

VALÓS SZÁMOK ELŐÁLLÍTÁSÁRA SZOLGÁLÓ ALGORITMUSOKRÓL

(Székfoglaló előadás, elhangzott 1957. május 31-én)

RÉNYI ALFRÉD

1. §. Klasszikus algoritmusok és általánosításaik

Valós számok előállítására számos különböző algoritmus ismeretes¹. Felsorolunk néhányat a legnevezetesebbek közül. A leghasználatosabb a *tizedes-törtkifejtés*, illetve ennek kézenfekvő általánosítása, a *q-adikus kifejtés*. Ha $q \geq 2$ egész szám, minden valós szám előállítható

$$(1a) \quad x = \varepsilon_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_k(x)}{q^k}$$

alakban, ahol $\varepsilon_0(x)$ egész szám és $\varepsilon_k(x)$ a $0, 1, \dots, q-1$ számok egyike ($k=1, 2, \dots$). Jelölje $[z]$ a z szám egész részét, (z) pedig z törtrészét². Az $\varepsilon_n(x)$ „jegyeket” a következő algoritmus származtatja:

$$(1b) \quad \begin{aligned} \varepsilon_0(x) &= [x], & r_0(x) &= (x), \\ \varepsilon_n(x) &= [q r_{n-1}(x)], & r_n(x) &= (q r_{n-1}(x)) \quad (n=1, 2, \dots). \end{aligned}$$

Az (1b) által definiált (1a) előállítás minden x -re egyértelmű³. $\varepsilon_n(x)$ -et x q -adikus kifejtése n -edik „jegyének”, $r_n(x)$ -et pedig n -edik „maradékának” nevezzük. Nyilvánvaló, hogy az $r_n(x)$ maradékok az $\varepsilon_n(x)$ jegyek segítségével a következőképpen fejezhetők ki:

$$(1c) \quad r_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_{n+k}(x)}{q^k} \quad (n=0, 1, \dots).$$

Fennáll továbbá az

$$(1d) \quad r_n(x) = (q^n x)$$

összefüggés is.

¹ Az *Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften*-ben külön cikk foglalkozik ezzel a kérdéssel (I. [1]).

² A $[z]$ egész számot a $[z] \leq z < [z] + 1$ feltétellel definiáljuk, (z) -t pedig a $(z) = z - [z]$ összefüggés segítségével, amiből következik, hogy $0 \leq (z) < 1$.

³ Az (1b) alatti algoritmus egyértelmű, az $x = \frac{k}{q^l}$ alakú racionális számok esetében is (k és $l \geq 0$ egész számok), és ez esetben x véges előállítását adja.

A q -adikus kifejtés kézenfekvő általánosítását képezik az ún. *Cantor-féle kifejtések*. Ha $q_1, q_2, \dots, q_n, \dots$ egész számok egy rögzített sorozata és $q_n \geq 2$ ($n = 1, 2, \dots$), minden x valós szám egyértelműen előállítható

$$(2a) \quad x = \varepsilon_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_k(x)}{q_1 q_2 \dots q_k}$$

alakban, ahol az $\varepsilon_n(x)$ „jegyeket” és az $r_n(x)$ „maradékokat” a következő algoritmus származtatja:

$$(2b) \quad \begin{aligned} \varepsilon_0(x) &= [x], & r_0(x) &= (x), \\ \varepsilon_n(x) &= [q_n r_{n-1}(x)], & r_n(x) &= (q_n r_{n-1}(x)) \quad (n = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

Az $r_n(x)$ maradékok az $\varepsilon_n(x)$ jegyek segítségével a következőképpen fejezhetők ki:

$$(2c) \quad r_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_{n+k}(x)}{q_{n+1} q_{n+2} \dots q_{n+k}} \quad (n = 0, 1, \dots).$$

A másik legismertebb eljárás a *láncörtkifejtés*. Minden x valós szám egyértelműen előállítható

$$(3a) \quad x = \varepsilon_0(x) + \frac{1}{\varepsilon_1(x) + \frac{1}{\varepsilon_2(x) + \dots}}$$

alakban, ahol az $\varepsilon_n(x)$ „jegyeket” és az $r_n(x)$ „maradékokat” a következő algoritmus szolgáltatja:

$$(3b) \quad \begin{aligned} \varepsilon_0(x) &= [x], & r_0(x) &= (x), \\ \varepsilon_n(x) &= \left[\frac{1}{r_{n-1}(x)} \right], & r_n(x) &= \left(\frac{1}{r_{n-1}(x)} \right) \quad (n = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

Az $r_n(x)$ maradékok az $\varepsilon_n(x)$ jegyek segítségével a következőképpen fejezhetők ki:

$$(3c) \quad r_n(x) = \frac{1}{\varepsilon_{n+1}(x) + \frac{1}{\varepsilon_{n+2}(x) + \dots}}.$$

Egyéb, kevésbé ismert eljárások az 1. és 2. fajú *Engel-féle kifejtések*, az ún. *Lüroth-féle kifejtések*, az Engel- és Lüroth-féle kifejtéseket általánosító *Perron-féle algoritmus*, továbbá az ún. *Cantor-féle szorzatelőállítások* (lásd [2]). TIETZE [3] vizsgálta a *félig-szabályos láncörtkifejtéseket*, STRATEMEYER [4] a *váltakozó előjelű Engel-féle sorokat* és *Cantor-szorzatokat*. Találkozunk az irodalomban másfajta, gyökvonásokat tartalmazó eljárásokkal is (lásd pl. [5]). Igen figyelemreméltó ilyen eljárás BOLYAI FARKAS algoritmus⁴ ([6], [7]), amely,

⁴ Az BOLYAI FARKAS „algoritmus” elnevezését FARKAS GYULA vezette be (lásd [7]).

bár eredetileg csak trinom egyenletek gyökeinek előállítására szolgált, tetszőleges valós számok előállítására használható algoritmussá bővíthető ki a következőképpen:

Legyen $m > 1$ egész szám, akkor tetszőleges x valós szám előállítható az

$$(4a) \quad x = \varepsilon_0(x) - 1 + \sqrt[m]{\varepsilon_1(x) + \sqrt[m]{\varepsilon_2(x) + \sqrt[m]{\varepsilon_3(x) + \dots}}}$$

alakban, ahol $\varepsilon_0(x)$ egész szám, $\varepsilon_n(x)$ a $0, 1, \dots, 2^m - 2$ értékeket veheti fel és az $\varepsilon_n(x)$ „jegyeket“ és az $r_n(x)$ „maradékokat“ a következő algoritmus szolgáltatja:

$$(4b) \quad \varepsilon_0(x) = [x], \quad r_0(x) = (x),$$

$$\varepsilon_n(x) = [(1 + r_{n-1}(x))^m - 1], \quad r_n(x) = ((1 + r_{n-1}(x))^m - 1) \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Az $r_n(x)$ „maradékok“ az $\varepsilon_n(x)$ „jegyek“ segítségével a következőképpen fejezhetők ki:

$$(4c) \quad r_n(x) = -1 + \sqrt[m]{\varepsilon_{n+1}(x) + \sqrt[m]{\varepsilon_{n+2}(x) + \sqrt[m]{\varepsilon_{n+3}(x) + \dots}}}$$

A felsorolt algoritmusok általánosításával, ill. az ezeket felölelő általános elmélet kidolgozásával B. H. BISSINGER [8] és J. EVERETT [9] foglalkoztak⁵. BISSINGER a lánc törtek következő általánosítását vizsgálta: Legyen x tetszőleges valós szám és

$$(5a) \quad \varepsilon_0(x) = [x], \quad r_0(x) = (x),$$

$$\varepsilon_{n+1}(x) = [\varphi(r_n(x))], \quad r_{n+1}(x) = (\varphi(r_n(x))) \quad (n = 0, 1, \dots),$$

ahol a $\varphi(y)$ függvény a következő feltételeknek tesz eleget⁶:

$\varphi(y)$ monoton csökkenő és folytonos a $0 < y \leq 1$ intervallumban, $\varphi(1) = 1$, $\lim_{y \rightarrow +0} \varphi(y) = +\infty$,

$$\left| \frac{\varphi(y_2) - \varphi(y_1)}{y_2 - y_1} \right| > 1, \quad \text{ha } 0 < y_1 < y_2 \leq 1,$$

továbbá

$$\left| \frac{\varphi(y_2) - \varphi(y_1)}{y_2 - y_1} \right| \geq q > 1, \quad \text{ha } 0 < y_1 < y_2 < \varphi(1 + f(2)),$$

ahol $y = f(x)$ az $x = \varphi(y)$ függvény inverze.

⁵ EVERETT többek között BOLYAI FARKAS algoritmusának fentemlített általánosításával is foglalkozik.

⁶ BISSINGER feltételeit tőle kissé eltérő módon fogalmazzuk meg a későbbiekkel való könnyebb összehasonlíthatóság kedvéért. Ha $\varphi(y) = \frac{1}{y}$, BISSINGER algoritmusát speciális esetként a lánc tört algoritmust nyerjük.

Bebizonyította, hogy e feltevések mellett x előállítható az

$$(5b) \quad x = \varepsilon_0(x) + f(\varepsilon_1(x) + f(\varepsilon_2(x) + \dots))$$

végtelen „ f -lánc” alakjában és ugyanakkor

$$(5c) \quad r_n(x) = f(\varepsilon_{n+1}(x) + f(\varepsilon_{n+2}(x) + \dots)) \quad (n = 0, 1, \dots).$$

A Bissinger-féle előállításban az $\varepsilon_n(x)$ jegyek az $1, 2, \dots$ értékeket vehetik fel; akárhogy adunk is meg egy $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ természetes számokból álló végtelen, számsorozatot, létezik egy és csak egy x valós szám a $(0, 1)$ intervallumban, amelyre $\varepsilon_n(x) = \varepsilon_n$ ($n = 1, 2, \dots$). Akárhogy adunk meg egy természetes számokból álló véges $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_N$ sorozatot, létezik egy és csak egy x valós szám a $(0, 1)$ intervallumban, amelyre $\varepsilon_n(x) = \varepsilon_n$ ($n = 1, 2, \dots, N$) és $r_N(x) = 0$.

EVERETT a q -adikus törtek hasonló módon való általánosításával foglalkozott. Legyen $\varphi(y)$ a $0 \leq y \leq 1$ intervallumban definiált monoton növekvő és folytonos függvény, amelyre $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = p$, ahol $p \geq 2$ egész szám és $\frac{\varphi(y_2) - \varphi(y_1)}{y_2 - y_1} > 1$, ha $0 \leq y_1 < y_2 \leq 1$. Legyen x tetszőleges valós szám és definiáljuk az $\varepsilon_n(x)$ jegyeket és az $r_n(x)$ maradékokat a következőképpen:

$$(6a) \quad \begin{aligned} \varepsilon_0(x) &= [x], \quad r_0(x) = (x), \\ \varepsilon_{n+1}(x) &= [\varphi(r_n(x))], \quad r_{n+1}(x) = (\varphi(r_n(x))) \quad (n = 0, 1, \dots). \end{aligned}$$

Akkor x előállítható

$$(6b) \quad x = \varepsilon_0(x) + f(\varepsilon_1(x) + f(\varepsilon_2(x) + \dots))$$

végtelen f -lánc alakjában, ahol $y = f(x)$ az $x = \varphi(y)$ függvény inverze. Ugyanakkor

$$(6c) \quad r_n(x) = f(\varepsilon_{n+1}(x) + f(\varepsilon_{n+2}(x) + \dots)).$$

Az Everett-féle algoritmusoknál az $\varepsilon_n(x)$ jegyek a $0, 1, \dots, p-1$ értéket vehetik fel és bármely olyan $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ végtelen számsorozathoz, amelyben ε_n a $0, 1, \dots, p-1$ számok egyikével egyenlő ($n = 1, 2, \dots$) és az ε_n sorozatban végtelen sok $(p-1)$ -től különböző szám fordul elő, egy és csak egy olyan x ($0 \leq x < 1$) valós szám tartozik, amelyre $\varepsilon_n(x) = \varepsilon_n$ ($n = 1, 2, \dots$), továbbá bármely a $0, 1, \dots, p-1$ számokból képzett véges $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_N$ számsorozathoz megadható egy és csak egy olyan x szám ($0 \leq x < 1$), amelyre $\varepsilon_k(x) = \varepsilon_k$ ($k = 1, 2, \dots, N$) és $r_N(x) = 0$.⁵

⁵ EVERETT feltételeit tőle eltérő formában fogalmazzuk meg, a későbbiekkel való könnyebb összehasonlíthatóság kedvéért. EVERETT a $\frac{\varphi(y_2) - \varphi(y_1)}{y_2 - y_1} > 1$ feltétel helyett valamivel enyhébb, de bonyolultabb feltételnek eleget tevő φ függvényekkel is foglalkozott.

⁶ Az EVERETT-féle algoritmusosztály tartalmazza a q -adikus törteket ($\varphi(y) = qy$) továbbá a BOLYAI FARKAS-féle algoritmust is ($\varphi(y) = (1+y)^m - 1$).

A 3. §-ban BISSINGER és EVERETT algoritmusait tartalmazó általános algoritmosztályt vezetünk be. Ellentétben BISSINGER és EVERETT tárgyalásmódjával, a monoton növekvő és csökkenő q függvényekhez tartozó algoritmusokat egységesen tárgyaljuk. Az általunk tárgyalt algoritmus-típus monoton növekvő $q(y)$ esetében annyiban általánosabb az Everett-félénél, hogy nem kötjük ki, hogy $q(1)$ egész szám; nálunk $q(1)$ lehet tetszőleges egynél nagyobb valós szám, illetve $\lim_{y \rightarrow 1} q(y)$ lehet $+\infty$ is. A monoton csökkenő q esetében az általunk tárgyalt algoritmus-típus annyiban általánosabb, mint a Bissinger-féle, hogy nem kötjük ki, hogy $\lim_{y \rightarrow 0} q(y) = +\infty$, hanem megengedjük, hogy $q(0)$ véges legyen. Ennek következtében tárgyalunk olyan (a BISSINGER és EVERETT által tárgyalattól lényegesen különböző) algoritmusokat, ahol az ε_n jegyek értékei nem írhatók elő egymástól függetlenül (megengedett értékészletükön belül sem). Ezen lényeges általánosítás mellett az egyszerűség kedvéért bizonyos szempontból erősebb megszorításokat alkalmazunk, mint BISSINGER és EVERETT, amennyiben feltesszük, hogy $q'(y)$ létezik (egy legfeljebb megszámlálható, a $(0, 1)$ intervallum belsejében nem torlódó pontsorozat pontjaitól eltekintve) és (szakaszonként) folytonos. Ez a megszorítás elejthető volna, azonban a 4. §-ban szereplő tételben úgylis még erősebb megszorításokra van szükségünk.

A 2. §-ban a klasszikus algoritmusokra vonatkozó ismert statisztikus tételeket soroljuk fel. Dolgozatunk fő célja e statisztikus tételek (BOREL, RAIKOV a q -adikus törtekre, KUZMIN, LÉVY, HINCSIN és RYLL-NARDZEWSKI a lánc törtekre vonatkozó tételei) az általunk tárgyalt általános algoritmus osztály algoritmusaira való kiterjesztése. E tételt a 4. §-ban fogalmazzuk meg. Eredményeink az említett, a klasszikus algoritmusokra vonatkozó tételeket speciális esetként tartalmazzák. Az 5. § egy konkrét, a klasszikus algoritmusoktól különböző algoritmus-típussal, az ún. β -adikus kifejtésekkel foglalkozik (β nem egész szám).

A 6. §-ban az invariáns mérték létezésére vonatkozólag teszünk néhány megjegyzést. A 3., ill. 4. §-ban kimondott tételek bizonyítását a 7–9. §§-ok tartalmazzák. A 10. §-ban néhány példán konkretizáljuk az elmondottakat.

2. §. A klasszikus algoritmusokra vonatkozó statisztikus tételek és ezek tárgyalása az ergod-elmélet alapján

A két legfontosabb algoritmusra, a q -adikus kifejtésre és a lánc törtkifejtésre vonatkozólag igen érdekes statisztikus jellegű tételek ismeretesek. BOREL [10] kimutatta, hogy majdnem minden x -re az $(1b)$ alatti $\varepsilon_n(x)$ ($n =$

$= 1, 2, \dots$) számsorozatban a $0, 1, \dots, q-1$ számok közül mindegyik $\frac{1}{q}$ sűrűséggel fordul elő^a. E tétel megfelelője lánc törtekre R. O. KUZMIN [11] és P. LÉVY [12], [13], [14] tétele, mely szerint majdnem minden x -re a (3b) alatti $\varepsilon_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) számsorozatban a k szám $\frac{1}{\log 2} \log \frac{(k+1)^2}{k(k+2)}$ sűrűséggel fordul elő ($k = 1, 2, \dots$). BOREL tételét általánosította RAIKOV [15], aki kimutatta, hogy ha $g(x)$ $[0, 1]$ -ben L -integrálható és 1 periódusú periodikus függvény, akkor majdnem minden x -re

$$(7a) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} g(q^k x) = \int_0^1 g(t) dt.$$

Más alakban kifejezve

$$(7b) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} g(r_k(x)) = \int_0^1 g(t) dt.$$

Lánc törtekre A. JA. HINCIN ([17], [18], [19]) a következő tétel bizonyította be. Ha $0 \leq g(t) < Ct^{1/2-\delta}$, ahol $C > 0$ és $\delta > 0$, ha $t \geq 1$, akkor ha $\varepsilon_n(x)$ jelöli az x szám lánc törtekfejtésének n -edik jegyét, majdnem minden x -re fennáll, hogy

$$(8a) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} g(\varepsilon_k(x)) = \sum_{r=1}^{\infty} g(r) \frac{\log \frac{(r+1)^2}{r(r+2)}}{\log 2}.$$

HINCIN vizsgálatainak kiindulópontját az képezte, hogy R. O. KUZMIN [11] (lásd még [19]) bebizonyította GAUSS egy sejtését, mely szerint, ha $F_n(y)$ ($0 \leq y \leq 1$) jelöli azon x pontok ($0 \leq x < 1$) halmazának mértékét, amelyekre $r_n(x) < y$, ahol $r_n(x)$ jelöli x lánc törtekfejtésének n -edik maradékát, akkor

$$(8b) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(y) = \frac{\log(1+y)}{\log 2}.$$

HINCIN tételét először P. LÉVY [12], [13], [14], majd C. RYLL-NARDZEWSKI ([20], [21], lásd továbbá [22]) messzemenően általánosították. RYLL-NARDZEWSKI bebizonyította, hogy ha $g(t)$ tetszőleges L -integrálható függvény $(0, 1)$ -ben

^a Nemrégiben sikerült BOREL tételét CANTOR-féle sorokra kiterjeszteni ([16]). A legutóbbi időben ERDŐS PÁLLAL és SZÜSZ PÉTERREL együtt az Engel-féle sorokra is találtunk hasonló statisztikus tételeket.

és $r_n(x)$ x lánc törtkifejtése n -edik maradéka, akkor majdnem minden x -re

$$(8c) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} g(r_k(x)) = \frac{1}{\log 2} \int_0^1 \frac{g(t) dt}{1+t}.$$

(8c) tartalmazza a (8a) és (8b) tételeket speciális esetként.

RIESZ FRIGYES volt az első, aki a szóbanforgó problémakörnek az ergodikus elmélettel való összefüggésére felhívta a figyelmet (l. [23]) és így többek között rámutatott arra, hogy BOREL tétele, sőt, RAIKOV tétele is a BIRKHOFF féle ergodikus tétel speciális esetei. A BIRKHOFF-tétel RIESZ FRIGYES által adott általánosítása, mint ismeretes, a következőképpen hangzik: Legyen Ω egy absztrakt tér, $\mathfrak{B}$ e tér részhalmazából álló σ -algebra, μ pedig egy $\mathfrak{B}$ elemeire definiált σ -véges mérték. Legyen T az Ω tér önmagára való mérhető leképezése, amelyről nem tesszük fel, hogy egy-egyértelmű. Ha T *mértéktartó*, abban az értelemben, hogy bármely $E \in \mathfrak{B}$ -re, ha $T^{-1}E$ jelöli E teljes eredetijét a T leképezésnél, akkor $\mu(T^{-1}E) = \mu(E)$, továbbá ha $g(x)$ integrálható az Ω téren, akkor a

$$(9a) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} g(T^k x) = g^*(x)$$

határérték Ω majdnem minden x elemére létezik. Ha továbbá T *felbonthatatlan*, (más kifejezéssel: *metrikusan tranzitív*, vagy *ergodikus*) vagyis, ha E egy olyan halmaz, amelyre $T^{-1}E = E$, akkor $\mu(E) = 0$, vagy $\mu(\bar{E}) = 0$, ahol $\bar{E}$ az E halmaz kiegészítő halmazát jelöli, akkor $g^*(x)$ Ω -án majdnem mindenütt állandó, mégpedig

$$(9b) \quad g^*(x) = M(g) = \int_{\Omega} g(x) d\mu.$$

Mármost a q -adikus törtek esetében legyen Ω a $[0,1]$ intervallum, $\mathfrak{B}$ ezen intervallum mérhető halmazainak összessége és μ a közösleges Lebesgue-mérték, továbbá legyen $Tx = (qx)$ ($q \geq 2$ egész), akkor a Birkhoff-tétel fenti alakjának összes feltételei teljesülnek, és mivel $T^k x = (q^k x) = r_k(x)$, tehát RAIKOV tétele azonnal következik, tekintve, hogy a $Tx = (qx)$ transzformáció felbonthatatlansága könnyen belátható K. KNOPP egy tétele [24], (vagy H. STEINHAUS egy tétele [25]) alapján.¹⁰ A lánc törttek esetében a helyzet valamivel bonyolultabb. Ha ugyanis Ω , $\mathfrak{B}$ és μ az előző jelentéssel bírnak és $Tx = \left(\frac{1}{x}\right)$, akkor T nem mértéktartó. RYLL-NARDZEWSKI vette észre, hogy ez

¹⁰ Annak oka, hogy az ergodikus elmélet és a BOREL-, ill. RAIKOV-tételek kapcsolatát előzőleg nem vették észre, valószínűleg az, hogy RIESZ előtt az ergodikus elmélet csupán egy-egyértelmű T transzformációkkal foglalkozott.

a nehézség áthidalható, úgy hogy a $[0,1]$ intervallumon bevezetjük a

$$r(E) = \frac{1}{\log 2} \int_E \frac{dx}{1+x}$$

új mértéket, ugyanis erre a mértékre nézve a $Tx = \left(\frac{1}{x}\right)$ transzformáció már mértéktartó. Ilyenmódon, figyelembe véve, hogy a $Tx = \left(\frac{1}{x}\right)$ transzformáció felbonthatatlan (lásd [22] és [24]) következik (8c).¹¹

3. §. Egy általános algoritmus-osztály

Közvetlen célunk egy a valós számok előállítására szolgáló olyan általános algoritmus-osztály vizsgálata, amelybe tartozó algoritmusokra hasonló statisztikus tételek érvényesek, mint a q -adikus törtekre, ill. a lánc törtekre és egy olyan általános tétel bebizonyítása, amely az említett BOREL—RAIKOV, illetve KUZMIN—HINCŠIN—LÉVY—RYLL-NARDZEWSKI-tételeket speciális esetként tartalmazza. E célból csak olyan algoritmusokkal foglalkozunk, amelyeket egy T transzformáció iterált alkalmazása származtat, hasonlóképpen, ahogy $Tx = (qx)$

a q -adikus előállítást és $Tx = \left(\frac{1}{x}\right)$ a lánc törtelőállítást származtatja. Az ilyen algoritmusokat *homogénnek* nevezzük, ellentétben azokkal, amelyeknél minden lépésnél más-más T_k transzformációt alkalmazunk, mint pl. a Cantor-soroknál; az ilyen algoritmusokat *inhomogénnek* nevezzük; ezekre egy más alkalommal még vissza kívánok térni. Meg szeretnénk továbbá tartani az említett klasszikus előállításoknak azt a sajátosságát, hogy minden valós számhoz egész számok (jegyek) egy végtelen sorozatát rendelik hozzá. Nem kötjük ki azonban azt, ami a q -adikus kifejtésnél és a lánc törtalgoritmusnál teljesül, hogy a közelítő értékek mindig racionális számok legyenek. E feltétel már a BOLYAI FARKAS-féle algoritmusnál sem teljesül, amely egyébként az általunk tárgyalt osztályba tartozik, és amelyet a $Tx = ((1+x)^m - 1)$ transzformáció származtat.¹²

E követelményeknek megfelel a következő általános algoritmustípus, amely tartalmazza BISSINGER és EVERETT algoritmusait is. Legyen $q(y)$ egy

¹¹ S. HARTMAN ([22]) rámutatott arra, hogy (8c) akkor is igaz, ha $g(x) \geq 0$ és $\int_0^1 \frac{g(x)}{1+x} dx < +\infty$.

¹² Azt, hogy a közelítő értékek racionálisak legyenek, már csak azért sem indokolt nélkülözhetetlen feltételnek tekinteni, hiszen a közelítő értékeket mindig pótolhatjuk (és numerikus számolás esetén úgyis mindig pótoljuk) egy közel eső racionális számmal.

a $0 < y < 1$ intervallumban értelmezett nemnegatív függvény és definiáljuk az $\varepsilon_n(x)$ egész értékű függvényeket és az $r_n(x)$ valós értékű függvényeket ($-\infty < x < +\infty$; $n = 0, 1, \dots$) a következő algoritmussal

$$(10) \quad \begin{aligned} \varepsilon_0(x) &= [x], \quad r_0(x) = \{x\}, \\ \varepsilon_{n+1}(x) &= [\varphi(r_n(x))], \quad r_{n+1}(x) = \{\varphi(r_n(x))\} \quad (n = 0, 1, \dots). \end{aligned}$$

Nyilvánvaló, hogy ha $\varphi(x) = qx$ ($q = 2, 3, \dots$), akkor a q -adikus törtet, ha $\varphi(x) = \frac{1}{x}$, a lánctörteket kapjuk speciális esetként. Az $\varepsilon_n(x)$ számot nevezzük x n -edik jegyének, $r_n(x)$ -et pedig x n -edik maradékának. Mivel a fenti algoritmust a $Tx = \{\varphi(x)\}$ transzformáció származtatja ezt az az algoritmust röviden a $Tx = \{\varphi(x)\}$ transzformációhoz tartozó algoritmusként fogjuk nevezni. Kérdés mármint, hogy milyen feltevéseket kell tennünk φ -re nézve, hogy az $\varepsilon_n(x)$ ($n = 0, 1, \dots$) számsorozat az x számot egyértelműen meghatározza.

Be fogjuk bizonyítani, (7. §. 1. TÉTEL), hogy ha $\varphi(y)$ eleget tesz a következő A) feltételnek, továbbá vagy a B) vagy a B') feltételnek, akkor az $\varepsilon_n(x)$ számsorozat meghatározza az x számot.¹³

A) $\varphi'(y)$ folytonos és monoton növekvő a $0 < y < 1$ nyílt intervallumban¹⁴,

továbbá, vagy

$$B) \quad \varphi(0) = 0 \quad \text{és} \quad \varphi'(0) = \lambda_0 > 1,$$

vagy

$$B') \quad \varphi(1) = 1 \quad \text{és} \quad \varphi'(1) = -\lambda_1 \leq -1.$$

Vegyük észre, hogy A)-ból és B)-ből következik, hogy $\varphi(y)$ monoton növekvő, A)-ból és B')-ből, hogy $\varphi(y)$ monoton csökkenő $(0, 1)$ -ben.¹⁵ (A B) esetben $\varphi(1)$ lehet $+\infty$ is, a B') esetben $\varphi(0)$ lehet $+\infty$.)

Az A) és B), vagy A) és B') feltételek teljesülése esetén x a következőképpen állítható elő. Jelölje $y = f(x)$ az $x = \varphi(y)$ függvény inverzét, amely a B) esetben a $(0, \varphi(1))$, a B') esetben az $(1, \varphi(0))$ (nyílt) intervallumban egy-

¹³ Mint már említettük, az A) és B), ill. B') feltételek enyhíthetők volnának.

¹⁴ Elegendő volna feltenni, hogy $\varphi'(y)$ egy legfeljebb megszámlálható, $(0, 1)$ belsejében nem torlódó pontsorozat pontjaitól eltekintve differenciálható és $\varphi'(y)$ szakaszonként folytonos.

¹⁵ $\varepsilon_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) a B) esetben $\varphi(1)$ -nél kisebb nemnegatív egész szám (vagyis $\varepsilon_n(x)$, ha $\varphi(1)$ egész szám, a $0, 1, \dots, \varphi(1) - 1$ értékeket, ha $\varphi(1)$ nem egész, a $0, 1, \dots, [\varphi(1)]$ értékeket veheti fel, míg ha $\varphi(1) = +\infty$, bármely nemnegatív egész értéket felvehet). A B') esetben $\varepsilon_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) a $\varphi(0)$ -nál kisebb pozitív egész szám (tehát ha $\varphi(0)$ egész, $\varepsilon_n(x)$ lehetséges értékei $1, 2, \dots, \varphi(0) - 1$, míg ha $\varphi(0)$ nem egész, $\varepsilon_n(x)$ lehetséges értékei $1, 2, \dots, [\varphi(0)]$; ha $\varphi(0) = +\infty$, $\varepsilon_n(x)$ bármely pozitív egész számat felvehet.)

értelműen definiált folytonos, monoton és folytonosan differenciálható függvény. Terjesszük ki $f(x)$ definícióját a következőképpen: A B) esetben, ha $\varphi(1) < +\infty$, legyen $f(x) = +1$, ha $x > \varphi(1)$. A B') esetben, ha $\varphi(0) < +\infty$, legyen $f(x) = 0$, ha $x > \varphi(0)$. Defináljuk a $K_n(z_0, z_1, \dots, z_n)$ függvényeket a következőképpen: Legyen

$$(11a) \quad \begin{aligned} K_0(z_0) &= z_0, \\ K_n(z_0, z_1, \dots, z_n) &= K_{n-1}(z_0, z_1, \dots, z_{n-2}, z_{n-1} + f(z_n)). \end{aligned}$$

Akkor nyilván¹⁶

$$(11b) \quad \begin{aligned} K_1(z_0, z_1) &= z_0 + f(z_1), \\ K_2(z_0, z_1, z_2) &= z_0 + f(z_1 + f(z_2)), \\ K_3(z_0, z_1, z_2, z_3) &= z_0 + f(z_1 + f(z_2 + f(z_3))), \\ &\vdots \end{aligned}$$

s. i. t.

Legyen most

$$(11c) \quad k_n(x) = K_n(\varepsilon_0(x), \varepsilon_1(x), \dots, \varepsilon_n(x)) \quad (n = 0, 1, \dots)$$

és nevezzük $k_n(x)$ -et az x szám n -edik közelítő értékének. Akkor tehát

$$(11d) \quad \begin{aligned} k_0(x) &= \varepsilon_0(x), \\ k_1(x) &= \varepsilon_0(x) + f(\varepsilon_1(x)), \\ k_2(x) &= \varepsilon_0(x) + f(\varepsilon_1(x) + f(\varepsilon_2(x))), \\ &\vdots \\ k_n(x) &= \varepsilon_0(x) + f(\varepsilon_1(x) + f(\varepsilon_2(x) + \dots + f(\varepsilon_n(x)) \dots)). \end{aligned}$$

Könnyen belátható, hogy

$$(11e) \quad \varepsilon_k(k_n(x)) = \varepsilon_k(x), \quad \text{ha } k = 0, 1, \dots, n,$$

(kivéve azt az esetet, amikor $f(x)$ monoton csökkenő, és $\varepsilon_n(x) = 1$, amikor (11e) csak $k \leq n-2$ -re érvényes, és $\varepsilon_{n-1}(k_n(x)) = \varepsilon_{n-1}(x) + 1$).

Be fogjuk bizonyítani, hogy minden valós x -re

$$(12) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} k_n(x) = x,$$

vagyis x mindig előállítható az

$$(13) \quad x = \varepsilon_0(x) + f(\varepsilon_1(x) + f(\varepsilon_2(x) + \dots + f(\varepsilon_n(x) + f(\varepsilon_{n+1}(x) + \dots))) \dots)$$

alakban, tehát egy végtelen f -lánc alakjában. (Megszámálható sok x -re $r_n(x)$ n valamely értékére (0)-val lesz egyenlő; ez esetben a (13) előállítást „véges“-nek nevezzük.).

¹⁶ $f(x)$ a fentiek értelmében a B) esetben a $0 \leq x < +\infty$, a B') esetben az $1 \leq x < +\infty$ intervallumban van értelmezve és így a $K_n(z_0, \dots, z_n)$ függvény a $-\infty < z_0 < +\infty$, továbbá a B) esetben $0 \leq z_i < +\infty$ ($i = 1, 2, \dots, n$), a B') esetben $1 \leq z_i < +\infty$ ($i = 1, 2, \dots, n$) értékre van definiálva.

Nyilvánvaló, hogy a tárgyalta algoritmus-osztály tartalmazza a q -adikus algoritmuson ($\varphi(y) = qy$) és a láncörtalgoritmuson $\left(\varphi(y) = \frac{1}{y}\right)$ kívül a Bolyai Farkas-féle algoritmust is $\varphi(y) = (1+y)^m - 1$. Az első és harmadik esetben $\varphi(y)$ -ra az A) és B), a második esetben az A) és B') feltétel teljesül. Algoritmus-osztályunk tartalmazza továbbá a BISSINGER- és EVERETT-féle algoritmusok jórészét is.

Megemlítünk egy igen egyszerű algoritmust, amely a tárgyalta osztályba tartozik, de amellyel eddig nem foglalkoztak. Legyen $\varphi(y) = \frac{y}{\alpha}$, ahol $0 < \alpha < 1$ tetszőleges, akkor bármely x valós szám előállítható az

$$(14a) \quad x = \varepsilon_0(x) + \alpha \varepsilon_1(x) + \alpha^2 \varepsilon_2(x) + \dots + \alpha^n \varepsilon_n(x) + \dots$$

alakban, ahol $\varepsilon_0(x)$ egész szám és $\varepsilon_n(x)$ a $0, 1, \dots, \left[\frac{1}{\alpha}\right]$ számok valamelyike ($n = 1, 2, \dots$). Bevezetve a $\beta = \frac{1}{\alpha}$ jelölést, az előállítást az

$$(14b) \quad \begin{aligned} \varepsilon_0(x) &= [x], \quad r_0(x) = (x), \\ \varepsilon_{n+1}(x) &= [\beta r_n(x)], \quad r_{n+1}(x) = (\beta r_n(x)) \quad (n = 0, 1, \dots) \end{aligned}$$

algoritmus szolgáltatja. Ha $\beta = q \geq 2$ egész szám, akkor (14a) x q -adikus előállítását adja, ha azonban β nem egész, akkor egy újfajta algoritmust nyerünk, amelyet β -adikus algoritmusnak nevezünk.¹⁷

Nevezzük az olyan $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ véges számsorozatokat, amelyekhez van olyan x valós szám ($0 \leq x < 1$), hogy

$$\varepsilon_k(x) = \varepsilon_k \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

ahol az $\varepsilon_k(x)$ -eket a (10) által definiált, a $Ty = (\varphi(y))$ transformációhoz tartozó algoritmus definiálja, a $\varphi(y)$ -hoz tartozó algoritmusra nézve *kanonikus* számsorozatoknak.

Megjegyzendő, hogy általában nem minden, az $\varepsilon_k(x)$ -ekre megengedett értékekből alkotott számsorozat lesz kanonikus. A q -adikus és a láncörtalgoritmus, továbbá a BISSINGER és EVERETT által tárgyalta algoritmusok kivételesek e tekintetben. A q -adikus algoritmus ($q \geq 2$ egész) esetében minden $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ sorozat kanonikus, ha ε_k egész és $0 \leq \varepsilon_k \leq q-1$ ($k = 1, 2, \dots, n$);

¹⁷ Megjegyzendő, hogy ebben az esetben 1-nél nagyobb x számok esetében lehetne a β -adikus előállítást a következőképpen is definiálni:

$$(14c) \quad x = \alpha^{-r} \varepsilon_{-r} + \alpha^{-r+1} \varepsilon_{-(r-1)} + \dots + \varepsilon_{-1} \alpha^{-1} + \varepsilon_0 + \alpha \varepsilon_1 + \dots + \alpha^n \varepsilon_n + \dots$$

$\beta = \frac{1}{\alpha} = 10$ esetében (14c) x a tízesalapú számrendszerben való előállítását adja.

lánctörtek esetében $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ kanonikus, ha $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ természetes számok.¹⁸ Más algoritmusok esetében bonyolultabb a helyzet: pl. a β -adikus algoritmus esetében, ahol $\frac{1}{\beta} = \alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$, akkor és csak akkor kanonikus, ha ε_i csak a 0 vagy 1 értéket veszi fel, és ha $\varepsilon_i = 1$, akkor $\varepsilon_{i+1} = 0$; tehát ez esetben erős függés áll fenn egy kanonikus sorozatban az ε_i számok között.

4. §. Statisztikus tételek általános algoritmusokra

A 3. §-ban bevezetett általános algoritmusra, a q -adikus és a lánctört-algoritmusra ismertekhez hasonló statisztikai tételt azon feltétel mellett fogunk beh bizonyítani, ha $\varphi(y)$ az A) és B), ill. A) és B') feltételek mellett rendelkezik a következő tulajdonsággal is:

C) Bármely $n \geq 1$ -re és bármely x -re ($0 \leq x < 1$), bevezetve a

$$(15) \quad H_n(x, t) = \frac{d}{dt} K_n(0, \varepsilon_1(x), \dots, \varepsilon_{n-1}(x), \varepsilon_n(x) + t)$$

jelölést

$$(16) \quad \frac{\max_{0 \leq t \leq 1} H_n(x, t)}{\min_{0 \leq t \leq 1} H_n(x, t)} \leq C,$$

ahol C nem függ sem n -től, sem x -től. Ezen kívül feltesszük, hogy ha a B) feltevés teljesül, akkor $\varphi(1)$ egész szám vagy $\varphi(1) = +\infty$, ha pedig a B') feltevés teljesül, akkor $\varphi(0)$ egész szám vagy $\varphi(0) = +\infty$. Ez a feltétel biztosítja, hogy bármely nemnegatív egész számokból képezett $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ sorozat kanonikus, ha csak a B) esetben $0 \leq \varepsilon_k < \varphi(1)$ ill. a B') esetben $1 \leq \varepsilon_k < \varphi(0)$ ($k = 1, 2, \dots, n$). Ez esetben igaz a következő tétel: bármely $g(x)$ a $[0, 1]$ intervallumban L -integrálható függvényre és majdnem minden x -re létezik a

$$(17a) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} g(r_k(x)) = M(g)$$

határérték, ahol $M(g)$ csak a $g(x)$ függvénytől függő véges állandó. Létezik továbbá olyan $\nu(E)$ mérték az $I = (0, 1)$ intervallumon, amelyre $\nu(I) = 1$ és amelyre nézve $Ty = (\varphi(y))$, mértéktartó, továbbá $\frac{1}{C} \mu(E) \leq \nu(E) \leq C \mu(E)$, ahol

¹⁸ Ha racionális szám lánctörtekfejtését vizsgáljuk, akkor n valamely értékére $r_n(x) = 0$ lesz. Ez esetben a következő konvenció segít. Legyen $\frac{1}{0} = +\infty, [+ \infty] = +\infty, (+\infty) = 0$, vagyis tekintsük $+\infty$ -t természetes számnak és lehetséges jegynek. Ez esetben tehát az $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ számsorozat akkor kanonikus, ha $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ vagy mind (véges) természetes számok és $\varepsilon_n > 1$, vagy ha $\varepsilon_k = +\infty$, akkor $\varepsilon_{k+1} = \dots = \varepsilon_n = +\infty$ továbbá ez esetben $\varepsilon_{k-1} > 1$.

$\mu(E)$ a Lebesgue-mérték és C a (16)-ban szereplő állandó. A r mérték segítségével $M(g)$ az

$$(17b) \quad M(g) = \int_0^1 g(x) dr$$

alakban fejezhető ki.

Ezt a tételt oly módon bizonyítjuk be, hogy kimutatjuk, hogy a C) feltevés mellett a $(0,1)$ intervallum bármely E mérhető részhalmazára

$$(18a) \quad \frac{1}{C} \mu(E) \leq \mu(T^{-k}E) \leq C\mu(E) \quad (k = 1, 2, \dots),$$

ahol T^{-k} a T^{-1} transzformáció k -adik hatványát jelöli és μ a Lebesgue-féle mérték. Ilyen módon ez esetben a fortiori

$$(18b) \quad \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \mu(T^{-k}E) \leq C\mu(E) \quad (n = 1, 2, \dots),$$

és így alkalmazható DUNFORD és MILLER nevezetes tétele ([26], [27]), amely szerint (18b)-ből következik, hogy a

$$(19) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} g(T^k x) = g^*(x)$$

határérték bármely $g(x)$ integrálható függvényre majdnem minden x -re létezik. Be fogjuk bizonyítani, hogy feltevéseinkből az is következik, hogy $Tx = (\varphi(x))$ felbonthatatlan. Mivel, ha $Tx = (\varphi(x)) = r_1(x)$, akkor $T^k x = r_k(x)$ ($k = 2, 3, \dots$), tehát (19)-ből következik, hogy a (17a) baloldalán álló határérték majdnem minden x -re létezik. Tx felbonthatatlanságából jólismert módon következik, hogy $g^*(x)$ (majdnem mindenütt) állandó.

Nyilvánvaló, hogy a C) feltevés teljesül, ha $\varphi(x) = \beta x$, ahol $\beta = \frac{1}{\alpha} > 1$

egész szám; ez esetben ugyanis $H_n(x, t) \equiv \alpha^n$. Tehát, ha $\frac{1}{\alpha} = \beta \geq 2$ egész,

tételünk speciális eseteként nyerjük RAIKOV (ill. BOREL) tételeit. Ha β nem egész, tételünk feltételei nem teljesülnek (ui. $\varphi(1)$ nem egész) azonban be lehet bizonyítani, hogy a tétel állítása ez esetben is igaz. E kérdésre másutt kívánunk visszatérni, azonban a következő §-ban részletesen tárgyalunk egy esetet,

az $\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ esetet.

5. §. A β -adikus algoritmusról

Vizsgáljuk meg közelebbről a β -adikus algoritmust abban az esetben, ha $\frac{1}{\beta} = \alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Az $\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ számról a következőkben mindig azt fogjuk felhasználni, hogy az $\alpha + \alpha^2 = 1$ egyenletnek tesz eleget. Mivel $[\beta] = 1$, ez esetben $\varepsilon_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) csak a 0 és 1 értékeket veheti fel. Bebizonyítjuk, hogy ez esetben az $\varepsilon_n(x)$ számsorozatban majdnem minden x -re az 1 szám sűrűsége $\delta_1 = \frac{5-\sqrt{5}}{10} = 0,276393\dots$ és így 0 sűrűsége $\delta_0 = \frac{5+\sqrt{5}}{10} = 0,723607$.¹⁹ Ebben az esetben explicit alakban megadható a Tx transzformációra invariáns mérték:

$$\nu(E) = \int_E \varrho(x) dx,$$

ahol

$$(20) \quad \varrho(x) = \begin{cases} \frac{3\sqrt{5}+5}{10}, & \text{ha } 0 < x < \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \\ \frac{5+\sqrt{5}}{2}, & \text{ha } \frac{\sqrt{5}-1}{2} < x < 1. \end{cases}$$

Megjegyzendő, hogy a tárgyalt esetben az $\varepsilon_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) függvények, mint a $[0, 1]$ intervallumban a Lebesgue-mérték segítségével képezett valószínűségi mezőn definiált valószínűségi változók, *Markov-féle láncot* alkotnak, amelynek átmenet-valószínűségeinek matrixa $\begin{pmatrix} \alpha & \alpha^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, vagyis ha az x számot a $(0, 1)$ intervallumban találmra (egyenletes eloszlással) választjuk és $\varepsilon_n(x) = 1$, akkor bizonyosan $\varepsilon_{n+1}(x) = 0$, míg ha $\varepsilon_n(x) = 0$, akkor $\varepsilon_{n+1}(x)$ a 0 és 1 értékeket α , ill. α^2 feltételes valószínűséggel veszi fel, függetlenül attól, hogy mik voltak $\varepsilon_1(x), \dots, \varepsilon_{n-1}(x)$ értékei. A δ_0 és δ_1 számok ennek a Markov-láncnak a stacionér állapotához tartozó valószínűségek és így a

$$(21) \quad \begin{aligned} \delta_0 &= \delta_0 \alpha + \delta_1 \\ \delta_1 &= \delta_0 \alpha^2 \end{aligned}$$

egyenletrendszernek tesznek eleget, amit könnyen verifikálhatunk, figyelembe véve, hogy $\delta_1 = \frac{\alpha}{\sqrt{5}}$ és $\delta_0 = \frac{1}{\alpha\sqrt{5}}$.

Állításunk a következőképpen látható be: osszuk fel a $(0, 1)$ intervallumot a $(0, \alpha)$ és $(\alpha, 1)$ részintervallumokra, legyenek ezek I_{11} és I_{12} . Osszuk fel

¹⁹ Ezt más úton ERDŐS PÁL és SZÜSZ PÉTER is bebizonyították.

az I_{11} intervallumot a $(0, \alpha^2)$ és (α^2, α) részintervallumokra, legyenek ezek I_{21} és I_{22} és legyen $I_{23} = I_{12}$. Legyen

$$I_{31} = (0, \alpha^3), I_{32} = (\alpha^3, \alpha^2), I_{33} = (\alpha^2, \alpha), I_{34} = (\alpha, \alpha + \alpha^3), I_{35} = (\alpha + \alpha^3, 1).$$

Ha már $I_{n1}, I_{n2}, \dots, I_{nF_n}$ definiálva vannak, akkor, mint teljes indukcióval belátható, az I_{nk} intervallumok mindegyike vagy α^n , vagy α^{n+1} hosszúságú. Az $I_{n+1,k}$ intervallumokat úgy kapjuk, hogy az α^n hosszúságú I_{nk} intervallumokat felbontjuk egy α^{n+1} és egy α^{n+2} hosszúságú részintervallumra, az α^{n+1} hosszúságúakat változtatlanul hagyjuk. Az F_n szám (az n -edrendű intervallumok száma) nyilvánvalóan a $2, 3, 5, 8, \dots$ Fibonacci-féle számsorozat n -edik tagja. Mármost $\varepsilon_n(x) = 0$, ha x egy α^n hosszúságú n -edrendű intervallumba esik és $\varepsilon_n(x) = 1$, ha x egy α^{n+1} hosszúságú n -edrendű intervallumba esik. Ebből azonban leolvasható, hogy ha $\varepsilon_n(x)$ értéke adott, e feltétel mellett az $\varepsilon_{n+k}(x)$ változók ($k = 1, 2, \dots$) sztochasztikusan függetlenek az $\varepsilon_1(x), \dots, \varepsilon_{n-1}(x)$ változóktól. A mondottakból egyszerű közvetlen bizonyítást nyerünk arra, hogy

$$(22) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\varepsilon_n(x) = 0) = \frac{5 + \sqrt{5}}{10} \quad \text{és} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\varepsilon_n(x) = 1) = \frac{5 - \sqrt{5}}{10},$$

ahol $\mu(\varepsilon_n(x) = i)$ az $\varepsilon_n(x) = i$ feltételnek eleget tevő x ($0 \leq x < 1$) számok halmazának Lebesgue mértékét jelöli ($i = 0, 1$). Ugyanis az n -edrendű, α^n hosszúságú intervallumok száma nyilván F_{n-1} , az α^{n+1} hosszúságúaké F_{n-2} és így

$$(23) \quad \mu(\varepsilon_n(x) = 0) = F_{n-1} \alpha^n, \quad \mu(\varepsilon_n(x) = 1) = F_{n-2} \alpha^{n+1},$$

ahol

$$(24) \quad F_n = \frac{5 + 3\sqrt{5}}{10} \left(\frac{\sqrt{5} + 1}{2} \right)^n + \frac{5 - 3\sqrt{5}}{10} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \quad (n = 1, 2, \dots).$$

(23)-ból és (24)-ből (22) könnyen következik.

Ilyen módon az a tény, hogy a 0, ill. 1 jegy sűrűsége majdnem minden x szám kifejtésében δ_0 , ill. δ_1 , a nagy számok erős törvényét jelenti Markov-láncokra (lásd [23]). Markov-láncokról lévén szó, ez esetben a centrális határeloszlástétel is érvényes, vagyis $G_n(y)$ -nal jelölve azon x számok ($0 \leq x < 1$) halmazának mértékét, amelyekre

$$(25) \quad \frac{\varepsilon_1(x) + \varepsilon_2(x) + \dots + \varepsilon_n(x) - n\delta_1}{\sqrt{nD}} < y, \quad \text{ahol } D = \frac{1}{5\sqrt{5}}$$

azt kapjuk, hogy

$$(25b) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} G_n(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^y e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

(lásd [29], 583. o. 19. feladat). Hasonlóan tárgyalható a β -adikus algoritmus számos más egyszerű algebrai egyenletnek eleget tevő $\alpha = \frac{1}{\beta}$ szám esetében is.

Tetszőleges α -ra ($0 < \alpha < 1$) igaz, hogy ha $g(x)$ L -integrálható $[0, 1]$ -ben, akkor

$$(26) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} g(r_k(x)) = M_\alpha(g)$$

majdnem minde x -re létezik és $M_\alpha(g)$ nem függ x -től. Ennek bizonyításával azonban itt nem foglalkozunk.

Ha $\frac{1}{\alpha} = \beta \geq 2$ egész szám, akkor (26) RAIKOV már említett tételére²⁰ redukálódik. Ha $\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, akkor

$$(26b) \quad M_\alpha(g) = \frac{5+\sqrt{5}}{10} \left(\frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha g(x) dx \right) + \frac{5-\sqrt{5}}{10} \left(\frac{1}{1-\alpha} \int_{1-\alpha}^1 g(x) dx \right).$$

²⁰ Meg kell jegyeznünk ezzel kapcsolatban, hogy RAIKOV tételének ismeretes egy másik — analitikus szempontból kézenfekvőbb — általánosítása is. Azt, hogy a $\beta^n x$ ($n = 1, 2, \dots$) számsorozat ($\beta > 1$) majdnem minden x -re mindenütt sűrű mod 1, a $(0, 1)$ intervallumban, még P. FATOU, azt, hogy e sorozat majdnem minden x -re mod 1, egyenletes eloszlású, HARDY és LITTLEWOOD és WEYL mutatták meg. Ebből következik, hogy

$$(27a) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} g(\beta^k x) = \int_0^1 g(x) dx,$$

ha $g(x)$ Riemann-integrálható függvény. M. KAC., R. SALEM és A. ZYGMUND kimutatták [30], hogy (27a) akkor is igaz, ha $g(x)$ az L^2 -osztályba tartozik és 1 periódusú, hacsak $g(x)$ Fourier-sorának együtthatóira teljesül a

$$(28a) \quad \sum_{k=n}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) = O\left(\frac{1}{(\log n)^\epsilon}\right), \text{ ha } n \rightarrow \infty$$

feltétel, ahol $\epsilon > 0$. ERDŐS PÁL [32] élesítette ezt a tételt, amennyiben kimutatta, hogy elegendő feltenni (28a) helyett, hogy

$$(28b) \quad \sum_{k=n}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) = O\left(\frac{1}{(\log \log n)^{2+\epsilon}}\right), \text{ ha } n \rightarrow \infty,$$

ahol $\epsilon > 0$ (lásd még I. F. KOKSMA [31] munkáját is). Az általunk tárgyalt esetben nincs szükség $g(x)$ Fourier-együtthatóira vonatkozó megszorításra, sőt még arra sem, hogy $g(x) \in L^2$ legyen. Bebizonyítható, hogy

$$(27b) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} [g(x) + g(\beta x) + \dots + g(\beta(\beta(\dots(\beta x)\dots)))] = M_\alpha(g),$$

minden $g(x)$ L -integrálható függvényre majdnem minden x -re fennáll, azonban $M_\alpha(g)$ általában nem azonos $\int_0^1 g(x) dx$ -szel. Ha $\frac{1}{\alpha} = \beta \geq 2$ pozitív egész szám, akkor a (27a) és (27b) baloldalán álló összegek azonosak és mindkét állítás RAIKOV tételére redukálódik.

6. §. Az invariáns mérték létezéséről

Kézenfekvően felmerül a kérdés, hogy az általunk tárgyalt $Tx = (\varphi(x))$ transzformációkhoz megadható-e olyan ν mérték a $[0,1]$ intervallum mérhető halmazain, amely ekvivalens μ -vel, a Lebesgue-mértékkel (vagyis, $\mu(E) = 0$, akkor és csak akkor, ha $\nu(E) = 0$) és amely T -re invariáns. Az invariáns mérték létezésének kérdése egyike a mértékelmélet alapvető problémáinak (lásd pl. [33]). A kölcsönösen egyértelmű T -transzformációk esetére vonatkozólag Y. N. DOWKER [34], [35], [36], [37], az általános esetre vonatkozólag COTLAR és RICABARRA [38] és CALDERON [39] érték el figyelemreméltó eredményeket.

A mi esetünkben, ha a C) feltétel teljesül, tételünkéből korolláriumként adódik az invariáns mérték existenciája. Legyen ugyanis $E(x)$ az E mérhető halmaz karakterisztikus függvénye, vagyis

$$E(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in E, \\ 0, & \text{ha } x \notin E. \end{cases}$$

Ez esetben

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} E(r_k(x)) \right) dx = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mu(T^{-k}E)$$

és mivel $0 \leq E(x) \leq 1$, LEBESGUE tételéből és 2. TÉTELünkéből következik, hogy ha

$$\nu_n(E) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mu(T^{-k}E),$$

akkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \nu_n(E) = \nu(E)$$

minden E mérhető halmazra létezik. Mivel $\nu_n(E)$ n minden értékére mérték, tehát $\nu(E)$ nyilván végesen additív és nemnegatív halmazfüggvény. A 8. §-ban

be fogjuk bizonyítani, hogy C) feltételből következik, hogy $\frac{1}{C} \mu(E) \leq \mu(T^{-n}E) \leq$

$\leq C\mu(E)$ és ennél fogva $\frac{1}{C} \mu(E) \leq \nu(E) \leq C\mu(E)$ és így $\nu(E)$ ekvivalens $\mu(E)$ -

vel. Ebből azonban könnyen következik, hogy $\nu(E)$ σ -additív, tehát $\nu(E)$ is mérték. Ha ugyanis $E_1, E_2, \dots, E_n, \dots$ a $(0,1)$ intervallum mérhető rész-

halmazainak diszjunkt sorozata és $^{21} E = \sum_{n=1}^{\infty} E_n$, akkor ν véges additivitása folytán

$$\nu(E) = \sum_{k=1}^{N-1} \nu(E_k) + \nu\left(\sum_{k=N}^{\infty} E_k\right) \quad (N = 1, 2, \dots).$$

²¹ $\sum E_n$ az E_n ($n = 1, 2, \dots$) halmazok egyesítését jelöli.

Mivel

$$0 \leq \nu \left(\sum_{k=N}^{\infty} E_k \right) \leq C \mu \left(\sum_{k=N}^{\infty} E_k \right) \rightarrow 0, \text{ ha } N \rightarrow \infty,$$

tehát

$$\nu(E) = \sum_{k=1}^{\infty} \nu(E_k),$$

amit bizonyítani akartunk. Azt, hogy $\nu(E)$ invariáns T -re nézve, könnyen beláthatjuk, hiszen

$$\nu_n(T^{-1}E) = \frac{n+1}{n} \nu_{n+1}(E) - \frac{\mu(E)}{n},$$

tehát elvégezve az $n \rightarrow \infty$ határátmenetet, nyerjük, hogy

$$\nu(T^{-1}E) = \nu(E).$$

Nyilvánvaló az is, hogy ha I a teljes $(0,1)$ intervallum, akkor $\nu(I) = 1$. Könnyen belátható, hogy T ν -re nézve is felbonthatatlan, ugyanis, ha $T^{-1}E = E$, akkor vagy $\mu(E) = 0$, vagy $\mu(\bar{E}) = 0$, és mivel ν abszolút folytonos μ -re nézve, tehát $\nu(E) = 0$, vagy $\nu(\bar{E}) = 0$. Ilyenmódon a 2. TÉTEL állítása most utólag már BIRKHOFF tételből is következik; persze azt, hogy a invariáns mérték létezik, csak a 2. TÉTEL segítségével láttuk be, vagyis BIRKHOFF tételéből a 2. TÉTELT csak akkor tudjuk levezetni, ha előzőleg már más úton (a Dunford—Miller-tétel segítségével) a 2. TÉTELT bebizonyítottuk. Más a helyzet persze, ha egy konkrét algoritmusra a ν invariáns mértéket effektíve meg tudjuk konstruálni. Ez azonban általában igen nehéz feladat. Pl. a β -adikus algoritmus esetében, ha $\alpha = \frac{1}{\beta}$ egyszerű algebrai egyenletnek tesz eleget, az invariáns mértéket viszonylag egyszerűen megtalálhatjuk, azonban tetszőleges α -ra az invariáns mérték megtalálása nehéznek tűnik.

Még csak azt jegyezzük meg, hogy az említett mértékelméleti problémát meg is lehet fordítani. Ahelyett, hogy a T transzformációból indulunk ki és keressük azt a ν mértéket, amely T -re invariáns, kiindulhatunk egy ν mértékből és kérdezhetjük, hogy mely $Tx = (\varphi(x))$ transzformációra invariáns. E kérdésre más alkalommal kívánunk visszatérni.

7. §. Az előállíthatóság bizonyítása

Legyen $\varphi(y)$ a $0 < y < 1$ intervallumban értelmezett nemnegatív függvény. Tegyük fel továbbá, hogy $\varphi(y)$ az alábbi A) és B) vagy A) és B)' feltételek egyikének tesz eleget:

A) $\varphi'(y)$ folytonos és monoton növekvő a $0 < y < 1$ nyílt intervallumban,

B) $\varphi(0) = 0$ és $\varphi'(0) = \lambda_0 > 1$;

B') $\varphi(1) = 1$ és $\varphi'(1) = -\lambda_1 \leq -1$.

Nilván az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $0 \leq x < 1$. Legyen $r_0(x) = x$ és definiáljuk az $r_n(x)$ és $\varepsilon_n(x)$ számsorozatot a következőképpen:

$$r_{n+1}(x) = (\varphi(r_n(x))), \varepsilon_{n+1}(x) = [\varphi(r_n(x))] \quad (n = 0, 1, \dots).$$

Jelölje $y = f(x)$ az $x = \varphi(y)$ függvény inverzét. A B) esetben, ha $M = \lim_{x \rightarrow 1} \varphi(x)$ ($M = +\infty$ is lehetséges) $f(x)$ a $0 \leq x < M$ intervallumban van értelmezve, ott $0 \leq f(x) < 1$, továbbá $f'(x)$ nemnegatív, monoton csökkenő és folytonos függvény és $f'(x) \leq \frac{1}{\lambda_0} < 1$. A B') esetben, ha $M = \lim_{y \rightarrow 0} \varphi(y)$ ($M = +\infty$ is lehetséges) $f(x)$ az $1 \leq x < M$ intervallumban van értelmezve, ott $0 \leq f(x) < 1$, $f'(1) = \frac{1}{\lambda_1} \leq -1$, $-1 < f'(x) < 0$, ha $1 < x < M$, $f'(x)$ monoton növekvő és folytonos.

Definiáljuk a $H_n(x, t)$ függvényeket ($0 \leq x < 1, 0 \leq t \leq 1$) a következőképpen:

$$(29) \quad H_n(x, t) = \frac{d}{dt} K_n(0, \varepsilon_1(x), \dots, \varepsilon_{n-1}(x), \varepsilon_n(x) + t),$$

ahol $K_n(z_0, z_1, \dots, z_n)$ (11.a) által van definiálva, továbbá legyen

$$k_n(x) = K_n(0, \varepsilon_1(x), \dots, \varepsilon_n(x)).$$

Bebizonyítjuk a következő tételt:

1. TÉTEL: Bármely x -re ($0 \leq x < 1$)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} k_n(x) = x.$$

BIZONYÍTÁS: Könnyen belátható, hogy

$$(30) \quad x = K_n(0, \varepsilon_1(x), \dots, \varepsilon_{n-1}(x), \varepsilon_n(x) + r_n(x)),$$

és így, mivel

$$(31) \quad k_n(x) = K_n(0, \varepsilon_1(x), \dots, \varepsilon_{n-1}(x), \varepsilon_n(x)).$$

(29) szerint

$$(32) \quad x - k_n(x) = \int_0^{r_n(x)} H_n(x, t) dt.$$

Mármost

$$(33) \quad H_n(x, t) = \prod_{j=1}^n f'(K_{n-j}(\varepsilon_j(x), \dots, \varepsilon_n(x) + t)).$$

Vizsgáljuk először a B) esetet. Mivel $0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{\lambda_0} < 1$, (33) szerint

$$(34) \quad 0 \leq H_n(x, t) \leq \left(\frac{1}{\lambda_0}\right)^n,$$

és így (32)-ből

$$(35) \quad 0 \leq x - k_n(x) \leq \left(\frac{1}{\lambda_0}\right)^n r_n(x) \leq \left(\frac{1}{\lambda_0}\right)^n,$$

tehát

$$(36) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} k_n(x) = x.$$

Vizsgáljuk most a B') esetet. Ha $f'(1) = -\lambda_1 < -1$, akkor $|f'(x)| \leq \frac{1}{\lambda_1} < 1$ és így a bizonyítás ugyanúgy megy mint a B) esetben. Ha $\lambda_1 = 1$, akkor valamivel finomabb megfontolásokra van szükség. Legyen x_0 az a pont, amelyre $x_0 + 1 = \varphi(x_0)$. Mivel $\varphi(x)$ monoton csökkenő, $x + 1$ monoton növekvő, $\varphi(0) > 0 + 1$ és $1 = \varphi(1) < 1 + 1$, tehát ilyen x_0 egy és csak egy létezik, $0 < x_0 < 1$, $x_0 = f(x_0 + 1)$, és ha $x_0 < x < 1$, akkor $\varphi(x) < x + 1$. Mármost vizsgáljuk a

$$(37) \quad t_j = K_{n-j}(\varepsilon_j(x), \dots, \varepsilon_n(x) + \tau)$$

számsorozatot, ahol $0 < \tau < 1$. Ha $j \geq 2$ és $t_j \geq x_0 + 1$, akkor

$$(38a) \quad |f'(t_j)| \leq |f'(x_0 + 1)|.$$

Ha azonban $t_j < x_0 + 1$, akkor

$$t_{j-1} = \varepsilon_{j-1}(x) + f(t_j) \geq 1 + f(x_0 + 1) = 1 + x_0,$$

és így

$$(38b) \quad |f'(t_{j-1})| \leq |f'(x_0 + 1)|.$$

Tehát mindenképpen

$$(38c) \quad |f'(t_{j-1})f'(t_j)| \leq |f'(x_0 + 1)| = \gamma < 1.$$

Mivel (32) szerint

$$(39a) \quad x - k_n(x) = r_n(x)H_n(x, \tau), \quad \text{ahol } 0 < \tau < r_n(x),$$

tehát (39a), (33) és (38c) szerint.

$$(39b) \quad |x - k_n(x)| \leq \gamma^{\left[\frac{n}{2}\right]},$$

vagyis (36) ez esetben is teljesül.

8. §. Az általános statisztikai tétel bizonyítása

E §-ban megtartjuk az előző § definícióit és jelöléseit, így többek között feltesszük, hogy $\varphi(y)$ a 7. §-ban tett feltevéseknek tesz eleget. Vezessük be továbbá a következő feltevést:

$$C) \quad \frac{\max_{0 \leq t \leq 1} |H_n(x, t)|}{\min_{0 \leq t \leq 1} |H_n(x, t)|} \leq C \quad (0 \leq x < 1; n = 1, 2, \dots),$$

ahol C sem x -től, sem n -től nem függ. Be fogjuk bizonyítani a következő tételt:

2. TÉTEL: Ha a $\varphi(y)$ függvényre teljesülnek az A) és B) feltevések és $\varphi(1)$ egész szám vagy $\varphi(1) = +\infty$, vagy teljesülnek az A) és B') feltevések és ez esetben $\varphi(0)$ egész szám vagy $\varphi(0) = +\infty$, továbbá teljesül a C) feltevés, és $g(x)$ tetszőleges a $[0, 1]$ intervallumban Lebesgue-szerint integrálható függvény, és $r_k(x)$ ($k = 0, 1, \dots$) (10) által van definiálva, akkor majdnem minden x -re létezik a

$$(40) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} g(r_k(x)) = M(g)$$

határérték és nem függ x -től.

BIZONYÍTÁS: Feltehetjük, hogy $0 \leq x < 1$, vagyis, hogy $\varepsilon_0(x) = 0$. Jelöljön $\mathbb{E}_n$ egy tetszőleges n -tagú $\mathbb{E}_n = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$ kanonikus sorozatot; $\mathbb{E}_n$ kanonikus voltából következik, hogy a $(K_n(0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n), K_n(0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n + 1))$ intervallumba nem esik se $K_n(0, \varepsilon'_1, \dots, \varepsilon'_n)$, se $K_n(0, \varepsilon'_1, \dots, \varepsilon'_n + 1)$ alakú szám, ahol $\mathbb{E}'_n = (\varepsilon'_1, \dots, \varepsilon'_n)$ $\mathbb{E}_n$ -től különböző kanonikus sorozat, vagyis a különböző $\mathbb{E}_n = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ kanonikus sorozatokhoz tartozó $(K_n(0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n), K_n(0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n + 1))$ intervallumok idegenek. Ennélfogva

$$(41) \quad \sum_{\mathbb{E}_n} |K_n(0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n + 1) - K_n(0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)| = 1,$$

ahol az összegezés az összes n -edrendű $\mathbb{E}_n = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ kanonikus sorozatokra vonatkozik. Legyen $Tx = (\varphi(x))$ ($0 \leq x < 1$). Akkor Tx a $(0, 1)$ intervallumnak egy önmagára való mérhető leképezése. Jelölje $T^{-1}E$ az E halmaz teljes eredetijét a T leképezésre nézve, vagyis legyen $T^{-1}E$ azon x számok összessége ($0 \leq x < 1$), amelyekre $Tx \in E$. Akkor nyilvánvalóan, ha $I_{a,b}$ az (a, b) intervallum és $\mu(E)$ jelöli E Lebesgue-mértékét,

$$(42) \quad \mu(T^{-n}I_{a,b}) = \sum_{\mathbb{E}_n} |K_n(0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n + b) - K_n(0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n + a)|,$$

ahol az összegezés az összes n -edrendű kanonikus $\mathbb{E}_n = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ sorozata-

tokra terjesztendő ki. (41)-ből

$$(43) \quad \sum_{\mathcal{E}_n} \min_{0 \leq t \leq 1} |H_n(x(\mathcal{E}_n), t)| \leq 1 \leq \sum_{\mathcal{E}_n} \max_{0 \leq t \leq 1} |H_n(x(\mathcal{E}_n), t)|,$$

továbbá (42)-ből

$$(44) \quad (b-a) \sum_{\mathcal{E}_n} \min_{0 \leq t \leq 1} |H_n(x(\mathcal{E}_n), t)| \leq \mu(T^{-n}I_{a,b}) \leq (b-a) \sum_{\mathcal{E}_n} \max_{0 \leq t \leq 1} |H_n(x(\mathcal{E}_n), t)|,$$

ahol $x(\mathcal{E}_n)$ egy olyan szám, amelyre

$$\varepsilon_k(x(\mathcal{E}_n)) = \varepsilon_k \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

(Ilyen $x = x(\mathcal{E}_n)$ létezik, mivel $\mathcal{E}_n = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$ feltevésünk szerint kano-nikus.) A C feltevés szerint tehát (43)-ból és (44)-ből következik, hogy

$$(45) \quad \frac{1}{C} \mu(E) \leq \mu(T^{-n}E) \leq C \mu(E)$$

hacsak $E [0, 1]$ egy részintervalluma. Ebből azonban nyilvánvalóan következik, hogy (45) akkor is fennáll, ha E tetszőleges véges vagy megszámlálható sok idegen intervallumból álló halmaz és így abban az esetben is, ha E tetszőleges mérhető halmaz.

Ennélfogva a Tx leképezésre teljesül a DUNFORD-MILLER-tétel feltevése és így tetszőleges $g(x)$ integrálható függvényre a (40) baloldalán álló határérték létezik és egy T -re invariáns $g^*(x)$ mérhető függvénnyel egyenlő. A követ-kező §-ban kimutatjuk, hogy T felbonthatatlan (metrikusan tranzitív) és ilyen-módon kell, hogy $g^*(x)$ majdnem mindenütt egy $M(g)$ állandóval legyen egyenlő. FATOU lemmájából könnyen következik, hogy ez az állandó véges kell, hogy legyen, ugyanis (45) szerint

$$(46) \quad \int_0^1 |g(T^k x)| dx \leq C \int_0^1 |g(x)| dx.$$

9. §. T felbonthatatlanságának bizonyítása

3. TÉTEL: Ha $\varphi(y)$ eleget tesz a 2. TÉTEL feltevéseinek, akkor a $Tx = (\varphi(x))$ leképezés felbonthatatlan, vagyis ha $T^{-1}E = E$, ahol E a $(0, 1)$ inter-vallum mérhető rész halmaza, akkor E vagy 0 mértékű, vagy 1 mértékű.

BIZONYÍTÁS: Tegyük fel, hogy E mérhető, $T^{-1}E = E$ és $\mu(E) = \delta > 0$. Ki fogjuk mutatni, hogy ez esetben $\mu(E) = 1$. KNOPP tétele szerint elegendő kimutatni, hogy megadható intervallumoknak egy olyan $\mathfrak{J}$ halmaza, hogy bár-mely (a, b) ($0 \leq a < b \leq 1$) intervallum előállítható véges vagy megszámlál-ható sok $\mathfrak{J}$ -hez tartozó idegen intervallum egyesítésekképpen és bármely $I \in \mathfrak{J}$ -re $\mu(EI) \geq J\mu(I)$, ahol $J > 0$ nem függ I -től.

Ez a következőképpen látható be: Legyen $I_n = (K_n(0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n), K_n(0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n + 1)) = (a, b)$, ahol $\mathcal{E}_n = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ kanonikus sorozat. Akkor ha

$$E(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in E, \\ 0, & \text{ha } x \notin E \end{cases}$$

és $x = x(\mathcal{E}_n)$ olyan szám, amelyre $\varepsilon_k(x) = \varepsilon_k$ ($k = 1, 2, \dots, n$), akkor

$$(47) \quad \mu(EI_n) = \left| \int_a^b E(x) dx \right| = \int_0^1 E(y) |H_n(x, y)| dy,$$

és így

$$(48) \quad \mu(EI_n) \geq \min_{0 \leq y \leq 1} |H_n(x, y)| \cdot \delta \geq \frac{\delta}{C} \max_{0 \leq y \leq 1} |H_n(x, y)| \geq \frac{\delta}{C} \left| \int_a^b dx \right| = \frac{\delta}{C} \mu(I_n),$$

tehát

$$(49) \quad \frac{\mu(EI_n)}{\mu(I_n)} \geq \frac{\delta}{C} = A.$$

Mivel az I_n intervallumok összessége az 1. TÉTEL szerint rendelkezik a KNOPP tételében szereplő tulajdonsággal, ezzel a 3. TÉTELT bebizonyítottuk. Ezzel egyben a 2. TÉTEL bizonyítása is teljessé vált.

10. §. Néhány példa

Vizsgáljunk most meg néhány példát, amelyekben az előbbieken bebizonyított tételek alkalmazhatók.

1. Legyen $\varphi(y) = qy$, ahol $q > 1$ egész szám; ez esetben 2. TÉTELünk alkalmazható és speciális esetként nyerjük a q -adikus kifejtéseket és így BOREL, ill. RAIKOV tételeit.

2. Legyen $\varphi(y) = \frac{1}{y}$, akkor teljesül az A) és B') feltevés és $\varphi(0) = +\infty$, továbbá mivel

$$K_n(0, z_1, \dots, z_n) = \frac{1}{z_1 + \frac{1}{z_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{z_n}}}},$$

ha $\frac{p_k(x)}{q_k(x)}$ jelöli $x = \frac{1}{\varepsilon_1(x) + \frac{1}{\varepsilon_2(x) + \frac{1}{\varepsilon_3(x) + \dots}}}$ k -edik közelítő törtjét ($k =$

$= 1, 2, \dots$), akkor egy jólismert képlet szerint (lásd [19])

$$(50) \quad K_n(0, \varepsilon_1(x), \dots, \varepsilon_n(x) + t) = \frac{p_{n-1}(x)(\varepsilon_n(x) + t) + p_{n-2}(x)}{q_{n-1}(x)(\varepsilon_n(x) + t) + q_{n-2}(x)},$$

tehát, mivel $p_{n-1}(x)q_{n-2}(x) - q_{n-1}(x)p_{n-2}(x) = (-1)^{n-2}$, kapjuk, hogy

$$(51) \quad H_n(x, t) = \frac{(-1)^{n-2}}{(q_{n-1}(x)(\varepsilon_n(x) + t) + q_{n-2}(x))^2}.$$

Ennélfogva, ha $0 \leq t \leq 1$

$$(52) \quad \frac{1}{(q_{n-1}(x)(\varepsilon_n(x) + 1) + q_{n-2}(x))^2} \leq |H_n(x, t)| \leq \frac{1}{(q_{n-1}(x)\varepsilon_n(x) + q_{n-2}(x))^2},$$

vagyis a C) feltevés teljesül $C = 4$ -gyel, ugyanis

$$\left(\frac{q_{n-1}(x)(\varepsilon_n(x) + 1) + q_{n-2}(x)}{q_{n-1}(x)\varepsilon_n(x) + q_{n-2}(x)} \right)^2 = \left(1 + \frac{1}{\varepsilon_n(x) + \frac{q_{n-2}(x)}{q_{n-1}(x)}} \right)^2 \leq 4.$$

Ennélfogva a $(0, 1)$ intervallum bármely E mérhető részhalmazára

$$(53a) \quad \mu(T^{-n}E) \leq 4\mu(E) \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Valójában ennél több igaz, ugyanis (44)-ből és (52)-ből következik, hogy

$$(53b) \quad \mu(T^{-n}E) \leq L_n \cdot \mu(E) \quad (n = 1, 2, \dots),$$

ahol

$$(54) \quad L_n = \sum_{q=1}^{\infty} \frac{F_n(q)}{q^2}.$$

Itt $F_n(q)$ azon $\frac{p}{q}$ racionális számok számát jelöli, amelyekre $1 \leq p \leq q$, p és q relatív prímek, és amelyek „ n -emeletes“ lánctört alakjában állíthatók elő, vagyis amelyek

$$\frac{p}{q} = \frac{1}{\varepsilon_1 + \frac{1}{\varepsilon_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{\varepsilon_n}}}}$$

alakúak ($\varepsilon_n = 1$ is megengedett!). S. HARTMAN [22] megmutatta indirekt úton (az invariáns $\nu(E)$ mérték segítségével), hogy az (54) által definiált L_n sorok konvergensek és

$$(55) \quad L_n \leq 2 \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Alábbiakban HARTMAN egyenlőtlenségére egy közvetlen bizonyítást adunk, melynek alapgondolata KUZMINTÓL származik. (l. [19]).

Legyen $\mathfrak{F}_n$ azon $\frac{p}{q}$ racionális számok halmaza ($q \geq 1$, $1 \leq p \leq q$, p és q relatív prímek), amelyek előállíthatók n -emeletes lánc tört alakjában, és legyen

$$(56) \quad \Phi_n^{(\lambda)}(x) = \sum_{\frac{p}{q} \in \mathfrak{F}_n} \frac{1}{(q+px)^\lambda} \quad (0 \leq x < 1; \lambda > 1).$$

Ha $\frac{p}{q} \in \mathfrak{F}_{n+1}$, akkor $\frac{p}{q} = \frac{1}{k + \frac{r}{s}} = \frac{s}{ks+r}$, ahol $\frac{r}{s} \in \mathfrak{F}_n$, tehát

$$(57) \quad \Phi_{n+1}^{(\lambda)}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\frac{r}{s} \in \mathfrak{F}_n} \frac{1}{((ks+r)+sx)^\lambda} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+x)^\lambda} \Phi_n^{(\lambda)}\left(\frac{1}{k+x}\right).$$

Legyen most $\lambda = 2$, akkor

$$(58) \quad \Phi_1^{(2)}(x) = \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{(q+x)^2} \leq \frac{1}{(1+x)^2} + \int_{1+x}^{\infty} \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{1+x} \left(1 + \frac{1}{1+x}\right) \leq \frac{2}{1+x}.$$

Mivel továbbá

$$(59) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+x)^2} \cdot \frac{2}{1 + \frac{1}{k+x}} = \frac{2}{1+x},$$

tehát teljes indukcióval következik n minden értékére

$$\Phi_n^{(2)}(x) \leq \frac{2}{1+x} \quad (0 \leq x \leq 1),$$

és így

$$\sum_{q=1}^{\infty} \frac{\mathfrak{F}_n(q)}{q^2} = \Phi_n^{(2)}(0) \leq 2.$$

Ezzel (55)-öt bebizonyítottuk. Bizonyítási módszerünk többet is kiad. Ha ugyanis $\lambda > 1$ tetszőleges, akkor

$$(60) \quad \Phi_1^{(\lambda)}(x) = \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{(q+x)^\lambda} \leq \frac{1}{(1+x)^\lambda} + \int_{1+x}^{\infty} \frac{dt}{t^\lambda} \leq \frac{\lambda}{\lambda-1} \frac{1}{(1+x)^{\lambda-1}} \leq \frac{\lambda}{\lambda-1}.$$

Ennélfogva (57) szerint

$$(61) \quad \Phi_2^{(\lambda)}(x) \leq \left(\frac{\lambda}{\lambda-1}\right)^2,$$

és általában

$$(62) \quad \Phi_n^{(\lambda)}(x) \leq \left(\frac{\lambda}{\lambda-1}\right)^n.$$

Tehát, ha $0 < \varepsilon \leq 1$

$$(63) \quad \Phi_n^{(1+\varepsilon)}(0) = \sum_{q=1}^{\infty} \frac{F_n(q)}{q^{1+\varepsilon}} \leq \left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right)^n,$$

és így, mindkét oldalt $\varepsilon^{n-1+\delta}$ -val ($0 < \delta < 1$) beszorozva és ε szerint 0-tól 1-ig integrálva következik, hogy a

$$(64) \quad \sum_{q=2}^{\infty} \frac{F_n(q)}{q(\log q)^{n+\delta}}$$

sor konvergens, ha $\delta > 0$ ($n = 1, 2, \dots$). Ez némi felvilágosítást nyújt $F_n(q)$ nagyságrendjére vonatkozólag.

3. Vizsgáljuk most az általánosított *Bolyai—Farkas*-féle algoritmust. Ez esetben $\varphi(y) = (1+y)^m - 1$, és így az A) és B) feltevések teljesülnek és $\varphi(1) = 2^m - 1$ egész szám. Vizsgáljuk meg a C) feltevés teljesülését: Ez esetben

$$\frac{\max_{0 \leq t \leq 1} H_n(x, t)}{\min_{0 \leq t \leq 1} H_n(x, t)} = \prod_{j=1}^n \left(\frac{\varepsilon_j + \sqrt[m]{\varepsilon_{j+1} + \dots + \sqrt[m]{\varepsilon_n + 2}}}{\varepsilon_j + \sqrt[m]{\varepsilon_{j+1} + \dots + \sqrt[m]{\varepsilon_n + 1}}} \right)^{1 - \frac{1}{m}}.$$

Mivel $\frac{a+c}{a+b} \leq \frac{c}{b}$, ha $0 < b \leq c$ és $a \geq 0$, tehát

$$\frac{\max_{0 \leq t \leq 1} H_n(x, t)}{\min_{0 \leq t \leq 1} H_n(x, t)} \leq \prod_{j=1}^n \left(1 + \frac{1}{\varepsilon_n + 1} \right)^{\left(1 - \frac{1}{m}\right) \frac{1}{m^{n-j}}} \leq 2^{\left(1 - \frac{1}{m}\right) \left(1 + \frac{1}{m} + \dots + \frac{1}{m^{n-1}}\right)} \leq 2,$$

tehát a C) feltevés, $C = 2$ -vel teljesül.

4. Bemutatunk egy algoritmust, amely nem tartozik a tárgyalta kategóriákba.

Legyen $\varphi(x) = \frac{x}{1-x}$. Akkor $\varphi(x)$ -re nyilván teljesül az A) feltevés. A B) feltevés nem teljesül, mivel $\varphi'(0) = 1$ ennek ellenére az 1. TÉTEL állítása ez esetben is érvényes.²²

²² Általában igaz az, hogy az 1. TÉTEL állítása akkor is érvényes, ha az A) feltétel, és ha a B) feltétel helyett a következő gyengébb feltétel teljesül: B*) $\varphi(0) = 0$ és $\varphi'(0) - \lambda_0 \geq 1$. Ugyanis $\lambda_0 = 1$ esetben (32)-ből $|X - k_n(x)| < \gamma^{V_n}$, ahol $\gamma = f'(1) < 1$ és V_n az $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ számok között a 0-tól különbözők számát jelöli. Ha tehát $\lim_{n \rightarrow \infty} V_n = +\infty$, akkor $\lim_{n \rightarrow \infty} k_n(x) = x$; V_n azonban csak akkor nem tart $+\infty$ -hez, ha x véges f -láncsal állítható elő, hiszen egyébként bármely k -hoz van olyan s nemnegatív egész szám, amelyre $\varepsilon_{k+s}(x) \geq 1$; ellenkező esetben ugyanis $r_k(x) < r_{k+1}(x) < \dots < f(1)$ volna, és így léteznék $0 < \xi = \lim_{s \rightarrow \infty} r_{k+s}(x) \leq f(1)$ és kielégítené a $\xi = \varphi(\xi)$ egyenletet. Mivel $\xi < \varphi(\xi)$, ha $\xi > 0$, ez lehetetlen, amivel állításunkat bebizonyítottuk.

Ha x közönséges lánc törtelőállítás

$$x = \frac{1}{s_1 + \frac{1}{s_2 + \frac{1}{s_3 + \dots}}}$$

akkor az ε_k számok a következőképpen határozhatók meg:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \varepsilon_2 = \dots = \varepsilon_{s_1-1} = 0, \varepsilon_{s_1} = s_2, \\ \varepsilon_{s_1+1} &= \varepsilon_{s_1+2} = \dots = \varepsilon_{s_1+s_3-1} = 0, \varepsilon_{s_1+s_3} = s_4,\end{aligned}$$

s. i. t. Az ε_k sorozatban a 0 jegy sűrűsége eggyel, a többi jegy sűrűsége pedig zérussal egyenlő, azonban a *zérustól különböző* ε_k jegyek sorozatában létezik a k szám ($k=1, 4 \dots$) *relatív* sűrűsége és $\frac{1}{\log 2} \log \frac{(k+1)^2}{k(k+2)}$ -vel egyenlő.

Ezek az állítások következnek a tárgyalt algoritmus és a közönséges lánc tört-kifejtés közti fentemlített összefüggésből, de levezethetők HOPF egy általános ergodikus tételéből is, annak figyelembevételével, hogy a $Tx = \left(\frac{x}{1-x}\right)$ transz-

formációra nézve a $r(E) = \int_E \frac{dx}{x}$ nem korlátos mérték invariáns. Mivel

$$\int_{\frac{k}{k+1}}^{\frac{k+1}{k+2}} \frac{dx}{x} = \log \frac{(k+1)^2}{k(k+2)} \quad (k=1, 2, \dots)$$

és

$$\int_0^{1/2} \frac{dx}{x} = +\infty,$$

az említett állítás HOPF ergodikus tételéből ([40]; nem egy-egy értelmű leképezésekre lásd [23]) valóban következik.

IRODALOM

- [1] K. KNOPP: *Darstellung der reellen Zahlen durch Grenzprozesse*, Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften, I. 1. 4., 1—30., B. G. Teubner, Leipzig u. Berlin, 1939.
- [2] O. PERRON: *Irrationalzahlen*, de Gruyter, Berlin u. Leipzig, 1921, pp. 90—127.
- [3] H. TIETZE: Über Kriterien für Konvergenz und Irrationalität unendlicher Kettenbrüche. *Math. Annalen*, **70** (1911) 236. o.
- [4] G. STRATEMEYER: Entwicklung positiver Zahlen nach Stammbrüchen, *Mitteilungen des Mat. Seminars der Univ. Giessen*, **20** (1931) 1—27.
- [5] G. PÓLYA—G. SZEGŐ: *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis*, Bd. I. Aufg. I. 184. Berlin, Springer, 1925, p. 33.
- [6] BOLYAI FARKAS: *Tentamen inventutem studiosam in elementa matheseos purae elementaris ac sublimioris methodo intuitiva evidentiaque huic propria introducendi*, ed. sec., Budapest, 1897, Vol. I.
- [7] FARKAS GYULA: A Bolyai-féle algoritmus, *Értekezések a matematikai tudományok köréből*, **8** (1881) 1—8., lásd továbbá VERESS PÁL: A Bolyai-féle algoritmus, *Menyenyiség-tani és Term. Tud. Didaktikai Lapok*, **1** (1943) 57—62.
- [8] B. H. BISSINGER: A generalization of continued fractions, *Bullettin of the Amer. Math. Soc.*, **50** (1944) 868—876.
- [9] C. I. EVERETT: Representations for real numbers, *Bulletin of the Amer. Math. Soc.* **52** (1946) 861—869.
- [10] É. BOREL: Les probabilités dénombrables et leurs applications arithmétiques, *Rendiconti del Circ. Mat. di Palermo*, **27** (1909) pp. 247—271.
- [11] R. O. KUZMIN: Sur un problème de Gauss, *Atti del Congresso Internazionale dei Matematici*, Bologna, 1928. Vol., **6** p. 83—89.
- [12] P. LÉVY: Sur les lois de probabilité dont dépendent les quotients complets et incomplets d'une fraction continue. *Bull. Soc. Math.*, **57** (1929) pp. 178—194.
- [13] P. LÉVY: *Théorie de l'addition des variables aléatoires*, 2. e. d. Paris, Gauthiers—Villars, 1954. Ch. IX.
- [14] P. LÉVY: Sur le développement en fraction continue d'un nombre choisi en hazard, *Comp. Math.*, **3** (1936) 286—303.
- [15] D. RAIKOFF: On some arithmetical properties of summable functions, *Mat. Sbornik n. s.*, **1** (1936) 377—384.
- [16] A. RÉNYI: A new axiomatic theory of probability, *Acta. Math. Acad. Sci. Hung.*, **6** (1955) 285—336; lásd továbbá A. RÉNYI: A számjegyek eloszlása való számok Cantor-féle előállításában, *Mat. Lapok*, **7** (1956) 77—100.
- [17] A. KHINTCHINE: Metrische Kettenbruchprobleme, *Comp. Math.*, **1** (1935) 359—382.
- [18] A. KHINTCHINE: Zur metrischen Kettenbruchtheorie, *Comp. Math.*, **3** (1936) 276—285.
- [19] A. KHINTCHINE: *Kettenbrüche*, B. G. Teubner, Leipzig, 1956.
- [20] C. RYLL-NARDZEWSKI: On the ergodic theorems II. Ergodic theory of continued fractions *Studia Math.*, **12** (1951) 74—79.
- [21] S. HARTMAN—E. MARCZEWSKY—C. RYLL-NARDZEWSKI: Théorèmes ergodiques et leurs applications, *Coll. Math.*, **2** (1951) 109—123.
- [22] S. HARTMAN: Quelques propriétés ergodiques des fractions continues. *Studia. Math.*, **12** (1951) 271—278.
- [23] F. RIESZ: Sur la théorie ergodique, *Commentarii Math. Helv.*, **17** (1944—1945) pp. 221—239.

- [24] K. KNOPP: Mengentheoretische Behandlung einiger Probleme der diophantischen Approximationen und der transfiniten Wahrscheinlichkeiten, *Math. Annalen*, **95** (1926) 409—426.
- [25] H. STEINHAUS: Sur les distances des points des ensembles de mesure positive, *Fund. Math.*, **1** (1920) 93—104.
- [26] N. DUNFORD—D. S. MILLER: On the ergodic theorem, *Transact. Amer. Math. Soc.*, **60** (1946) 538—549.
- [27] F. RIESZ: On a recent generalization of G. D. Birkhoff's ergodic theorem, *Acta Sci. Math.* (Szeged), **11** (1948) 193—200.
- [28] J. L. DOOB: *Stochastic processes*, Wiley, New-York, 1953.
- [29] A. RÉNYI: *Valószínűségszámítás*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1954.
- [30] M. KAC—R. SALEM—A. ZYGMUND: A gap theorem, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **63** (1948) 235—243.
- [31] J. F. KOKSMA: An arithmetical property of some summable functions, *Proc. Koninklijke Nederlandse Akad. van. Wet.*, **13** (1956) 959—972.
- [32] P. ERDŐS: On the strong law of large numbers, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **67** (1950) 51—56.
- [33] R. P. HALMOS: Measurable transformations, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **55** (1949) 1015—1034.
- [34] Y. N. DOWKER: Invariant measure and the ergodic theorem, *Duke Math. Journal*, **14** (1947) 1051—1061.
- [35] Y. N. DOWKER: Finite and σ -finite invariant measures, *Ann. of Mat.*, **54** (1951) 595—608.
- [36] Y. N. DOWKER: On measurable transformations in finite measure spaces, *Annals of Math.*, **62** (1955) 504—515.
- [37] Y. N. DOWKER: Sur les applications mesurables, *Comptes Rendus*, **242** (1956) 329—331.
- [38] M. COTLAR—R. A. RICABARRA: On a theorem of E. Hopf. *Rev. Union Mat. Argentina*, **14** (1949) 49—63.
- [39] P. CALDERON: Sur les mesures invariantes, *Comptes Rendus*, **240** (1955) 1960—1962.
- [40] E. HOPF: *Ergodentheorie*, Ergebnisse der Math. u. Grenzgebiete, Berlin, Springer, 1937.

(Beérkezett: 1957. VII. 11.)