# HÁLÓK IDEÁLJAI ES KONGRUENCIARELÁCIÓI I.

GRÄTZER GYÖRGY ÉS SCHMIDT ELIGIUS

## Bevezetés

Ismert gyűrűelméleti tétel, mely szerint az $R$ gyűrű bármely faktorgyűrűje egy-egyértelműen meg van határozva $R$ egy ideálja által. Hasonló tétel érvényes a csoport normálosztóira is. Hálók esetében azonban ezen alapvető tétel már nem érvényes. Előfordulhat ugyanis, hogy az $L$ háló valamely ideálja több homomorfizmus magja, sőt az is, hogy egyáltalán nem létezik olyan homomorfizmus, melynek magja lenne az adott ideál. Így felmerülnek a következő kérdések: mi annak szükséges és elégséges feltétele, hogy egy $L$ hálóban minden ideálhoz

1. legalább
2. legfeljebb
3. pontosan

egy osztályozás* tartozzék?

Az első, ill. harmadik kérdéssel (továbbá a harmadik kérdés egy általánosításával) foglalkozik a dolgozat I. része, a következő eredménnyel:

1. TÉTEL. *Egy $L$ hálóban minden ideál akkor és csak akkor magja** valamely homomorfizmusnak, ha $L$ disztributív;* illetve

3. TÉTEL. *Az $L$ hálóban akkor és csak akkor teljesül, hogy minden ideál pontosan egy homomorfizmus magja és minden homomorfizmushoz tartozik mag, ha $L$ alulról korlátos, disztributív és relatív komplementumos.*

Látni fogjuk, hogy a fenti tételek bizonyításánál alapvető szerepet játszanak a minimális osztályozások. Disztributív hálóban a 2. tétel jellemzi a minimális osztályozásokat. A II. részben e vizsgálatokat kiterjesztjük tetszőleges hálókra és az 5. tétel segítségével áttekintést nyerünk a hálók minimális osztályozásairól. Az 5. tétel felhasználásával két feleletet is adunk a fent felvetett 2. kérdésre. (6. $A$ és $B$ tétel.)

* Osztályozáson itt és a továbbiakban is a kompatibilis osztályozást értjük.

** A homomorfizmus magja a homomorf kép 0 elemének ősei által meghatározott ideál.

A 3. kérdést BIRKHOFF vetette fel (GARRETT BIRKHOFF: Lattice Theory — ezentúl (LT) — Revised Edition, New York 1948. 161. o. 73. probléma) és a dolgozat lezárása után tudomásunkra jutott, hogy I. HASHIMOTO már megoldotta. (Lásd I. HASHIMOTO Ideal Theory for Lattices című cikkében, Mat. Jap. II. kötet 4. sz.) Bizonyítása azonban a dolgozatban adott bizonyítástól lényegesen eltér és bonyolultabb.* A 3. kérdéssel kapcsolatban részleteredményeket ért el G. J. ARESKIN (Dokladi Akad. Nauk SzSzSzR 1953. XC. kötet, 4. sz.), tételét a 2. és 6. *A* tételből egyszerűen kapjuk. (Lásd 6. *A* tétel 2. korolláriumát.)

A 3. tétel, ill. 4. tétel korolláriuma alapján egy hálóban akkor és csak akkor határoz meg minden ideál (sőt minden osztály) pontosan egy osztályozást, ha $L$ relatív komplementumos disztributív háló. Ezekre a hálókra tehát érvényes a fentmondott gyűrűelméleti tétel hálóelméleti analogonja. Ismeretes, hogy egy korlátos disztributív, relatív komplementumos hálóba bevezethető gyűrűműveletet. Ezt általánosítva a III. részben kimutatjuk, hogy tetszőleges relatív komplementumos disztributív hálóban is értelmezhető Boolegyűrűművelet, mégpedig megadjuk az összes lehetséges ilyen műveletet, s e tételt részben meg is fordítjuk.

Itt mondunk köszönetet Dr. Fuchs László professzornak és aspiránsának Fried Ervinnek szíves segítségükért.

## I.

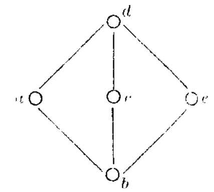
Célunk a bevezetésben felvetett 3. kérdést megválaszolni. Ehhez először szükséges a könnyebb 1. kérdés letárgyalása.

1. TÉTEL. *Az $L$ hálóban minden ideál akkor és csak akkor magja valamely homomorfizmusnak, ha $L$ disztributív.*

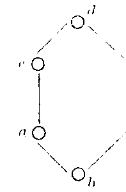
BIZONYÍTÁS: A feltétel elégségessége ismeretes (lásd pl. (LT) V. fej. 8. § 3. (*c*) és IX. fej. 6. § 2. gyakorlatok, vagy ezen dolgozat 5. tétel 2. korollárium). Igazoljuk a feltétel szükségességét. Ha az $L$ háló nem disztributív,

* HASHIMOTO idézett cikkében hálók reprezentációit (halmazgyűrükre való homomorfizmusait) és különféle topológiákat vizsgál, melyeket speciális reprezentációkkal és inverzeikkel definiál. Ezen általános vizsgálatok alkalmazásaként előálló tételek között található ezen dolgozat 3. tétele. Ezzel magyarázható, hogy egyes tételek bizonyítása, ha dolgozatának többi részétől elszakítva nézzük, bonyolultnak tűnik. HASHIMOTO a 3. tétel bizonyításához felhasználja a kiválasztási axiómát, s talán az sem érdektelen, hogy bizonyításunknál ezt sikerült mellőzni.

akkor van az 1. vagy 2. ábrán látható részhálója. (Lásd (LT) IX. fej. 2. tétel.) Állítjuk, hogy az $[a]$ főideálhoz nem tartozik osztályozás.



*1. ábra*



*2. ábra*

Ugyanis mindkét esetben $a \equiv b$-ből következik, hogy $d = c \cup a \equiv c \cup b = c$ és ezért $e = d \cap e \equiv c \cap e = b$, de $e \notin (a]$. Q. e. d.

A továbbiakban jelöljük $\Theta_{a,b}$-vel $L$-ben az $a \equiv b$-hez tartozó minimális osztályozást létesítő kongruenciarelációt. (Az, hogy $\Theta_{a,b}$ minimális osztályozást létesít, az azt jelenti, hogy ha $c \equiv d(\Theta_{a,b})$, akkor minden olyan $\Theta$ kongruenciarelációra, melyre $a \equiv b(\Theta)$, egyúttal $c \equiv d(\Theta)$ is fennáll.) $\Theta_{a,b}$ $L$ bármely $a$ és $b$ eleme esetén létezik. Ezt könnyen beláthatjuk G. BIRKHOFF azon tétele alapján (lásd (LT) II. fej. 4. tétel), mely szerint az $L$ háló kongruenciarelációinak halmazát komplett hálóvá tesszük, értelmezvén benne a rendezési relációt úgy, hogy $\Theta \leqq \Phi$ akkor és csak akkor, ha $x \equiv y(\Theta)$ maga után vonja $x \equiv y(\Phi)$-t. Ekkor $L$ kongruenciarelációi valamely $A$ részhalmazának $\xi$ alsó és $\eta$ felső határát a következőképpen adhatjuk meg: $x \equiv y(\xi)$ akkor és csak akkor, ha $x \equiv y(\Theta)$ minden $\Theta \in A$-ra; $x \equiv y(\eta)$ akkor és csak akkor, ha valamilyen véges $x = z_0, z_1, z_2, \ldots, z_n = y$ sorozat választható úgy, hogy $z_i \equiv z_{i-1}(\Theta_i)(i = 1, 2, \ldots, n)$ alkalmas $\Theta_i \in A$-val. Könnyű meggyőződni arról, hogy $\xi$ és $\eta$ kongruenciareláció s $A$-nak felső, ill. alsó határa.

Ezek után tekintsük azon kongruenciarelációk $A$ halmazát, amelyekre $a \equiv b$. Ezen $A$ halmaz $\xi$ alsó határára $a \equiv b(\xi)$ ($\xi$ definíciója miatt) s így $\xi$ az $a \equiv b$-hez tartozó minimális osztályozást létesíti, azaz $\xi = \Theta_{a,b}$. Ezzel az $a \equiv b$-hez tartozó minimális osztályozás létezését és egyértelműségét beláttuk.

Vizsgáljuk meg, hogy egy disztributív hálóban mely elemek tartoznak egy osztályba a $\Theta_{a,b}$ által létesített osztályozásban. Ismeretes, hogy $x \equiv y(\Theta)$ akkor és csak akkor, ha $x \cup y \equiv x \cap y(\Theta)$ ezért ($x \cup y \geqq x \cap y$ miatt) elég összehasonlítható elempárok kongruenciájának szükséges és elegendő feltételét megadni (ami egyszerűbb alakú, mint az általános feltétel).

2. TÉTEL. *Legyen $a, b$ az $L$ disztributív hálónak két olyan (rögzített) eleme, melyre $a > b$ áll. A $c, d (\in L, c > d)$ elemekre $c \equiv d(\Theta_{a,b})$ akkor és csak akkor, ha*

(1) $$(a \cup d) \cap c = c$$

*és*

(2) $$(b \cup d) \cap c = d.$$

BIZONYÍTÁS: Definiáljuk $L$-ben a $\Theta$ relációt úgy, hogy $x \equiv y(\Theta)$ akkor és csak akkor, ha (rögzített $a > b$ mellett) $c = x \cup y$ és $d = x \cap y$-ra (1) és (2) fennáll. Ha igazoljuk, hogy $\Theta = \Theta_{a,b}$, akkor a 2. tétel állítása bizonyítva lesz. Lássuk be, hogy $\Theta$ kongruenciareláció. Nyilván a $\Theta$ reláció reflexív (mert $(a \cup b) \cap a = a$ és $(b \cup b) \cap a = b$, azaz (1) és (2) fennáll), továbbá szimmetrikus. Belátjuk, hogy a helyettesítési elv is érvényes, azaz, hogy $x \equiv y(\Theta)$-ból következik $x \cup t \equiv y \cup t(\Theta)$ és $x \cap t \equiv y \cap t(\Theta)$. Ezt a következő, (1) és (2), továbbá a disztributivitásból adódó egyenletek mutatják:

$$\{a \cup [(x \cup t) \cap (y \cup t)]\} \cap [(x \cup t) \cup (y \cup t)] = \{[a \cup (x \cap y)] \cup t\} \cap$$
$$\cap [(x \cup y) \cup t] = \{[a \cup (x \cap y)] \cap (x \cup y)\} \cup t = (x \cup y) \cup t = (x \cup t) \cup (y \cup t);$$

s hasonlóan

$$\{b \cup [(x \cup t) \cap (y \cup t)]\} \cap [(x \cup t) \cup (y \cup t)] = (x \cup t) \cap (y \cup t),$$

illetve

$$\{a \cup [(x \cap t) \cap (y \cap t)]\} \cap [(x \cap t) \cup (y \cap t)] = \{[a \cup (x \cap y)] \cap (a \cup t)\} \cap$$
$$\cap [(x \cup y) \cap t] = [a \cup (x \cap y)] \cap (x \cup y) \cap [(a \cup t) \cap t] = \{a \cup [(x \cap y)] \cap$$
$$\cap (x \cup y)\} \cap t = (x \cup y) \cap t = (x \cap t) \cup (y \cap t);$$

és ugyanígy

$$\{b \cup [(x \cap t) \cap (y \cap t)]\} \cap [(x \cap t) \cup (y \cap t)] = (x \cap t) \cap (y \cap t).$$

A $\Theta$ reláció tranzitivitását először az $u \equiv v(\Theta), v \equiv w(\Theta)$ $u > v > w$ esetben látjuk be. $\Theta$ definíciója miatt fennállanak a következő egyenletek:

(3) $$(a \cup v) \cap u = u,$$

(4) $$(b \cup v) \cap u = v$$

és

(5) $$(a \cup w) \cap v = v,$$

(6) $$(b \cup w) \cap v = w.$$

Igazoljuk, hogy

(7) $$(a \cup w) \cap u = u,$$

(8) $$(b \cup w) \cap u = w,$$

amely egyenletek $\Theta$ definíciója miatt épp a bizonyítandó $u \equiv w(\Theta)$-t jelentik. (5)-ből nyilván $a \cup w \geqq v$, ennek és $u \geqq v$-nek alapján (felhasználva a disztributivitást is)

$$(a \cup w) \cap u = [(a \cup w) \cap u] \cup v = (a \cup w \cup v) \cap (u \cup v) = (a \cup v) \cap u,$$

amiből (3) miatt azonnal adódik (7). $v \geqq w$ miatt $b \cup v \geqq b \cup w$ s így (4) és

(6) felhasználásával

$$(b \cup w) \cap u = (b \cup w) \cap (b \cup v) \cap u = (b \cup w) \cap v = w.$$

Ezzel (7) és (8) igazolását befejeztük.

Legyen másodszor tetszőleges $u, v$ és $w$-re $u \equiv v(\Theta)$ és $v \equiv w(\Theta)$. A helyettesítési elv alkalmazásával $u \cup v = (u \cup v) \cup (v \cap w) \equiv (u \cup v) \cup (v \cup w) = u \cup v \cup w(\Theta)$, $u \cap v = (u \cap v) \cap (v \cup w) \equiv (u \cap v) \cap (v \cap w) = u \cap v \cap w(\Theta)$, azaz

$$u \cup v \cup w \equiv u \cup v(\Theta),$$
$$u \cup v \equiv u \cap v(\Theta),$$
$$u \cap v \equiv u \cap v \cap w(\Theta),$$

ami $u \cup v \cup w \geqq u \cup v \geqq u \cap v \geqq u \cap v \cap w$ miatt az előző eset kétszeri felhasználásával $u \cup v \cup w \equiv u \cap v \cap w(\Theta)$-t adja. Ennek alapján (a már bebizonyított helyettesítési elv alkalmazásával):

$$u \cup w = (u \cup w) \cup (u \cap w) = [(u \cup v \cup w) \cap (u \cup w)] \cup (u \cap w) \equiv [(u \cap v \cap w) \cap (u \cup w)] \cup$$
$$\cup (u \cap w) \equiv (u \cap v \cap w) \cup (u \cap w) = u \cap w(\Theta).$$

Ezzel a tranzitivitás bizonyítását befejeztük.

Mivel $\Theta$ — mint láttuk — reflexív, szimmetrikus, tranzitív és érvényes rá a helyettesítési elv, ezért kongruenciareláció. Továbbá $a \equiv b(\Theta)$, ezért $\Theta \geqq \Theta_{a,b}$ ($\Theta_{a,b}$ a legkisebb olyan kongruenciareláció, melyre $a \equiv b$). Viszont, ha $x \equiv y(\Theta)$, akkor $x \cup y = [a \cup (x \cap y)] \cap (x \cup y)$ és $x \cap y = [b \cup (x \cap y)] \cap (x \cup y)$. Nyilván $a \equiv b(\Theta_{a,b})$-ből a helyettesítési elv $t = x \cup y$ és $t = x \cap y$-ra való alkalmazásával $[a \cup (x \cap y)] \cap (x \cup y) \equiv [b \cup (x \cap y)] \cap (x \cup y)(\Theta_{a,b})$ adódik, ami az előbbi egyenletek figyelembevételével $x \cup y \equiv x \cap y(\Theta_{a,b})$-t adja. Tehát $x \equiv y(\Theta)$ maga után vonja $x \equiv y(\Theta_{a,b})$-t, azaz $\Theta \leqq \Theta_{a,b}$, s ezt a fenti egyenlőtlenséggel összevetve kapjuk, hogy $\Theta = \Theta_{a,b}$, amint azt a 2. tétel állította.

A 2. tétel jó áttekintést ad a disztributív háló kongruencia viszonyairól, melyet — kissé részletesebben is, mint a továbbiakban erre szükségünk lenne — az alábbiakban megvizsgálunk.

1. KOROLLÁRIUM. *Ha az L disztributív hálóban $c \equiv d(\Theta_{a,b})$ ($a > b$ és $c > d$), akkor $b \geqq c$, vagy $a \leqq d$ nem állhat fenn.*

Ugyanis $c \equiv d(\Theta_{a,b})$ az (1) és (2) egyenletek érvényességét jelenti. Ha most $b \geqq c$, akkor (2)-ből $d = (b \cup d) \cap c = c$, ami ellentmondás $c > d$-vel. Ugyanígy ellentmondásra vezet (1) miatt az $a \leqq d$ feltevés.

2. KOROLLÁRIUM. *Az L disztributív hálóban a $\Theta_{a,b}(a > b)$ által létesített osztályozásban csak az $[a, b]$ intervallum elemei kongruensek a-val.*

Tegyük fel ugyanis, hogy $c \equiv a \equiv b(\Theta_{a,b})$ ellenére $c \notin [a, b]$. Utóbbi miatt $c \cup a > a$, vagy $c \cap b < b$ közül legalább az egyik teljesül. De $a < a \cup c$ az $a \equiv c(\Theta_{a,b})$-ből adódó $a \equiv a \cup c(\Theta_{a,b})$, $b > c \cap b$ pedig a $c \equiv b(\Theta_{a,b})$-ből adódó $b \equiv c \cap b(\Theta_{a,b})$ miatt ellentmondana az 1. korolláriumnak.

3. KOROLLÁRIUM. *Az $L$ hálóban minden zárt intervallum akkor és csak akkor osztály $L$ alkalmas osztályozásánál, ha $L$ disztributív.*

Ugyanis az állítás elégségességét a 2. korollárium, szükségességét pedig az 1. tétel (az ottani $[a, b]$ intervallumra alkalmazva) bizonyítja.

4. KOROLLÁRIUM. *Az $L$ nullelemű disztributív hálóban az $I$ ideálhoz tartozó minimális osztályozásban $a \equiv b\,(a > b, a, b \in L)$ akkor és csak akkor, ha van olyan $v \in I$, hogy*

$$(9) \qquad (v \cup b) \cap a = a.$$

Jelölje $\Theta$ az $I$-hez tartozó minimális osztályozást létesítő kongruenciarelációt. Könnyű belátni, hogy $\Theta = \bigcup_{u \in I} \Theta_{u,0}$. Ugyanis $\Theta \geqq \Theta_{u,0}$, ha $u \in I$, tehát $\Theta \geqq \bigcup_{u \in I} \Theta_{u,0}$. Viszont az $\bigcup_{u \in I} \Theta_{u,0}$ kongruenciareláció magja az $I$ ideál, mert $x \not\equiv 0\,(\bigcup_{u \in I} \Theta_{u,0})$, $x \in I$ ellentmond $\bigcup_{u \in I} \Theta_{u,0} \geqq \Theta_{x,0}$-nak s így $\Theta = \bigcup_{u \in I} \Theta_{u,0}$, amint azt állítottuk. Mivel $a \equiv b(\Theta)$, ezért léteznek olyan $x_0 = a, x_1, \ldots, x_n = b$ és $u_i \in I(i = 1, 2, \ldots, n)$ elemek, hogy $x_i \equiv x_{i-1}(\Theta_{u_i,0})$, azaz $a \equiv b(\bigcup_{u \in I} \Theta_{u,0})$. Legyen $v = \bigcup_{i=1}^{n} u_i$. Nyilván $\Theta_{v,0} \geqq \Theta_{u_i,0}$, s ezért $x_i \equiv x_{i-1}(\Theta_{v,0})$, azaz $a \equiv b\,(\Theta_{v,0})$. $v$ definíciójából látható, hogy $v \in I$, továbbá $a \equiv b(\Theta_{v,0})$, ami (1) és (2) miatt éppen (9) fennállását jelenti. [(9) az (1)-ből az $a = v$, $b = 0$, $c = a$, $d = b$ helyettesítéssel adódik; a (2) egyenlet a triviális $(0 \cup b) \cap a = b$ egyenletbe megy át.] Tehát, ha $a \equiv b(\Theta)$, akkor van olyan $v \in I$, mely (9)-et kielégíti. Megfordítva, ha létezik (9)-et kielégítő $v$ eleme $I$-nek, akkor $v \equiv 0(\Theta)$ és így $a = a \cap (b \cup v) \equiv a \cap (b \cup 0) = a \cap b = b(\Theta)$. Ezzel a 4. korollárium bizonyítását befejeztük.

Az 1. korollárium — szemléletesen szólva — azt fejezi ki, hogy a kongruencia (az $a$-nál nagyobb és $b$-nél kisebb elemek között) disztributív hálóban „függőlegesen" nem terjed, a második korollárium pedig kimondja, hogy minden zárt intervallum osztály alkalmas kongruenciarelációnál.

Az 1. és 2. tétel áttekintést adott azon hálók minimális osztályozásairól, melyekben minden ideálhoz legalább egy osztályozás tartozik. Ennek segítségével már könnyen adhatunk választ az ezen rész elején felvetett kérdésre.

3. TÉTEL. *Az $L$ hálóban akkor és csak akkor teljesül, hogy minden ideál pontosan egy homomorfizmus magja és minden homomorfizmushoz tartozik mag,* ha $L$ alulról korlátos,** disztributív és relatív komplementumos.*

* G. Birkhoff Lattice Theory c. könyvében a 73. problémánál az „ideálok és homomorfizmusok közötti egy-egyértelmű megfeleltetésről" ír, ezalatt nyilván a 3. tételben pontosan megfogalmazott egy-egyértelműséget érti.

** Az „alulról korlátos" kifejezés, a „0 elemmel rendelkezik", szinonimája.

BIZONYÍTÁS:

*Szükségesség.* $L$-ben lennie kell 0-elemnek, különben az identikus osztályozáshoz nem tartoznék mag; a disztributivitás szükségességét az 1. tétel biztosítja. Legyen $L$ a továbbiakban nullelemes disztributív háló és $a, b\,(a>b)$ az $L$ két, tetszés szerinti eleme. Tekintsük azon $u$ elemek alkotta ideált — jelöljük $V_{a,b}$-vel — melyekre $u \equiv 0(\Theta_{a,b})$. Minden ideálhoz, így a $V_{a,b}$ ideálhoz is csak egyetlen osztályozás tartozik. Ez egyrészt ($V_{a,b}$ definíciója miatt) a $\Theta_{a,b}$ által létesített osztályozás, másrészt, mivel egyetlen, melynek $V_{a,b}$ magja, ezért a $V_{a,b}$-hez tartozó minimális osztályozás. Kell tehát, hogy a $V_{a,b}$-hez tartozó minimális osztályozásban $a \equiv b$ fennálljon. A 2. tétel 4. korolláriuma miatt tehát létezik olyan $v$ elem, mely (9)-et kielégíti. Továbbá, mivel $v \equiv 0(\Theta_{a,b})$, ezért (1) és (2) miatt ($c=v, d=0$ helyettesítéssel)

$$a \cap v = v \tag{10}$$

és

$$b \cap v = 0 \tag{11}$$

egyenletek is fennállnak. (9)-ből folyólag $v \cup b \geqq a$, de $b<a$ és (10)-ből $v \leqq a$ s így $b \cup v \leqq a$, azaz

$$b \cup v = a. \tag{12}$$

(10) és (12) együtt éppen azt jelenti, hogy $[0, a]$-ban $b$ relatív komplementuma $v$.

Ezzel kimutattuk, hogy $L$-ben minden $[0, a]$ intervallum komplementumos részháló. J. von NEUMANN azon tételéből, mely szerint egy korlátos és komplementumos háló, amely moduláris, egyúttal relatív komplementumos is, a fentiek alapján rögtön adódik a $[0, a]$ komplementumos részháló és ezzel együtt $L$ relatív komplementumossága.

*Elégségesség.* Az 1. tétel miatt minden ideálhoz tartozik osztályozás, de a $[0, a]$ intervallumok komplementumossága miatt ez az osztályozás egyértelmű, mert ha $v$ a $[0, a]$ intervallumban $b$ komplementuma, akkor $a \equiv b(\Theta)$ ekvivalens $v \equiv 0(\Theta)$-val, ugyanis $a \equiv b(\Theta)$ esetén $v = a \cap v \equiv b \cap v = 0(\Theta)$ és megfordítva $v \equiv 0(\Theta)$ maga után vonja $a = v \cup b \equiv 0 \cup b = b(\Theta)$ fennállását. Q. e. d.

Érdemes megjegyezni, hogy a $V_{a,b}$ ideál főideál, mert $a \equiv b$ ekvivalens $V_{a,b} \equiv 0$-val és $a \equiv b$ ekvivalens $v \equiv 0$-val is, ezért $V_{a,b} \equiv 0$ akkor és csak akkor, ha $v \equiv 0$, viszont a feltételek miatt a $V_{a,b}$ és a $[v, 0]$ ideálhoz is tartozik osztályozás, kell tehát, hogy $V_{a,b} = [v, 0]$ legyen, amint azt állítottuk.

Ezután rátérünk a 3. tétel egy általánosítására. Nevezetesen érvényes a következő

4. TÉTEL. *Annak szükséges és elegendő feltétele, hogy az $L$ háló valamely rögzített „$a$“ elemét tartalmazó minden konvex részhálójához pontosan*

*egy osztályozás tartozzék $L$ disztributív és összes $[a, b]$ $(a > b$ vagy $b > a)$ intervallumának, mint részhálóknak komplementumos volta.*

BIZONYÍTÁS:

*Szükségesség.* Először belátjuk, a disztributivitás szükségességét. Tegyük fel hogy $L$ nem disztributív. Ezen esetben van olyan (páronként különböző) $x, y, z$ elemhármasa, melyre

(13) $$x \cup z = y \cup z \text{ és } x \cap z = y \cap z.$$

A $z = a$ esetben, mivel az $a$ elemhez, mint konvex részhálóhoz is egyetlen osztályozás tartozik (mégpedig a triviális), ezért minden más osztályozásban az $a$-t tartalmazó osztálynak van legalább egy további eleme, sőt — a kompatibilitás folytán — olyan eleme is, amely összehasonlítható $a$-val (mert $a \equiv x$ maga után vonja $a \cup x \equiv a$ és $a \cap x \equiv a$-t is). Eszerint, mivel $x \cap y \neq x \cup y$ (tehát $\Theta_{x \cup y, x \cap y}$ biztosan nem a triviális osztályozás) van olyan $c \gtrless a$ elem, hogy

(14) $$c \equiv a(\Theta_{x \cup y, x \cap y}).$$

Ekkor viszont aszerint, hogy $c > a$ vagy $c < a$ az $[a, x \cap y \cap a]$, ill. $[x \cup y \cup a, a]$ konvex részhálóhoz nem tartozik osztályozás; mert pl. a $c > a$ esetben $a \equiv x \cap y \cap a(\Theta)$-ból (hasonlóan az 1. tétel bizonyításához) bármely $\Theta$-ra következik $x \equiv y(\Theta)$, tehát $x \cup y \equiv x \cap y(\Theta)$, azaz $\Theta \geqq \Theta_{x \cup y, x \cap y}$, s így $c \equiv a(\Theta)$ (lásd (14)-et), de ez $c \notin [a, x \cap y \cap a]$ miatt éppen azt jelenti, hogy $[a, x \cap y \cap a]$ egyetlen kongruenciareláció szerinti osztályozásban sem osztály, vagyis a $c > a$ feltevés ellentmondásra vezetett. Ugyanígy vezet ellentmondásra a $c < a$ feltevés is. E kettő együtt egyrészt azt jelenti, hogy $z \neq a$, másrészt, hogy $x \cup a = y \cup a$ és $x \cap a = y \cap a$ egyszerre nem állhat fenn. Ezért a hálóelméleti dualitásra való tekintettel (($LT$) I. fej. 2. tétel), az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $x \cup a \not\equiv y \cup a$. Állítjuk, hogy ez esetben az $[y \cup a, y \cap z \cap a] (\ni a)$ konvex részhálóhoz nem tartozik osztályozás. Ugyanis $y \cup a \equiv y \cup z \cup a$ esetén ((13)-ra tekintettel)

$$z = z \cup (y \cap z \cap a) \equiv z \cup (y \cup a) = (z \cup y) \cup a = z \cup x \cup a,$$

s ebből $x \cap z \equiv x \cap (z \cup x \cup a) = x$.

(13) miatt tehát $x \equiv y \cap z$, ez azonban $y \cup a \geqq y \cap z \geqq y \cap z \cap a$ és $x \notin [y \cup a, y \cap z \cap a]$ miatt éppen azt jelenti, hogy legutóbbi állításunk helyes. Összefoglalva, a (13) feltevés mindenképpen ellentmondást ad azzal a feltétellel, hogy minden, az $a$ elemet tartalmazó konvex részháló osztály legyen pontosan egy kompatibilis osztályozásnál, tehát a disztributivitás szükséges. Másodszor bizonyítjuk, hogy szükséges az $[a, b]$ intervallumok $(b \lessgtr a)$ komplementumossága. Legyen $b_1 > b_2 > a$. Mivel az osztályozásnak az $a$ elemre — mint konvex részhálóra — is egyértelműnek kell lennie, ezért van olyan $a$-tól

különböző és vele összehasonlítható $c$ $(c \gtrless a)$, hogy $a \equiv c(\Theta_{b_1, b_2})$. A 2. tétel 1. korolláriuma miatt $c < a$ nem lehetséges, mert $b_1 > b_2 > a > c$ állana fenn (azaz a kongruencia a $[b_1, b_2]$ intervallumról „függőlegesen leterjedt" volna $[a, c]$-re), ezért $c > a$, azaz $b_1 \equiv b_2$-ből következőleg $a$-val kongruens elemek is az $[a)$ duális főideálban vannak. Ezért az $[a)$ duális főideálban (és duális módon az $(a]$ főideálban) ugyanazok a kongruencia viszonyok uralkodnak, mint amelyeket a 3. tétel megkíván. Így a 3. tételből adódik minden $[a, b]$ $(a \gtrless b)$ intervallum relatív komplementumossága, azaz a tétel szükségességét bizonyítottuk.

*Elégségesség.* Először belátjuk, hogy a feltételek teljesülése esetén az $L$ hálóban a disztributivitásból folyólag minden konvex részhálóhoz (s így minden az $a$ elemet tartalmazóhoz is) tartozik osztályozás. Ez azonnal adódik abból a tényből, hogy minden konvex részháló egy ideál és egy duális ideál metszete s az ezekhez tartozó osztályozások (pontosabban a hozzájuk tartozó kongruenciarelációk) metszete nyilván a kívánt tulajdonságú osztályozást létesíti. Másodszor belátjuk, hogy az $a$ elemet tartalmazó $D$ konvex részháló pontosan egy osztályozásnál lép fel osztályként. Legyen $x > y (x, y \in L)$ és $a \cup x > a \cup y (a \cup x = a \cup y$ esetén $a \cap x > a \cap y$-ra folytatjuk az okoskodást; $a \cup x = a \cup y$ és $a \cap x = a \cap y$ egyszerre a disztributivitás miatt nem állhat fenn), továbbá $[a, a \cup x]$-ben $a \cup y$ relatív komplementuma $c$. $x \equiv y$ esetén $a \cup x \equiv a \cup y$ s ebből $c = c \cap (a \cup x) \equiv c \cap (a \cup y) = a$, s így az $a$ egyelemű konvex részháló csak a triviális osztályozásnál alkot osztályt (azaz a hozzátartozó kongruenciareláció egyértelmű). Tegyük fel, hogy $D$ több kongruenciarelációnál osztály. Tekintsük azon minimális kongruenciareláció szerinti homomorf képét $L$-nek, melynél $D$ osztály. Ez a faktoráló szintén disztributív és minden $(\bar{b}, \bar{D}) (\bar{b} \gtrless \bar{D})$ intervalluma relatív komplementumos ($\bar{D}$ $D$ homomorf képe, nyilván $\bar{D} = \bar{a}$). Így a fentiek szerint egyetlen kongruenciarelációja van csak $L$-nek, melyben $D$ osztály, ellentétben a feltevéssel. Q. e. d.

A tétel bizonyításából látható, hogy a 4. tétel azon feltételéből, mely szerint „az »$a$« elemet tartalmazó minden konvex részhálóhoz pontosan egy osztályozás tartozzék" csak annyit használtunk fel, hogy minden, az $a$ elemet tartalmazó zárt intervallumhoz tartozzék pontosan egy osztályozás.

Hogy a 4. tétel feltételeit kielégítő háló minden $[x, y]$ intervallumának relatív komplementumossága nem szükséges, arra példát szolgáltat a 3 elemű lánc, ha $a$-nak választjuk a hálónak 0 és $I$-től különböző elemét; ily módon a háló nyilván eleget tesz a 4. tétel feltételeinek, viszont a $[0, I]$ intervallum nem komplementumos.

KOROLLÁRIUM. *Az $L$ hálóban akkor és csak akkor tartozik minden konvex részhálóhoz pontosan egy osztályozás, ha $L$ disztributív és relatív komplementumos.*

A korollárium a 4. tétel közvetlen folyománya.

II.

A 2. tétel szerint valamely disztributív hálóban a $\Theta_{a,b}$ kongruenciarelációnál azok és csak azok a $c, d (c > d)$ elempárok kongruensek, amelyekre fennáll az $(a \cup d) \cap c = c$ és $(b \cup d) \cap c = d$ egyenlet. A továbbiakban ennek a tételnek az általánosítását vizsgáljuk tetszőleges hálók esetére.

Nyilvánvaló, hogy bármely hálóban $c \equiv d (\Theta_{a,b})$, ha $c$ és $d$ eleget tesznek az

(15) $\{\ldots /[/(a \cup b) \cup x_1 / \cap x_2] \cup x_3 / \cap \ldots\} \cup x_n = c \cup d,$

(16) $\{\ldots /[/(a \cap b) \cup x_1 / \cap x_2] \cup x_3 / \cap \ldots\} \cup x_n = c \cap d$

egyenleteknek a háló alkalmas $x_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ elemeivel. A továbbiakra nézve megállapodunk a következőkben:

DEFINÍCIÓ. *Az $L$ hálóban a $c, d$ elempárt az $a, b$ elempárhoz hozzárendeltnek nevezzük* $(a, b, c, d \in L)$ *— jelben $\overline{a, b} \rightarrow \overline{c, d}$ — ha $a, b, c, d$ elemekhez léteznek $L$ olyan $x_1, x_2, \ldots, x_n$ elemei, amelyek kielégítik a fenti* (15) *és* (16) *egyenleteket.*

A definíció segítségével könnyen megadhatjuk azon $u, v$ elemeket, amelyekre $u \equiv v (\Theta_{a,b})$.

5. TÉTEL. *Az $L$ hálóban az $a \equiv b$-hez tartozó minimális osztályozásban $u \equiv v$ akkor és csak akkor, ha léteznek $L$-nek olyan*

$$(*) \qquad y_0 = u \cup v \geqq y_1 \geqq y_2 \geqq \ldots \geqq y_k = u \cap v \text{ elemei, hogy } \overline{a, b} \rightarrow \overline{y_{j-1} y_j} \quad (j = 1, 2, \ldots, k).$$

BIZONYÍTÁS: Ha a tétel feltevése teljesül, akkor nyilván $u \equiv v (\Theta_{a,b})$ s így elég kimutatni, hogy $\Theta$ $L$ egy osztályozását létesíti, ha $u \equiv v (\Theta)$ ekvivalens a $(*)$ feltétel fennállásával. Előrebocsátjuk, hogy $c \equiv d (\Theta)$ akkor és csak akkor, ha $c \cup d \equiv c \cap d (\Theta)$, mint az a definícióból közvetlenül leolvasható. A $\Theta$ reláció nyilván reflexív és szimmetrikus. Bizonyítjuk a helyettesítés elvét. Legyen *először* $u > v$ és $u \equiv v (\Theta)$ azaz $\overline{a, b} \rightarrow \overline{y_{j-1}, y_j}$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$. Nyilván $t \cup u = t \cup y_0 \geqq t \cup y_1 \geqq \ldots \geqq t \cup y_k = t \cup v$ és $\overline{a, b} \rightarrow \overline{t \cup y_{j-1}, t \cup y_j} (j = 1, 2, \ldots, k)$ és így $t \cup u \equiv t \cup v (\Theta)$, hasonlóan $t \cap u \equiv t \cap v (\Theta)$. Speciálisan $u > w > z$, $u \equiv v (\Theta)$ esetén $w \equiv u (\Theta)$ ($t = w$ eset) azaz a $\Theta$ reláció konvex.* Legyen *másodszor* $u$ és $v$ tetszőleges, továbbá $u \equiv v (\Theta)$. Mivel az első eset következtében $t \cup (u \cup v) \equiv t \cup (u \cap v) (\Theta)$ és $t \cup (u \cup v) \geqq (t \cup u) \cap (t \cup v) \geqq t \cup (u \cap v)$ ezért a konvexitás miatt $(t \cup u) \cap (t \cup v) \equiv t \cup (u \cup v) = (t \cup u) \cup (t \cup v) (\Theta)$, ami éppen a bizonyítandó $t \cup u \equiv t \cup v (\Theta)$-t jelenti.

* Egy tetszőleges $\Gamma$ relációt konvexnek nevezünk, ha $a \Gamma b$ és $a > c > b$ esetén $a \Gamma c$, és $c \Gamma b$.

A $\Theta$ reláció tranzitivitása az $u \equiv v(\Theta)$ és $v \equiv w(\Theta)$, $u > v > w$ esetben triviális. Az általános esetben $u \equiv v(\Theta)$ és $v \equiv w(\Theta)$-ból adódik $u \cup v \equiv \equiv u \cap v(\Theta)$, $v \cup w \equiv v \cap w(\Theta)$, továbbá $u \cup v = (u \cup v) \cup (v \cap w) \equiv (u \cup v) \cup (v \cup w) = = u \cup v \cup w(\Theta)$ és $u \cap v = (u \cap v) \cap (v \cup w) \equiv (u \cap v) \cap (v \cap w) = u \cap v \cap w(\Theta)$, s mivel $u \cup v \cup w \geqq u \cup v \geqq u \cap v \geqq u \cap v \cap w$, ezért ezekből $u \cup v \cup w \equiv u \cap v \cap w(\Theta)$ adódik. Viszont $u \cup v \cup w \geqq u \cup w \geqq u \cap w \geqq u \cap v \cap w$, ami a konvexitás miatt a bizonyítandó $u \cup w \equiv u \cap w(\Theta)$-t adja. Ezzel beláttuk, hogy $\Theta$ kongruenciareláció, s így $L$-nek egy osztályozását, mégpedig az $a \equiv b$-hez tartozó minimális osztályozást létesíti.

1. KOROLLÁRIUM. *Az $L$ hálóban akkor és csak akkor létezik olyan homomorfizmus, melyben osztály egy adott $J$ részhalmaza $L$-nek, ha $a, b, c \in J$ és $\overline{a, b} \to \overline{c, d}$ esetén $d \in J$.*

BIZONYÍTÁS: A „csak akkor" állítás (15), (16)-ból azonnal adódik. Az „akkor" állításhoz elég belátnunk, hogy a feltétel teljesülése esetén a $\Theta = \bigcup_{a, b \in J} \Theta_{a,b}$ kongruenciarelációnál a $J$ részhalmaz osztály; ezt pedig éppen a korollárium feltétele biztosítja.

2. KOROLLÁRIUM. *Egy disztributív hálóban minden ideál magja valamely homomorfizmusnak.*

BIZONYÍTÁS: Legyen $J$ egy tetszőleges ideál. Azt kell belátnunk, hogy bárhogyan választjuk $J$-ben az $a > b$ elempárt, nincs a hálónak olyan $v \in J$ és $u \notin J$ eleme($u > v$), hogy $\overline{a, b} \to \overline{u, v}$ (lásd az előző korolláriumot). A hozzárendelt elempár azonban — mint azt a 2. tételben bizonyítottuk — disztributív hálóknál az $(a \cup v) \cap u = u$ és $(b \cup v) \cap u = v$ egyenletek teljesülésével ekvivalens. Ez azonban már rögtön igazolja állításunkat, hiszen $a, v \in J$ s így $(a \cup v) \cap u = u$ is eleme $J$-nek.

3. KOROLLÁRIUM. *Egy $L$ háló akkor és csak akkor egyszerű, ha bármely $a, b, c, d \in L$-hez találhatók olyan $z_0 = c \cup d \geqq z_1 \geqq z_2 \geqq \ldots \geqq z_n = c \cap d$ elemek ($z_i \in L$), hogy $\overline{a, b} \to \overline{z_{i-1}, z_i}$ ($i = 1, 2, \ldots, n$).*

A 3. korollárium nem szorul bizonyításra.

Az 5. tétel segítségével már választ tudunk adni a bevezetőben felvetett 2. kérdésre. Feleletként a következő két tétel adódik.

6. *A* TÉTEL. *Az $L$ hálóban akkor és csak akkor határoz meg minden homomorfizmus egy magot és minden mag egyetlen homomorfizmust, ha*

($a$) *$L$ alulról korlátos;*

($b$) *$L$ bármely $a, b (a \neq b)$ elempárjához található olyan $c (\neq 0)$ elem, hogy $\overline{a, b} \to \overline{c, 0}$;*

(*c*) *L minden homomorf képére fennáll* (*b*).

6. *B* TÉTEL. *Az L hálóban akkor és csak akkor határoz meg minden homomorfizmus egy magot és minden mag egyetlen homomorfizmust, ha*

(*a*) *L alulról korlátos*;

(*b*) *L bármely* $a, b (a \neq b)$ *elempárjához található olyan* $c (\neq 0)$ *elem, hogy* $\overline{a, b} \rightarrow \overline{c, 0}$;

(*c'*) *L tetszőleges* $a, b (a \neq b)$ *elempárjához léteznek L olyan* $y \in V_{a,b}$ *és* $a \cup b = d_0 > d_1 > \ldots > d_n = a \cap b$ *elemei, hogy* $\overline{y, 0} \rightarrow \overline{d_{i-1}, d_i} (i = 1, 2, \ldots, n)$, *ahol* $V_{a,b}$ *jelöli az* $\overline{a, b} \rightarrow \overline{c, 0}$ *hozzárendelésben szereplő c elemek által generált ideált*.

MEGJEGYZÉS. A 6. *B* és 6. *A* tételben csak a (*c*) illetve (*c'*) feltételek különböznek. Éppen ezért, ha a továbbiakban az (*a*) vagy (*b*) feltételek szerepelnek, az mindkét tételre vonatkozik. (Nyilván 6. *A*-ban a (*b*) feltétel csak a szimmetria miatt szerepel.)

A 6. *A* tétel bizonyításához szükséges a következő

SEGÉDTÉTEL. Egy alulról korlátos *L* hálóban akkor és csak akkor tartozik egyetlen osztályozás a 0 ideálhoz (mint maghoz), ha (*b*) teljesül.

BIZONYÍTÁS: Ha (*b*) teljesül akkor a 0 ideálhoz valóban csak a triviális osztályozás tartozik, mert minden más kongruenciareláció esetén található olyan $a \equiv b (\Theta)$ elempár, hogy $a \neq b$; ebből viszont a(*b*) feltétel miatt olyan $c (\neq 0)$ egzisztenciája következik, melyre $\overline{a, b} \rightarrow \overline{c, 0}$, s így $c \equiv 0 (\Theta)$, tehát $\Theta$ magja különbözik a 0 ideáltól. Megfordítva, tegyük fel, hogy (*b*) nem teljesül valamely $a, b (a \neq b)$ elempárra. Tekintsük a $\Theta_{a,b}$ osztályozást. Ebben az osztályozásban 0 a mag, mert $c \equiv 0 (\Theta_{a,b})$ $(c \neq 0)$ esetén az 5. tétel miatt olyan $c_1$ létezése következnék, melyre $0 < c_1 \leqq c$ és $\overline{a, b} \rightarrow \overline{c_1, 0}$ ($c_1$ az 5. tételben szereplő $y_r$-nek felel meg, melyre $y_r > y_{r+1} = y_k$). Ezzel kimutattuk, hogy ha a (*b*) feltétel nem teljesül, akkor a 0 ideálhoz, mint maghoz legalább két osztályozás (az egyik a $\Theta_{a,b}$, a másik a triviális osztályozás) tartozik.

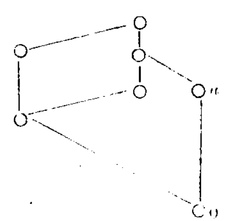
6. *A* tétel bizonyításához tekintsük *L*-nek egy olyan *J* ideálját, melyhez legalább egy osztályozás tartozik és legyen $L/\Theta$ *L* azon faktorhálója, melyben az elemek a *J*-hez tartozó minimális osztályok.* *L*-ben minden *J*-hez tartozó osztályozás osztályai minimális osztályok egyesítéseképp állnak elő. Ezért *L*-ben *J*-hez akkor és csak akkor tartozik pontosan egy osztályozás, ha $L/\Theta$-ban a 0 ideálhoz egyetlen osztályozás tartozik, s ez a segédtétel miatt éppen (*c*) teljesülését jelenti. Q. e. d.

* *J*-hez tartozó minimális osztályozás a *J* maggal rendelkező kongruenciarelációk metszetéhez tartozó osztályozás.

6. $B$ TÉTEL BIZONYÍTÁSA: $(a)$, $(b)$ szükségességét már beláttuk. Lássuk be $(c')$ szükségességét. Tegyük fel, hogy $(c')$ nem teljesül valamely $a, b$ elempárra. Állítjuk, hogy ekkor $V_{a,b}$ legalább két homomorfizmus magja. Tekintsük az $a \equiv b$-hez tartozó minimális osztályozást. Itt a mag a $V_{a,b}$ ideál s így tartozik $V_{a,b}$-hez legalább egy osztályozás (melyben $a \equiv b$), tehát $V_{a,b}$-hez tartozik minimális osztályozás is, melyben állítjuk, hogy $a \not\equiv b$. Ugyanis, ha $V_{a,b} \equiv 0$-ból következnék $a \equiv b$, ez éppen $(c')$ fennállását jelentené a feltevéssel ellentétben (hasonlóan az 5. tétel 3. korolláriumához).

Az $(a)$, $(b)$ és $(c')$ feltételek elégségessége azonnal adódik abból, hogy ezek teljesülése esetén $a \equiv b(\Theta)$ akkor és csak akkor, ha $V_{a,b} \subseteq J_\Theta$. ($J_\Theta$ azon $u$ elemek halmaza, melyekre $u \equiv 0(\Theta)$.) Ez pedig a következőképp látható be: $V_{a,b}$ definíciója és $(b)$ miatt $a \equiv b(\Theta)$-ból következik olyan $c(\neq 0)$ létezése, hogy $c \equiv 0(\Theta)$ (ti. az a $c$, melyre $\overline{a,b} \to \overline{c,0}$) s ebből $V_{a,b} \subseteq J_\Theta$ adódik; ha $J_\Theta \supseteq V_{a,b}$ akkor, a $(c')$ feltétel miatt $y \equiv 0(\Theta)$ s ez éppen az 5. tétel miatt $a \equiv b(\Theta)$-t jelenti.

MEGJEGYZÉS. A 6. $A$ tételnek $(b)$ feltétele nem vonja maga után a $(c)$ feltétel teljesülését, azaz a $(b)$ tulajdonság nem homomorf invariáns. Ennek illusztrálására szolgáljon a következő példa:




*3. ábra*

Könnyen meggyőződhetünk arról, hogy a 3. ábrán látható hálóban bármely $a, b$ elempárjához van olyan $c(\neq 0)$, hogy $\overline{a,b} \to \overline{c,0}$ viszont az $(u]$ főideálhoz tartozó minimális osztályozásban — amelyhez tartozó faktorháló a 3 elemű lánccal izomorf — a $(b)$ feltétel nyilván nem teljesül.

1. KOROLLÁRIUM. *Ha egy alulról korlátos $L$ hálóban bármely $[0, a]$ intervallum komplementumos részháló, akkor a mag egyértelműen meghatározza a homomorfizmust* ((*L T*) 23. old. 3. tétel).

Az 1. korollárium a 6. $B$ tételből adódik. Legyen ugyanis $a, b(a \neq b)$ az $L$ háló két tetszőleges eleme s tekintsük a $(0, a \cup b)$ intervallum azon $c$ elemét, mely az $a \cap b$ komplementuma ebben az intervallumban. Ekkor $[(a \cup b) \cup 0] \cap c = c(= c \cup 0)$ és $[(a \cap b) \cup 0] \cap c = 0(= c \cap 0)$ miatt $\overline{a,b} \to \overline{c,0}(c \neq 0)$, tehát $(b)$ teljesül és $c \in V_{a,b}$, továbbá $(c \cup 0) \cup (a \cap b) = a \cup b$ illetve $(c \cap 0) \cup (a \cap b) =$

$= a \cap b$ ($x_1 = a \cap b$-vel (15), (16)-ban) azt jelenti, hogy $\overline{c, 0} \to \overline{a, b}$, ebből pedig valóban a 6. *B* tétel (*c*) feltételének teljesülése következik.

2. KOROLLÁRIUM. (ARESKIN *tétele*) *Az L alulról korlátos disztributív hálóban akkor és csak akkor van egy-egyértelmű megfeleltetés az ideálok és osztályozások között, ha L minden homomorf képe gyengén komplementumos.**

Ugyanis a 6. *A* tétel $\overline{a, b} \to \overline{c, 0}$ feltétele disztributív hálóban (lásd I. rész (10) és (11) egyenleteit, $c$-nek megfelel az ottani $v$) ekvivalens a gyengekomplementumossággal.

## III.

A 3. tétel és a 4. tétel korolláriuma előtérbe helyezi az egyértelmű osztályozás vizsgálatánál a relatív komplementumos disztributív hálókat. Ezen hálótípus és a Boole-gyűrűk kapcsolatával kívánunk a következőkben foglalkozni. Mindenekelőtt egy fontos tételt fogunk igazolni, mely számunkra majd lehetővé teszi bizonyos egyenlőségek egyszerű igazolását.

Legyenek

$$f_i(u_1, \ldots, u_n, x_1, \ldots, x_m)$$

és

$$\psi_i(u_1, \ldots, u_n, x_1, \ldots, x_m) \qquad (i = 1, 2, \ldots, k)$$

tetszés szerinti háló polinomok.

7. TÉTEL. *Az L relatív komplementumos disztributív hálóban az*

$$f_i = \psi_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, k) \tag{17}$$

*egyenletrendszernek akkor és csak akkor van tetszésszerinti*

$$u_1 = a_1, \ldots, u_n = a_n (a_j \in L, j = 1, 2, \ldots, n)$$

*értékrendszer esetén megoldása, ha* (17)*-nek bármely*

$$u_1 = b_1, \ldots, u_n = b_n (b_j \in \mathbf{2}^{**} j = 1, 2, \ldots n),$$

*értékrendszer esetén* **2***-ben van megoldása.*

Megjegyezzük, hogy ha $m = 0$ (azaz a keresendő $x_i$-k halmaza üres), akkor (17) azonosságot jelent. A 7. tétel bizonyításához előrebocsátjuk a következőt:

* Az $L$ hálót gyengén komplementumosnak nevezzük, ha bármely $a > b$ elempárjához található olyan $c$, hogy $a \cap c \neq 0$ és $b \cap c = 0$. (Lásd ISEKI KIYOSI Portugaliae Math. 9. 1950. 169—170. o.) Más, a fentivel ekvivalens definícióra nézve lásd még ISEKI KIYOSI előbbi dolgozatát, továbbá SZÁSZ GÁBOR kandidátusi disszertációját.

** **2** a kételemű hálót — mely izomorfiától eltekintve egyértelműen meghatározott — jelöli.

SEGÉDTÉTEL. *Legyen $L$ relatív komplementumos disztributív háló és $u_1, \ldots, u_n \in L$. $L$-nek van olyan $B_n$ véges részhálója, mely Boole-algebra és $u_1, \ldots, u_n \in B_n$. Érvényes $O(B_n) \leq 4^n$.*

BIZONYÍTÁS: A segédtétel állítása $n=1, 2$-re nyilván igaz. Tegyük fel, hogy az $u_1, \ldots, u_{n-1}$-et elemeként tartalmazó $B_{n-1}$ véges Boole-algebra létezik és $O(B_{n-1}) \leq 4^{n-1}$. $B_{n-1}$ alsó, ill. felső határa legyen $O_{n-1}, I_{n-1}$. Tekintsük az $(O_{n-1}, u_n \cup I_{n-1})$ intervallumban $I_{n-1}$ komplementumát $I'_{n-1}$-t és legyen $A_1$ az $O_{n-1}$ és $I'_{n-1}$-t tartalmazó, legfeljebb két elemű részhálója $L$-nek, $A_2$ pedig az $u_n \cup I_{n-1}$ és $u_n$ elemeket tartalmazó, szintén legfeljebb kételemű részháló. A $B_n = (B_{n-1} X A_1) \check{X} A_2$ [$\check{X}$ itt duális direkt szorzatot jelöl, ahol az $(x_1, x_2) \leftrightarrow x_1 \cap x_2$ megfeleltetéssel képezzük a direkt szorzatot] részhálója $L$-nek véges Boole-részhálója, mert három véges Boole-háló direktszorzata. Végül nyilván (mert $u_n \in A_2$) $u_1, \ldots, u_n \in B_n$ és $O(B_n) = O(B_{n-1}) \cdot O(A_1) \cdot O(A_2) \leq 4^{n-1} \cdot 2 \cdot 2 = 4^n$. Ezzel a segédtétel bizonyítását befejeztük.

Rátérünk a 7. tétel BIZONYÍTÁSÁRA.

*Szükségesség.* Tekintsük a $B_{n+m}$ véges Boole-algebrát, amely tartalmazza az $a_1, \ldots, a_n, x_1, \ldots, x_m$ elemeket. $B_{n+m}$-ben fennáll (17), tehát (17) igaz $B_{n+m}$ minden homomorf képére is, így **2**-re is. $b_i = \bar{a}_i$-ok ($a_i$-k homomorf képei) **2**-ben való tetszőleges választhatóságát biztosíthatjuk $a_i$-k egy adott primideálon (a homomorfizmus magján) belül, ill. kívül való felvételével.

*Elégségesség.* Tegyük fel, hogy **2**-ben kielégíthető (17). Nyilván (17) kielégíthető kételemű hálók véges direkt szorzatában (ugyanis komponensenként kielégíthető (17)), s mivel minden véges Boole-algebra előállítható kételemű háló direkt szorzataként, ezért minden véges Boole-algebrában is. Legyen $B_n L$ azon részhálója, mely véges Boole-algebra és $a_1, \ldots, a_n \in B_n$. $B_n$-ben (17) kielégíthető, tehát $L$-ben is. Q. e. d.

1. MEGJEGYZÉS. A bizonyításból az is kiderül, hogy $x_1, \ldots, x_m$ az $a_1, \ldots, a_n$ által meghatározott véges Boole-algebrából választható.

2. MEGJEGYZÉS. Láthatjuk, hogy relatív komplementumos disztributív hálóban (17) kielégíthetőségét elég az $a_{i_1} = \cdots = a_{i_v} > a_{i_{v+1}} = \cdots = a_{i_n}$ esetben belátni, ahol $i_1, \ldots, i_n$ befutja $1, 2, \ldots, n$ összes permutációját.

Érvényes a 7. tétel megfordítása is.

8. TÉTEL. *A (17)-nek valamely $L$ hálóban való teljesülése akkor és csak akkor ekvivalens a* **2**-*ben való teljesüléssel, ha $L$ disztributív és relatív komplementumos.*

A 8. tétel „akkor" állítását a 7. tétel bizonyítja, a „csak akkor" pedig abból adódik, hogy az

$$a_1 \cup (a_2 \cap a_3) = (a_1 \cup a_2) \cap (a_1 \cup a_3)$$

egyenlőség (disztributivitás) és az

$$\begin{aligned} &a_1 \cap a_2 = a_1, a_1 \cap a_3 = a_1, a_2 \cap a_3 = a_2, \\ &a_2 \cup x = a_3, \\ &a_2 \cap x = a_1 \end{aligned}$$

egyenletrendszer (relatív komplementumosság) 2-ben kielégíthető.

A 7. tétel már elég erős ahhoz, hogy segítségével megvizsgálhassuk a relatív komplementumos disztributív hálók és a Boole-algebrák kapcsolatát.

9. TÉTEL. *Az $L$ disztributív hálóban akkor és csak akkor értelmezhető Boole-algebra művelet* (amelyet véges sok paraméter és egyenlet segítségével az $\cup$ és $\cap$ műveletekkel definiálunk), ha $L$ relatív komplementumos. Az összes ily módon bevezethető művelet megadható $L$ egy rögzített $a$ elemével, a következőképp:*

$$\begin{aligned} &x \cdot y = (a \cap x) \cup (x \cap y) \cup (a \cap y) \\ (18) \qquad &\textit{és } x+y \textit{ az } x \cdot y \textit{ relatív komplementuma} \\ &\textit{az } (a \cup x \cup y, a \cap x \cap y) \textit{ intervallumban.} \end{aligned}$$

BIZONYÍTÁS: Legyen $L$ relatív komplementumos disztributív háló. Bizonyítjuk, hogy (18) Boole-gyűrűműveletet definiál. A 7. tétel miatt elég ezt a 2 hálóra belátni (2 elemeit $O, I$-vel jelöljük). (Itt látható, milyen hasznos a 7. tétel; anélkül a (18) alatti műveletekkel definiált struktúra gyűrű voltának közvetlen igazolása nagyon nagy nehézségeket okozna.)

2-ben a (18) alatt definiált művelet a következő művelettáblával adható meg:

$$(19) \qquad a = 0 \qquad \begin{array}{c|cc} + & 0 & I \\ \hline 0 & 0 & I \\ I & I & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc} \cdot & 0 & I \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & I \end{array}$$

A művelettáblából látható, hogy 2-ben (18) Boole-gyűrűműveletet definiál. Az $a = I$ eset az előbbi duálisa.

Kimutatjuk továbbá, hogy ha $L$ relatív komplementumos disztributív háló, akkor (18) az összes bevezethető Boole-gyűrűműveletet kimeríti. Kételemű Boole-gyűrű 0 és $I$ elemmel nyilván csak kétféle van, az 1. típust a (19) művelettábla adja meg, és a 2. típus belőle 0 és $I$ felcserélésével adódik. Mivel minden véges Boole-algebra kételemű Boole-algebrák direkt szorzata, ezért a véges Boole-algebrában bevezetendő műveletet teljesen meghatározza hány 1. és hány 2. típusú kételemű Boole-gyűrűt szoroztunk össze. Mivel a $2^n$ Boole-algebrának $n$ kételemű direkt faktora van, és mindegyik két típusú lehet, ezért $2^n$ féle művelet vezethető be (ezek mind különbözők, mert más a 0 elemük), mivel (18) is $2^n$ különböző műveletet ($a\,2^n$ féle lehet) ad meg,

* Azaz 2 karakterisztikájú gyűrűművelet.

ezért (18) kimeríti az összes bevezethető műveletet. Ezzel beláttuk, hogy véges Boole-háló esetén (18) az összes lehetséges Boole-gyűrűműveletet megadja. Ezek után tekintsük $L$ két elempárját $x, y$ és $u, v$-t és jelölje $B_{xy}$, ill. $B_{uv}$ azokat a véges rész Boole-algebráit $L$-nek (7. tétel), melyek $x, y$-t, ill. $u, v$-t, továbbá a műveleteket definiáló paramétereket elemként tartalmazzák. Tudjuk, hogy $B_{xy}$ és $B_{uv}$-ben (mivel végesek) van olyan rögzített $a$, ill. $b$ elem, melyek a műveletet meghatározzák (18) szerint $B_{xy}$, ill. $B_{uv}$-ben. Ha nem volna igaz, hogy $L$-ben a művelet (18) alapján definiálható, akkor lenne olyan $x, y$ és $u, v$, hogy $B_{xy}, B_{uv}$-ben a rögzített $a$ és $b$ elemek különbözők, azaz $a \neq b$. Tekintsük egy $s \in B_{xy} \cap B_{uv}$ elemet (a $\cap$ itt halmazelméleti metszetet jelöl). $B_{xy} \cap B_{uv}$ nem üres, mert a műveletet definiáló paramétereket tartalmazza, viszont $s+s=a$, ha a műveletet $B_{xy}$-ban, ill. $s+s=b$, ha a műveletet $B_{uv}$-ben tekintjük, kell tehát, hogy $a=b$ legyen. Ezzel beláttuk, hogy relatív komplementumos disztributív hálóban Boole-gyűrűműveleteket csak (18)-cal definiálhatunk.

Szükségünk lesz a következő megjegyzésre: ha $L$ disztributív és $x_1, \ldots, x_n \in L$, akkor $L$-nek van olyan $L_n$ véges részhálója, hogy $x_1, \ldots, x_n \in L_n$. Ezt $n$-re vonatkozó teljes indukcióval láthatjuk be. $n=1, 2$-re az állítás nyilvánvaló, tegyük fel, hogy $x_1, \ldots, x_{n-1} \in L_{n-1}$ és $L_{n-1}$ $L$ véges részhálója. Az $x_n \cup u, x_n \cap u$ elemek összessége, ahol $u$ végigfut $L_{n-1}$ összes elemén $L_{n-1}$ és $x_n$-nel együtt a disztributivitás miatt részhálót alkotnak: $L_n$-et.

Ezt felhasználva végül bizonyítanunk kell, hogy ha egy $L$ disztributív hálóban értelmezhető egy Boole-gyűrűművelet, akkor $L$ relatív komplementumos. Legyen $L$-be bevezetve Boole-gyűrűművelet, és $L_{xy}$ legyen $L$-nek egy véges, $x, y$-t és a műveleteket definiáló paramétereket tartalmazó részhálója. $L_{xy}$ kételemű hálók szubdirekt szorzata (ahol a szubdirekt tényezők $L_{xy}$ homomorf képei, tehát szintén Boole-algebrák) s így a fentiek miatt $L_{xy}$-ban is a művelet (18)-cal van definiálva. A műveletekre való zártságból viszont már adódik $L_{xy}$ és így $L$ relatív komplementumossága. Ezzel a 9. tétel bizonyítását befejeztük.

(18)-ból rögtön látható, hogy $L$ ideáljai akkor és csak akkor lesznek a Boole-algebrának is ideáljai, ha $a=0$ azaz, ha az $L$ háló kielégíti a 3. tétel feltételeit. Ez a mélyebb oka a 3. tétel fennállásának.

*Eötvös Loránd Tud. Egyetem*
*II. mat.-fiz. szak.*