

AZ ASSZOCIATIVITÁSFELTÉTELEK FÜGGETLENSÉGE*

SZÁSZ GÁBOR

Bemutatta Rédei László lev. tag az 1953. április 6-án tartott felolvasó ülésen

1. §. Bevezetés

Legyen S adott ν -elemű halmaz; ν lehet véges vagy végtelen. Ha az S -ben értelmezve van egy szorzás, akkor azt mondjuk, hogy az S halmaz a definiált szorzásra nézve egy S^* *multiplikatív struktúrát* alkot. Megjegyezzük, hogy az S^* -hoz tartozó szorzástól általában semmiféle megszorító feltevés teljesülését nem kívánjuk meg.

Egy S halmazban természetesen többféle szorzás is értelmezhető, azaz egy S halmazból különböző S^* struktúrák képezhetők. Egy S^* struktúrát *asszociatív multiplikatív struktúrának* (másképp *félcsoportnak*) nevezünk, ha az összes

$$(xy)z = x(yz) \quad (x, y, z \in S) \quad (1)$$

egyenletek fennállnak. Az (1) egyenleteket *asszociativitásfeltételeknek* nevezzük.

Rédei László professzor készülő könyvének írásával kapcsolatban vetette fel azt az algebra szempontjából elvi fontosságú problémát, hogy adott ν -elemű S halmaz esetén az (1) egyenletek bizonyos valódi részének fennállásából következik-e a többi egyenlet teljesülése (t. i. az S -ből képezhető összes S^* struktúrákat illetően). A problémát sikerült teljesen megoldanom, mégpedig azzal a meglepő eredménnyel, hogy ha $\nu \geq 4$, akkor az (1) egyenletek egyike sem következik a többiből. Pontosabban: *legalább négyelemű S halmaz esetén az (1) egyenletek bármelyikét kiszemelve, megadható egy olyan S^* multiplikatív struktúra, amelyben a kiszemelt egyenlet nem teljesül, az összes többi viszont teljesül.* Röviden szólva ez azt jelenti, hogy az (1) asszociativitásfeltételek $\nu \geq 4$ esetén *független axiómarendszert alkotnak.*

A mondott eredmény bizonyítása lényegesen támaszkodik a $\nu = 3$ esetre. Részint ezért, részint a teljesség kedvéért megvizsgáltam a $\nu \leq 3$ eseteket is. Kiderült, hogy a $\nu \leq 3$ esetekben az (1) egyenletek nem függetlenek egymástól: sikerült is megadnom ezekben az esetekben az (1) axiómáknak egy független teljes¹ részrendszerét.²

* Megjelenik német nyelven az Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged) 15. kötetben.

¹ Mint szokásos, egy axiómarendszer valamely részrendszerét *teljes rendszernek* nevezük, ha ekvivalens az eredeti axiómarendszerrel.

² A $\nu = 3$ esetben ez csak egyféleképpen lehetséges, $\nu = 2$ esetén azonban többféleképpen is. A $\nu = 1$ esetben csak egy S^* struktúra létezik, s ez triviálisan asszociatív. Ezért a továbbiakban a $\nu \geq 2$ esetre szorítkozunk.

Dolgozatom beosztása a következő lesz:

2. §. Előkészületek.
3. §. A $\nu = 3$ eset részleges tárgyalása.
4. §. A $\nu \geq 4$ eset.
5. §. A $\nu = 3$ eset teljes tárgyalása.
6. §. A $\nu = 2$ eset.

2. §. Előkészületek

Tárgyalásunk során a, b, c, d, e betűkkel fogjuk jelölni az S halmaz (különböző) elemeit. Az x, y, z, t betűk viszont a halmaz tetszősszerű (tehát nem feltétlenül különböző) elemeinek jelölésére szolgálnak, mint már fentebb (1)-ben is.

A könnyebb kifejezés kedvéért néhány elnevezést vezetünk be.

Egy S^* struktúrának valamely (x, y, z) elemhármását *asszociatívnak* nevezük, ha $(xy)z = x(yz)$; ha ellenben $(xy)z \neq x(yz)$, akkor az (x, y, z) elemhármást *nemasszociatívnak* mondjuk.

Az S halmaz elemeiből képezett valamely (x, y, z) elemhármást *izolált*-nak fogunk nevezni, ha van olyan S^* multiplikatív struktúra, amelyben egyedül az (x, y, z) elemhármast nemasszociatív. Főállításunk tehát így fogalmazható: $\nu \geq 4$ esetén minden elemhármast izolált.

Két (x, y, z) és (x', y', z') elemhármast azonos típusúnak fogunk mondani, ha egymásból az S elemeinek valamely permutációjával állnak elő. Az azonos típusú elemeket egy osztályba sorozva, az S -ből képezhető elemhármastoknak egy osztályozását nyerjük. Az egyes osztályokat egy-egy reprezentánsukkal jellemezve, az S elemhármastai a következő típusok egyikéhez tartoznak:

$$(a, a, a)\text{-típus} \quad (2.1)$$

$$(a, a, b)\text{-típus} \quad (2.2)$$

$$(b, a, a)\text{-típus} \quad (2.3)$$

$$(a, b, a)\text{-típus} \quad (2.4)$$

$$(a, b, c)\text{-típus,} \quad (2.5)$$

amelyek közül az utolsó csak $\nu \geq 3$ esetén fordul elő.

Tegyük fel, hogy az S halmaz valamely (x, y, z) elemhármast izolált és legyen (x', y', z') az előbbi elemhármassal azonos típusú. Az x, y, z elemeknek rendre x', y', z' -re való átjelölésével azonnal látható, hogy (x', y', z') szintén izolált.³ Jogos tehát nemcsak izolált elemhármastokról, hanem *izolált típusokról* is beszélni: egy típust izoláltnak nevezünk, ha a hozzátartozó elemhármastok izoláltak. A mondottak egyszersmind azt is jelentik, hogy nem lesz szükséges

³ Ennek az eljárásnak pontos tárgyalására nézvé l. Rédei L.: Die Anwendung des schiefen Produktes in der Gruppentheorie (Journal für die reine und angewandte Mathematik. 188. kötet, 1950., 201—227.) c. dolgozatának 2. §-át.

minden elemhármast megvizsgálni az izoláltság tekintetében; elegendő csupán az egyes típusoknak egy-egy (például a (2.1)–(2.5)-ben felsorolt) reprezentánsával foglalkozni.

A továbbiak megkönnyítése végett még néhány egyszerű segédítélt bocsátok előre, amelyeknek triviális bizonyítását mellőzhetem.

1. segédítétel. Az $S = \{a, b\}$ halmazon⁴ az

$$\begin{array}{c|cc} & a & b \\ \hline a & a & a \\ b & b & b \end{array} \quad \text{és} \quad \begin{array}{c|cc} & a & b \\ \hline a & a & b \\ b & b & b \end{array} \quad (3)$$

Cayley-táblával megadott struktúrák asszociatívok.

Nevezük egy S^* multiplikatív struktúra valamely x elemét *baloldali zéruselemnek*, ha minden $y(\in S)$ -re $xy = x$; hasonlóan, a $z(\in S)$ elemet *jobb-oldali zéruselemnek* nevezzük, ha minden $y(\in S)$ -re $yz = z$.

Az olyan elemet, amely egyszerre bal- és jobboldali zéruselem, röviden *zéruselemnek* mondjuk.

2. segédítétel. Minden olyan (x, y, z) elemhármass asszociatív, amelyben vagy x baloldali vagy z jobboldali zéruselem.

3. segédítétel. Minden olyan elemhármass asszociatív, amelynek (legalább) egyik eleme zéruselem.

4. segédítétel. Legyen S^* a T^* multiplikatív struktúrának részstruktúrája. Ha a $T-S$ halmaz⁵ valamely z elemére teljesül

$$xt = z \quad \text{és} \quad tx = z \quad (x \in T, t \in T-S), \quad (4)$$

akkor a T^* struktúra nemasszociatív elemhármassai megegyeznek az S^* részstruktúra nemasszociatív elemhármassáival.⁶ (Más szóval: minden olyan elemhármass asszociatív, amely legalább egy $T-S$ -beli elemet tartalmaz).

Megjegyezzük, hogy a 4. segédítételben szereplő z zéruselem. Másrészt, azt is látjuk, hogy a 3. segédítétel a 4.-nek az a speciális esete, amikor $T-S$ egyedül a T^* -nak a zéruseleméből áll.

Az S^* valamely x elemét *baloldali egységelemnek* nevezzük, ha minden $y(\in S)$ -re $xy = y$.

5. segédítétel. Ha x baloldali egységelem, akkor minden (x, y, z) elemhármass asszociatív.

6. segédítétel. Ha egy x elem idempotens, akkor az (x, x, x) elemhármass asszociatív.

⁴ A $\{ \}$ jel ebben a dolgozatban a halmazelméleti értelemben szerepel.

⁵ $T-S$ jelenti a T azon elemeinek halmazát, amelyek S -ben nincsenek benne.

⁶ A T^* -ot az S^* triviális bővítésének is nevezhetjük, mert az S^* -ról a T^* -ra való áttéréskor minden „új” szorzat értéke z .

3. §. A $\nu = 3$ eset részleges tárgyalása

Ebben a fejezetben a háromelemű $S = \{a, b, c\}$ halmazból képezett S^* struktúrákkal fogunk foglalkozni és kimutatjuk, hogy

1. lemma. Az $S = \{a, b, c\}$ halmaz összes nem (a, a, a) -típusú elemhármasai izoláltak.

A tétel bizonyítása úgy fog történni, hogy megadunk egy-egy olyan S^* struktúrát, amelyben rendre egyedül az (a, a, b) , (b, a, a) , (a, b, a) illetve (a, b, c) elemhármas nemasszociatív, a többi pedig mind asszociatív. Az (a, a, a) -típussal az 5. fejezetben külön fogunk foglalkozni, s látni fogjuk, hogy ez a típus ($\nu = 3$ esetén) nem izolált.

1°. Az (a, a, b) elemhármas izoláltságának kimutatására tekintsük az

	a	b	c
a	c	b	c
b	c	c	c
c	c	c	c

(5)

Cayley-táblával meghatározott S^* struktúrát.⁷

Látjuk, hogy (5)-ben egy szorzat értéke csak akkor lehet $\neq c$, ha az első tényező a . Másrészt mindig $xy \neq a$, tehát mindig $(xy)z = c$.

Viszont, akkor és csak akkor $x(yz) \neq c$, ha $x = a$ és $yz = b$, azaz ha $x = a$, $y = a$ és $z = b$.

Ezzel kimutattuk, hogy (a, a, b) nemasszociatív, de minden más elemhármas asszociatív. Tehát az (a, a, b) elemtípus izolált.

2°. Az előbbi Cayley-táblának a főátlóra való tükrözésével előálló

	a	b	c
a	c	c	c
b	b	c	c
c	c	c	c

(6)

rendszerben (b, a, a) az egyetlen nemasszociatív elemhármas. Ez az előbbihez

⁷ Ezt a példát Al. C. Climescu: Etudes sur la Théorie des Systèmes Multiplicatifs Uniformes I., L'indice de non-associativité (Bulletin de l'Ecole Polytechnique de Jassi, 2. kötet, 1947, 97–121. o.) c. dolgozatából vettem át (114. o., $i = 1$ jelzésű példa, az a és c szerepének felcserélésével), de teljes bizonyítást adok hozzá. Ő más szempontból foglalkozik az (1) egyenletek fennállásának kérdésével, mint mi. Egy véges ν -elemű S^* struktúra (nem-asszociativitási) indexének nevezi az S^* -ban nem teljesülő (1) egyenletek számát. Az index tehát bizonyosan a $0, 1, \dots, \nu^3$ egész számok valamelyike. Climescu kimutatja azt a meglepő tényt, hogy $\nu \geq 3$ esetén az i minden $0 \leq i \leq \nu^3$ értékéhez található olyan ν -elemű struktúra, amelynek indexe éppen i . A mi szempontunkból ösztönző és hasznos volt ennek az eredménynek az a részlete, hogy $\nu \geq 3$ esetén van 1 indexű struktúra, ami a mi beszéd-módunk szerint azt jelenti, hogy $\nu \geq 3$ esetén van izolált elemtípus. A mi vizsgálatunkhoz persze nem elégedhetünk meg az izolált elemtípusok exisztenciájának kimutatásával, hanem azt is meg kell vizsgálnunk, mely elemtípusok izoláltak.

hasonló módon látható be, a Cayley-tábla sorainak és oszlopainak a szerepét felcserélve. Tehát, a (b, a, a) -típus is izolált.

3°. Tekintsük azt az S^* struktúrát, amelynek Cayley-táblája

$$\begin{array}{c|ccc} & a & b & c \\ \hline a & a & c & c \\ b & a & b & c \\ c & c & c & c \end{array} \quad (7)$$

Ebben (a, b, a) nemasszociatív, mert

$$(ab)a = ca = c \quad \text{és} \quad a(ba) = aa = a.$$

Minden további elemhármass asszociatív az alábbi részletezés szerint.

Minthogy c zéruselem, ezért a 3. segédétel folytán minden c -t tartalmazó elemhármass asszociatív. Csak azokat az elemhármassokat kell tehát tovább vizsgálni, amelyekben c nem szerepel.

A b baloldali egységelem lévén, az 5. segédétel szerint a b -vel kezdődő elemhármassok asszociatívok.

Hátra vannak az a -val kezdődő és csak a, b -t tartalmazó elemhármassok. Ezek közül (a, a, a) a 6. segédétel folytán asszociatív, az (a, b, a) nemasszociativitását pedig fentebb megállapítottuk. Marad tehát az (a, a, b) és (a, b, b) elemhármass:

$$\begin{aligned} (aa)b &= ab = c & \text{és} & \quad a(ab) = ac = c, \\ (ab)b &= cb = c & \text{és} & \quad a(bb) = ab = c. \end{aligned}$$

Tehát, az (a, b, a) -típus izolált.

4°. Legyen végül egy S^* struktúra Cayley-táblája

$$\begin{array}{c|ccc} & a & b & c \\ \hline a & a & a & c \\ b & b & b & b \\ c & c & c & c \end{array} \quad (8)$$

Ebben először is

$$(ab)c = ac = c \quad \text{és} \quad a(bc) = ab = a,$$

tehát (a, b, c) nemasszociatív.

A többi elemhármass azonban, mint az alábbi részletezés mutatja, asszociatív.

Minthogy b és c baloldali zéruselemek, ezért a 2. segédétel szerint minden (b, x, y) és (c, x, y) elemhármass asszociatív. Hátra vannak tehát az a -val kezdődő elemhármassok.

A (8)-ból látjuk, hogy S^* -ban az a, b és a, c elempárok kételemű részstruktúrákat alkotnak. Ez a két részstruktúra az 1. segédétel szerint asszociatív. Eszerint az a -val kezdődő elemhármassok közül is mindazok asszociatívok, amelyekben b és c egyszerre nem fordul elő.

Meg kell még vizsgálni az a -val kezdődő olyan elemhármassokat, amelyek a b és c elemeket egyszerre tartalmazzák. Ilyen csak kettő van. Az (a, b, c) -t már fentebb néztük; az (a, c, b) -re pedig

$$(ac)b = cb = c \quad \text{és} \quad a(cb) = ac = c.$$

Ezzel kimutattuk az (a, b, c) -típus izoláltságát is, amivel az 1. lemma bizonyítását befejeztük.

4. §. A $\nu \geq 4$ eset

A $\nu = 3$ esetre vonatkozó eredmények felhasználásával könnyen kimutathatjuk főtételünket.

1. tétel. *Legalább négyelemű halmaz esetén az (1) egyenletek független axiómarendszert alkotnak.*

Bizonyítás. A tétel bizonyítása úgy fog történni, hogy kimutatjuk a következőt: $\nu \geq 4$ esetén az összes elemhármassok izoláltak.

Az (a, a, b) , (b, a, a) , (a, b, a) és (a, b, c) -típusok izolált voltát az előző fejezet eredményeiből fogjuk nyerni a következő igen egyszerű módon. Legyen $S = \{a, b, c\}$ és $T = \{a, b, c, d, \dots\}$, ahol a $\dots$ $\nu > 4$ esetben további elemeket (esetleg végtelen sokat) jelent, $\nu = 4$ esetében pedig az üres halmazt. Tekintsük azt a T^* struktúrát, amelyben

1) S^* részstruktúra;

2) minden $t \in T - S$ és $x \in T$ esetén $xt = d$, $tx = d$.

A 4. segédtétel szerint a T^* nemasszociatív elemhármassai megegyeznek az S^* nemasszociatív elemhármassáival. Ha tehát S^* helyébe rendre az (5)–(8) Cayley-táblákkal adott rendszert írjuk, akkor máris kaptunk egy-egy olyan $\nu \geq 4$ elemű (akármilyen számosságú) T^* struktúrát, amelyben rendre egyedül az (a, a, b) , (b, a, a) , (a, b, a) illetve (a, b, c) elemhármass nemasszociatív.

Ki kell még mutatnunk az (a, a, a) -típus izoláltságát. Ebből a célból tekintsük azt az $S = \{a, b, c, d, \dots\}$ halmazból képezett S^* multiplikatív struktúrát, amelyben

1) $aa = b$

2) $ab = c$

3) minden további x, y elempárra $xy = d$.

Az 1)–3) által definiált S^* struktúrában mindenekelőtt

$$(aa)a = ba = d \quad \text{és} \quad a(aa) = ab = c.$$

A többi asszociativitásfeltételek viszont teljesülnek, az alábbiak szerint.

Minthogy az $x \neq a$ esetben korlátlanul $xt = d$, azért minden olyan (x, y, z) elemhármassra, ahol $x \neq a$, fennáll

$$(xy)z = dz = d \quad \text{és} \quad x(yz) = d.$$

A továbbiakban tehát csak az a -val kezdődő elemhármassokat kell vizsgálni.

Ha az (a, y, z) elemhármásban y a $c, d, \dots$ elemek közül való, akkor

$$(ay)z = dz = d \text{ és } a(yz) = ad = d;$$

ha pedig a z elem a $c, d, \dots$ közül való, akkor, $tc = td = \dots = d$ ($t \in S$) miatt,

$$(ay)z = d \text{ és } a(yz) = ad = d.$$

Eszerint csak azok az (a, y, z) hármasok vannak hátra, amelyekben y és z mindketten az a és b közül valók.

Az $y = a, z = a$ esetet fent már elintéztük. A többi három esetben

$$\begin{aligned} (aa)b = bb = d \text{ és } a(ab) = ac = d, \\ (ab)a = ca = d \text{ és } a(ba) = ad = d, \\ (ab)b = cb = d \text{ és } a(bb) = ad = d. \end{aligned} \quad (9)$$

Ezzel a $v \geq 4$ esetre kimutattuk az (a, a, a) -típus izoláltságát, s így az 1. tétel bizonyítását befejeztük.

5. §. A $v = 3$ eset teljes tárgyalása

A $v = 3$ esetben az (a, a, a) -típus elemhármasai egészen másképp viselkednek mint $v \geq 4$ esetén:

2. lemma. Ha az $S = \{a, b, c\}$ halmazból képezett valamely S^* multiplikatív struktúrában az összes

$$\begin{pmatrix} (a, a, x) & (x, a, x) \\ (a, x, a) & (x, a, a) \end{pmatrix} \left\{ \begin{array}{l} x = b \text{ vagy } x = c \end{array} \right. \quad (10)$$

elemhármások asszociatívok, akkor (a, a, a) is asszociatív.

Az 1. és 2. lemmáknak közvetlen következményeként adódik a

2. tétel. Háromelemű halmaz esetén az (1) asszociativitásfeltételeknek egyetlen független teljes részszerkezere létezik; ez úgy áll elő, hogy töröljük (1)-ből azt a 3 egyenletet, amelyre $x = y = z$.

Az 1. lemma szerint ugyanis a nem (a, a, a) -típusú elemhármások mind izoláltak, tehát az (1) egyenleteknek az a 24 egyenletből álló részhalmaza, amelyre nem áll fenn $x = y = z$, független részszerkezt alkot. A 2. lemma viszont azt mondja ki, hogy ez a 24 egyenletből álló részhalmaz már teljes rendszer az (1) egyenletekre nézve.

A 2. lemma bizonyítása indirekt úton fog történni: feltesszük, hogy az (a, a, a) elemhármias a (10) asszociativitásfeltételek teljesülése ellenére nem-asszociatív, s ebből a feltevésből ellentmondásra fogunk jutni.

Minthogy (a, a, a) -ról nemasszociativitást tettünk fel, azért a következő esetek valamelyikének kell fennállnia:

$$\text{I. } (aa)a = a \text{ és } a(aa) = x,$$

$$\text{II. } (aa)a = x \text{ és } a(aa) = a,$$

ahol $x = b$ vagy $x = c$;

$$\text{III. } (aa)a = x \text{ és } a(aa) = y,$$

ahol $x = b$ és $y = c$ vagy $x = c$ és $y = b$.

Az egyes esetekkel külön foglalkozunk. Előre megjegyezzük, hogy a 6. segéd-tétel folytán $aa \neq a$.

I. eset. Legyen $z(\in S)$ az az elem, amelyre $z \neq a, x$. Két alesetet fogunk megkülönböztetni aszerint, hogy $aa = x$ vagy $aa = z$.

Ha $aa = x$, akkor az I.-ben szereplő feltevések szerint

$$xa = a \text{ és } ax = x.$$

De akkor

$$a(xa) = aa = x \text{ és } (ax)a = xa = a,$$

vagyis (a, x, a) nemasszociatív elemhármass.

Ha viszont $aa = z$, akkor I. miatt

$$za = a \text{ és } az = x; \quad (11)$$

ezekből, pedig ismét azt fogjuk kapni, hogy (a, x, a) nemasszociatív. Ugyanis, a (10)-ben felsorolt asszociativitásfeltételek alkalmazásával (11) szerint

$$ax = a(az) = (aa)z = zz = z(aa) = (za)a = aa = z,$$

$$xa = (az)a = a(za) = aa = z,$$

amelyekből

$$(ax)a = za = a \text{ és } a(xa) = az = x.$$

II. eset. Ez az eset az I.-gyel analóg módon tárgyalható, csupán az összes fellépő szorzatokban az elemek sorrendjét kell felcserélni. Vagyis ebben az esetben ismét (a, x, a) nemasszociatív.

III. eset. Ismét két aleset lehetséges aszerint, hogy $aa = x$ vagy $aa = y$.

Vizsgáljuk először azt az alesetet, amikor

$$aa = x. \quad (12)$$

Ekkor, a III.-ban adott feltételekből

$$xa = x \text{ és } ax = y. \quad (13)$$

Kimutatjuk, hogy (a, a, y) nemasszociatív. Ehhez előbb néhány elempár szorzatát számítjuk ki, a (10)-beli asszociativitásfeltételek alkalmazásával:

$$xx = x(aa) = (xa)a = xa = x \quad (12), (13) \text{ miatt}; \quad (14)$$

$$xy = x(ax) = (xa)x = xx = x \quad (13), (14) \text{ miatt}; \quad (15)$$

$$ay = a(ax) = (aa)x = xx = x \quad (13), (12), (14) \text{ miatt.} \quad (16)$$

A (12), (15), (16) és (13)-ból

$$(aa)y = xy = x \text{ és } a(ay) = ax = y.$$

Az $aa = y$ aleset tárgyalását visszavezetjük az $aa = x$ alesetére. Az $aa = x$ aleset kiindulási feltételei az $(aa)a = x$, $a(aa) = y$ és $aa = x$ egyen-

letek voltak. Ha ezekben az x és y szerepét felcseréljük, s vele egyidőben az egyes szorzatok sorrendjét is, akkor éppen a még hátralévő aleset kiindulási feltételeit kapjuk. Ha tehát az x, y elemeknek és a szorzatok sorrendjének felcserélését az $aa = x$ aleset egész tárgyalásában keresztülvisszük, akkor az

$$x(aa) = y \text{ és } (xa)a = x$$

eredményre jutunk.

Az I—III. esetek összes aleteiben fellépő ellentmondással a 2. lemmát (s vele együtt a 2. tételt) bebizonyítottuk.

6. §. A $\nu = 2$ eset

Végül megvizsgáljuk a $\nu = 2$ esetet. Az $S = \{a, b\}$ halmaz elemeiből képezhető nyolc különböző elemhármast három osztályba sorozzuk:

$$C_1: (a, a, a), (a, b, a);$$

$$C_2: (b, b, b), (b, a, b);$$

$$C_3: (a, a, b), (a, b, b), (b, a, a), (b, b, a);$$

és kimutatjuk a következő tételt:

3. tétel. *Ha az $S = \{a, b\}$ halmazból képezett valamely multiplikatív struktúrában a C_1, C_2, C_3 osztályból egy-egy elemhármast asszociatív, akkor S^* félcsoport. (Más szóval: A $\nu = 2$ esetben az asszociativitásfeltételeknek minden olyan részalmaza független teljes rendszert alkot, amely a C_1, C_2, C_3 osztályok egy-egy elemhármastának asszociativitását írja elő.)*

Bizonyítás. Az olvasó közvetlen számolással könnyen meggyőződhetik arról, hogy az $S = \{a, b\}$ halmazból képezhető 16 különböző S^* struktúra közül nyolc asszociatív, a többi nyolc esetében pedig a nemasszociatív elemhármastok pontosan vagy a $C_i (i = 1, 2, 3)$ osztályok egyikének összes elemhármastai, vagy az összes különböző elemhármastok. Ezért bármely S^* struktúra esetén egy-egy C_i osztály elemei vagy mind asszociatívok, vagy mind nemasszociatívok, s ez éppen a tétel helyességét jelenti.

Szegedi Tudományegyetem
Bolyai Intézete.