

NEMSZIMMETRIKUS KÖZÉPÉRTÉKEK

HOSSZÚ MIKLÓS (Miskolc)

1. §. Bevezetés

Az x, y (valós) mennyiségek (kváziaritmetikai) középértékének nevezzük azt az

$$(1) \quad M(x, y) = \varphi \left[\frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{2} f(y) \right], \quad f(M) = \frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{2} f(y)$$

alakban felírható $M(x, y)$ kétváltozós (valós) függvényt, ahol $t \leftrightarrow f(t)$ kölcsönösen egyértelmű leképezés és $t \leftrightarrow \varphi(t)$ ennek az inverze. A rövidség kedvéért az (1) alatti kapcsolat fennállására (a szokástól eltérően, de a félreértés veszélye nélkül) használhatjuk azt a kifejezést, hogy M izomorf a számtani középpel. $M(x, y)$ nyilván szimmetrikus:

$$M(x, y) = M(y, x).$$

Nemszimmetrikus (kvázilineáris) középértéknek nevezzük a súlyozott számtani középpel izomorf $m(x, y)$ középértékeket:

$$(2) \quad m(x, y) = \varphi[pf(x) + qf(y)], \quad f(m) = pf(x) + qf(y), \quad p + q = 1.$$

A szimmetrikus, folytonos $M(x, y)$ középértékek jellemző tulajdonságainak megállapítása (a középértékek elméletének axiomatikus megalapozása) után felmerült a megfelelő kérdés a nemszimmetrikus középértékekre vonatkozóan is.¹ ACZÉL JÁNOS [2] a folytonos intern $m(x, y) = x \cdot y$ ($p, q > 0$) kvázilineáris középértékeket a következő tulajdonságokkal tudta jellemezni:

$$(3) \quad (x \cdot y) \cdot (u \cdot v) = (x \cdot u) \cdot (y \cdot v) \quad (\text{biszimmetria});$$

$$(4) \quad x \cdot x = x \quad (\text{reflexivitás, vagy idempotencia});$$

$$(5) \quad x \cdot u > y \cdot u \text{ és } u \cdot x > u \cdot y, \text{ ha } x > y \quad (\text{szigorú monoton növekedés}).$$

Hasonló tulajdonságok jellemzik a több változóra értelmezett középértékeket is. ACZÉL eredményét FUCHS LÁSZLÓ [3] kiterjesztette rendezett algebrai rendszerekre és extern ($p, q > 0$) közepekre is, (5)-öt az enyhébb

$$(5') \quad x \cdot u \neq y \cdot u \text{ és } u \cdot x \neq u \cdot y, \text{ ha } x \neq y \quad (\text{leoszthatóság})$$

¹ A középértékek elméletéről részletesebb tájékoztatást nyújt az [1] alatti cikk. A szögletes zárójelben lévő számok a dolgozat végén található irodalomjegyzékre utalnak.

követelménnyel helyettesítve. ACZÉL JÁNOSnak [1] sikerült a (3) és (4) helyett a (6)

$$(x \cdot y) \cdot z = (x \cdot z) \cdot (y \cdot z) \quad (\text{jobboldali autodisztributivitás})$$

tulajdonsággal is jellemeznie a kétszer differenciálható kvázilineáris közepeket. Minthogy a szimmetrikus esetben C. RYLL-NARDZEWSKI [7] (illetve B. KNASTER [5] a (3)-ra való visszavezetéssel) már tudta használni (6)-ot a folytonos kváziaritmetikai közepek jellemzésére, ezért ACZÉL JÁNOS [1] (P. 145.) felvetette a problémát, hogy megtartva (6)-ot, más módszerekkel lehetne-e enyhíteni a kétszeres differenciálhatóság követelményét, azaz kimondta azt a sejtést, hogy az autodisztributivítás (6) függvényegyenletének folytonos és leosztható megoldása sem lehet általánosabb mint (2).

Egy előző [4] dolgozatomban kétoldali autodisztributivitás, tehát (6) mellett a

$$(7) \quad z \cdot (x \cdot y) = (z \cdot x) \cdot (z \cdot y) \quad (\text{baloldali autodisztributivitás})$$

egyenlet fennállását is megkövetelve, a kétszeres differenciálhatóság követelményét enyhítettem egyszeres differenciálhatóságig, e dolgozatban pedig, a 3. §-ban látni fogjuk, hogy akkor csupán a folytonosság is elég.

Előzőleg azonban a 2. §-ban néhány algebrai érvényű tételt fogunk bebizonyítani, melyek egész általános feltételek mellett lehetővé teszik az autodisztributív művelettel bíró struktúrák vizsgálatának visszavezetését csoportok vizsgálatára, és következményként a két különböző oldali autodisztributív törvény: (6) és (7) függetlenségét mutatják, még csoportokra visszavezethető autodisztributív struktúrák esetén is. Itt látni fogjuk az autodisztributív művelettel bíró kvázicsoportok és az Abel-féle kvázicsoportok [6] (illetve csoportok) közötti összefüggést is.

2. §. Csoportok autodisztributív izotópjai

Valamely $G = a, b, \dots$ csoport (általában struktúra) izotópjának nevezzük azt az $A = x, y, \dots$ halmazt, melyen értelmezve van egy $x \cdot y$ művelet $(x, y, x \cdot y \in A)$, amely az ab csoportművelettel a következő kapcsolatban áll:

$$(8) \quad h(x \cdot y) = (fx)(gy), \quad \chi(ab) = (\varphi a) \cdot (\psi b),$$

ahol $\xi \leftrightarrow f\xi, g\xi, h\xi$ az A halmaznak (kvázicsoportnak) a G csoportra való kölcsönösen egyértelmű leképezései, illetve φ, ψ, χ ezek inverz leképezései:

$$(9) \quad f\varphi a = g\psi a = h\chi a = a, \quad f\chi e = e \quad (a \in G),$$

ahol e a G egységeleme.

Az A struktúrát jobbról autodisztributív rendszernek nevezzük, ha fennáll (6), s megfelelően baloldali autodisztributív rendszerről beszélünk, ha (7) érvényes.

1. TÉTEL. Ahhoz, hogy a G csoport (8), (9)-cel értelmezett A izotópja jobbról autodisztributív rendszer legyen, szükséges és elegendő, hogy $x \cdot y$ idempotens legyen:

$$(10) \quad x \cdot x = x, \quad hx = (fx)(gx),$$

továbbá $\omega = f\chi$ a G -nek olyan automorfizmusa legyen, melynek a G egység-elemén e -n kívül nincs több fixpontja:

$$(11) \quad \omega(ab) = \omega a \omega b, \quad \omega = f\chi,$$

$$(12) \quad \omega a \neq a, \quad \text{ha} \quad a \neq e,$$

és $\sigma a = (\omega a)^{-1}a$ kimerítse G -t: $\sigma G = G$.

Dualizálással hasonló tétel érvényes baloldali autodisztributív rendszerekre

2. TÉTEL. Ahhoz, hogy egy G csoportnak legyen kétoldalról autodisztributív izotópja, a (11), (12) és $\sigma G = G$ fennállása mellett szükséges és elegendő, hogy G Abel-féle legyen.

3. TÉTEL. Ahhoz, hogy egy kétoldalról autodisztributív A kvázicsoportnak a (8), (9) alatt értelmezett G izotópja csoport legyen, szükséges és elegendő, hogy létezzék legalább egy $u \in A$ elem, amellyel fennáll:

$$(3) \quad (x \cdot y) \cdot (u \cdot v) = (x \cdot u) \cdot (y \cdot v)$$

bármely $x, y, v \in A$ esetén. Ekkor érvényesek a

$$(13) \quad \chi a = (\varphi a) \cdot u = u \cdot \psi a \quad (a \in G)$$

összefüggések, és a 2. tétel szerint szükségképpen kommutatív G egységeleme:

$$(14) \quad e = hu = fu = gu.$$

BIZONYÍTÁS.

1. Az általánosság sérelme nélkül feltehető, hogy (8) és (9)₁-gyel együtt

$$(9_2) \quad f\chi e = e$$

is mindig teljesül. Ugyanis ellenkező esetben, ha

$$f\chi e = c \neq e,$$

akkor

$$(8) \quad h(x \cdot y) = fx \, gy = [(fx)c^{-1}](cgy) = f_1x \, g_1y$$

alapján vehető f_1 és g_1 az f és g helyett, s ekkor már teljesül

$$f_1\chi e = (f\chi e)c^{-1} = c \, c^{-1} = e.$$

Minthogy a G csoport bármely izotópja kvázicsoport, hiszen (8) folytán az

$$x \cdot y = \chi(fxgy) = z \quad (x, y, z \in A)$$

egyenlet mind x , mind y -ra egyértelműen megoldható, azért (10) nyilvánvaló (6) alapján, ha ott $z = y = x$ -et helyettesítünk:

$$(x \cdot x) \cdot x = (x \cdot x) \cdot (x \cdot x);$$

s ebből a leoszthatóság miatt már következik (10).

Tegyük fel, hogy az ab csoportművelettel a (8) egyenlet alapján összefüggő $x \cdot y$ jobbról autodistributív. Minthogy ekkor fennáll

$$h[(x \cdot y) \cdot z] = h[(x \cdot z) \cdot (y \cdot z)],$$

ezért

$$\begin{aligned} f(x \cdot y)gz &= f(x \cdot z)g(y \cdot z), \\ f\chi(fxgy)gz &= [f\chi(fxgz)][g\chi(fygz)], \end{aligned}$$

azaz bevezetve az

$$(15) \quad \omega = f\chi, \quad g\chi f\psi = \pi$$

jelölést, és

$$x = qa, \quad y = pb, \quad z = pe$$

-t helyettesítve,

$$\omega(ab) = \omega a \pi b$$

is fennáll. Ha itt $a = e$, akkor (15) és (9₂) szerint

$$\omega b = \omega e \pi b = \pi b,$$

tehát valóban érvényes (11).

(12) teljesülését (10) alapján tudjuk belátni. Ugyanis (10) szerint

$$gx = (fx)^{-1}(hx),$$

melyből az $f\chi = \omega$, vagyis az $f = \omega h$ összefüggés felhasználásával

$$gx = (\omega hx)^{-1}hx$$

következik. Minthogy $a \leftrightarrow g\chi a = \sigma a$ kölcsönösen egyértelmű leképezés, ezért

$$\sigma G = G$$

és

$$(\omega a)^{-1}a \neq (\omega b)^{-1}b, \quad \text{ha} \quad a \neq b.$$

(15) és (9₂) alapján azonban G egységeleme: e az $a \leftrightarrow \omega a$ automorfizmusnak fixpontja, továbbá az előzőek szerint

$$\omega(ab^{-1}) \neq ab^{-1}, \quad \text{ha} \quad a \neq b,$$

azaz $c = ab^{-1}$ -gyel

$$\omega c \neq c, \quad \text{ha} \quad c \neq e,$$

azért az $a \leftrightarrow \omega a$ automorfizmus egyetlen fixpontja e .

Végül meg kell győződnünk, hogy az 1. tétel feltételei valóban elégségesek is. E végből tekintsük

$$x \cdot y = \chi(fxgy)$$

-t, ahol $\omega = f\chi$ G -nek valamelyik egyetlen fixponttal bíró automorfizmusa, $a \leftrightarrow \chi a$ tetszőleges, míg

$$fx = \omega hx, \quad gx = (\omega hx)^{-1}hx = \sigma hx$$

így már egyértelműen meghatározott, kölcsönösen egyértelmű leképezést létesítő

függvények, hacsak $\sigma G = G$. Ha $\sigma G = G$ nem teljesül, akkor $x \leftrightarrow gx$ képtartománya G -nek csak egy része, tehát $x \cdot y$ leosztható ugyan, de nem invertálható y -ra nézve.

A jobboldali autodisztributivitás teljesülése tehát (a (6) alatti egyenlet mindkét oldalára a h leképezést alkalmazva) az

$$f(x \cdot y)gz = f(x \cdot z)g(y \cdot z),$$

vagyis az

$$f\chi(fxgy)gz = f\chi(fxgz)g\chi(fygz),$$

más jelöléssel az

$$\omega(agy)b = \omega(ab)g\chi[(fy)b]$$

egyenlet fennállásával egyenértékű. Minthogy azonban ω G -nek automorfizmusa, és

$$gx = (\omega hx)^{-1}(hx), \quad g\chi a = (\omega a)^{-1}a,$$

ezért csupán

$$(\omega a)\omega[(\omega hy)^{-1}hy]b = (\omega a)(\omega b)\{\omega[(fy)b]\}^{-1}(fy)b,$$

azaz

$$[\omega(\omega hy)]^{-1}\omega hy = (\omega b)(\omega b)^{-1}(\omega fy)^{-1}fy$$

fennállását kell igazolni; ez viszont az $\omega = f\chi$, vagyis az $f = \omega h$ összefüggés felhasználásával már rögtön adódik:

$$(\omega fy)^{-1}fy = (\omega fy)^{-1}fy,$$

s ez teljessé teszi az 1. tétel bizonyítását.

2. Az 1. tétel alapján A akkor és csak akkor jobbról autodisztributív rendszer, ha fennáll (10)—(12) és $\sigma G = G$. Teljesen hasonló módon a baloldali autodisztributivitáshoz szükséges és elegendő (10), továbbá

$$(11') \quad \sigma(ab) = \sigma a \sigma b, \quad \sigma = g\chi,$$

$$(12') \quad \sigma a \neq a, \quad \text{ha} \quad a \neq e$$

és $\omega G = G$. Kimutatjuk, hogy ez egyenértékű azzal, hogy a G Abel-féle. (10) teljesülése mindig elérhető

$$gx = (fx)^{-1}hx$$

-szel. Minthogy (10) alapján érvényes

$$(16) \quad \sigma a = g\chi a = (f\chi a)^{-1}a = (\omega a)^{-1}a,$$

ezért (12') teljesül, hiszen

$$\sigma a = (\omega a)^{-1}a \neq a, \quad \text{ha} \quad a \neq e,$$

azaz

$$\omega a \neq e, \quad \text{ha} \quad a \neq e.$$

Írjuk át (11')-t is (16)-nak megfelelően:

$$(\omega ab)^{-1}ab = (\omega a)^{-1}a(\omega b)^{-1}b.$$

Így az $(\omega b)^{-1} = d$ jelöléssel, egyszerű számolás után a (11')-vel egyenértékű

$$d(\omega a)^{-1}a = (\omega a)^{-1}ad,$$

azaz (16)-ot is figyelembe véve a

$$(\sigma a)d = d\sigma a \quad (a, d \in G)$$

egyenletet nyerjük. Minthogy végül az

$$a \leftrightarrow \sigma a = g\chi a$$

leképezés invertálható, $c = \sigma a$ -val azt kaptuk, hogy (10)–(12) teljesülése esetén (11') egyenértékű

$$cd = dc \quad (c, d \in G)$$

-vel, vagyis azzal, hogy G Abel-féle.

Még csak azt kell megmutatni, hogyha (az általánosság sérelme nélkül)

$$(9_2) \quad f\chi e = e$$

teljesül, akkor egyszersmind

$$\sigma e = g\chi e = e$$

is fennáll. Tekintsük ugyanis (10) alapján

$$g\chi a = (f\chi a)^{-1}a$$

-t és helyettesítsünk itt $a = e$ -t, akkor valóban látjuk, hogy érvényes

$$g\chi e = (\omega e)^{-1}e = e,$$

s ezzel a 2. tétel bizonyítása teljes.

3. Tekintsük a kétoldalról autodisztributív A kvázicsoport G izotópját, ahol az izotópzizmus a

$$(8_2) \quad \chi(ab) = \varphi a \cdot \psi b \quad (a, b \in G; \chi a, \varphi a, \psi a \in A)$$

összefüggés alapján áll fenn. Nyilván G is kvázicsoport, vagyis az

$$ab = c$$

egyenlet egyértelműen megoldható mind a , mind b -re vonatkozólag. Ahhoz, hogy G csoport legyen, a következőknek kell még teljesülni:

$$(17) \quad ae = ea = a \quad (a \in G),$$

$$(18) \quad (ab)c = a(bc) \quad (a, b, c \in G).$$

Mint az előzőkben, itt is vehetjük az általánosság sérelme nélkül

$$f\chi e = g\chi e = e$$

-t, azaz a (14)-gyel egyenértékű

$$(19) \quad \chi e = \varphi e = \psi e = u$$

-t, ugyanis ha ez nem teljesülne, akkor lehetne φ, ψ, χ helyett más leképezé-

seket venni, melyek A -hoz ugyanazon G izotópot rendelik, és teljesítik (19)-et is. Ezt nem is fogjuk részletezni, hanem rögtön áttérünk a (17)–(18) egyenletek olyan átírására, mely az $x \cdot y$ műveletre vonatkozó kritériumot tartalmaz. Az átalakítások során a (8_2) alatti értelmezésen és (19)-en kívül csak azt használjuk fel, hogy $x \cdot y$ kétoldalról autodisztributív kvázicsoportot alkotó művelet, következésképp idempotens, s ezért érvényes rá speciálisan

$$(20) \quad (x \cdot y) \cdot x = x \cdot (y \cdot x)$$

is. Ezt szem előtt tartva, rögtön látjuk, hogy (17) egyenértékű

$$(13) \quad \chi a = (\varphi a) \cdot u = u \cdot \psi a$$

-val. Vizsgáljuk ezután a (18)-ból egyszerű átalakításokkal nyert, vele egyenértékű

$$\varphi(ab) \cdot \psi c = (\varphi a) \cdot \psi(bc)$$

egyenletet, és „szorozzuk meg“ az egyenlet mindkét oldalát jobbról és balról u -val. Így az autodisztributivitás és (8_2) , (20), (13) figyelembevételével az

$$\begin{aligned} u \cdot \{[\varphi(ab)] \cdot u\} \cdot [(\psi c) \cdot u] &= \{(u \cdot \varphi a) \cdot [u \cdot \psi(bc)]\} \cdot u, \\ u \cdot \{[\chi(ab)] \cdot [(\psi c) \cdot u]\} &= [(u \cdot \varphi a) \cdot \chi(bc)] \cdot u, \\ u \cdot \{[(\varphi a) \cdot (\psi b)] \cdot [(\psi c) \cdot u]\} &= \{(u \cdot \varphi a) \cdot [(\varphi b) \cdot (\psi c)]\} \cdot u, \\ [(u \cdot \varphi a) \cdot (u \cdot \psi b)] \cdot \{[u \cdot (\psi c)] \cdot u\} &= \{u \cdot [(\varphi a) \cdot u]\} \cdot \{[(\varphi b) \cdot u] \cdot [(\psi c) \cdot u]\}, \\ [(u \cdot \varphi a) \cdot \chi b] \cdot \{u \cdot [(\psi c) \cdot u]\} &= [(u \cdot \varphi a) \cdot u] \cdot \{(\chi b) \cdot [(\psi c) \cdot u]\}, \end{aligned}$$

s végül más jelölésekkel az

$$(x \cdot y) \cdot (u \cdot r) = (x \cdot u) \cdot (y \cdot r)$$

egyenletet nyerjük, tetszőleges $x, y, r \in A$ esetén.

Megjegyzések

1. Az 1. tétel bizonyításában ez már szóba került, de még egyszer lerögzítjük, hogyan lehet egy G csoport összes jobbról autodisztributív izotópjait megadni. Tekintjük mindazon ω automorfizmusokat, melyeknek egyetlen fixpontja e , és melyeknél $\sigma a = (\omega a)^{-1} a$ -ra teljesül $\sigma G = G$; ω -t felbontva tetszőleges módon az f, χ leképezések szorzatára, az $f, h = \chi^{-1}$, továbbá a (10) alapján nyert $gx = (fx)^{-1}hx$ leképezések szolgáltatják az összes kívánt A izotópokat.

2. Az 1–2. tételek felhasználásával egyszerű példát szerkeszthetünk csupán egyik oldalról autodisztributív műveletre, melynek még további kedvező tulajdonsága is lehet (pl. leoszthatóság). Ehhez csupán egy olyan nemkommutatív csoportot kell megadni, melynek van olyan automorfizmusa, amely csak az egységelemet hagyja változatlanul. Ilyen csoport a következő²:

² A közölt példa ERDŐS JENŐTŐL ered, érte e helyen is köszönetet mondok.

Legyen G másodrangú szabad csoport, melynek elemei egy és csak egyféle módon írhatók fel redukált alakban két szabad generátor: a és b

$$a^{n_1} b^{m_1} a^{n_2} b^{m_2} \dots a^{n_k} b^{m_k} \quad (n_i, m_i = \pm 1, \pm 2, \dots; k = 1, 2, \dots)$$

alakú hatványszorzataiként, miközben az egységelem:

$$e = a^0 = b^0,$$

s megállapodunk abban, hogy n_i és m_k lehet 0 is.

G nyilván nem kommutatív, mert pl. $ab \neq ba$ a redukált felírás egyértelműsége miatt, továbbá

$$\omega(a^{n_1} b^{m_1} a^{n_2} b^{m_2} \dots) = a^{-n_1} b^{-m_1} \dots, \quad \omega e = e$$

olyan automorfizmus, mely csupán az egységelemet hagyja változatlanul.³

3. A 3. tétel azt mutatja, hogy az autodisztributivitás függvényegyenletének megoldását a biszimmetria függvényegyenletére való visszavezetés útján is megkaphatjuk, feltéve, hogy kvázicsoport tulajdonságokat is megkövetelünk. A következő §-ban ezt a visszavezetést fogjuk látni, sőt annyival általánosabban, hogy az $x \cdot y = z$ egyenlet megoldhatósága helyett is csak a kétoldali leoszthatóságot kívánjuk meg.

³ A példa nem bizonyítja a két különböző oldali autodisztributív törvény függetlenségét folytonos vagy kvázicsoportot alkotó művelet esetén (mert itt $\sigma G \neq G$).

Egy egyszerű példa csupán jobboldalról autodisztributív, leosztható (következőleg nem biszimmetrikus) műveletre

$$x \cdot y = (\omega x) (\omega y)^{-1} y \quad (x, y \in G),$$

ahol éppen $hx = \chi x = x$ -et választottuk, míg $fx = \omega x$ a G -nek olyan automorfizmusa, mely az egységelem kivételével egy elemet sem hagy változatlanul, pl. speciálisan az a, b elemek által generált szabad csoporton

$$\omega(a^{n_1} b^{m_1} \dots) = a^{-n_1} b^{-m_1} \dots$$

Valóban, így

$$(x \cdot y) \cdot z = \omega[(\omega x) (\omega y)^{-1} y] (\omega z)^{-1} z$$

és

$$(x \cdot z) \cdot (y \cdot z) = \omega[(\omega x) (\omega z)^{-1} z] \omega[(\omega y) (\omega z)^{-1} z]^{-1} (\omega y) (\omega z)^{-1} z$$

azonosak, míg pl.

$$(ab) \cdot (a \cdot b) = a^{-1} b a^{-2} b^2,$$

s ezzel szemben

$$(ab \cdot a) \cdot (ab \cdot b) = a b a^{-2} b a^{-2} b.$$

SHERMAN K. STEIN [8] bebizonyította, hogy minden véges kvázicsoport, amely egyik oldalról autodisztributív, szükségképpen biszimmetrikus. Ebből az következik, hogy véges kvázicsoporton a két különböző oldali autodisztributív törvény nem független egymástól, hanem egyikük következménye a másiknak. Az itteni példa cáfolja SHERMAN K. STEINnek azt a (levélben közölt) sejtését, hogy a biszimmetria következménye lenne az autodisztributivitásnak nem véges rendszereken is. Nem véges kvázicsoporton a sejtés továbbra is nyitott kérdés.

3. §. A kétoldali autodisztributivitás függvényegyenletének megoldása

4. TÉTEL. Egy I intervallumon értelmezett bármely kétoldalról autodisztributív folytonos és leosztható $x \cdot y$ művelet $(x, y, x \cdot y \in I)$ izomorf a súlyozott szám-tani középpel. Más szóval az

$$\begin{aligned} (6) \quad & (x \cdot y) \cdot z = (x \cdot z) \cdot (y \cdot z) \\ (7) \quad & z \cdot (x \cdot y) = (z \cdot x) \cdot (z \cdot y) \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} (6) \\ (7) \end{aligned}} \right\} \quad (x, y, z \in I)$$

függvényegyenlet rendszer legáltalánosabb folytonos és leosztható megoldása az I intervallum felett

$$(2) \quad x \cdot y = \varphi[pf(x) + qf(y)], \quad p + q = 1 \quad (x, y, x \cdot y \in I),$$

ahol $f(x)$ tetszőleges topológikus (folytonos, szigorúan monoton) függvény, melynek inverze $\varphi(x)$, továbbá p, q tetszőleges állandók a $p + q = 1, pq \neq 0$ megszorítással.

BIZONYÍTÁS. Kimutatjuk, hogy fennáll

$$(3) \quad (x \cdot y) \cdot (u \cdot v) = (x \cdot u) \cdot (y \cdot v) \quad (x, y, u, v \in I),$$

s ebből már a bevezetésben idézettek [2—3] alapján következik a tétel állítása.

Ha x, y, u , illetve y, u és v közül van két megegyező, akkor (3) nyilvánvalóan fennáll (7), illetve (6), és a leoszthatóság folytán belőle következő reflexivitás miatt. Elég tehát (3)-at tetszőlegesen rögzített páronként különböző x, y és u , illetve y, u és v esetére igazolni. E végből pedig tekintsük a

$$(21) \quad (x \cdot y) \cdot (u \cdot z) = (x \cdot u) \cdot (y \cdot \varepsilon z), \quad z \in (y, u)$$

egyenlettel értelmezett leképezést, ahol x, y és u páronként különbözők, és a határozottság kedvéért z -t úgy választottuk, hogy y és u közé essen; ez nem sérti az általánosságot, mert ha pl. u esne y és z közé, akkor teljesen hasonló okoskodást lehetne végezni az

$$(x \cdot y) \cdot (u \cdot z) = (x \cdot \zeta u) \cdot (y \cdot z), \quad u \in (y, z)$$

egyenlettel értelmezett $u \leftrightarrow \zeta z$ -vel stb.

(21) nyilván egyértelműen meghatározza a $z \leftrightarrow \varepsilon z$ leképezést bármely y és u közé eső z esetén. Ugyanis

$$\alpha(z) = (x \cdot y) \cdot (u \cdot z), \quad \beta(z) = (x \cdot u) \cdot (y \cdot z)$$

az (y, u) intervallum fölött olyan topológikus (szigorúan monoton, folytonos) függvények, melyekre (6) és a reflexivitás folytán érvényes

$$\alpha(y) = \beta(y), \quad \alpha(u) = \beta(u);$$

Bolzano-tétele szerint tehát z -hez y és u között tartozik egy (a szigorú monotonitás miatt pedig csak egy) $t = \varepsilon z$ úgy, hogy teljesül $\alpha(z) = \beta(t)$. (3) tehát

igazolva lesz, ha igazoljuk

$$(22) \quad \varepsilon z = z, \quad z \in (y, u)$$

fennállását. E célból kimutatjuk, hogy $z \leftrightarrow \varepsilon z$ automorfizmus:

$$(23) \quad \varepsilon(z \cdot t) = (\varepsilon z) \cdot (\varepsilon t), \quad z, t \in (y, u),$$

melynek az y, u pontok fixpontjai:

$$(24) \quad \varepsilon y = y, \quad \varepsilon u = u.$$

Ez utóbbi nyilvánvaló ε (21) alatti értelmezése, a jobboldali autodisztributivitás és a reflexivitás miatt. A (23) is egyszerűen következik a baloldali autodisztributivitásból és a baloldali leoszthatóságból az

$$\begin{aligned} (x \cdot u) \cdot [y \cdot \varepsilon(z \cdot t)] &= (x \cdot y) \cdot [u \cdot (z \cdot t)] = [(x \cdot y) \cdot (u \cdot z)] \cdot [(x \cdot y) \cdot (u \cdot t)] = \\ &= [(x \cdot u) \cdot (y \cdot \varepsilon z)] \cdot [(x \cdot u) \cdot (y \cdot \varepsilon t)] = (x \cdot u) \cdot [y \cdot (\varepsilon z \cdot \varepsilon t)] \end{aligned}$$

egyenlőség sorozat elejének és végének összehasonlításával.

Két esetet lehet megkülönböztetni:

1. $x \cdot y$ intern: $x \cdot y \in (x, y)$;
2. $x \cdot y$ extern: $x \cdot y \notin (x, y)$, ha $x \neq y$.

E két eset közül az egyik (és csakis egyik) feltétlen fennáll tetszőleges $x, y \in I$ mellett, $x \cdot y$ szigorú monotonitása és a reflexivitása miatt. Ugyanis, ha $x \cdot y$ mindkét változóban egy irányban monoton, akkor $x \cdot x = x$ miatt csak növekedő lehet, s ekkor tetszőleges $x < y$ esetén fennáll

$$x = x \cdot x < x \cdot y < y = y \cdot y,$$

és hasonló érvényes $y \cdot x$ -re is; ha viszont $x \cdot y$ az x és y változóban nem egy irányban monoton, pl. x -ben növekedő és y -ban csökkenő, akkor

$$x \cdot y < x \cdot x = x < y = y \cdot y < y \cdot x$$

érvényes bármely $x < y$ mellett, és hasonló igaz akkor is, ha $x \cdot y$ az x -ben fogyó és y -ban növvő.

Az első esetben képezzük az

$$y, u, y \cdot u, u \cdot y, \quad y \cdot (y \cdot u), \quad (y \cdot u) \cdot u, \dots$$

számok S halmazát olyan törvényszerűség szerint, hogy a már értelmezett tagokat páronként „összeszorozzuk“, és ezt az eljárást transzfinit indukcióval folytatjuk, a torlódási pontokat is a halmazhoz csatolva. S -en (23), (24), továbbá $x \cdot y$ és εz folytonossága miatt már érvényes (22):

$$\varepsilon y = y, \quad \varepsilon u = u, \quad \varepsilon(y \cdot u) = \varepsilon y \cdot \varepsilon u = y \cdot u, \quad \varepsilon(u \cdot y) = \varepsilon u \cdot \varepsilon y = u \cdot y, \dots$$

Ezután csak azt kell kimutatni, hogy $S = (y, u)$. Értelmezése szerint S tartalmazza összes torlódási pontjait, azért csak azt kell belátni, hogy S mindenütt sűrű az (y, u) intervallumon. Tételizzük fel ennek ellenkezőjét, hogy létezik

olyan $(y_1, u_1)(y_1 < u_1)$ részintervallum, melynek nincs S -sel közös része ; ekkor véve S -ben az y_1 -nél kisebb elemek felső határát $y_2 (\in S)$ -t és az u_1 -nél nagyobb elemek alsó határát $u_2 (\in S)$ -et (mely nyilván létezik), olyan (y_2, u_2) $(y_2 \neq u_2)$ intervallumot nyerünk, melyek belseje S -től idegen, és határpontjai S -beliek. Így viszont indirekt feltevésünkkel ellentmondásba kerülünk azáltal, hogy

$$y_2 < y_2 \cdot u_2 < u_2,$$

holott $y_2 \cdot u_2 \in S$.

Az extern eset is lényegében hasonló módon intézhető el, ha észrevesszük, hogy folytonos, szigorúan monoton, reflexív, extern műveletnek mindig létezik olyan inverze, amely már intern. Mint említettük, $x \cdot y$ akkor extern, ha az x és y változóban nem egy irányban monoton. A határozottság kedvéért legyen $x \cdot y$ pl. az x változóban növekedő és y -ban fogyó. Minthogy akkor $x < y$ -nal fennáll

$$x \cdot y < x < y \cdot y,$$

s ugyancsak $x > y$ -nal hasonlóan

$$x \cdot y > x > y \cdot y,$$

ezért Bolzano-tétele értelmében mindkét esetben bármely rögzített x és y -hoz van oly z , hogy a

$$z \cdot y = x, \quad z = x * y$$

egyenlet z megoldása értelmezi a folytonos, mindkét változóban egy irányban szigorúan monoton $x * y$ inverz műveletet, melyre nézve nyilván érvényes

$$(23') \quad \varepsilon(z * t) = (\varepsilon z) * (\varepsilon t)$$

is. Hasonlót lehet mondani $x \cdot y$ másik oldali inverzéről, abban az esetben, midőn ez az x változóban fogy, és y -ban nő.

Ily módon tehát (22) bizonyítása ugyanúgy fejezhető be, mint az intern esetben.

Ezáltal a 4. tétel bizonyítása teljes.

IRODALOM

- [1] J. ACZÉL, О теории средних, *Colloquium Mathematicum*, 4 (1956) 33—55.
A középértékek elméletéhez, *Acta Universitatis Debreceniensis*, 1 (1954) 117—135.
- [2] „ On mean values, *Bulletin of the Amer. Math. Soc.*, 54 (1948) 392—400.
- [3] L. FUCHS, On mean systems, *Acta Math. Hung.*, 1 (1950) 303—320.
- [4] M. HOSSZÚ, On the functional equation of autodistributivity, *Publicationes Math.*, 3 (1953) 83—87.
- [5] B. KNASTER, Sur une équivalence pour les fonctions, *Colloquium Math.*, 2 (1949) 1—4.
- [6] D. C. MURDOCH, Structure of abelian quasi-groups, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 49 (1941) 392—409.
- [7] C. RYLL-NARDZEWSKI, Sur les moyennes, *Studia Math.*, 11 (1949) 31—37.
- [8] SHERMAN K. STEIN, Foundations of quasigroups, *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 42 (1956) 545—546.

(Beérkezett: 1957. II. 16.)