A HILBERT-TÉR NORMÁLIS TRANSZFORMÁCIÓINAK GYENGÉN KONVERGENS SOROZATAIRÓL

(Székfoglaló előadás, elhangzott 1957 március 22-én)

SZŐKEFALVI-NAGY BÉLA

1. BEVEZETÉS. A következőkben jelentsen $\mathfrak{H}$ Hilbert-teret, amelynek a dimenziója,

$$\mathfrak{d} = \dim \mathfrak{H},$$

tetszőleges *végtelen* (megszámlálható vagy nem megszámlálható) kardinális szám lehet.

Jelöljük $\mathfrak{B}$-vel a $\mathfrak{H}$ tér korlátos lineáris transzformációinak a halmazát. $\mathfrak{B}$ maga is metrikus lineáris tér, amelyben a metrikát a transzformációk normája által értelmezzük. Az e metrikával kapcsolatos konvergencia- és környezetfogalmon kívül más konvergencia- és környezetfogalom is fontossággal bír a $\mathfrak{B}$ halmaz vizsgálatában; a következőkben az ún. *gyenge* konvergenciáról és topológiáról lesz szó.

Mint ismeretes, a $B_n \in \mathfrak{B}$ sorozat $(n = 1, 2, \ldots)$ akkor *konvergál gyengén* $\mathfrak{B}$ egy B eleméhez, jelben

$$B_n \rightharpoonup B,$$

ha $\mathfrak{H}$ bármely f, g elempárjára fennáll a

$$(B_n f, g) \to (Bf, g) \qquad (n \to \infty)$$

konvergencia. $\mathfrak{B}$ egy B_0 elemének egy *gyenge környezetén* pedig $\mathfrak{B}$ mindazon B elemeinek halmazát értjük, amelyekre

$$|(Bf_i, g_i) - (B_0 f_i, g_i)| < \varepsilon \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

ahol ε adott pozitív szám, $f_1, \ldots, f_n$, $g_1, \ldots, g_n$ pedig véges sok adott elem $\mathfrak{H}$-ból; röviden mondva ez B_0-nak a

$$\mathfrak{V}(B_0; f_1, \ldots, f_n; g_1, \ldots, g_n; \varepsilon)$$

- környezete. Az ezen környezetfogalom által származtatott topológia a $\mathfrak{B}$ tér *gyenge topológiája.*

Ha $\mathfrak{E}$ a $\mathfrak{B}$ tér elemeinek egy részhalmaza, jelöljük $\bar{\mathfrak{E}}$-sal ennek a gyenge topológia értelmében való lezárását; $\bar{\mathfrak{E}}$-ba tehát $\mathfrak{B}$ azon „pontjai" tartoznak, amelyeknek bármely gyenge környezetébe esik $\mathfrak{E}$-nek legalább egy pontja ($\bar{\mathfrak{E}}$ tehát $\mathfrak{E}$-nek és az $\mathfrak{E}$ gyenge torlódási pontjai halmazának az egyesítése).

Jelöljük továbbá $\tilde{\mathfrak{C}}$-vel az $\mathfrak{C}$-ből kiválasztható gyengén konvergens $\{B_n\}$ sorozatok limeszeinek a halmazát. Nyílvánvaló, hogy

$$\mathfrak{C} \subseteq \tilde{\mathfrak{C}} \subseteq \overline{\mathfrak{C}},$$

azonban általában

$$\tilde{\mathfrak{C}} \neq \overline{\mathfrak{C}}$$

(v.ö. [3], 383; itt lényeges, hogy $\mathfrak{H}$-ról feltettük, hogy végtelen dimenziós, mert véges dimenziós euklidesi tér esetében itt mindig egyenlőség van).

A következőkben $\mathfrak{B}$-nek bizonyos speciális részhalmazait fogjuk tekinteni:

$$\mathfrak{C}_T, \ \mathfrak{C}_U, \ \mathfrak{C}_A, \ \mathfrak{C}_E.$$

$\mathfrak{C}_T$ a $\mathfrak{B}$ tér *egységgömbje*, azaz $\mathfrak{H}$ mindazon T lineáris transzformációinak a halmaza, amelyekre $\|T\| \leqq 1$ (ezek a $\mathfrak{H}$ tér ún. *kontrakciói*). Speciális kontrakciók az U unitér transzformációk, az $O \leqq A \leqq I$ feltételnek eleget tevő A önadjungált transzformációk, és az E (ortogonális) projekciók. Ezek halmazait jelölje rendre $\mathfrak{C}_U$, $\mathfrak{C}_A$, $\mathfrak{C}_E$. Nyílván

$$\mathfrak{C}_T \supseteq \mathfrak{C}_U, \quad \mathfrak{C}_T \supseteq \mathfrak{C}_A \supseteq \mathfrak{C}_E.$$

Mind az $\mathfrak{C}_U$, mind az $\mathfrak{C}_E$ halmaz nyílvánvaló értelemben az $\mathfrak{C}_T$ egységgömb „felületén" fekszik (kivéve $\mathfrak{C}_E$ egy pontját, a O projekciót). Az $\mathfrak{C}_U$ halmazról pedig éppenséggel könnyen kimutatható, hogy pontjai az $\mathfrak{C}_T$ egységgömbnek csupa „szélső" pontjai, ti. ha egy U unitér transzformáció előállítható az

$$U = \lambda T_1 + (1-\lambda) T_2$$

alakban, ahol T_1, T_2 kontrakciók, és $0 < \lambda < 1$, akkor szükségképpen $T_1 = T_2 = U$.

Ugyanígy könnyű kimutatni, hogy az $\mathfrak{C}_E$ halmaz pontjai pedig az $\mathfrak{C}_A$ halmaznak csupa szélső pontjai.

Annál meglepőbb az a HALMOS-tól [2] származó tétel, amely szerint az $\mathfrak{C}_U$ halmaz gyenge lezárása az egész egységgömbbel, az $\mathfrak{C}_E$ halmazé pedig az egész $\mathfrak{C}_A$ halmazzal egyenlő:

$$\overline{\mathfrak{C}_U} = \mathfrak{C}_T, \quad \overline{\mathfrak{C}_E} = \mathfrak{C}_A. \tag{1}$$

E dolgozatban megmutatjuk, hogy a gyenge topológiában való lezárás helyett elég itt a gyengén konvergens sorozatok limeszeivel való lezárást venni, azaz igaz az is, hogy

$$\tilde{\mathfrak{C}}_U = \mathfrak{C}_T, \quad \tilde{\mathfrak{C}}_E = \mathfrak{C}_A. \tag{2}$$

Minthogy az

$$\tilde{\mathfrak{C}}_U \subseteq \mathfrak{C}_T, \quad \tilde{\mathfrak{C}}_E \subseteq \mathfrak{C}_A$$

relációk nyílvánvalóan igazak, azt kell csak megmutatnunk, hogy minden T kontrakcióhoz található unitér transzformációknak olyan $\{U_k\}$ sorozata, amely gyengén T-hez tart, és minden $A \in \mathfrak{C}_A$ transzformációhoz található projekcióknak olyan $\{E_k\}$ sorozata, amely gyengén A-hoz tart:

$$(3) \qquad U_k \rightharpoonup T, \quad E_k \rightharpoonup A \qquad (k \to \infty).$$

Az első reláció nem vonja maga után, hogy U_k négyzete T négyzetéhez tart, stb., azonban látni fogjuk, hogy az $\{U_k\}$ sorozat választható úgy is, hogy U_k bármely pozitív egész kitevőjű hatványa T megfelelő hatványához tartson gyengén, mégpedig az összes hatványokra nézve egyenletes módon. Analóg állítást fogunk bebizonyítani kontrakciók egyparaméteres félcsoportjaira. A második relációt ugyancsak általánosabb alakban bizonyítjuk be, amelyben az egyetlen A transzformáció helyébe a λ valós paramétertől monoton módon függő $A(\lambda)$ transzformáció lép.

Állapodjunk meg a következő *értelmezés*ben: Függjenek a $B, B_1, B_2, \ldots (\in \mathfrak{B})$ transzformációk egy (absztrakt) p paramétertől. Akkor mondjuk, hogy B_k p-re nézve egyenletes módon gyengén tart B-hez, ha minden pozitív ε-hoz és minden $f, g \in \mathfrak{H}$ elempárhoz található olyan, p-től nem függő k_0 index, hogy $k \geqq k_0$ esetében minden p paraméterértékre álljon:

$$|(B_k(p)f, g) - (B(p)f, g)| < \varepsilon.$$

Állításaink a következők:

I. *A $\mathfrak{H}$ Hilbert-tér minden T kontrakciójához található $\mathfrak{H}$ unitér transzformációinak egy olyan $\{U_k\}$ sorozata, hogy minden rögzített n természetes számra*

$$U_k^n \rightharpoonup T^n \qquad (k \to \infty),$$

egyenletesen n-re nézve. Az U_k transzformációk választhatók úgy, hogy egymással mind unitér-ekvivalensek legyenek.

II. *Legyen $T(s)$ $(s \geqq 0)$ a $\mathfrak{H}$ tér kontrakcióiból álló egyparaméteres félcsoport, amely s-től gyengén folytonosan függ ($T(s) \rightharpoonup I$, ha $s \to 0$). Ekkor található $\mathfrak{H}$ unitér transzformációiból álló egyparaméteres, erősen folytonos félcsoportoknak olyan $\{U_k(s)\}$ sorozata, amelyre*

$$U_k(s) \rightharpoonup T(s), \qquad (k \to \infty),$$

s-re nézve egyenletesen. Az $U_k(s)$ félcsoportok választhatók úgy, hogy egymás közt mind unitér-ekvivalensek legyenek.

III. *Legyen $A(\lambda)$ $(-\infty \leqq \lambda \leqq \infty)$ a $\mathfrak{H}$ tér korlátos önadjungált transzformációja, amely a λ paraméternek monoton növekvő, jobbról folytonos függvénye, $A(-\infty) = O$, $A(+\infty) = \lim\limits_{\lambda \to \infty} A(\lambda) = I$. Található ekkor hasonló tulajdonságú, de projekcióértékű függvényeknek (tehát ún. spektrálseregeknek) olyan $\{E_k(\lambda)\}$ sorozata, amelyre*

$$E_k(\lambda) \rightharpoonup A(\lambda) \qquad (k \to \infty),$$

λ-ra nézve egyenletesen. Az $E_k(\lambda)$ spektrálseregek választhatók egymással unitér-ekvivalenseknek.

A (3) alatti állítások közül a második ebből $A(\lambda)$-nak pl. a következő választásával adódik:

$$A(\lambda)=O \quad (\lambda<0), \quad A(\lambda)=A \quad (0\leqq\lambda<1), \quad A(\lambda)=I \quad (\lambda\geqq 1).$$

A (3) alatti állítások értelmében léteznek speciálisan olyan $\{U_k\}$, $\{E_k\}$ sorozatok, amelyekre

$$U_k \rightharpoonup \frac{1}{2}I, \qquad E_k \rightharpoonup \frac{1}{2}I.$$

De ekkor

$$U_k^{-1}=U_k^* \rightharpoonup \left(\frac{1}{2}I\right)^* = \frac{1}{2}I \neq \left(\frac{1}{2}I\right)^{-1},$$

$$E_k^2=E_k \rightharpoonup \frac{1}{2}I \neq \left(\frac{1}{2}I\right)^2,$$

ami azt bizonyítja, hogy *sem az inverzképzés, sem a négyzetreemelés nem folytonos műveletek a gyenge konvergenciára vonatkozólag.* Hogy ezek nem folytonosak a $\mathfrak{B}$ gyenge topológiájára vonatkozólag, arra hasonló okoskodással már HALMOS [2] rámutatott.

2. AZ I—III. TÉTELEK BIZONYÍTÁSA. Kezdjük az I. tétel bizonyításával. Legyen tehát T a $\mathfrak{H}$ tér egy kontrakciója. Egy előbbi tételünk szerint [4] létezik egy, általában bővebb $\mathfrak{H}'$ Hilbert-térben egy olyan U' unitér transzformáció, amelyre érvényes a következő összefüggés:

$$T^n f = P'U'^n f \qquad (f\in\mathfrak{H};\ n=0,1,2,\ldots), \tag{4}$$

ahol is P' a $\mathfrak{H}$ altérre való (ortogonális) vetítés operátorát jelenti. Megkívánható, hogy $\mathfrak{H}'$-t az $U'^n f$ $(f\in\mathfrak{H};\ n=0,\pm 1,\pm 2,\ldots)$ alakú elemek kifeszítsék; ebben az esetben nyilvánvalóan

$$\dim\mathfrak{H}'=\aleph_0\cdot\dim\mathfrak{H}=\aleph_0\cdot\mathfrak{d}=\mathfrak{d}; \tag{5}$$

itt újra felhasználtuk azt, hogy a $\mathfrak{d}$ kardinális szám végtelen.

Legyen $\mathfrak{Q}$ a $\mathfrak{H}$ térnek egy olyan altere, amelyre

$$\dim(\mathfrak{H}\ominus\mathfrak{Q})=\mathfrak{d}, \tag{6}$$

és jelöljük Q-val, ill. Q'-vel a $\mathfrak{Q}$-ra való vetítés operátorát $\mathfrak{H}$-ban, ill. $\mathfrak{H}'$-ben. Minthogy

$$\mathfrak{Q}\subseteq\mathfrak{H}\subseteq\mathfrak{H}',$$

azért

$$QP'=Q';$$

ennélfogva (4)-ből következik, hogy

$$QT^n f = Q'U'^n f \qquad (f \in \mathfrak{H};\ n = 0, 1, \ldots). \tag{7}$$

(5)-ből és (6)-ból következik, hogy

$$\dim (\mathfrak{H}' \ominus \mathfrak{Q}) = \dim (\mathfrak{H} \ominus \mathfrak{Q}).$$

Ennélfogva létezik $\mathfrak{H}'$-nek $\mathfrak{H}$-ra való olyan τ izometrikus leképezése, amely a két tér közös $\mathfrak{Q}$ alterének elemeit invariánsan hagyja, a $\mathfrak{Q}$-ra merőleges $\mathfrak{H}' \ominus \mathfrak{Q}$, $\mathfrak{H} \ominus \mathfrak{Q}$ altereket pedig egymásra képezi le. Mint könnyen belátható, ekkor

$$\tau Q' \tau^{-1} = Q \qquad (\mathfrak{H}\text{-ban}).$$

Legyen

$$\tau U' \tau^{-1} = U \qquad (\mathfrak{H}\text{-ban}); \tag{8}$$

U a $\mathfrak{H}$ tér unitér transzformációja.

(7)-ből következik, hogy a $\mathfrak{H}$ tér minden g elemére

$$QT^n Qg = Q'U'^n Qg = \tau^{-1} Q U^n \tau Qg = QU^n Qg,$$

hiszen a $\mathfrak{Q}$ elemei invariánsok τ-ra és τ^{-1}-re vonatkozólag. Ennélfogva

$$QT^n Q = QU^n Q \qquad (n = 0, 1, \ldots). \tag{9}$$

Ezen előkészítő meggondolások után tekintsük a $\mathfrak{H}$ tér egy felbontását megszámlálhatóan végtelen sok, páronként ortogonális $\mathfrak{P}_i$ altér vektori összegére:

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{P}_1 \oplus \mathfrak{P}_2 \oplus \mathfrak{P}_3 \oplus \ldots,$$

a $\mathfrak{P}_i$ alterek mindegyikének a dimenziója legyen ugyanaz, mint a $\mathfrak{H}$ téré, azaz $\mathfrak{d}$-vel egyenlő. Ilyen felbontás létezése következik abból, hogy $\mathfrak{d}$ végtelen kardinális szám lévén, $\aleph_0 \cdot \mathfrak{d} = \mathfrak{d}$.

Legyen

$$\mathfrak{Q}_k = \mathfrak{P}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{P}_k. \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

Ekkor

$$\dim (\mathfrak{H} \ominus \mathfrak{Q}_k) = \dim (\mathfrak{P}_{k+1} \oplus \mathfrak{P}_{k+2} \oplus \ldots) = \aleph_0 \cdot \mathfrak{d} = \mathfrak{d}.$$

Az előzők szerint tehát k minden értékére létezik egy olyan U_k unitér transzformációja a $\mathfrak{H}$ térnek, amelyre

$$Q_k T^n Q_k = Q_k U_k^n Q_k \qquad (k = 1, 2, \ldots;\ n = 0, 1, 2, \ldots); \tag{10}$$

Q_k jelenti a $\mathfrak{Q}_k$-ra való vetítés operátorát $\mathfrak{H}$-ban. (8) folytán az U_k transzformációk egymással unitér-ekvivalensek. Bevezetve az

$$S_k(n) = T^n - U_k^n$$

jelölést, (10)-et így is írhatjuk:

$$Q_k S_k(n) Q_k = O.$$

Ezt felhasználva kapjuk, hogy

$$S_k(n) = [Q_k + (I - Q_k)]\, S_k(n)\, [Q_k + (I - Q_k)] =$$
$$= Q_k S_k(n)(I - Q_k) + (I - Q_k) S_k(n) Q_k + (I - Q_k) S_k(n)(I - Q_k),$$

tehát tetszésszerinti $f, g \in \mathfrak{H}$ elemekre

$$(S_k(n) f, g) = (Q_k S_k(n)(I - Q_k) f, g) + (S_k(n) Q_k f, (I - Q_k) g) +$$
$$+ (S_k(n)(I - Q_k) f, (I - Q_k) g).$$

Minthogy

$$\|S_k(n)\| \leqq \|T^n\| + \|U_k^n\| \leqq 2, \tag{11}$$

következik ebből, hogy

$$|(S_k(n)f,g)| \leqq 2\{\|(I - Q_k)f\|\|g\| + \|f\|\|(I - Q_k)g\| + \|(I - Q_k)f\|\|(I - Q_k)g\|\}.$$

Az

$$\|(I - Q_k)f\|^2 = \|\sum_{k+1}^{\infty} P_i f\|^2 = \sum_{k+1}^{\infty} \|P_i f\|^2$$

összefüggésből látható, hogy ha $k \to \infty$, akkor $(I - Q_k)f \to 0$, és ugyanigy $(I - Q_k)g \to 0$. Ennélfogva elég nagy k-ra n-től függetlenül érvényes:

$$|(S_k(n) f, g)| < \varepsilon.$$

Ezzel az I. tétel bizonyítását befejeztük.

A II. tétel bizonyítása analóg módon történhet. Felhasználjuk azt az előbbi eredményünket [4], hogy a $T(s)$ félcsoport előállítható a következő alakban:

$$T(s) f = P' U'(s) f \qquad (f \in \mathfrak{H},\ s \geqq 0),$$

ahol $U'(s)$ egy erősen folytonos, egyparaméteres, unitér csoport egy alkalmas $\mathfrak{H}'$ térben, $\mathfrak{H}' \supseteq \mathfrak{H}$; ahol is megkövetelhető, hogy $\mathfrak{H}'$ minimális legyen abban az értelemben, hogy az $U'(s) f$ $(f \in \mathfrak{H},\ -\infty < s < \infty)$ alakú elemek $\mathfrak{H}'$-t kifeszítsék. $U'(s)$-nek mint s függvényének folytonossága miatt $\mathfrak{H}'$-t ekkor a racionális s paraméterértékekhez tartozó $U'(s) f$ elemek is kifeszítik, amiből következik, hogy

$$\dim \mathfrak{H}' = \aleph_0 \cdot \mathfrak{d} = \mathfrak{d}.$$

Ezek után ugyanúgy okoskodunk, mint fentebb, csupán U_k^n szerepét $U_k(s)$, $S_k(n)$ szerepét pedig $S_k(s) = T(s) - U_k(s)$ veszi át, és felhasználjuk a nyilvánvaló $\|S_k(s)\| \leqq 2$ egyenlőtlenséget.

A III. tétel bizonyítását NEUMARK egy tételére alapozzuk (v.ö. [4]), amely szerint $A(\lambda)$ előállítható az

$$A(\lambda) f = P' E'(\lambda) f \qquad (f \in \mathfrak{H},\ -\infty < \lambda < \infty)$$

alakban, ahol $\{E'(\lambda)\}$ közönséges (projekciókból álló) spektrálsereg valamely $\mathfrak{H}'$ térben, $\mathfrak{H}' \supseteq \mathfrak{H}$. Megkövetelhető, hogy $\mathfrak{H}'$ minimális legyen abban az értelemben, hogy az $E'(\lambda)f$ ($f \in \mathfrak{H}$, $-\infty < \lambda < \infty$) alakú elemek kifeszítsék; $E'(\lambda)$-nak mint λ függvényének jobbról való folytonossága miatt elég itt a racionális λ értékekre szorítkozni, amiből újra az következik, hogy

$$\dim \mathfrak{H}' = \aleph_0 \cdot \mathfrak{d} = \mathfrak{d}.$$

A bizonyítás során fellépő $S_k(\lambda) = A(\lambda) - E_k(\lambda)$ transzformációkra nyilván érvényes: $\|S_k(\lambda)\| \leqq 2$, és így a bizonyítás az előbbiekhez hasonló módon fejezhető be.

3. SZUBNORMÁLIS TRANSZFORMÁCIÓK. Az I. tétel közvetlen folyománya, hogy minden $S \in \mathfrak{B}$ transzformációhoz található olyan, korlátos *normális* transzformációkból álló $\{N_k\}$ sorozat, hogy minden rögzített természetes n számára álljon:

$$N_k^n \rightharpoonup S^n \qquad (k \to \infty). \tag{12}$$

(Csupán $N_k = \|S\| U_k$ veendő, ahol $\{U_k\}$ az I. tétel szerint a $T = \frac{1}{\|S\|} S$ kontrakcióhoz megadható unitér transzformáció-sorozat.) (12)-ből következik, hogy

$$N_k^{*n} \rightharpoonup S^{*n} \qquad (k \to \infty),$$

de nem következik az is, hogy

$$N_k^{*m} N_k^n \rightharpoonup S^{*m} S^n \qquad (k \to \infty), \tag{13}$$

mert a gyenge konvergenciának nincs multiplikatív tulajdonsága. Ez nem zárja ki eleve annak a lehetőségét, hogy az $\{N_k\}$ sorozat speciális választása esetén (13) is kielégül. Kiderül azonban az, hogy ez csak bizonyos, további feltételt teljesítő S transzformációk esetében lehetséges. Ez a feltétel az, hogy S *szubnormális* legyen, azaz hogy létezzék korlátos normális N' folytatása valamely tágabb $\mathfrak{H}'$ térben.[1] Bebizonyítjuk ugyanis a következő tételt:

IV. *A korlátos lineáris S transzformációhoz akkor és csakis akkor található korlátos normális transzformációk olyan $\{N_k\}$ sorozata, amely a* (13) *feltételnek minden nem negatív egész m, n kitevőre eleget tesz, ha az S transzformáció szubnormális. Ebben az esetben az N_k transzformációk választhatók úgy, hogy egymással unitér-ekvivalensek legyenek.*

BIZONYÍTÁS. Először azt tegyük fel, hogy S szubnormális, azaz hogy van korlátos normális N' folytatása valamely $\mathfrak{H}' \subseteq \mathfrak{H}$ térben. Feltehetjük, hogy $\mathfrak{H}'$-t az

$$N'^{*m} N'^n f \qquad (f \in \mathfrak{H};\ m,\ n = 0, 1, \ldots)$$

[1] Eszerint minden korlátos normális transzformáció egyben szubnormális is (vehető ekkor $\mathfrak{H}' = \mathfrak{H}$, $N' = S$). Létezik azonban szubnormális transzformáció, amely nem normális is egyben (vö. HALMOS [2]).

alakú elemek kifeszítik, ugyanis, N' normális lévén, ezeknek az elemeknek a halmaza N'-re és N'^*-ra nézve invariáns és tartalmazza $\mathfrak{H}$-t ($m=n=0$). Ha $\mathfrak{H}'$ így van megválasztva, akkor dimenziója nyilván $\aleph_0 \cdot \mathfrak{d} = \mathfrak{d}$. Ha $f, g \in \mathfrak{H}$, akkor

$$(S^{*m} S^n f, g) = (S^n f, S^m g) = (N'^n f, N'^m g) = (N'^{*m} N'^n f, g);$$

ebből látható, hogy

$$S^{*m} S^n f = P' N'^{*m} N'^n f \qquad (f \in \mathfrak{H};\ m, n = 0, 1, \ldots),$$

ahol P' a $\mathfrak{H}$ altérre való vetítés operátora $\mathfrak{H}'$-ben. Ebből az összefüggésből kiindulva úgy okoskodhatunk tovább, mint az I. tétel bizonyításában. Az okoskodás során találkozunk a $\mathfrak{H}$ tér

$$S_k(m, n) = S^{*m} S^n - N_k^{*m} N_k^n$$

alakú transzformációival, ahol az N_k-k (minden k-ra) egymással unitér-ekvivalensek; nyilvánvaló, hogy

$$\|S_k(m, n)\| \leqq \|S\|^{m+n} + \|N'\|^{m+n};$$

ez a becslés k-tól független, de m-től és n-től függ. Az

$$S_k(m, n) \to O \qquad (k \to \infty)$$

konvergencia bizonyítása ugyanigy történik mint fentebb az $S_k(n) \to O$ ($k \to \infty$) konvergenciáé, csakhogy most ez a konvergencia m-re és n-re nézve általában nem egyenletes. Ha azonban $\|S\| \leqq 1$, akkor $\|N'\| \leqq 1$,[2] és így $\|S_k(m, n)\| \leqq 2$, következésképpen ekkor a (13) konvergencia m-re és n-re nézve egyenletes.

Ezzel bebizonyítottuk, hogy az S transzformáció szubnormális volta elégséges feltétel.

Most térjünk át e feltétel szükségességének a bizonyitására. Feltesszük, hogy létezik a $\mathfrak{H}$ tér korlátos normális transzformációinak olyan $\{N_k\}$ sorozata, amely a (13) feltételt kielégiti minden nemnegatív egész m, n kitevőpárra. Legyen $g_0, g_1, \ldots, g_r$ véges sok (nem szükségképpen különböző) elem $\mathfrak{H}$-ból; felhasználva N_k és N_k^* felcserélhetőségét, kapjuk, hogy

$$\sum_{i=0}^{r} \sum_{j=0}^{r} (S^{*j} S^i g_j, g_i) = \lim_{k \to \infty} \sum_{i=0}^{r} \sum_{j=0}^{r} (N_k^{*j} N_k^i g_j, g_i) =$$

$$= \lim_{k \to \infty} \left(\sum_{j=0}^{r} N_k^{*j} g_j, \sum_{i=0}^{r} N_k^{*i} g_i \right) =$$

$$= \lim_{k \to \infty} \left\| \sum_{j=0}^{r} N_k^{*j} g_j \right\|^2 \geqq 0.$$

Ebből azonban HALMOS és BRAM [1, 2] egy tétele szerint következik, hogy S szubnormális.

[2] Vö. [1], 3. lemma.

4. POZITÍV DEFINIT FÜGGVÉNYEK. Befejezésül röviden mutassunk rá arra, hogy a [4] dolgozat „főtétele" az előbbiekhez hasonló következményeket von maga után. E tétel egy Γ „$*$-félcsoporton" értelmezett, pozitív definit, operátorértékű $T(\xi)$ függvényre vonatkozik, amelyre $T(\varepsilon)=I$ (ε a Γ egységeleme), és azt állítja, hogy ez a Γ valamely tágabb $\mathfrak{H}'$ Hilbert-térben való $D(\xi)$ „előállításának" az eredeti $\mathfrak{H}$ térre való projekciója. Hogy e $\mathfrak{H}'$ tér dimenziójáról biztosítható legyen, hogy nem magasabb a $\mathfrak{H}$ tér dimenziójánál, $\mathfrak{d}$-nél, ki kell szabnunk még valami további feltételt:

Szeparabilitás feltétele. Létezik Γ-nak egy megszámlálható Γ_0 részhalmaza azzal a tulajdonsággal, hogy Γ minden α eleméhez található Γ_0 elemeiből alkotott olyan $\{\alpha_n\}$ sorozat, amelyre

$$\lim\sup C_{\alpha_n} < \infty,^3$$

és

$$T(\xi\alpha_n\eta) \rightharpoonup T(\xi\alpha\eta) \qquad (n\to\infty),$$

ahol ξ, η Γ-nak tetszésszerinti elemei.

E feltétel mellett érvényes a következő tétel:

V. *Létezik Γ-nak a $\mathfrak{H}$ tér korlátos lineáris transzformációival való, egymással unitér-ekvivalens előállításainak olyan $\{D_k(\xi)\}$ sorozata, amelyre*

$$\text{a)} \quad D_k(\xi) \rightharpoonup T(\xi) \qquad (k\to\infty),$$
$$\text{b)} \quad \|D_k(\xi)\| \leqq C_\xi;$$

a gyenge konvergencia ξ-re nézve egyenletes minden olyan részhalmazán Γ-nak, amelyen C_ξ mint ξ függvénye korlátos.

A bizonyítás az előbbi tételéhez teljesen hasonlóan végezhető el.

IRODALOM

[1] J. BRAM: Subnormal operators, *Duke Math. Journal*, **22** (1955), 75—93.

[2] P. R. HALMOS: Normal dilations and extensions of operators, *Summa Brasiliensis Math.*, **2** (1950) 125—134.

[3] J. VON NEUMANN: Zur Algebra der Funktionaloperationen und Theorie der normalen Operatoren, *Math. Annalen*, **102** (1929) 370—427.

[4] B. SZ.-NAGY: *Prolongements des transformations de l'espace de Hilbert qui sortent de cet espace.* A RIESZ—SZ.-NAGY: „Leçons d'analyse fonctionnelle" c. mű függeléke (Budapest, 1955).

(Beérkezett: 1957. VI. 28.)

[3] C_ξ ($\xi\in\Gamma$) jelentésére nézve utalunk a [4] dolgozatra.