_1\beta_1)}' \frac{1}{|x-x_{kn}|} + \\ + \frac{c_7}{h} \sum_{x_{kn}\overline{\in}(\alpha_1\beta_1)} \lambda_{kn} |P_{n-1}(x_{kn})| \Big\}. \end{aligned} \tag{17}$$

A II. segédtétel alapján, miután a Σ' összegezésből az x-szel szomszédos alappontokat kihagytuk,

$$\sum_{x_{kn}\in(\alpha_1\beta_1)}' \frac{1}{|x-x_{kn}|} < 2\sum_{r=1}^{n} \frac{1}{c_4 r/n} < c_8 n \log n. \tag{18}$$

Másrészt (9) és (10) felhasználásával

$$\begin{aligned} \sum_{x_{kn}\overline{\in}(\alpha_1\beta_1)} \lambda_{kn} |P_{n-1}(x_{kn})| < \sum_{k=1}^{n} \lambda_{kn} |P_{n-1}(x_{kn})| < \\ < \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \lambda_{kn} \sum_{k=1}^{n} \lambda_{kn} [P_{n-1}(x_{kn})]^2} = c_9^{1/2} \end{aligned} \tag{19}$$

tehát (16), (17) és (18) felhasználásával

$$\Lambda_n(x) < c_5 + c_9 |P_n(x)| \log n \tag{20}$$

amiből (5) következik, Q. e. d.

Az interpolációsorozat konvergenciája és maradéktagja

Legyen $p_{n-1}(x)$ az a legfeljebb $n-1$-edfokú polinom, amely az adott folytonos $f(x)$ függvényt az (a, b)-szakaszon a Csebisev-féle értelemben a legjobban megközelíti és legyen

$$E_{n-1} = \operatorname*{Max}_{x\in(a,b)} |f(x) - p_{n-1}(x)|. \tag{21}$$

Az (1) mátrix segítségével képezett $L_n(f; x)$ interpolációs eljárás alapfüggvényeire az x helyen legyen érvényes az (5) becslés. Akkor

$$\begin{aligned} |L_n(f;x) - f(x)| \leqq |L_n(f;x) - p_{n-1}(x)| + |p_{n-1}(x) - f(x)| \leqq \\ \leqq |L_n(f-p_{n-1}, x)| + E_{n-1} \leqq [\Lambda_n(x)+1] E_{n-1}. \end{aligned} \tag{22}$$

II. tétel: Az $f(x)$ függvény az (a, b) intervallumban egyenletesen tegyen eleget az

$$|f(x_2) - f(x_1)| = o(|\log (x_2-x_1)|^{-1}) \tag{23}$$

* $x_{kn} \overline{\in} (\alpha, \beta)$ azt jelenti, hogy az (α, β) intervallum nem tartalmazza x_{kn}-t.

feltételnek. Akkor az I. tételben definiált $L_n(f)$ interpolációs eljárásokra (α, β) minden belső részintervallumára egyenletesen

$$\lim_{n=\infty} L_n(f; x) = f(x) \tag{24}$$

Jacobi polinomokra ezt a tételt *Szegő Gábor*[12] (14,4 tétel, 328) bizonyította.

Bizonyítás: Az I. tétel értelmében (5) (α, β) minden belső részintervallumára egyenletesen teljesül. Másrészt *D. Jackson* tétele szerint (23)-ból következik, hogy

$$E_{n-1} = o\,(\log n) \tag{25}$$

(22), (5) és (25)-ből (24) leolvasható.

III. Tétel: $f(x)$ legyen (a, b)-ben r-szer differenciálható és ugyanott legyen $f^{(r)} \in$ Lip α, akkor az I. tételben definiált $L_n(f)$ interpolációs eljárásokra minden belső részintervallumában egyenletesen*

$$L_n(f, x) = f(x) + 0\,(n^{-r-\alpha} \log n). \tag{26}$$

Bizonyítás: Feltételünk szerint *D. Jackson* tételéből

$$E_{n-1} = 0\,(n^{-r-\alpha}), \tag{27}$$

amivel állításunk a II. tétel bizonyításához hasonlóan következik.

A III. tételhez analóg összefüggés ortogonális polinomsorokra is érvényes (lásd *Alexits György*[2]).

Magyar Tudományos Akadémia
Alkalmazott Matematikai Intézete.

* $r = 0$ úgy értendő, hogy $f \in$ Lip α.

IRODALOM:

[1] *G. Alexits:* Sur la convergence des séries de polynomes orthogonaux. Commentarii Math. Helvetici. *13,* (1943), 200—208.

[2] *G. Alexits:* Über den Annäherungsgrad der Orthogonalpolynomentwicklungen. Acta Math. Ac. Sci. Hung. *3,* (1952), 43—48.

[3] *S. Bernstein:* Quelques remarques sur l'interpolation. Math. Annalen *79,* (1918), 1—12.

[4] *P. Erdős* és *P. Turán:* On interpolation. III. Annals of Math. *41,* (1940), 510—553.

[5] *G. Faber:* Über die interpolatorische Darstellung stetiger Funktionen. Jahresbericht der Deutschen Math. Vereinigung *23,* (1914), 192—210.

[6] *L. Fejér:* Die Abschätzung eines Polynoms in einem Intervalle, wenn Schranken für seine Werte und ersten Ableitungswerte in einzelnen Punkten des Intervalles gegeben sind und ihre Anwendung auf die Konvergenzfrage Hermitescher Interpolationsreihen. Math. Zeitschr. *32,* (1930), 426—457.

[7] *G. Grünwald* és *P. Turán:* Über Interpolation. Annali della Schole Normale Superiora di Pisa. *7,* (1938), 137—146.

[8] *H. Hahn:* Über das Interpolationsproblem. Math. Zeitschr. *1,* (1918), 115—142.

[9] *E. Helly:* Über lineare Funktionaloperationen. Sitzungsber. der math.-naturw. Klasse der Akad. in Wien, Abt. II. a. *121,* (1912), 265—297.

[10] *Korous:* O rozvoji funkci jédré reálné promenné v radu jistych ortogonálnich polynomu. Razpravy Ceske Akademie (2) *48,* (1938), 12.

[11] *J. Shohat:* On interpolation. Annals of Math. *34,* (1933), 130—146.

[12] *G. Szegő:* Orthogonal Polynomials. Amer. Math. Soc. Coll. Publ. Vol. XXIII. 1939.