BIZONYOS VÁRAKOZÁSI IDŐ PROBLÉMÁRÓL

TAKÁCS LAJOS

Bevezetés

Sajátos várakozási idő problémák lépnek fel egy vagy több kezelő felügyeletére bízott több termelő gép kiszolgálásával kapcsolatban. Jelenleg csupán az egy kezelő esetével foglalkozunk.

A jelenséget leíró modell. Tekintsünk m számú termelő gépet, amelyek egy kezelő felügyeletére vannak bízva. A gépek a $0 \leq t < \infty$ időközben folyamatosan termelnek, de előfordulhat, hogy véletlen hibák következtében automatikusan leállnak és mindaddig állva maradnak, amíg a hibát a kezelő ki nem javította. Tegyük fel, hogy minden egyes gépre $\mu \Delta t + o(\Delta t)$ annak a valószínűsége, hogy $(t, t+\Delta t)$ időközben leáll, feltéve, hogy t időpontban működik és ez az esemény független minden egyéb körülménytől. Tegyük fel, hogy a kezelő leállás sorrendjében javítja ki a gépeket (bár ez a feltevés mellőzhető) és ha van álló gép, akkor a kezelő okvetlenül javít. Feltesszük, hogy az egyes javítási idők egymástól független pozitív valószínűségi változók ugyanazon $F(x)$ eloszlásfüggvénnyel. Legyen

$$\alpha = \int_0^\infty x \, dF(x) \tag{1}$$

és

$$\sigma^2 = \int_0^\infty (x-\alpha)^2 dF(x). \tag{2}$$

Továbbá jelölje $F(x)$ Laplace-Stieltjes transzformáltját

$$\varphi(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dF(x), \tag{3}$$

amely konvergens, ha $\Re(s) \geq 0$.

Gyakorlati alkalmazások. A fenti modellel leírható jelenség lép fel például több szövőgép vagy más automatikusan gyártó gép egyidejű működésénél vagy várakozásos telefonrendszereknél. Utóbbi esetben a hívások felelnek meg a leállásoknak és a beszélgetések a javításoknak. Mi az előző terminológiát fogjuk használni. Több gép egyidejű működésénél fontos kérdés annak megállapítása, hogy adott idő alatt mennyi a termelés, a kezelő mennyi időt tölt javítással, hány gépet ökonomikus egy kezelőre bízni, továbbá, főleg telefonközpontoknál, a várakozási idő meghatározása. A következőkben megadjuk mindazon alapvető mennyiségeket, amelyek alapján a fenti kérdésekre válasz adható.

Jelölések és fogalmak. Jelölje $\eta(t)$ valószínűségi változó a t időpontban egyidejűleg működő gépek számát. Ha $\eta(t)=k$ $(k=0,1,2\ldots,m)$, akkor azt mondjuk, hogy E_k állapotban van a rendszer. Jelölje rendre $\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_n,\ldots$ azokat az időpontokat, midőn a kezelő befejez egy javítást és legyen $\eta(\tau_n-0)=\eta_n$. Továbbá legyen $\lim\limits_{t\to\infty}\mathbf{P}\{\eta(t)=k\}=P_k^*$ $(k=0,1,2,\ldots,m)$ és $\lim\limits_{n\to\infty}\mathbf{P}\{\eta_n=k\}=P_k(k=0,1,2,\ldots,m-1)$. Jelölje $\chi(t)$ valószínűségi változó a t időpontban (esetleg) folyamatban levő javításnak a t időponttól a javítás befejezéséig tartó időtartamának a hosszát. Legyen $\lim\limits_{t\to\infty}\mathbf{P}\{\chi(t)\leqq x|\eta(t)=k\}=$ $=F_k^*(x),(k=0,1,2,\ldots,m-1)$.

Az általunk vizsgált folyamat Markov-folyamatként kezelhető, ha az állapot leírására az $\{\eta(t),\chi(t)\}$ változópárt használjuk. Mint látni fogjuk, a kezdeti értékektől vagy kezdeti eloszlásoktól függetlenül léteznek az $\{\eta(t),\chi(t)\}$ változók $t\to\infty$-re vett határeloszlásai. Ezek szerint definiálhatjuk a *stacionárius folyamat* fogalmát, mégpedig azáltal, hogy feltesszük, hogy $\eta(0)$ eloszlása $\{P_k^*\}$ és $\chi(0)$ eloszlásfüggvénye $\eta(0)=k(k=0,1,2,\ldots,m-1)$ feltétel mellett $F_k^*(x)$. Jelölje a stacionárius folyamatnál egy gép leállásától a javítás megkezdéséig eltelt időtartamnak az eloszlásfüggvényét $G_m(x)$ és legyen

$$\Gamma_m=\int_0^\infty x\,dG_m(x). \tag{4}$$

A szakirodalom áttekintése. A fenti folyamat vizsgálatával tudomásunk szerint először A. J. HINCSIN [6] foglalkozott. HINCSIN a $\{P_k\}$ valószínűségeloszlás (illetve az ezzel egyenértékű $\pi_k=P_{m-1-k}$ $(k=0,1,2,\ldots,m-1)$ eloszlás) meghatározására felír egy egyenletrendszert, amelyet azonban nem old meg. A következőkben megadjuk ennek az egyenletrendszernek explicit megoldását. Továbbá HINCSIN meghatározza Γ_m-t, a várakozási idő várható értékét P_{m-1} (illetve π_0) segítségével, de, mint látni fogjuk, ez a képlet általában nem helyes (csak exponenciális eloszlású $F(x)$-re ad helyes eredményt). A következőkben megadjuk Γ_m explicit alakját. R. KRONIG [10], valamint R. KRONIG és H. MONDRIA [11] a Γ_m explicit meghatározásának kérdésével foglalkoznak, de ugyanazt a hibát követik el, mint HINCSIN. A $\{P_k^*\}$ valószínűségeloszlás várható értékét az eloszlás ismerete nélkül rekurzív képletek segítségével

H. ASCHCROFT [1] határozta meg. Exponenciális eloszlású javítási idők esetére a $\{P_k^*\}$ eloszlást TH. FRY [5] és C. PALM [13] határozta meg. Exponenciális és állandó javítási idők esetére bizonyos eredményeket szerző [14] dolgozata is tartalmaz. Jelenleg nem teszünk említést a várakozási idő egyéb kérdéseit tárgyaló számos más dolgozatról.

A feladat kitűzése. A következőkben explicit alakban meghatározzuk a $\{P_k\}$ és $\{P_k^*\}$ valószínűségeloszlást, valamint ezek binomiális momentumait, továbbá stacionárius esetre a várakozási idő $G_m(x)$ eloszlásfüggvényét és Γ_m várható értékét.

1. §. A $\{P_k\}$ valószínűségeloszlás meghatározása

1. TÉTEL: *Az $\eta(0)$ változó kezdeti eloszlásától függetlenül létezik a $\{P_k\}$ határeloszlás és fennáll*

(5) $$P_k = \sum_{r=k}^{m-1} (-1)^{r-k} \binom{r}{k} B_r,$$

ahol B_r a $\{P_k\}$ valószínűségeloszlás r-edik binomiális momentuma, amelynek értéke

(6) $$B_r = C_r \frac{\sum\limits_{j=r}^{m-1} \binom{m-1}{j} \frac{1}{C_j}}{\sum\limits_{j=0}^{m-1} \binom{m-1}{j} \frac{1}{C_j}},$$

ahol $C_0 = 1$ és $r = 1, 2, \ldots$-re

(7) $$C_r = \prod_{i=1}^{r} \frac{\varphi(i\mu)}{1-\varphi(i\mu)}.$$

BIZONYÍTÁS: Könnyen látható, hogy az $\{\eta_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ valószínűségi változók sorozata Markov-láncot alkot $\mathbf{P}\{\eta_{n+1} = k \mid \eta_n = j\} = p_{jk}$ átmenet-valószínűségekkel, ahol $j = 0, 1, \ldots, m-2$-re

(8) $$p_{jk} = \binom{j+1}{k} \int_0^\infty e^{-k\mu x}(1-e^{-\mu x})^{j+1-k}\, dF(x)$$

és

(9) $$p_{m-1,k} = p_{m-2,k}.$$

Esetünkben a Markov-lánc ergodikus; tehát az η_1 változó kezdeti eloszlásától függetlenül léteznek a $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{P}\{\eta_n = k\} = P_k$ $(k = 0, 1, \ldots, m-1)$ határvalószínűségek, éspedig a

(10) $$P_k = \sum_{j=k-1}^{m-1} p_{jk} P_j \qquad (k = 0, 1, \ldots, m-1)$$

egyenletrendszer

$$\sum_{k=0}^{m-1} P_k = 1 \tag{11}$$

feltételnek eleget tevő egyértelműen meghatározott megoldásai (vö. W. FELLER [4] p. 325.).

A (10) és (11) egyenletrendszer megoldására vezessük be az

$$U(z) = \sum_{k=0}^{m-1} P_k z^k \tag{12}$$

generátorfüggvényt. Erre (10) alapján a következő integrálegyenlet írható fel:

$$\begin{aligned} U(z) = &\int_0^\infty (1-e^{-\mu x}+ze^{-\mu x})\,U(1-e^{-\mu x}+ze^{-\mu x})\,dF(x)+ \\ &+(1-z)P_{m-1}\int_0^\infty e^{-\mu x}(1-e^{-\mu x}+ze^{-\mu x})^{m-1}\,dF(x). \end{aligned} \tag{13}$$

Vezessük be most a $\{P_k\}$ valószínűségeloszlás

$$B_r = \sum_{k=r}^{m-1} \binom{k}{r} P_k \tag{14}$$

binomiális momentumait. Könnyen belátható, hogy

$$B_r = \frac{1}{r!}\left(\frac{d^r U(z)}{dz^r}\right)_{z=1}. \tag{15}$$

Most (11) szerint $B_0 = 1$ és (13)-ból r-szeres differenciálással azt kapjuk, hogy

$$B_r = \left[B_r + B_{r-1} - \binom{m-1}{r-1} P_{m-1}\right] \int_0^\infty e^{-r\mu x}\,dF(x), \quad (r = 1, 2, \ldots, m-1). \tag{16}$$

Legyen rövidség kedvéért

$$\varepsilon_r = \varphi(r\mu) = \int_0^\infty e^{-r\mu x}\,dF(x).$$

Ekkor (16) a következő alakban írható

$$B_r = \frac{\varepsilon_r}{1-\varepsilon_r} B_{r-1} - \binom{m-1}{r-1} \frac{\varepsilon_r}{1-\varepsilon_r} B_{m-1}, \tag{17}$$

ugyanis $P_{m-1} = B_{m-1}$. A (17) egyenletrendszer a B_r ismeretlenekre egyszerűen megoldható. Gondoljuk egy pillanatra B_{m-1}-et adottnak, ekkor (17) a B_r ismeretlenekre változó együtthatós lineáris differenciaegyenlet, amely könnyen megoldható (vö. CH. JORDAN [8], p. 583). A megoldás

$$B_r = C_r \left[1 - B_{m-1} \sum_{j=0}^{r-1} \binom{m-1}{j} \frac{1}{C_j}\right],$$

ahol $C_0 = 1$ és

$$C_r = \frac{\varepsilon_1}{1-\varepsilon_1} \frac{\varepsilon_2}{1-\varepsilon_2} \cdots \frac{\varepsilon_r}{1-\varepsilon_r}.$$

Ha most a fenti egyenletben $r = m-1$, akkor azt nyerjük, hogy

$$B_{m-1} = \frac{1}{\sum_{j=0}^{m-1} \binom{m-1}{j} \frac{1}{C_j}},$$

és így végül

$$B_r = C_r \frac{\sum_{j=r}^{m-1} \binom{m-1}{j} \frac{1}{C_j}}{\sum_{j=0}^{m-1} \binom{m-1}{j} \frac{1}{C_j}}, \tag{18}$$

ami megegyezik (6)-tal.

A P_k ismeretleneket

$$P_k = \frac{1}{k!} \left(\frac{d^k U(z)}{dz^k}\right)_{z=0}$$

szolgáltatja. $U(z)$ deriváltjai a $z = 1$ helyen ismeretesek. Ezek segítségével minden nehézség nélkül előállíthatók $U(z)$ deriváltjai a $z = 0$ helyen, azaz a P_k értékek is felírhatók. Célszerűbb azonban JORDAN KÁROLY képlete, amely a valószínűségeket közvetlenül a binomiális momentumokkal fejezi ki. Eszerint

$$P_k = \sum_{r=k}^{m-1} (-1)^{r-k} \binom{r}{k} B_r, \tag{19}$$

ami bizonyítja (5)-öt. A (19) képlet könnyen nyerhető (14)-ből, ha annak mindkét oldalát $(-1)^{r-k}\binom{r}{k}$-val szorozzuk és a kapott egyenleteket összegezzük.

2. §. A $\{P_k^*\}$ valószínűségeloszlás meghatározása

2. TÉTEL: *Ha $\alpha < \infty$ akkor az $\eta_t(0)$ valószínűségi változó kezdeti eloszlásától függetlenül létezik a $\{P_k^*\}$ határeloszlás, éspedig fennáll*

$$P_k^* = \sum_{r=k}^{m} (-1)^{r-k} \binom{r}{k} B_r^*, \tag{20}$$

ahol B_r^* *a* $\{P_k^*\}$ *valószínűségeloszlás r-edik binomiális momentuma, amelyre fennáll* $B_0^* = 1$ *és* $r = 1, 2, \ldots, m$*-re*

$$B_r^* = \frac{m\,C_{r-1}}{r} \frac{\sum_{j=r-1}^{m-1} \binom{m-1}{j} \frac{1}{C_j}}{1 + m\alpha\mu \sum_{j=0}^{m-1} \binom{m-1}{j} \frac{1}{C_j}}, \tag{21}$$

ahol C_j *jelentése a* (7) *szerinti.*

BIZONYÍTÁS: Néhány segédtételre lesz szükségünk.

1. SEGÉDTÉTEL: *Jelölje* $M^*(t)$ *a* $(0, t)$ *időközben előforduló* $E_{m-1} \to E_m$ *átmenetek várható számát. Tetszőleges* $h > 0$*-ra fennáll*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{M^*(t+h) - M^*(t)}{h} = \frac{m\mu}{1 + m\alpha\mu \sum_{j=0}^{m-1} \binom{m-1}{j} \frac{1}{C_j}}. \tag{22}$$

Ez a következőképpen igazolható. Tekintsük az $\{\eta_n\}$ Markov-láncnál az E_{m-1} állapotot. Az E_{m-1} állapot visszatérő állapot és a visszatérésig megtett lépések számának várható értéke $1/P_{m-1}$ (vö.: W. FELLER [4], 325.). Két egymást követő $E_{m-1} \to E_m$ átmenet között eltelt időtartam összetevődik a kezelő szempontjából egy szünetből és egy javítási periódusból. A szünet hosszának várható értéke $1/\mu m$ és a javítási periódus hosszának várható értéke α/P_{m-1}, ugyanis egy javítás átlagos időtartama α és az előzőek szerint egy javítási periódusban végzett javítások várható száma $1/P_{m-1}$. Az egymást követő $E_{m-1} \to E_m$ átmenetek között eltelt időtartamok, mint könnyen belátható, egyforma eloszlású független valószínűségi változók. Közös várható értékük a fentiek szerint

$$\frac{1}{m\mu} + \frac{\alpha}{P_{m-1}} = \frac{1}{m\mu}\left[1 + m\alpha\mu \sum_{j=0}^{m-1} \binom{m-1}{j} \frac{1}{C_j}\right],$$

$P_{m-1} = B_{m-1}$ (6) alakjának figyelembevételével. Most (22) baloldala egyenlő ennek a várható értéknek reciprok értékével, mégpedig J. L. DOOB [3] tétele szerint, ha az $E_{m-1} \to E_m$ átmenetek között eltelt időtartamok eloszlása nem szinguláris eloszlás, vagy D. BLACKWELL [2] tétele szerint, ha a szóban forgó eloszlás nem rácsos eloszlás. Esetünkben mindkét feltétel teljesül és így fennáll

$$\lim_{t\to\infty} \frac{M^*(t+h) - M^*(t)}{h} = \frac{m\mu P_{m-1}}{m\alpha\mu + P_{m-1}},$$

amely megegyezik (22)-vel.

2. SEGÉDTÉTEL: *Jelölje* $M(t)$ *a* $(0, t)$ *időközben előforduló* τ_n *időpontok várható számát, azaz a* $(0, t)$ *időközben befejeződő javítások várható számát.*

Tetszőleges $h>0$-ra fennáll, hogy

$$\lim_{t\to\infty}\frac{M(t+h)-M(t)}{h}=\frac{m\mu\sum_{j=0}^{m-1}\binom{m-1}{j}\frac{1}{C_j}}{1+m\alpha\mu\sum_{j=0}^{m-1}\binom{m-1}{j}\frac{1}{C_j}}. \tag{23}$$

Jelölje $M_n(t)$ a $(0,t)$ időközben befejeződő olyan javítások várható számát, amelyek egy javítási periódus n-edik javítását követik. Ekkor felírható, hogy

$$M(t)=\sum_{n=1}^{\infty}M_n(t). \tag{24}$$

Foglalkozzunk most $M_n(t)$-vel. Az említett feltételeknek megfelelő időpontoknak egymástól való távolságai egyforma eloszlású független valószínűségi változók. Közös eloszlásfüggvényük kielégíti J. L. DOOB [3] és D. BLACKWELL [2] feltételeit és így a $\lim\limits_{t\to\infty}[M_n(t+h)-M_n(t)]/h$ határérték létezik. Ha pedig ez a határérték létezik, akkor nyilvánvalóan megegyezik a $\lim\limits_{t\to\infty}M_n(t)/t$ határértékkel. Ezen utóbbi pedig könnyen kiszámítható. Jelölje ugyanis Q_n annak a valószínűségét, hogy egy javítási periódus legalább n javításból áll. Ennek segítségével felírható, hogy

$$Q_nM^*(t)\leqq M_n(t)\leqq Q_n[M^*(t)+1].$$

Innen

$$\lim_{t\to\infty}\frac{M_n(t)}{t}=Q_n\lim_{t\to\infty}\frac{M^*(t)}{t}=Q_n\frac{m\mu P_{m-1}}{m\alpha\mu+P_{m-1}},$$

ugyanis a $\lim\limits_{t\to\infty}M^*(t)/t$ határérték megegyezik a (22) kifejezéssel. Így tehát

$$\lim_{t\to\infty}\frac{M_n(t+h)-M_n(t)}{h}=Q_n\frac{m\mu P_{m-1}}{m\alpha\mu+P_{m-1}}. \tag{25}$$

Most, mivel egy javítási periódusban végzett javítások várható száma

$$\sum_{n=1}^{\infty}Q_n=\frac{1}{P_{m-1}},$$

tehát (24) szerint

$$\lim_{t\to\infty}\frac{M(t+h)-M(t)}{h}=\lim_{t\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{M_n(t+h)-M_n(t)}{h}=\frac{m\mu}{m\alpha\mu+P_{m-1}}. \tag{26}$$

A (26) kifejezésben a határérték tagonként képezhető, ugyanis a fentiek és $M^*(t+h)-M^*(t)\leqq 1+M^*(h)$ következtében fennáll $\frac{M_n(t+h)-M_n(t)}{h}\leqq$ $\leqq Q_n\frac{M^*(t+h)-M^*(t)+1}{h}\leqq Q_n\frac{2+M^*(h)}{h}$ és így a (26) sor egyenletesen konvergens.

3. SEGÉDTÉTEL: *Jelölje* $M_k^*(t)(k=0,1,2,\ldots,m-1)$ *a* $(0,t)$ *időközben előforduló* $E_k\to E_{k+1}$ *átmenetek várható számát. Tetszőleges* $h>0$*-ra fennáll, hogy*

$$\lim_{t\to\infty}\frac{M_k^*(t+h)-M_k^*(t)}{h}=\frac{\mu m P_k}{m\alpha\mu+P_{m-1}}. \tag{27}$$

Az 1. SEGÉDTÉTEL az állítást $k=m-1$-re bizonyítja. A (27) baloldalán álló határérték létezését J. L. DOOB [3] és D. BLACKWELL [2] tétele biztosítja, ugyanis az egymást követő $E_k\to E_{k+1}$ átmenetek között eltelt időtartamok egyforma eloszlású független valószínűségi változók, amelyek eloszlása kielégíti az említett tételek feltételeit. Ha a (27) határérték létezik, úgy nyilvánvalóan megegyezik a

$$\lim_{t\to\infty}\frac{M_k^*(t)}{t}$$

határértékkel. Ezen utóbbi határérték pedig könnyen láthatóan P_k-szorosa a $\lim_{t\to\infty}\frac{M(t)}{t}$ határértéknek, amely utóbbi megegyezik (23)-mal.

Most rátérünk a 2. TÉTEL bizonyítására, vagyis a $\{P_k^*\}$ valószínűségeloszlás meghatározására. Tekintsük először a P_m^* valószínűséget. Egyszerűen felírható, hogy

$$\mathbf{P}\{\eta(t)=m\}=\int_0^t e^{-m\mu(t-x)}\,dM^*(x).$$

Ennek alapján (22) felhasználásával kimutatható, hogy $\lim_{t\to\infty}\mathbf{P}\{\eta(t)=m\}=P_m^*$ létezik és fennáll

$$P_m^*=\frac{P_{m-1}}{m\alpha\mu+P_{m-1}}=\frac{1}{1+m\alpha\mu\sum_{j=0}^{m-1}\binom{m-1}{j}\frac{1}{C_j}}. \tag{28}$$

Megjegyezzük, hogy ez az eredmény R. E. A. C. PALEY és N. WIENER [12] (p. 59.) tétele alapján is belátható, ugyanis a $\mathbf{P}\{\eta(t)=m\}$ valószínűségre, mint t függvényére felírható egy Volterra-féle integrálegyenlet és a megoldás aszimptotikus értékénének megállapítására alkalmazható az említett tétel.

Jelölje most $N_m(t)$ a $(0,t)$ időközben előforduló $E_m\to E_{m-1}$ átmenetek várható számát. Erre fennáll, hogy

$$\lim_{t\to\infty}N_m'(t)=m\mu P_m^*, \tag{29}$$

ugyanis nyilvánvalóan fennáll $N_m(t+\Delta t)=N_m(t)+\mathbf{P}\{\eta(t)=m\}\,m\mu\Delta t+o(\Delta t)$ és mint láttuk $\lim_{t\to\infty}\mathbf{P}\{\eta(t)=m\}=P_m^*$ létezik.

Most $k=0, 1, \ldots, m-1$-re felírható, hogy

$$(30) \qquad P_k^* = \frac{m\mu}{m\alpha\mu + P_{m-1}} \sum_{j=k}^{m-1} p_{jk}^* P_j,$$

ahol $j=0, 1, \ldots, m-2$-re

$$(31) \qquad p_{jk}^* = \binom{j+1}{k} \int_0^\infty e^{-k\mu x}(1-e^{-\mu x})^{j+1-k}[1-F(x)]\,dx$$

és

$$(32) \qquad p_{m-1,k}^* = p_{m-2,k}^*.$$

(30) fennállása a következőképpen indokolható: az $\eta(t)=k$ esemény több egymást kizáró módon jöhet létre, $t-x$ időpontban, (ahol $0<x<t$) történik egy $E_j \to E_{j+1}$ átmenet ($j=1, 2, \ldots, m-2$) és a $t-x$ időpontban kezdődő javítás x időtartamnál tovább tart és t időpontig leáll még $j+1-k$ gép, vagy $t-x$ időpontban történik egy $E_{m-1} \to E_m$ átmenet és az ezen időpontban kezdődő javítás x időtartamnál tovább tart és t időpontig leáll még $m-k-1$ gép. Felírva ilyen módon a $\mathbf{P}\{\eta(t)=k\}$ valószínűséget (27) és (29) felhasználásával nyerhető (30). Így a P_k^* valószínűségeket kifejeztük a $\{P_j\}$ valószínűségeloszlás segítségével. Látni fogjuk, hogy ez még egyszerűbben is megtehető.

Most bevezetjük a $\{P_k^*\}$ valószínűségeloszlás

$$(33) \qquad B_r^* = \sum_{k=r}^{m} \binom{k}{r} P_k^*$$

binomiális momentumait. (30) alapján (16)-hoz hasonlóan felírható, hogy

$$(34) \quad B_r^* = \frac{m\mu}{m\alpha\mu + P_{m-1}} \left[B_r + B_{r-1} - \binom{m-1}{r-1} B_{m-1}\right] \int_0^\infty e^{-r\mu x}[1-F(x)]\,dx.$$

Most, mivel

$$\int_0^\infty e^{-r\mu x}[1-F(x)]\,dx = \frac{1-\varepsilon_r}{r\mu},$$

(16) tekintetbevételével azt nyerjük, hogy $r=1, 2, \ldots, m-1$-re

$$B_r^* = \frac{m\mu}{m\alpha\mu + P_{m-1}} \frac{1-\varepsilon_r}{r\mu\varepsilon_r} B_r$$

és $B_0^* = 1$ valamint $B_m^* = P_m^*$ szerint

$$B_m^* = \frac{P_{m-1}}{m\alpha\mu + P_{m-1}}.$$

Így igazoltuk a (21) helyességét. (20) pedig minden további nélkül következik (21)-ből.

KOROLLÁRIUM. *A $\{P_k^*\}$ és $\{P_k\}$ valószínűségeloszlás a következő egyszerű kapcsolatban áll egymással*

(35) $$P_k^* = \frac{m P_{k-1}}{k[m\alpha\mu + P_{m-1}]} \qquad (k = 1, 2, \ldots, m)$$

és

(36) $$P_0^* = 1 - \frac{m}{m\alpha\mu + P_{m-1}} \sum_{k=1}^{m} \frac{P_{k-1}}{k}.$$

BIZONYÍTÁS: A (17) és (34) képlet segítségével felírható, hogy

$$B_r^* = \frac{m\mu}{m\alpha\mu + P_{m-1}} \left[B_{r-1} - \binom{m-1}{r-1} B_{m-1} \right] \qquad (r = 1, 2, \ldots, m-1),$$

míg $B_0^* = 1$ és $B_m^* = P_m^*$. Ennek figyelembevételével (20) alapján adódik $\{P_k^*\}$ fenti alakja.

MEGJEGYZÉS: A fenti eredmény könnyen belátható abból, hogy adott idő alatt előforduló $E_{k-1} \to E_k$ és $E_k \to E_{k-1}$ átmenetek száma legfeljebb 1-gyel különbözhet egymástól. Ugyanez érvényes természetesen a várható értékekre is. Ha $N_k(t)$ jelöli a $(0, t)$ időközben előforduló $E_k \to E_{k-1}$ átmenetek várható számát, akkor felírható, hogy $|M_{k-1}^*(t) - N_k(t)| \leqq 1$.

(27) szerint fennáll

(37) $$\lim_{t\to\infty} \frac{M_{k-1}^*(t)}{t} = \frac{m\mu P_{k-1}}{m\alpha\mu + P_{m-1}}.$$

$N_k(t)$-re felírható, hogy

$$N_k(t + \Delta t) = N_k(t) + \mathbf{P}\{\eta(t) = k\} k\mu \Delta t + o(\Delta t)$$

azaz

$$\frac{dN_k(t)}{dt} = k\mu \mathbf{P}\{\eta(t) = k\}$$

és így

(38) $$\lim_{t\to\infty} \frac{dN_k(t)}{dt} = k\mu P_k^*$$

vagy még inkább

(39) $$\lim_{t\to\infty} \frac{N_k(t)}{t} = k\mu P_k^*.$$

(37) és (39) megegyezéséből következik (35).

3. §. A stacionárius folyamat

Mindenekelőtt a $\chi(t)$ valószínűségi változó határeloszlását vizsgáljuk meg, Erre vonatkozóan a következő tételt bizonyítjuk be.

3. TÉTEL. *Jelölje $\chi(t)$ valószínűségi változó a t időpontban (esetleg) folyamatban lévő javításnak a befejezéséig eltelt időtartamát. Ha α véges, akkor léteznek a következő határeloszlások*

(40) $$\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\{\chi(t) \leqq x \mid \eta(t)=k\} = F_k^*(x), \qquad (k=0,1,\ldots,m-1),$$

ahol $k=1,2,\ldots,m-2$ esetén

$$F_k^*(x) = \frac{k\mu}{P_{k-1}} \sum_{j=k}^{m-1} \binom{j+1}{k} P_j \int_0^\infty e^{-k\mu y}(1-e^{-\mu y})^{j+1-k}[F(y+x)-F(y)]\,dy.$$

és

$$F_{m-1}^*(x) = \frac{(m-1)\mu P_{m-1}}{P_{m-2}} \int_0^\infty e^{-(m-1)\mu y}\,[F(y+x)-F(y)]\,dy.$$

BIZONYÍTÁS: Nyilvánvalóan felírható, hogy

$$\mathbf{P}\{\chi(t) \leqq x, \eta(t)=k\} = \begin{cases} \sum_{j=k}^{m-1} \binom{j+1}{k} \int_0^t e^{-k\mu(t-u)}(1-e^{-\mu(t-u)})^{j+1-k}[F(t-u+x)- \\ \qquad -F(t-u)]\,dM_j^*(u), \quad \text{ha } k=0,1,\ldots,m-2, \\ \int_0^t e^{-(m-1)\mu(t-u)}[F(t-u+x)-F(t-u)]\,dN_m(u), \\ \qquad\qquad \text{ha } k=m-1. \end{cases}$$

Ugyanis a szóban forgó esemény úgy jöhet létre, hogy u időpontban (ahol $0 \leqq u \leqq t$) vagy $E_j \to E_{j+1}$ átmenet jön létre (ha $k=0,1,\ldots,m-2$) vagy $E_m \to E_{m-1}$ átmenet (ha $k=m-1$) és az ebben a pillanatban kezdődő javítás $(t, t+x)$ időközben fejeződik be és (u, t) időközben leáll $j+1-k$ gép illetve nem áll le újabb gép. Most (27) és (38) tekintetbevételével meghatározhatjuk a $\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\{\chi(t) \leqq x, \eta(t)=k\}$ határértéket. Mivel $\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\{\eta(t)=k\} = P_k^*$, tehát (40) a következőképpen adódik:

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\{\chi(t) \leqq x \mid \eta(t)=k\} = \lim_{t\to\infty} \frac{\mathbf{P}\{\chi(t) \leqq x, \eta(t)=k\}}{\mathbf{P}\{\eta(t)=k\}}.$$

MEGJEGYZÉS: A fentiek alapján könnyen nyerhető, hogy

(41) $$\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\{\chi(t) \leqq x \mid \eta(t) < m\} = F^*(x),$$

ahol

$$F^*(x) = \frac{1}{\alpha} \int_0^x [1-F(y)]\,dy.$$

A stacionárius folyamat. Ha feltesszük, hogy az előző fejezetekben vizsgált folyamat kezdeti eloszlását $\mathbf{P}\{\eta(0)=k\}=P_k^*$ és $\mathbf{P}\{\chi(0)\leqq x\,|\,\eta(0)=k\}=F_k^*(x)$ $(k=0,1,\ldots,m-1)$ valószínűségek határozzák meg, akkor érvényes lesz, hogy az $\{\eta(t),\chi(t)\}$ változópár eloszlása minden időpontban megegyezik a kezdeti eloszlással, továbbá fennáll, hogy a $(0,t)$ időközben előforduló $E_k\to E_{k+1}$ átmenetek várható száma

$$M_k^*(t)=\frac{m\mu P_k}{m\alpha\mu+P_{m-1}}t \tag{42}$$

és a $(0,t)$ időközben előforduló $E_k\to E_{k-1}$ átmenetek várható száma

$$N_k^*(t)=\frac{m\mu P_{k-1}}{m\alpha\mu+P_{m-1}}t. \tag{43}$$

A fenti tulajdonságokkal rendelkező $\{\eta(t),\chi(t)\}$ folyamatot *stacionárius folyamat*nak nevezzük. A legtöbb gyakorlati alkalmazásnál a stacionárius folyamat játszik fontos szerepet, azaz olyan folyamat, amelynél a kezdeti eloszlás hatása már kiküszöbölődik és időben változatlan törvények lesznek érvényben. Most néhány tételt bizonyítunk be a stacionárius folyamatra nézve.

4. TÉTEL. *Az össztermelés várható időtartama* $(0, T)$ *időközben stacionárius folyamat esetén*

$$\mathbf{M}\left\{\int_0^T\eta(t)\,dt\right\}=T\frac{m\sum\limits_{j=1}^{m-1}\binom{m-1}{j}\frac{1}{C_j}}{1+m\alpha\mu\sum\limits_{j=,}^{m-1}\binom{m-1}{j}\frac{1}{C_j}}. \tag{44}$$

BIZONYÍTÁS: Esetünkben fennáll, hogy

$$\mathbf{M}\left\{\int_0^T\eta(t)\,dt\right\}=\int_0^T\mathbf{M}\{\eta(t)\}\,dt$$

és $\mathbf{M}\{\eta(t)\}=B_1^*$, ahol B_1^*-ot (21) szolgáltatja.

Ezután definiáljuk a $\xi(t)$ valószínűségi változót a következőképpen

$$\xi(t)=\begin{cases}1, & \text{ha} \quad \eta(t)<m\\ 0, & \text{ha} \quad \eta(t)=m.\end{cases}$$

5. TÉTEL. *Stacionárius folyamat esetén a kezelő* $(0, T)$ *időközben javítással töltött idejének várható értéke*

$$\mathbf{M}\left\{\int_0^T\xi(t)\,dt\right\}=T\frac{m\alpha\mu\sum\limits_{j=0}^{m-1}\binom{m-1}{j}\frac{1}{C_j}}{1+m\alpha\mu\sum\limits_{j=0}^{m-1}\binom{m-1}{j}\frac{1}{C_j}}. \tag{45}$$

BIZONYÍTÁS: Fennáll, hogy

$$\mathbf{M}\left\{\int_0^T \xi(t)dt\right\} = \int_0^T \mathbf{M}\{\xi(t)\}dt$$

és $\mathbf{M}\{\xi(t)\} = \mathbf{P}\{\xi(t)=1\} = \mathbf{P}\{\eta(t)<m\} = 1-P_m^*$, ahol P_m^*-t (28) szolgáltatja.

6. TÉTEL. *Jelölje stacionárius folyamat esetén egy leálló gép várakozási idejének eloszlásfüggvényét $G_m(x)$ és várható értékét Γ_m. Ezekre fennáll, hogy*

$$G_m(x) = \sum_{k=1}^{m-1} P_{k-1} F_{k-1}^*(x) * F_{m-k-1}(x) + P_{m-1} F_0(x), \tag{46}$$

ahol $F_n(x)$ jelöli az $F(x)$ eloszlásfüggvénynek önmagával való n-szeres konvolucióját ($F_0(x)=1$, ha $x \geqq 0$ és $F_0(x)=0$, ha $x<0$) és ha $\sigma<\infty$, akkor

$$\Gamma_m = (m-1)\alpha + \left[1 - \frac{1}{\sum_{j=0}^{m-1}\binom{m-1}{j}\frac{1}{C_j}}\right]\left[\frac{\sigma^2+\alpha^2}{2\alpha} - \frac{\alpha}{1-\varepsilon_1}\right]. \tag{47}$$

BIZONYÍTÁS: Annak a valószínűsége, hogy stacionárius folyamatnál egy gépleállás éppen $E_k \to E_{k-1}$ átmenet legyen

$$\frac{kP_k^*}{\sum_{k=0}^{m} kP_k^*} = \frac{kP_k^*}{B_1^*} = P_{k-1}.$$

Ha egy adott időpontban $E_k \to E_{k-1}$ átmenet történik és $k=m$ úgy nincs várakozási idő, míg ha $k=1,2,\ldots,m-1$, úgy a várakozási idő összetevődik az éppen folyó javítás befejezéséig tartó időből ($F_{k-1}^*(x)$ az eloszlásfüggvénye) és a korábban leállt $m-k-1$ gép javításának időtartamából ($F_{m-k-1}(x)$ az eloszlásfüggvénye). Ennek figyelembevételével adódik (46).

Ha tekintetbe vesszük, hogy $\eta(t)<m$ feltétel mellett a t időpontban folyamatban lévő javítás befejezéséig eltelt időtartam eloszlásfüggvénye $F^*(x)$ és

$$\int_0^\infty x\,dF^*(x) = \frac{\sigma^2+\alpha^2}{2\alpha}$$

akkor a Γ_m várható értékre könnyen adódik, hogy

$$\Gamma_m = \sum_{k=1}^{m-1} P_{k-1}\left[\frac{\sigma^2+\alpha^2}{2\alpha} + (m-k-1)\alpha\right].$$

Innen B_1 (6) és P_{m-1} (5) alakjának figyelembevételével az adódik, hogy

$$\Gamma_m = (m-1)\alpha + (1-P_{m-1})\left[\frac{\sigma^2+\alpha^2}{2\alpha} - \frac{\alpha}{1-\varepsilon_1}\right], \tag{48}$$

amely megegyezik (47)-tel.

1. MEGJEGYZÉS. Tárgyalásunk során egyedül $G_m(x)$ meghatározásánál használtuk fel azt a feltételt, hogy a kezelő a javításokat a leállások sorrendjében végzi el. A többi eredmény Γ_m értékét is beleértve, független attól, hogy a gépek javítása milyen sorrendben történik.

2. MEGJEGYZÉS. A. J. HINCSIN [6] munkájában közölt gondolatmenetét követve azt nyertük volna eredményül, hogy a várakozási idő várható értéke

$$\Gamma'_m = (m-1)\alpha - \frac{1}{\mu}(1-P_{m-1}), \tag{49}$$

amely például független a javítási idő szórásától. Erre HINCSIN a következő meggondolással jut: Stacionárius esetben a gépleállások időegységre eső várható száma a (40) képlet szerint $1-P_m^*$. Tehát egy gép leállásainak várható száma $\frac{1-P_m^*}{m}$ és minden egyes leállást várakozási idő javítási idő és működési idő követ, rendre $\Gamma'_m, \alpha, 1/\mu$ várható értékkel, tehát

$$\frac{1-P_m^*}{m}\left[\Gamma'_m+\alpha+\frac{1}{\mu}\right]=1$$

és innen adódik (49). Ez Γ_m-mel csak abban a speciális esetben egyezik meg, ha $F(x)$ exponenciális eloszlást követ. HINCSIN itt lényegében véletlen számú valószínűségi változó összegének várható értékére vonatkozó ismert A. WALD-féle képletet alkalmazza, ámbár jelenleg nem teljesülnek az ehhez szükséges feltételek (vö. A. N. KOLMOGOROV és J. V. PROCHOROV [9]).

3. MEGJEGYZÉS. Abban az esetben, ha $m\to\infty$ és $\mu=\lambda\, m$, ahol λ pozitív állandó, fennáll $\lambda\alpha<1$ esetben, hogy

$$P_{m-1}=(1-\lambda\alpha)-\frac{\lambda\alpha}{m(1-\lambda\alpha)}\left[\frac{\lambda(\alpha^2-\sigma^2)}{2\alpha}-1\right]+o\left(\frac{1}{m}\right).$$

P_{m-1} fenti alakjának tekintetbevételével az adódik, hogy

$$\lim_{m\to\infty}\Gamma_m=\lim_{m\to\infty}\Gamma'_m=\frac{\lambda\alpha}{1-\lambda\alpha}\,\frac{\sigma^2+\alpha^2}{2\alpha}, \tag{50}$$

amely határérték megegyezik A. J. HINCSIN [7] ismert eredményével.

Magyar Tudományos Akadémia
Matematikai Kutató Intézete

IRODALOM

[1] H. Ashcroft: The productivity of several machines under the care of one operator *Journal of the Royal Statistical Society*, Ser. B. **12** (1950) 145—151.

[2] D. Blackwell: A renewal theorem *Duke Mathematical Journal*, **15** (1948) 145—150.

[3] J. L. Doob: Renewal theory from the point of view of the theory of probability *Transactions of the American Mathematical Society* **63** (1948) 422—438.

[4] W. Feller: An introduction to probability theory and its applications (New-York, 1950).

[5] Th. Fry: Probability and its engineering uses (New-York, 1928).

[6] А. Я. Хинчин: О среднем времени простоя станков [Математический Сборник **40** (1933) 119—123].

[7] А. Я. Хинчин: Математическая Теориа стационарной очереди [Математический Сборник **39** (1932) 73—84].

[8] Ch. Jordan: Calculus of finite differences (Budapest, 1939).

[9] А. Н. Колмогоров и Ю. В. Прохоров: О суммах случайного числа случайных слагаемых [Успехи Математических Наук **4** в. 4 (1949) 168—172].

[10] R. Kronig: On time losses in machinery undergoing interruption, I. Physica, **10** (1943) 215—224.

[11] R. Kronig—H. Mondria: On time losses in machinery undergoing interruption, II. (Physica **10** (1943) 331—336.

[12] R. E. A. C. Paley—N. Wiener: Fourier-transforms in the complex domain (New-York, 1934).

[13] C. Palm: The distribution of repairman in servicing automatic machines, *Industritidningen Norden* **75** (1947) 75—80, 90—94, 119—123.

[14] Takács L.: Gépegyüttállások valószínűségszámítási tárgyalása tekintettel a várakozási időkre. *Magyar Tudományos Akadémia III. Osztályának közleményei* **1** (1951) 228—234.

(Beérkezett: 1956. XII. 22.)