SZTOCHASZTIKUS HALMAZFÜGGVÉNYEKRŐL. II.
(EGY ÚJ SZTOCHASZTIKUS INTEGRÁL)

PRÉKOPA ANDRÁS

Bevezetés

Jelen dolgozat tárgya a [13] dolgozatban bevezetett sztochasztikus halmazfüggvényekre vonatkozó integrál elméletének a felépítése.

A valószínűségszámítási irodalomban több különböző típusú sztochasztikus integrál ismeretes. Történetileg az első N. WIENERtől [16] származik. A stacionárius sztochasztikus folyamatok elméletében fellépő sztochasztikus Riemann- és Stieltjes-integrálokat A. N. KOLMOGOROV [9], [10] vezette be 1940-ben. Az utóbbihoz hasonló integrált a funkcionális analízisben is használnak önadjungált operátorok spektrális előállításánál. Egy független növekményű folyamatokkal definiált sztochasztikus Stieltjes-integrált vezetett be K. Ito 1951-ben [8].

Mindkettőt általánosította könyvében [5] J. L. DOOB. Az eddig felsorolt sztochasztikus integrálok esetében az alaptér, amelyben integrálunk, a számegyenes valamilyen halmaza. S. BOCHNERtől [1] származik egy olyan sztochasztikus integrál, amelyben absztrakt alaptér szerepel, azonban a véletlen értékű halmazfüggvény általában csak végesen additív és ezért az absztrakt Lebesgue-integrál elmélete nem általánosítható erre az esetre. Az e dolgozatban bevezetett integrál általános egyrészt abból a szempontból, hogy absztrakt alaptérben integrálunk, másrészt az integrálban fellépő valószínűségi változók momentumairól semmit sem teszünk fel, ellentétben az összes korábban bevezetett sztochasztikus integrálokkal, amelyekben valamilyen p-edrendű momentumok létezésére mindig szükség van, ahol $p \geqq 1$. A speciálitása abban van, hogy a mértéket helyettesítő $\xi(A)$ halmazfüggvény olyan tulajdonságú, hogy diszjunkt halmazokhoz független valószínűségi változókat rendel hozzá. Viszont éppen ez az a tulajdonság, amely lehetővé teszi az I. FEJEZET 1. §-ában definiált integrál általános feltételek mellett való exisztenciájának és számos tulajdonságának a bebizonyítását.

Az (1. 3) integrál a Lebesgue-integrál általánosítása és a legtöbb tulajdonság, amellyel a Lebesgue-integrál rendelkezik, itt is érvényes.

Az egyes tételek megfogalmazásánál nem voltam tekintettel arra a triviális általánosításra, hogy elég, ha valamilyen tulajdonság csak majdnem mindenütt teljesül. Ezeket az általánosításokat ugyanis mindenütt bizonyítás nélkül ki lehet mondani.

Az egész elmélet a teljesen additív $\xi(A)$ $(A \in \mathfrak{S})$ sztochasztikus halmazfüggvényeknek azon a tulajdonságán alapul, hogy az $\{F(x, A), A \in \mathfrak{S}\}$ eloszlásfüggvény-halmaz (feltételesen) kompakt.

A gyakorlati alkalmazásokra szerző későbbi dolgozataiban kíván visszatérni.

Alapfogalmak és jelölések

A [13] dolgozat elején bevezetett fogalmakat és jelöléseket teljes egészében átvesszük. Végig az egész dolgozatban $\xi(A)$ egy H halmaz bizonyos részhalmazaiból alkotott $\mathfrak{S}$ σ-gyűrűn értelmezett teljesen additív halmazfüggvényt jelent. H egy tetszőleges elemét h-val jelöljük. Csupán a III. FEJEZETben beszélünk egyszerre több olyan sztochasztikus halmazfüggvényről, amelyre integrálunk és a IV. FEJEZETben egy-két állítás bizonyításánál nincs szükségünk arra, hogy $\mathfrak{S}$ σ-gyűrű, elegendő, ha csak gyűrű.

Ha azt mondjuk, hogy egy $\varphi(h)$ függvény integrálható, akkor — hacsak más megjegyzést nem teszünk — mindig a $\xi(A)$ $(A \in \mathfrak{S})$ teljesen additív halmazfüggvényre vonatkozó integrálhatóságra gondolunk. Ha egy függvényt integrálhatónak nevezünk, akkor természetesen eleve feltesszük, hogy a szóbanforgó függvény mérhető.

Csupán egy új fogalmat kell bevezetnünk, amely a [11] dolgozatban nem fordult elő és ez a következő: azt mondjuk, hogy egy $X \in \mathfrak{S}$ halmaz 0-halmaz a $\xi(A)$ $(A \in \mathfrak{S})$ teljesen additív halmazfüggvényre vonatkozólag, ha minden $Y \in X\mathfrak{S}$ halmazra $\xi(Y) = 0$.

I. FEJEZET

AZ INTEGRÁL DEFINÍCIÓJA ÉS EXISZTENCIÁJA

1. §. Definíciók

A tárgyalás egyszerűsítése céljából bevezetjük a következő definíciókat:

1. DEFINÍCIÓ: Egy kétirányban végtelen $\{y_k\}$ számsorozatot *osztópontsorozatnak* nevezünk, ha $y_k < y_{k+1}$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, $\lim\limits_{k \to \infty} y_k = \infty$, $\lim\limits_{k \to -\infty} y_k = -\infty$ és $\sup\limits_k (y_{k+1} - y_k) < \infty$. Az osztópontsorozatok egy $\{y_k^{(n)}\}$ sorozatát *osztópont-kettőssorozatnak* fogjuk nevezni.

2. DEFINÍCIÓ: Egy $\{y_k^{(n)}\}$ osztópont-kettőssorozatot *végtelenül finomnak* nevezünk, ha

$$\lim_{n \to \infty} \sup_k (y_{k+1}^{(n)} - y_k^{(n)}) = 0.$$

Legyen $\varphi(h)$ egy a H térben értelmezett, az $\mathfrak{S}$ σ-gyűrűre nézve mérhető, valós értékű függvény és $\{y_k\}$ egy osztópontsorozat. Tekintsük a következő végtelen sort

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} y_k \xi(AH_k), \tag{1.1}$$

ahol $A \in \mathfrak{S}$, $H_k = \{h : y_k \leqq \varphi(h) < y_{k+1}\}$. A H_k halmazok diszjunktak és összegük egyenlő H-val.

A $\{H_k\}$ halmazrendszert az $\{y_k\}$ osztópontsorozat és a $\varphi(h)$ függvény által meghatározott *felosztásnak* fogjuk nevezni.

Be fogjuk bizonyítani, hogy ha minden elég finom osztópont-sorozatra a független valószinűségi változókból álló (1. 1) sor minden sorrendben 1 valószínűséggel konvergál és $\{y_k^{(n)}\}$ az osztópontok egy végtelenül finom kettőssorozata, akkor az

$$\eta_n(A) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_k^{(n)} \xi(AH_k^{(n)}) \tag{1.2}$$

sorozat sztochasztikusan konvergál egy valószínűségi változóhoz. Ezt a határértéket, amely nyilván független az $\{y_k^{(n)}\}$ sorozat speciális választásától, a $\varphi(h)$ függvény A halmazon vett integráljának nevezzük és a következőképpen jelöljük:

$$\int_A \varphi(h)\xi(dA). \tag{1.3}$$

Az (1. 3) integrál definíciójából következik, hogy ha $\varphi(h)$ mérhető, és $|\varphi(h)|$ integrálható az $A \in \mathfrak{S}$ halmazon, akkor ugyanez érvényes a $\varphi(h)$ függvényre is. Valóban, $|\varphi(h)|$ akkor integrálható, ha minden elég finom $\{y_k\}$ osztópontsorozatra a

$$\sum_{k:y_k \geqq 0} y_k \xi(AH_k), \qquad -\sum_{k:y_k<0} y_{k+1} \xi(AH_k)$$

sorok minden sorrendben 1 valószínűséggel konvergálnak. Ám a $\sup(y_{k+1}-y_k) < \infty$ feltétel miatt a második sor akkor és csak akkor konvergál minden sorrendben 1 valószínűséggel, ha ugyanez érvényes a

$$\sum_{k:y_k<0} y_k \xi(AH_k)$$

sorra (vö. a 345. oldalon álló megjegyzéssel).

2. §. Két segédtétel

A [13] dolgozatban szerepel a következő halmazfüggvény

$$W(T, A) = \mathrm{Var}_{\alpha}(A) \qquad (A \in \mathfrak{S}), \tag{1.4}$$

ahol

$$\alpha(T, B) = \sup_{|t| \leqq T} |1 - f(t, B)| \qquad (B \in \mathfrak{S}) \tag{1.5}$$

és T tetszőleges, de rögzített pozitív szám. A [13] dolgozat 3.2 TÉTELének bizonyítása közben adódott az az eredmény, hogy minden pozitív T-re az (1.4) halmazfüggvény véges (tehát egyúttal korlátos) mérték az $\mathfrak{S}$ σ-gyűrűn. A továbbiakban ez a mérték alapvető szerepet fog játszani, első segédtételünk erre és egy vele szorosan összefüggő halmazfüggvényre vonatkozik.

1.1 TÉTEL: *Minden rögzített $A \in \mathfrak{S}$ halmazra*

$$\lim_{T \to 0} W(T, A) = 0, \tag{1.6}$$

azaz $W(T, A)$ folytonos a $T = 0$ pontban ($W(0, A)$ ugyanis nyilvánvalóan 0). *Igaz továbbá az is, hogy minden $A \in \mathfrak{S}$ halmazra az „a“ számtól függő*

$$\mathrm{Var}_{\mu(a)}(A), \quad \mu(a, B) = \mathbf{P}(|\xi(B)| > a) \qquad (B \in \mathfrak{S}) \tag{1.7}$$

függvény folytonos az $a = \infty$ helyen, azaz

$$\lim_{a \to \infty} \mathrm{Var}_{\mu(a)}(A) = 0. \tag{1.8}$$

BIZONYÍTÁS: Legyenek $B_1, \ldots, B_r$ az $A\mathfrak{S}$ σ-gyűrűhöz tartozó diszjunkt halmazok. A [13] dolgozat 3.4 TÉTELe szerint minden pozitív ε-hoz található olyan $\delta > 0$, hogy

$$-\log |f(t, C)| \leqq \varepsilon, \quad |\arg f(t, C)| \leqq \varepsilon,[1] \tag{1.9}$$

hacsak $|t| \leqq \delta$. Soroljuk a $B_1, \ldots, B_r$ halmazokat két csoportba, aszerint, hogy $\arg f(t, B_k) > 0$, illetve $\arg f(t, B_k) \leqq 0$. Ekkor (1.9) szerint $\left(\text{ha } \varepsilon < \frac{2\pi}{3}\right)$

$$\begin{aligned} &\sum_k{}' \arg f(t, B_k) = \arg f(t, B') \leqq \varepsilon, \\ -&\sum_k{}'' \arg f(t, B_k) = -\arg f(t, B'') \leqq \varepsilon, \end{aligned} \tag{1.10}$$

ahol a Σ', ill. Σ'' összegezés az első, ill. második csoportba tartozó halmazok indexeire vonatkozik, B', ill. B'' pedig az első, illetve második csoportba tartozó halmazok összegét jelenti. (1.10) szerint

$$\sum_{k=1}^{r} |\arg f(t, B_k)| \leqq 2\varepsilon, \tag{1.11}$$

[1] arg z alatt itt csak a függvény főértékét értjük: $-\pi < \arg z \leqq \pi$.

hacsak $|t| \leqq \delta$. Másrészt (1.9)-ből az is következik, hogy

$$-\log |f(t, B)| \leqq \varepsilon \qquad (B = B' + B''), \tag{1.12}$$

hacsak $|t| \leqq \delta$. (1.11) és (1.12) felhasználásával kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{r} |1-f(t, B_k)| &= \sum_{k=1}^{r} \left|1-e^{i \arg f(t, B_k)} |f(t, B_k)|\right| \leqq \\ &\leqq \sum_{k=1}^{r} |1-e^{i \arg f(t, B_k)}| + \sum_{k=1}^{r} (1-|f(t, B_k)|) \leqq \\ &\leqq \sum_{k=1}^{r} |\arg f(t, B_k)| - \sum_{k=1}^{r} \log |f(t, B_k)| \leqq \\ &\leqq 2\varepsilon - \log |f(t, B)| \leqq 3\varepsilon. \end{aligned} \tag{1.13}$$

Alkalmazva az

$$\frac{1}{2a} \int_{-a}^{a} |1-f(t)|\, dt \geqq \frac{1}{10} \int_{|x| > \frac{1}{a}} dF(x) \tag{1.14}$$

egyenlőtlenséget, amelyben $F(x)$ egy tetszőleges eloszlásfüggvény, $f(t)$ ennek karakterisztikus függvénye és a pozitív szám (vö. [13] 295. old.), (1.13)-ból következik, hogy

$$\sum_{k=1}^{r} \mathbf{P}\left(|\xi(B_k)| > \frac{1}{a}\right) \leqq \frac{10}{2a} \sum_{k=1}^{r} \int_{-a}^{a} |1-f(t, B_k)|\, dt \leqq 30\varepsilon, \tag{1.15}$$

hacsak $\frac{1}{a} > \frac{1}{\delta}$. Ezzel tételünk második állítását igazoltuk.

A tétel első állítása ebből, [13] 3.8 TÉTELéből és az

$$\begin{aligned} |1-f(t, B_k)| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} (1-e^{itx}) dF(x, B_k) \right| \leqq |t| \left| \int_{|x| \leqq a} x\, dF(x, B_k) \right| + \\ &+ \frac{t^2}{2} \int_{|x| \leqq a} x^2 dF(x, B_k) + 2\mathbf{P}(|\xi(B_k)| > a) \end{aligned} \tag{1.16}$$

egyenlőtlenségből adódik, ahol a tetszőleges pozitív szám. Ezzel az 1.1 TÉTELt bebizonyítottuk.

A következő tételre elsősorban az (1.3) integrál exisztenciájának bizonyításánál lesz szükség.

1.2 TÉTEL: *Legyen* $C_k^{(n)}$ $(k = 1, 2, \ldots;\ n = 1, 2, \ldots)$ *az* $A\mathfrak{S}$ $(A \in S)$ *σ-gyűrű olyan halmazrendszere, melyre teljesül, hogy* $C_i^{(n)} C_k^{(n)} = 0$, *ha* $i \neq k$ $(n = 1, 2, \ldots)$ *és* $\delta_k^{(n)}$ $(k = 1, 2, \ldots;\ n = 1, 2, \ldots)$ *olyan, valós számokból álló* *kettőssorozat, melyre* $\limsup_{n\to\infty} \sup_k |\delta_k^{(n)}| = 0$. *Ez esetben*

$$\sum_k \xi(C_k^{(n)})\delta_k^{(n)} \Longrightarrow 0, \tag{1. 17}$$

ha $n \to \infty$.

BIZONYÍTÁS: Rögzített n mellett az (1. 17) sor minden sorrendben 1 valószínűséggel konvergál, mert a $\sum_k \xi(C_k^{(n)})$ sor minden sorrendben 1 valószínűséggel konvergál és a $\delta_k^{(n)}$ számok korlátosak. Egy (1. 16)-típusú egyenlőtlenség felhasználásával a következőkre jutunk

$$\begin{aligned} \Big|1-\prod_k f(t\delta_k^{(n)}, C_k^{(n)})\Big| &\leqq \sum_k \big|1-f(t\delta_k^{(n)}, C_k^{(n)})\big| \leqq \\ &\leqq |t| \sum_k |\delta_k^{(n)}| \Big| \int_{|x|\leqq a} x\,dF(x, C_k^{(n)})\Big| + \\ &+ \frac{t^2}{2} \sum_k (\delta_k^{(n)})^2 \int_{|x|\leqq a} x^2 dF(x, C_k^{(n)}) + \\ &+ 2\sum_k \mathbf{P}(|\xi(C_k^{(n)})| > a), \end{aligned} \tag{1. 18}$$

ahol a pozitív szám. A [13] dolgozat 3. 8 TÉTELe szerint van olyan $K_a > 0$ szám, hogy

$$\sum_k \Big| \int_{|x|\leqq a} x\,dF(x, C_k^{(n)})\Big| \leqq K_a,$$

$$\sum_k \int_{|x|\leqq a} x^2 dF(x, C_k^{(n)}) \leqq K_a.$$

Feltehetjük, hogy $K_a \geqq 1$. Az 1. 1 TÉTEL szerint a megválasztható oly módon, hogy (1. 18) jobboldalán a harmadik tag kisebb, mint $\varepsilon (\varepsilon \leqq 1)$. Ezután n-et olyan nagynak választjuk, hogy $|\delta_k^{(n)}| \leqq \frac{\varepsilon}{K_a} \leqq 1$ $(k=1, 2, \ldots)$. Ekkor az (1. 18) egyenlőtlenség jobboldalán álló összeg nem nagyobb, mint $\varepsilon(|t| + t^2/2 + 1)$. Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

3. §. Az integrál exisztenciája

Most visszatérünk eredeti célunkhoz, az (1. 3) integrál exisztenciaproblémáinak vizsgálatához. Bebizonyítjuk, hogy fennáll az

1. 3. TÉTEL: *Legyen* $\varphi(h)$ *egy az* $\mathfrak{S}$ σ*-gyűrűre nézve mérhető, valós értékű függvény és* $A \in \mathfrak{S}$ *egy halmaz. Tegyük fel, hogy van olyan* $\delta > 0$ *szám, hogy minden* $\{y_k\}$ *osztópontsorozatra, melyre* $\sup_k (y_{k+1} - y_k) \leqq \delta$, *az* (1. 1) *sor minden sorrendben* 1 *valószínűséggel konvergál. Ebben az esetben létezik az* (1. 3) *integrál. Speciálisan minden korlátos és mérhető* $\varphi(h)$ *függvény integrálható.*

BIZONYÍTÁS: Legyen $\{y_k^{(n)}\}$ az osztópontok egy végtelenül finom kettőssorozata. Egyesítsük az $\{y_k^{(n)}\}$ és $\{y_k^{(m)}\}$ sorozatokat és jelöljük az egyesített sorozatot $\{z_k\}$-val[2] ($k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). Definiáljuk az L_j halmazokat a következőképpen: $L_j=\{h: z_j \leqq \varphi(h) < z_{j+1}\}$ és tekintsük a következő kifejezést

$$\sum_k y_k^{(n)} \xi(AH_k^{(n)}) - \sum_k y_k^{(m)} \xi(AH_k^{(m)}) =$$

$$= \sum_k \sum_{j:L_j \subseteq H_k^{(n)}} (y_k^{(n)} - z_j)\xi(L_j A) - \tag{1.19}$$

$$- \sum_k \sum_{j:L_j \subseteq H_k^{(m)}} (y_k^{(m)} - z_j)\xi(L_j A).$$

A jobboldalon álló összegekben az $y_k^{(n)} - z_j$ és $y_k^{(m)} - z_j$ számok az 1. DEFINÍCIÓ értelmében korlátosak, sőt, ha $\delta_{kj}^{(n)} = y_k^{(n)} - z_j$, akkor az $\{y_k^{(n)}\}$ kettőssorozat végtelenül finom volta miatt

$$\lim_{n\to\infty} \sup_k \max_{j:L_j \subseteq H_k^{(n)}} |\delta_{kj}^{(n)}| = 0.$$

Alkalmazva az 1.2 TÉTELt, azt kapjuk, hogy az (1. 19) különbség sztochasztikusan 0-hoz tart, ha $n, m \to \infty$.

Mivel a Cauchy-féle konvergenciakritérium teljesül, következik, hogy van olyan valószínűségi változó, melyhez az (1. 19) kifejezés baloldalán álló első tag sztochasztikusan konvergál. Ám ez a valószínűségi változó független az $\{y_k^{(n)}\}$ kettőssorozat speciális választásától, amint az a megszokott módon igen egyszerűen belátható. Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

MEGJEGYZÉS: Egyszerűen belátható, hogy ha az (1. 1) összeg minden elég finom osztópontsorozatra minden sorrendben 1 valószínűséggel konvergál, akkor ugyanez fennáll tetszőleges osztópontsorozatra is. Ez és még több más állítás, mely tárgyalásunkban elő fog fordulni, abból a tényből következik, hogy ha egy független valószínűségi változókból álló

$$\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k$$

sor minden sorrendben 1 valószínűséggel konvergál, akkor ugyanez érvényes a

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \xi_k$$

sorra is, ahol c_k tetszőleges, korlátos, valós számsorozat.[3]

Most levezetünk egy egyenlőtlenséget, amely alapvető szerepet játszik bizonyításainkban. Ezt fejezi ki az

[2] Az n-től és m-től való függést a rövidség kedvéért nem írjuk ki.

[3] Ez belátható például az ún. három sor tétel segítségével.

1.4. TÉTEL: *Legyen $\varphi(h)$ olyan mérhető függvény, melyre teljesül, hogy $|\varphi(h)| \leqq K < \infty$. Ekkor $g(t, A)$-val jelölve a $\varphi(h)$ függvény A $(A \in \mathfrak{S})$ halmazon vett integráljának karakterisztikus függvényét, fennáll az*

$$|1-g(t, A)| \leqq W(tK, A)$$

egyenlőtlenség.

BIZONYÍTÁS: Válasszunk egy végtelenül finom $\{y_k^{(n)}\}$ osztópont-kettőssorozatot és jelölje $\{H_k^{(n)}\}$ a megfelelő felosztássorozatot. Ha a

$$\sum_k y_k^{(n)} \xi(AH_k^{(n)})$$

valószínűségi változó karakterisztikus függvényét $g_n(t, A)$-val jelöljük, akkor azt kapjuk, hogy

$$|1-g_n(t, A)| \leqq \sum_k |1-f(ty_k^{(n)}, AH_k^{(n)})| \leqq$$

$$\leqq \sum_k W(ty_k^{(n)}, AH_k^{(n)}) \leqq \sum_k W(tK, AH_k^{(n)}) =$$

$$= W(tK, A).$$

Elvégezve az $n \to \infty$ határátmenetet, a keresett egyenlőtlenségre jutunk. Q. e. d.

4. §. Az (1.3) integrál létezésének egy szükséges feltétele

Ebben a §-ban a következő tételt bizonyítjuk be:

1.5. TÉTEL: *Ha egy $\varphi(h)$ mérhető függvény integrálható az $A \in \mathfrak{S}$ halmazon, akkor minden olyan a_n, b_n sorozatpárra, melyre $a_{n+1} < a_n$, $b_{n+1} > b_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ és $\lim_{n \to \infty} a_n = -\infty$, $\lim_{n \to \infty} b_n = \infty$, az*

$$\eta(A_n) = \int_{A_n} \varphi(h) \xi(dA), \quad A_n = \{h : A, a_n \leqq \varphi(h) < b_n\} \tag{1.20}$$

sorozat 1 *valószínűséggel konvergál. Ez esetben*

$$\int_A \varphi(h)\, \xi(dA) = \lim_{n \to \infty} \eta(A_n). \tag{1.21}$$

BIZONYÍTÁS: Feltehetjük, hogy $\sup_n |a_{n+1} - a_n| < \infty$, $\sup_n (b_{n+1} - b_n) < \infty$, $a_n < 0$, $b_n > 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Egyesítsük ezt a két sorozatot egy $\{y_n\}$ osztópontsorozattá és vizsgáljuk a

$$\sum_n \int_{AH_n} (y_n - \varphi(h))\, \xi(dA) \tag{1.22}$$

sort, amelyről még nem tudjuk, hogy konvergens; itt $\{H_n\}$ az $\{y_n\}$ osztópontsorozathoz és a $\varphi(h)$ függvényhez tartozó felosztást jelenti. Az (1.22) sor

n-edik tagjának a karakterisztikus függvényét $f_n(t)$-vel jelölve, az 1.4 TÉTEL következtében fennáll az

$$|1-f_n(t)| \leqq W(\delta t, AH_n) \tag{1.23}$$

reláció, ahol $\delta = \sup(y_{n+1}-y_n)$. (1.23)-ból következik, hogy

$$\sum_n |1-f_n(t)| \leqq W(\delta t, A). \tag{1.24}$$

Eszerint az (1.22) sor minden sorrendben 1 valószínűséggel konvergál. Átírva az (1.22) sort a

$$\sum_n y_n(AH_n) - \sum_n \int_{AH_n} \varphi(h)\,\xi(dA)$$

alakba[4] és figyelembe véve az 1.3 TÉTELt, látható, hogy az (1.20) típusú sorozatok 1 valószínűséggel konvergálnak.

Most bebizonyítjuk az (1.21) relációt. Jelölje $\eta(A)$ az $\eta(A_n)$ sorozat határértékét. Válasszunk egy olyan $\{y_n^{(N)}\}$ végtelenül finom osztópont-kettőssorozatot, melyre teljesül, hogy $\{y_n^{(N+1)}\}$ tagjai között $\{y_n^{(N)}\}$ tagjai mind előfordulnak és $\{y_n^{(1)}\} = \{y_n\}$. Ha $\{H_n^{(N)}\}$ jelenti a megfelelő felosztássorozatot, akkor, az előbbieket felhasználva, következik, hogy minden rögzített N-re

$$\sum_n \int_{AH_n^{(N)}} \varphi(h)\,\xi(dA) = \eta(A). \tag{1.25}$$

Másrészt a

$$\sum_n \int_{AH_n^{(N)}} (y_n^{(N)} - \varphi(h))\,\xi(dA) \tag{1.26}$$

sor n-edik tagjának karakterisztikus függvényét $f_n^{(N)}(t)$-vel, az összeg karakterisztikus függvényét pedig $f^{(N)}(t)$-vel jelölve, az 1.4 TÉTELből következik, hogy

$$|1-f^{(N)}(t)| \leqq \sum_n |1-f_n^{(N)}(t)| \leqq W(\delta^{(N)} t, A), \tag{1.27}$$

ahol $\delta^{(N)} = \sup\limits_n (y_{n+1}^{(N)} - y_n^{(N)})$. (1.27)-ből, figyelembe véve az 1.1 TÉTELt, következik, hogy $f^{(N)}(t) \Longrightarrow 1$, ha $N \to \infty$. Ámde (1.25) alapján az (1.26) (N-től függő) sorozat sztochasztikusan konvergál az

$$\int_A \varphi(h)\,\xi(dA) - \eta(A)$$

valószínűségi változóhoz. Ez utóbbi tehát 1 valószínűséggel 0. Q. e. d.

[4] Ez nyilvánvalóan megtehető. A 2.4 TÉTELnek itt felhasznált speciális esete triviális.

II. FEJEZET

AZ $\int_A \varphi(h)\,\xi(dA)$ INTEGRÁL TULAJDONSÁGAI

1. §. Az integrál elemi tulajdonságai

A rendszeres tárgyalás céljából először kimondjuk a következő két, nyilvánvalóan igaz tételt.

2. 1 TÉTEL: *Ha a $\varphi(h)$ mérhető függvény integrálható az $A \in \mathfrak{S}$ halmazon, akkor $c\varphi(h)$ is integrálható ugyanott és*

$$\int_A c\varphi(h)\,\xi(dA) = c\int_A \varphi(h)\,\xi(dA). \tag{2. 1}$$

2. 2 TÉTEL: *Ha a $\varphi(h)$ mérhető függvény integrálható az $A_1 \in \mathfrak{S}$ és $A_2 \in \mathfrak{S}$ halmazokon, ahol $A_1A_2 = 0$, akkor integrálható az $A_1 + A_2$ halmazon is és*

$$\int_{A_1+A_2} \varphi(h)\,\xi(dA) = \int_{A_1} \varphi(h)\,\xi(dA) + \int_{A_2} \varphi(h)\,\xi(dA). \tag{2. 2}$$

Az integrál definíciójából kitűnik, hogy ha egy $\varphi(h)$ korlátos függvény állandó az $A_1, A_2, \ldots$ halmazokon, ahol $A_i \in \mathfrak{S}$ $(i = 1, 2, \ldots)$, $A_iA_k = 0$, ha $i \neq k$ és $\varphi(h) = \varphi_i$, ha $h \in A_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$, akkor

$$\int_A \varphi(h)\,\xi(dA) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i\,\xi(A_i),\; A = \sum_{k=1}^{\infty} A_k. \tag{2. 3}$$

A jobboldalon álló végtelen sor minden sorrendben 1 valószínűséggel konvergál. Bebizonyítható, hogy a (2. 3) reláció és a jobboldalon álló sor konvergenciájára tett megjegyzés nem korlátos integrálható $\varphi(h)$ függvény esetén is fennáll, ha még feltesszük, hogy $\varphi(h)$ az $A_{i_1} + A_{i_2} + \cdots$ típusú halmazokon is integrálható, ahol $i_1, i_2, \ldots$ tetszőleges, természetes számokból álló sorozat.

2. §. A határozatlan integrál teljes additívitása

Ebben a §-ban a következő tételt bizonyítjuk be.

2. 3 TÉTEL: *Legyen $\varphi(h)$ egy az $\mathfrak{S}$ σ-gyűrű minden halmazán integrálható függvény. Ekkor az*

$$\eta(A) = \int_A \varphi(h)\,\xi(dA) \tag{2. 4}$$

halmazfüggvény teljesen additív.

BIZONYÍTÁS: A (2. 4) halmazfüggvény additív volta a 2. 2 TÉTELből következik. Másrészt az integrál definíciójából nyilvánvaló, hogy diszjunkt $A_1, A_2, \ldots$ halmazokhoz független $\eta(A_1), \eta(A_2), \ldots$ valószínűségi változók tartoznak. Csupán azt kell tehát bebizonyítanunk, hogy

$$\eta\left(\sum_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \eta(A_k). \tag{2. 5}$$

Tekintsük előbb a korlátos függvény esetét és tegyük fel, hogy $|\varphi(h)| \leqq K$. Legyen $B_1, B_2, \ldots$ az $\mathfrak{S}$ σ-gyűrű egy olyan nem-növekvő halmazsorozata, melyre $\lim\limits_{n\to\infty} B_n = 0$. $f_n(t)$-vel jelölve az $\eta(B_n)$ valószínűségi változó karakterisztikus függvényét, az 1. 4 TÉTEL szerint fennáll a következő egyenlőtlenség

$$|1 - f_n(t)| \leqq W(Kt, B_n). \tag{2. 6}$$

Mivel $W(t, A)$ minden pozitív t-re véges mérték az $\mathfrak{S}$ σ-gyűrűn, következik, hogy

$$\lim_{n\to\infty} W(Kt, B_n) = 0. \tag{2. 7}$$

Felhasználva [13] 2. 1 TÉTELét, a (2. 6) és (2. 7) relációkból állításunk leolvasható.

Most rátérünk a nem-korlátos függvények esetére. Legyen $\mathfrak{S}_i = D_i \mathfrak{S}$, ahol $D_i = \{h : -i \leqq \varphi(h) < i\}$. Jelölje $\mathfrak{R}$ a következő típusú halmazokból alkotott gyűrűt

$$A = A_{l_1} + \cdots + A_{l_r}, \quad A_{l_k} \in \mathfrak{S}_{l_k} \qquad (k = 1, 2, \ldots, r).$$

Az előbbiek szerint $\eta(A)$ teljesen additív az $\mathfrak{R}$ gyűrűn. Ha ugyanis $A_1, A_2, \ldots$ az $\mathfrak{R}$ gyűrű egy diszjunkt halmazokból álló elemsorozata, $A = \sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathfrak{R}$, akkor valamilyen i-re $A \in \mathfrak{S}_i$ és így minden k-ra $A_k \in \mathfrak{S}_i$. Ámde η teljesen additív az $\mathfrak{S}_i$ gyűrűn, tehát

$$\eta(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \eta(A_k).$$

Most bebizonyítjuk, hogy az η halmazfüggvény kiterjeszthető az $\mathfrak{S}(\mathfrak{R}) = \mathfrak{S}$ σ-gyűrűre (vö. [13] 233. old.) Tekintsünk egy diszjunkt, $\mathfrak{R}$-hez tartozó halmazokból álló $B_1, B_2, \ldots$ sorozatot. Bebizonyítjuk, hogy a

$$\sum_{k=1}^{\infty} \eta(B_k) \tag{2. 8}$$

sor minden sorrendben 1 valószínűséggel konvergál. Ez bizonyítani fogja a kiterjesztés elvégezhetőségét (vö. [13] 3. 2 TÉTEL). Legyen

$$C_{i_r k_s^{(r)}} = (D_{i_r+1} - D_{i_r}) B_{k_s^{(r)}} \quad (i_r < i_{r+1},\ k_s^{(r)} < k_{s+1}^{(r)},\ r, s = 1, 2, \ldots).$$ [5]

Mivel $|\varphi(h)| \leqq i_r + 1$, ha $h \in C_{i_r} = \sum_{s=1}^{\infty} C_{i_r k_s^{(r)}}$, következik, hogy

$$(2.9) \qquad \eta(C_{i_r}) = \sum_{s=1}^{\infty} \eta(C_{i_r k_s^{(r)}})$$

és a (2. 9) sor minden sorrendben 1 valószínűséggel konvergál. Másrészt $\varphi(h)$ integrálható a $C = \sum_{r=1}^{\infty} C_{i_r}$ halmazon is, tehát az 1. 5 TÉTEL szerint (az $a_r = -i_r - 1$, $b_r = i_r + 1$ sorozatokat választva)

$$(2.10) \qquad \eta(C) = \sum_{r=1}^{\infty} \eta(C_{i_r}).$$

A (2. 9) és (2. 10) relációkat egybevetve, azt kapjuk, hogy a

$$(2.11) \qquad \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \eta(C_{i_r k_s^{(r)}})$$

sor 1 valószínűséggel konvergál. Most bebizonyítunk egy lemmát.

LEMMA: *Ha egy független valószínűségi változókból álló*

$$(2.12) \qquad \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \xi_{ik}$$

sor (ebben a sorrendben) 1 *valószínűséggel konvergál, továbbá minden* $i_1 < i_2 < \cdots$ *és* $k_1 < k_2 < \cdots$ *indexsorozatpárra a*

$$(2.13) \qquad \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \xi_{i_r k_s^{(r)}}$$

sor 1 *valószínűséggel konvergál, akkor a* (2. 12) *sor minden sorrendben* 1 *valószínűséggel konvergál.*

BIZONYÍTÁS: Jelölje $f_{ik}(t)$ a ξ_{ik} valószínűségi változó karakterisztikus függvényét. Feltevésünk szerint a

$$\prod_{r=1}^{\infty} \prod_{s=1}^{\infty} f_{i_r k_s^{(r)}}(t)$$

végtelen kettőssorozat minden t-re és minden indexsorozatpárra konvergens, ami nyilván csak úgy lehet, ha minden t-re

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |1 - f_{ik}(t)| < \infty.$$

Ezzel a lemmát bebizonyítottuk.

[5] Az s index esetleg csak véges sok természetes számot fut be.

Alkalmazva a LEMMÁT a $\xi_{ik}=\eta(C_{ik})$ valószínűségi változókra, következik, hogy a

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\eta(C_{ik}) \tag{2.14}$$

sor minden sorrendben 1 valószínűséggel konvergál. Mivel az 1.5 TÉTEL szerint

$$\eta(B_k)=\sum_{i=1}^{\infty}\eta(C_{ik}), \tag{2.15}$$

következik, hogy a (2.8) sor minden sorrendben 1 valószínűséggel konvergál.

Jelölje $\eta^*(A)$ $(A\in\mathfrak{S})$ az $\eta(A)$ $(A\in\mathfrak{R})$ halmazfüggvény kiterjesztettjét és legyen $B\in\mathfrak{S}$. Jelölje továbbá B_N a következő halmazt

$$B_N=\{h:B,\ -N\leqq\varphi(h)<N\}.$$

Az 1.5 TÉTEL szerint

$$\lim_{N\to\infty}\int_{B_N}\varphi(h)\xi(dA)=\int_B\varphi(h)\xi(dA). \tag{2.16}$$

Másrészt

$$\eta^*(B)=\lim_{N\to\infty}\eta^*(B_N)=\lim_{N\to\infty}\eta(B_N)=\lim_{N\to\infty}\int_{B_N}\varphi(h)\xi(dA). \tag{2.17}$$

A (2.16) és (2.17) relációk szerint

$$\eta^*(B)=\int_B\varphi(h)\xi(dA),$$

amivel a tétel bizonyítását befejeztük.

3. §. Az integrál további tulajdonságai

A közönséges Lebesgue-integrál két tulajdonsága nem vihető át szószerint erre az esetre. Az egyik az, hogy ha $\psi(h)$ integrálható függvény és $\varphi(h)$ olyan mérhető függvény, amelyre $|\varphi(h)|\leqq\psi(h)$, akkor $\varphi(h)$ is integrálható.

Erre ellenpélda a következő. Legyen H a természetes számok halmaza és $\mathfrak{S}$ az ennek valamennyi részhalmazából alkotott σ-algebra. Definiáljuk a $\xi(A)$ halmazfüggvényt a következőképpen:

$$\xi(A)=\sum_{h\in A}(-1)^{h+1}\frac{1}{h^2}. \tag{2.18}$$

Könnyen belátható, hogy a

$$\begin{aligned}\psi(2h-1)&=2h\\ \psi(2h)&=2h\end{aligned}\qquad(h=1,2,\ldots) \tag{2.19}$$

függvény integrálható az egész H halmazon, de a

$$\varphi(h)=h\qquad(h=1,2,\ldots) \tag{2.20}$$

függvény nem integrálható ugyanott, bár nyilván $0 < \varphi(h) \leqq \psi(h)$ minden h-ra. Hasonló példa adható arra, hogy bár a φ_1 és φ_2 függvények integrálhatók egy bizonyos halmazon, de az összegük nem.

Legyen H és $\mathfrak{S}$ ugyanaz, mint az előbb, és definiáljuk a $\varphi_1(h)$, $\varphi_2(h)$ függvényeket a következőképpen

$$\text{(2.21)} \quad \begin{cases} \varphi_1(2h) = (-1)^h 2h, \\ \varphi_1(2h-1) = (-1)^h 2h, \end{cases} \qquad (h = 1, 2, \ldots),$$

$$\text{(2.22)} \quad \begin{cases} \varphi_2(1) = 0, \\ \varphi_2(2h) = (-1)^{h+1} 2h, \\ \varphi_2(2h+1) = (-1)^{h+1} 2h, \end{cases} \qquad (h = 1, 2, \ldots).$$

Ekkor $\varphi_1(h) + \varphi_2(h)$ a páros számokon eltűnik, a páratlan számokon pedig az integrálja nem létezik, mert az integrált definiáló összeg nem abszolút konvergens.

Látjuk tehát, hogy a Lebesgue-integrál e két tulajdonsága még konstans értékű $\xi(A)$ halmazfüggvények esetén sem teljesül. Ezek helyett olyan tételeket fogunk bebizonyítani, melyeknek itt fellépő, újszerű feltételei a Lebesgue-integrál esetében triviálisan teljesülnek. Úgy tűnik azonban, hogy a 2. 4, 2. 7 és 2. 8 TÉTELek az általunk bevezetett (3. 1) integrál váratlanul jó tulajdonságait fejezik ki. Ezzel kapcsolatban emlékeztetünk a [13] dolgozat V. fejezetére, ahol szerző egy példát adott pozitív és negatív részekre fel nem bontható sztochasztikus halmazfüggvényre (4. példa). A következő tétel két függvény összegének az integráljára vonatkozik, a 2. 7 és 2. 8 TÉTELekhez további előkészítés szükséges.

2. 4. TÉTEL: *Ha a $\varphi_1(h)$ és $\varphi_2(h)$ függvények egy $A \in \mathfrak{S}$ halmaz minden mérhető részhalmazán integrálhatók, akkor ugyanez érvényes a $\varphi_1(h) + \varphi_2(h)$ függvényre is és*

$$\text{(2.23)} \quad \int_A (\varphi_1(h) + \varphi_2(h))\xi(dA) = \int_A \varphi_1(h)\xi(dA) + \int_A \varphi_2(h)\xi(dA).$$

BIZONYÍTÁS: Legyen $\{y_k^{(n)}\}$ egy végtelenül finom osztópont-kettőssorozat és $\{H_k^{(n)}\}$ a $\varphi_1(h) + \varphi_2(h)$ függvény által meghatározott megfelelő felosztássorozat. Tekintsük a következő sort

$$\text{(2.24)} \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(y_k^{(n)} \xi(AH_k^{(n)}) - \int_{AH_k^{(n)}} \varphi_1(h)\xi(dA) - \int_{AH_k^{(n)}} \varphi_2(h)\xi(dA) \right) =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_k^{(n)} \xi(AH_k^{(n)}) - \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{AH_k^{(n)}} \varphi_1(h)\xi(dA) - \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{AH_k^{(n)}} \varphi_2(h)\xi(dA).$$

A jobboldalon álló második és harmadik sor a 2. 3 TÉTEL szerint minden sorrendben 1 valószínűséggel konvergál és a $\varphi_1(h)$, ill. $\varphi_2(h)$ függvény integrálját adja az A halmazon. A baloldalon álló sorról még nem tudjuk, hogy konvergens-e. Legyen $\{z_s^{(m)}\}$ egy végtelenül finom osztópont-kettőssorozat, továbbá $\{L_s^{(m)}\}$ a $\varphi_1(h)$, $\{M_s^{(m)}\}$ pedig a $\varphi_2(h)$ függvény által meghatározott felosztássorozat és jelölje $f_k^{(n)}(t)$ a (2. 24) formula baloldalán álló sor k-adik tagjának karakterisztikus függvényét. Mivel

$$
\begin{aligned}
& y_k^{(n)}\xi(AH_k^{(n)}) - \int_{AH_k^{(n)}} \varphi_1(h)\xi(dA) - \int_{AH_k^{(n)}} \varphi_2(h)\xi(dA) = \\
& = \lim_{m\to\infty} \text{st.} \left\{ y_k^{(n)}\xi(AH_k^{(n)}) - \sum_s z_s^{(m)}\xi(AH_k^{(n)}L_s^{(m)}) - \right. \\
(2.25) \qquad & \left. - \sum_r z_r^{(m)}\xi(AH_k^{(n)}M_r^{(m)}) \right\} = \\
& = \lim_{m\to\infty} \text{st.} \sum_{s,\,r} (y_k^{(n)} - z_s^{(m)} - z_r^{(m)})\xi(AH_k^{(n)}L_s^{(m)}M_r^{(m)}),
\end{aligned}
$$

továbbá az utolsó összegben $|y_k^{(n)} - z_s^{(m)} - z_r^{(m)}| \leqq \delta_n$, ahol $\delta_n = \sup\limits_k (y_{k+1}^{(n)} - y_k^{(n)})$, következik, hogy

$$|1 - f_k^{(n)}(t)| \leqq W(\delta_n t, AH_k^{(n)}).$$

Innen összegezés útján a

$$(2.26) \qquad \sum_{k=-\infty}^{\infty} |1 - f_k^{(n)}(t)| \leqq W(\delta_n t, A)$$

formulára jutunk. Ez egyrészt bizonyítja, hogy a (2. 24) baloldalán álló sor, tehát a jobboldalon álló első sor is minden sorrendben 1 valószínűséggel konvergál. Másrészt az $n \to \infty$ határátmenetet elvégezve és figyelembe véve az 1. 1 TÉTELt, azt kapjuk, hogy a (2. 24) kifejezés jobboldalán álló sor sztochasztikusan 0-hoz tart, vagyis fennáll a (2. 23) formula. Az előbbi okoskodást az A halmaz egy tetszőleges mérhető részhalmazára elvégezve, azt találjuk, hogy a $\varphi_1(h) + \varphi_2(h)$ függvény ezen a halmazon is integrálható. Q. e. d.

4. §. Két segédtétel

2. 5 TÉTEL: *Ahhoz, hogy egy $\varphi(h)$ függvény integrálható legyen az $A \in \mathfrak{S}$ halmaz minden mérhető részhalmazán, szükséges és elegendő, hogy minden $\{y_k\}$ osztópontsorozatra teljesüljön a*

$$(2.27) \qquad \sum_{k=-\infty}^{\infty} W(ty_k, AH_k) < \infty$$

reláció, ahol $\{H_k\}$ a $\varphi(h)$ függvény által meghatározott megfelelő felosztás.

BIZONYÍTÁS: Az elegendőség az 1.3 TÉTELből közvetlenül adódik. A szükségességet indirekt úton bizonyítjuk. Ha a (2.27) összeg végtelen, akkor találhatók olyan $B_{kl} \in AH_k\mathfrak{S}$ $(l=1,2,\ldots,l_k;\ k=1,2,\ldots)$ halmazok, hogy

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{l=1}^{l_k}|1-f(ty_k, B_{kl})| = \infty. \tag{2.28}$$

Legyen $K=\sup_k(y_{k+1}-y_k)$ és jelölje $f_{kl}(t)$ az

$$\int_{B_{kl}}\varphi(h)\,\xi(dA)-y_k\,\xi(B_{kl})=\int_{B_{kl}}(\varphi(h)-y_k)\,\xi(dA) \tag{2.29}$$

valószínűségi változó karakterisztikus függvényét. Az 1.4 TÉTEL szerint

$$|1-f_{kl}(t)|\leqq W(Kt, B_{kl}). \tag{2.30}$$

(2.30) szerint

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{l=1}^{l_k}|1-f_{kl}(t)|<\infty, \tag{2.31}$$

tehát a

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{l=1}^{l_k}\left(\int_{B_{kl}}\varphi(h)\,\xi(dA)-y_k\,\xi(B_{kl})\right) \tag{2.32}$$

sor minden sorrendben 1 valószínűséggel konvergál. Ámde ugyanezzel a tulajdonsággal rendelkezik a

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{l=1}^{l_k}\int_{B_{kl}}\varphi(h)\,\xi(dA) \tag{2.33}$$

sor is, hiszen $\varphi(h)$ az A halmaz minden mérhető részhalmazán integrálható, tehát alkalmazható a 2.3 TÉTEL az $A\mathfrak{S}$ σ-gyűrűre. Eszerint a

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{l=1}^{l_k}y_k\,\xi(B_{kl}) \tag{2.34}$$

sor minden sorrendben 1 valószínűséggel konvergál, ami ellentmond (2.28)-nak. Q. e. d.

2.6 TÉTEL: *Legyen $\varphi(h)$ és $\psi(h)$ két nem-negatív, mérhető függvény. Tegyük fel, hogy $\varphi(h)\leqq\psi(h)$ és $\psi(h)$ integrálható az $A\in\mathfrak{S}$ halmaz minden mérhető részhalmazán. Ez esetben minden $\{y_k\}$ $(y_0=0)$ osztópontsorozatra és minden t-re fennáll a*

$$\sum_{k=0}^{\infty}W(ty_k, AL_k)\leqq\sum_{k=0}^{\infty}W(ty_k, AH_k) \tag{2.35}$$

egyenlőtlenség, ahol $\{L_k\}$ a $\varphi(h)$, $\{H_k\}$ pedig a $\psi(h)$ függvények által meghatározott felosztás.

BIZONYÍTÁS: Mivel

$$L_k = \{h : y_k \leqq \varphi(h) < y_{k+1}\},\qquad (k=0,1,2,\ldots),$$
$$H_k = \{h : y_k \leqq \psi(h) < y_{k+1}\},$$

következik, hogy

$$\sum_{k=0}^{j} H_k \subseteq \sum_{k=0}^{j} L_k \qquad (j=0,1,2,\ldots), \tag{2.36}$$

$$H_j L_k = 0, \quad \text{ha} \quad k > j. \tag{2.37}$$

Ezeket felhasználva, a következőkre jutunk

$$\sum_{j=0}^{\infty} W(y_j t, AH_j) = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} W(y_j t, AH_j L_k) =$$
$$= \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{j} W(y_j t, AH_j L_k) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=k}^{\infty} W(y_j t, AH_j L_k) \geqq$$
$$\geqq \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=k}^{\infty} W(y_k t, AH_j L_k) = \sum_{k=0}^{\infty} W\left(y_k t, A\sum_{j=k}^{\infty} H_j L_k\right) =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} W(y_k t, AL_k),$$

ami éppen állításunkat fejezi ki.

5. §. A majorált függvényre vonatkozó tétel és a nagy Lebesgue-tétel analogonja

E fejezet 3. §-ának elején láttunk arra példát, hogy ha egy függvénynek van egy adott halmazon integrálható majoránsa, ebből még nem következik, hogy a függvény integrálható. Az integrálhatóságra vonatkozó pozitív állítás bebizonyításához szükségünk van ugyanarra a feltételre, amely a 2. 4 TÉTELben szerepelt. Állításunkat tartalmazza a

2. 7 TÉTEL: *Legyen $\varphi(h)$ egy mérhető, $\psi(h)$ pedig egy, az $A \in \mathfrak{S}$ halmaz minden $\mathfrak{S}$-hez tartozó részhalmazán integrálható függvény, melyre $|\varphi(h)| \leqq \psi(h)$. Ekkor $\varphi(h)$ is integrálható az A halmaz valamennyi $\mathfrak{S}$-hez tartozó részhalmazán.*

BIZONYÍTÁS: Legyen $B \in A\mathfrak{S}$. Jelölje B_1 (ill. B_2) a B halmaznak azt a részhalmazát, amelyen $\varphi(h) \geqq 0$ (ill. $\varphi(h) < 0$). A 2. 5 és 2. 6 TÉTELekből következik, hogy $\varphi(h)$ integrálható a B_1 és B_2 halmazok mindegyikén, tehát a 2. 2 TÉTEL szerint ezek összegén is integrálható. Q. e. d.

Most bebizonyítjuk az ún. nagy Lebesgue-tétel analogonját.

2. 8. TÉTEL: *Legyen* $\varphi_N(h)$ $(N=1,2,\ldots)$ *egy mérhető függvényekből álló sorozat, melyre teljesül, hogy* $|\varphi_N(h)| \leqq \psi(h)$, *ahol* $\psi(h)$ *egy* $A \in \mathfrak{S}$ *halmaz minden mérhető részhalmazán integrálható függvény. Tegyük fel továbbá, hogy létezik a* $\varphi(h) = \lim_{N\to\infty} \varphi_N(h)$ *határérték. Ekkor a* $\varphi_N(h)$, $\varphi(h)$ *függvények is integrálhatók az* A *halmaz minden mérhető részhalmazán és*

$$\int_A \varphi_N(h)\,\xi(dA) \Longrightarrow \int_A \varphi(h)\,\xi(dA). \tag{2.38}$$

BIZONYÍTÁS: A $\varphi_N(h)$ és $\varphi(h)$ függvények integrálhatóságára vonatkozó állítás a 2. 7 TÉTELből következik. A 2. 6 TÉTEL szerint elegendő a $\varphi(h)=0$, $\varphi_N(h) \geqq 0$ $(N=1,2,\ldots)$ esettel foglalkoznunk.

Először nézzük azt az esetet, amikor $\varphi_N(h) \leqq M < \infty$ $(N=1,2,\ldots)$. Jelölje A_N az A halmaznak azt a részhalmazát, amelyen $\varphi_N(h) \leqq \varrho$, ahol $\varrho > 0$. Ha az

$$\int_A \varphi_N(h)\,\xi(dA)$$

valószinűségi változó karakterisztikus függvényét $f_N(t)$-vel jelöljük, akkor, az 1. 4 TÉTEL felhasználásával a következőkre jutunk

$$\begin{aligned} |1-f_N(t)| &\leqq W(\varrho t, A_N)+W(Mt, A-A_N) \leqq \\ &\leqq W(\varrho t, A)+W(Mt, A-A_N). \end{aligned} \tag{2.39}$$

Rögzített t mellett először megválasztjuk ϱ-t oly módon, hogy (2. 39) jobboldalán az első tag kisebb legyen, mint $\varepsilon/2$. Ez az 1. 1 TÉTEL szerint megtehető. Ezután N-et olyan nagynak választjuk, hogy a második tag is kisebb legyen, mint $\varepsilon/2$. Ez is megtehető, hiszen W korlátos mérték az $\mathfrak{S}$ σ-gyűrűn és $\lim_{N\to\infty} \varphi_N(h)=0$ miatt $\lim_{N\to\infty} A_N=0$. Eszerint minden t-re

$$\lim_{N\to\infty} f_N(t)=1,$$

ami éppen az állítást fejezi ki.

Vizsgáljuk most az általános esetet. A $\varphi_N(h)$ függvény felbontható a következőképpen

$$\varphi_N(h)=\varphi_N^{(1)}(h)+\varphi_N^{(2)}(h),$$

ahol

$$\varphi_N^{(1)}(h)=\begin{cases} \varphi_N(h), & \text{ha } \varphi_N(h) \leqq M, \\ 0 & \text{egyébként,} \end{cases}$$

$$\varphi_N^{(2)}(h)=\varphi_N(h)-\varphi_N^{(1)}(h)$$

és M egy később meghatározandó konstans. Jelölje $f_N^{(1)}(t)$, ill. $f_N^{(2)}(t)$ az

$$\int\limits_A \varphi_N^{(1)}(h)\,\xi(dA), \quad \text{ill.} \quad \int\limits_A \varphi_N^{(2)}(h)\,\xi(dA)$$

valószínűségi változó karakterisztikus függvényét és foglalkozzunk az utóbbival.

Legyen $\{y_k^{(n)}\}$ egy végtelenül finom osztópont-kettőssorozat, melyre $\{y_k^{(n)}\} \subseteq \{y_k^{(n+1)}\}$, $\{L_{Nk}^{(n)}\}$ a $\varphi_N^{(2)}(h)$ függvény által meghatározott megfelelő felosztássorozat és jelölje $f_{Nn}^{(2)}(t)$ a

$$\sum_k y_k^{(n)}\,\xi(AL_{Nk}^{(n)})$$

valószínűségi változó karakterisztikus függvényét. Nyilvánvaló, hogy

$$f_{Nn}^{(2)}(t) \Longrightarrow f_N^{(2)}(t), \tag{2.40}$$

ha $n \to \infty$. Jelölje $\{H_k\}$ az $\{y_k^{(1)}\} = \{y_k\}$ osztópontsorozat és a $\psi(h)$ függvény által meghatározott felosztást, továbbá K a következő számot: $K = \sup\limits_k (y_{k+1} - y_k)$.

Ha $M \geqq 1$, akkor a 2.6 TÉTEL felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$|1 - f_{Nn}^{(2)}(t)| \leqq \sum_{k:\,y_k^{(n)} \geqq M} W(y_k^{(n)}t,\, AL_{Nk}^{(n)}) \leqq \sum_{k:\,y_k^{(1)} \geqq M} W(y_{k+1}^{(1)}t,\, AL_{Nk}^{(1)}) \leqq$$

$$\leqq \sum_{k:\,y_k^{(1)} \geqq M} W(y_k^{(1)}(K+1)t,\, AL_{Nk}^{(1)}) \leqq \sum_{k:\,y_k \geqq M} W(y_k(K+1)t,\, AH_k).$$

Eszerint

$$|1 - f_N^{(2)}(t)| \leqq \sum_{k:\,y_k \geqq M} W(y_k(K+1)t,\, AH_k). \tag{2.41}$$

Rögzítsük t értékét és válasszuk M-et oly nagynak, hogy a (2.41) egyenlőtlenség jobboldalán álló tag kisebb legyen, mint $\varepsilon/2$. Rögzített M mellett N-et elég nagynak választva, fennáll az

$$|1 - f_N^{(1)}(t)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

egyenlőtlenség. Ha úgy, mint az előbb, $f_N(t)$ jelöli az

$$\int\limits_A \varphi_N(h)\xi(dA)$$

valószínűségi változó karakterisztikus függvényét, akkor, $f_N(t) = f_N^{(1)}(t) f_N^{(2)}(t)$ és így az előbb rögzített t értékre fennáll az

$$|1 - f_N(t)| \leqq |1 - f_N^{(1)}(t)| + |1 - f_N^{(2)}(t)| < \varepsilon$$

reláció. Q. e. d.

6. §. A nem-negatív halmazfüggvény esete

Ha a $\xi(A)$ sztochasztikus halmazfüggvény valószínűségi változói nemnegatívak, akkor az integrált közelítő összeg nem csupán sztochasztikusan, hanem 1 valószínűséggel is konvergál a megfelelő integrálhoz. Igaz az is, hogy ha $\varphi(h)$ integrálható az $A \in \mathfrak{S}$ halmazon, akkor integrálható ennek minden mérhető részhalmazán. Az előbbi állítást speciális esetként tartalmazza a nagy Lebesgue-tétel analogonjának most bebizonyítandó erősebb alakja.

2. 9 TÉTEL: *Ha minden $B \in \mathfrak{S}$ halmazra $\xi(B) \geqq 0$, továbbá $\varphi_N(h)$ $(N = 1, 2, \ldots)$, $\varphi(h)$ és $\psi(h)$ olyan függvények, melyekre*

$$\lim_{N\to\infty} \varphi_N(h) = \varphi(h)$$

$$|\varphi_N(h)| \leqq \psi(h) \qquad (N = 1, 2, \ldots)$$

és $\psi(h)$ integrálható az $A \in \mathfrak{S}$ halmazon, akkor ugyanez érvényes a $\varphi_N(h)$ $(N = 1, 2, \ldots)$ és $\varphi(h)$ függvényekre is és

$$\lim_{N\to\infty} \int_A \varphi_N(h)\xi(dA) = \int_A \varphi(h)\xi(dA).$$

BIZONYÍTÁS: Elegendő a $\varphi(h) = 0$ és $\varphi_N(h) \geqq 0$ $(N = 1, 2, \ldots)$ esetet vizsgálnunk. Legyen $\varepsilon > 0$ és vezessük be a következő jelölést

$$A_N = \{h : A,\ \varphi_N(h) \geqq \varepsilon\}.$$

Ekkor

$$\begin{aligned}\int_A \varphi_N(h)\xi(dA) &= \int_{A_N} \varphi_N(h)\xi(dA) + \int_{A-A_N} \varphi_N(h)\xi(dA) \leqq \\ &\leqq \int_{A_N} \psi(h)\xi(dA) + \varepsilon\xi(A).\end{aligned} \tag{2. 42}$$

Felhasználva a 2. 3 TÉTELt és [13] 4. 2 TÉTELét, (2. 42)-ből következik, hogy

$$\lim_{N\to\infty} \int_A \varphi_N(h)\xi(dA) = 0.$$

Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

III. FEJEZET
ABSZOLUT FOLYTONOS HALMAZFÜGGVÉNYEK

1. §. Definíció és unicitás

Egy az $\mathfrak{S}$ σ-gyűrűn értelmezett $\eta(A)$ teljesen additív halmazfüggvényt abszolut folytonosnak nevezünk a $\xi(A)$ teljesen additív halmazfüggvényre vonatkozólag, ha van olyan $\varphi(h)$ mérhető függvény, hogy

$$\eta(A)=\int_A \varphi(h)\xi(dA) \tag{3. 1}$$

minden $A\in\mathfrak{S}$ halmazra. Ezt a kapcsolatot a következőképpen jelöljük: $\eta\ll\xi$.

Először bebizonyítjuk, hogy a ξ és η halmazfüggvények egyértelműen meghatározzák a $\varphi(h)$ függvényt. Ezt fejezi ki a

3. 1 TÉTEL: *Ha $\varphi_1(h)$ és $\varphi_2(h)$ két mérhető, minden $A\in\mathfrak{S}$ halmazon a ξ teljesen additív halmazfüggvényre nézve integrálható függvény és*

$$\int_A \varphi_1(h)\xi(dA)=\int_A \varphi_2(h)\xi(dA) \quad (A\in\mathfrak{S}), \tag{3. 2}$$

akkor van olyan E, a ξ halmazfüggvényre nézve 0-halmaz, hogy

$$\varphi_1(h)=\varphi_2(h), \quad \textit{ha} \quad h\in H-E.$$

BIZONYÍTÁS: Tekintsük a $\psi(h)=\varphi_1(h)-\varphi_2(h)$ függvényt. (3. 2) szerint minden $A\in\mathfrak{S}$ halmazra

$$\int_A \psi(h)\xi(dA)=0. \tag{3. 3}$$

Ennek a relációnak a teljesülése nyilván csak a $\xi(A)$ $(A\in\mathfrak{S})$ valószínűségi változók valószínűségi viszonyaitól, pontosabban a $(\xi(A_1),\ldots,\xi(A_n))$ $(A_1\in\mathfrak{S},\ldots,A_n\in\mathfrak{S})$ vektorok eloszlásaitól függ és nem függ attól, hogy milyen eseménytérben reprezentáljuk őket. Tekintsük az eredeti Ω eseménytér önmagával való Descartes-féle szorzatát a megfelelő szorzat valószínűségi mértékkel. Jelölje a szorzatteret $\bar{\Omega}=\Omega_1\times\Omega_2=\{(\omega_1,\omega_2)\}$ $(\omega_1\in\Omega_1,\omega_2\in\Omega_2)$. Legyen

$$\begin{aligned}\xi_1(A)&=\xi_1((\omega_1,\omega_2),A)=\xi(\omega_1,A),\\ \xi_2(A)&=\xi_2((\omega_1,\omega_2),A)=\xi(\omega_2,A),\end{aligned} \tag{3. 4}$$

Nyilvánvaló, hogy az $A_1,\ldots,A_m,B_1,\ldots,B_n$, $\mathfrak{S}$-hez tartozó halmazok tetszőleges megválasztása mellett a $(\xi_1(A_1),\ldots,\xi_1(A_m)),(\xi_2(B_1),\ldots,\xi_2(B_n))$ vektorok függetlenek. Ebből következik, hogy a

$$\xi_3(A)=\xi_1(A)-\xi_2(A) \qquad (A\in\mathfrak{S}) \tag{3. 5}$$

halmazfüggvény teljesen additív és $\xi_3(A)$ minden $A\in\mathfrak{S}$ halmazra a 0 pontra nézve szimmetrikus eloszlással rendelkezik. Igaz továbbá az is, hogy

$$\int_A \psi(h)\xi_3(dA) = \int_A \psi(h)\xi_1(dA) - \int_A \psi(h)\xi_2(dA) = 0-0=0. \tag{3.6}$$

Jelölje $A_N \in \mathfrak{S}$ azt a halmazt, ahol $\frac{1}{N} \leqq |\psi(h)| \leqq N$. Nyilvánvaló, hogy

$$A_N \subseteq A_{N+1} \qquad (N=1,2,\ldots). \tag{3.7}$$

Legyen $\{y_k^{(n)}\}$ az osztópontok egy végtelenül finom kettőssorozata és $\{H_k^{(n)}\}$ a megfelelő, $\psi(h)$ által meghatározott felosztássorozat. Ekkor, rögzített N mellett

$$\sum_k y_k^{(n)} \xi_3(A_N H_k^{(n)}) \Longrightarrow 0, \tag{3.8}$$

ha $n \to \infty$. Azt kaptuk tehát, hogy a (3. 8) összegre teljesül a nagy számok törvénye és így (vö. [6] 22. §)

$$\lim_{n\to\infty} \sum_k M\left[\frac{(y_k^{(n)}\xi_3(A_N H_k^{(n)}))^2}{1+(y_k^{(n)}\xi_3(A_N H_k^{(n)}))^2}\right] = 0. \tag{3.9}$$

Mivel az A_N halmazon $\frac{1}{N} \leqq |\psi(h)| \leqq N$, következik, hogy

$$\begin{aligned} 0 = \lim_{n\to\infty} \sum_k M\left[\frac{(y_k^{(n)}\xi_3(A_N H_k^{(n)}))^2}{1+(y_k^{(n)}\xi_3(A_N H_k^{(n)}))^2}\right] \geqq \\ \geqq \frac{1}{N^4} \lim_{n\to\infty} \sum_k M\left[\frac{(\xi_3(A_N H_k^{(n)}))^2}{1+(\xi_3(A_N H_k^{(n)}))^2}\right]. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Ismét a nagy számok törvényét alkalmazva, következik, hogy rögzített N mellett

$$\sum_k \xi_3(A_N H_k^{(n)}) \Longrightarrow 0, \tag{3.11}$$

ha $n \to \infty$. Ámde a (3. 11) összeg minden n-re $\xi_3(A_N)$-nel egyenlő, tehát $\xi_3(A_N)=0$. Eszerint, ha L azt a halmazt jelenti, amelyen $\psi(h) \neq 0$, akkor

$$\xi_3(L) = \lim_{N\to\infty} \xi_3(A_N) = 0. \tag{3.12}$$

Legyen $B \in L\mathfrak{S}$. Mivel (3. 12) szerint

$$\xi_3(B) + \xi_3(L-B) = 0, \tag{3.13}$$

továbbá $\xi_3(B)$, $\xi_3(L-B)$ függetlenek és 0-ra nézve szimmetrikus eloszlásúak, következik, hogy $\xi_3(B)=0$. Így a $\xi_3(B)=\xi_1(B)-\xi_2(B)$ reláció és a $\xi_1(B)$, $\xi_2(B)$ valószínűségi változók függetlensége miatt kell, hogy $\xi_1(B) = \text{const}$ legyen. Mivel $\xi_1(B)$ ugyanolyan eloszlású, mint $\xi(B)$, következik, hogy (visszatérve az eredeti eseménytérre és az eredeti valószínűségi változókra) van olyan

$\mu(B)$, az $L\mathfrak{S}$ σ-gyűrűn értelmezett, teljesen additív, számértékű halmazfüggvény, melyre

$$\xi(B)=\mu(B) \qquad (B\in L\mathfrak{S}). \tag{3. 14}$$

Mivel tudjuk, hogy

$$\int_A \psi(h)\mu(dA)=\int_A \psi(h)\xi(dA)=0 \qquad (A\in L\mathfrak{S}), \tag{3. 15}$$

a Radon-integrálra vonatkozó jólismert tételek szerint van olyan $E\in L\mathfrak{S}$, μ-re (ill. ξ-re) nézve 0-halmaz, hogy

$$\psi(h)=0, \quad \text{ha} \quad h\in L-E. \tag{3. 16}$$

Ez az E halmaz kielégíti a tételben megszabott követelményeket. Q. e. d.

2. §. Az abszolút folytonosság tranzitivitása

Ugyanúgy, mint a számértékű halmazfüggvények esetében, az abszolút folytonosság itt is tranzitív tulajdonság. Ezt fejezi ki a

3.2 TÉTEL: *Ha $\xi(A)$, $\eta(A)$, $\zeta(A)$ az $\mathfrak{S}$ σ-gyűrűn értelmezett teljesen additív halmazfüggvények és $\zeta\ll\eta$, $\eta\ll\xi$, akkor $\zeta\ll\xi$.*

BIZONYÍTÁS: Legyen

$$\eta(A)=\int_A \varphi(h)\,\xi(dA),\ \zeta(A)=\int_A \psi(h)\,\eta(dA) \qquad (A\in\mathfrak{S}),$$

és tegyük fel először, hogy $\varphi(h)$ és $\psi(h)$ korlátosak. Válasszunk egy végtelenül finom $\{y_k^{(n)}\}$ osztópont-kettőssorozatot és jelölje $\{H_k^{(n)}\}$ a megfelelő, $\psi(h)$ által meghatározott felosztássorozatot. Definiáljuk a $\psi_n(h)$, $\varphi_n(h)$ függvényeket a következőképpen

$$\psi_n(h)=y_k^{(n)}, \quad \text{ha} \quad h\in H_k^{(n)} \quad (k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots;\ n=1,2,\ldots),$$
$$\varphi_n(h)=\varphi(h)\,\psi_n(h) \qquad (n=1,2,\ldots).$$

Feltételeinkből következik, hogy

$$\sum_k y_k^{(n)}\,\eta(AH_k^{(n)})\Longrightarrow\zeta(A). \tag{3. 17}$$

Másrészt

$$\begin{aligned}\sum_k y_k^{(n)}\,\eta(AH_k^{(n)}) &= \sum_k y_k^{(n)}\int_{AH_k^{(n)}}\varphi(h)\,\xi(dA)=\\ &=\sum_k\int_{AH_k^{(n)}} y_k^{(n)}\varphi(h)\,\xi(dA)=\sum_k\int_{AH_k^{(n)}}\varphi(h)\,\psi_n(h)\,\xi(dA)=\\ &=\int_A\varphi_n(h)\,\xi(dA).\end{aligned} \tag{3. 18}$$

A. (3. 17) és (3. 18) relációkból következik, hogy

(3. 19) $$\zeta(A)=\int\limits_{A}\varphi(h)\,\psi(h)\,\xi(dA).$$

Nézzük most azt az esetet, amikor a $\varphi(h)$ és $\psi(h)$ függvények nem feltétlenül korlátosak. Jelölje A_{NM} a következő halmazt:

$$A_{NM}=\{h:A,|\varphi(h)|\geqq\frac{1}{M},|\psi(h)|\geqq\frac{1}{M},-N\leqq\varphi(h)\,\psi(h)<N\}$$

$$(M,N=1,2,\ldots).$$

Mivel a $\varphi(h)$, $\psi(h)$ függvények korlátosak az A_{NM} halmazon, tehát alkalmazva az előbbieket az $A_{NM}\mathfrak{S}$ σ-gyűrűre, speciálisan azt kapjuk, hogy

(3. 20) $$\zeta(A_{NM})=\int\limits_{A_{NM}}\varphi(h)\,\psi(h)\,\xi(dA).$$

Az A_{NM} halmazok definíciójából következik, hogy $A_{NM}\subseteq A_{NM+1}$. Ha $A_N=\lim\limits_{M\to\infty}A_{NM}$, akkor, mivel az A_N halmazon $\varphi(h)\,\psi(h)$ korlátos, alkalmazva a 2. 3 TÉTELt az $A_N\mathfrak{S}$ σ-gyűrűre, következik, hogy

(3. 21) $$\zeta(A_N)=\int\limits_{A_N}\varphi(h)\,\psi(h)\,\xi(dA).$$

Jelölje B azt a halmazt, ahol $\varphi(h)\,\psi(h)=0$. Ekkor $\lim\limits_{N\to\infty}A_N=A-B$, $\lim\limits_{N\to\infty}\zeta(A_N)=\zeta(A-B)$, tehát az 1. 5 TÉTEL felhasználásával (3. 21)-ből azt kapjuk, hogy

(3. 22) $$\zeta(A-B)=\int\limits_{A-B}\varphi(h)\,\psi(h)\,\xi(dA).$$

Ámde egyszerűen belátható, hogy $\zeta(B)=0$, tehát végül azt kapjuk, hogy

(3. 23) $$\zeta(A)=\int\limits_{A}\varphi(h)\,\psi(h)\,\xi(dA).$$

Ezzel a 3. 2 TÉTELt bebizonyítottuk.

Ha a (3. 1) reláció által definiált $\varphi(h)$ függvényre bevezetjük a

(3. 24) $$\varphi=\frac{d\eta}{d\xi}$$

jelölést, akkor nyilvánvaló, hogy

(3. 25) $$\frac{d(\eta_1+\eta_2)}{d\xi}=\frac{d\eta_1}{d\xi}+\frac{d\eta_2}{d\xi},$$

ahol $\eta_1(A)$, $\eta_2(A)$ teljesen additív és $\xi(A)$-ra nézve abszolút folytonos halmazfüggvények. A 3. 2 TÉTEL azt állítja, hogy ha létezik $\frac{d\zeta}{d\eta}$ és $\frac{d\eta}{d\xi}$, akkor létezik $\frac{d\zeta}{d\xi}$ is és a (3. 23) reláció szerint

$$\frac{d\zeta}{d\xi} = \frac{d\zeta}{d\eta} \cdot \frac{d\eta}{d\xi}. \tag{3.26}$$

MEGJEGYZÉS: A sztochasztikus halmazfüggvények esetére a Radon—Nikodym-tétel nem általánosítható szószerint. Legyen pl. H a $[0, 1]$ intervallum, $\mathfrak{S}$ az ennek Lebesgue-szerint mérhető részhalmazaiból alkotott σ-gyűrű. Ha $\xi(A)$ és $\eta(A)$ $(A \in \mathfrak{S})$ két teljesen additív halmazfüggvény, melyek karakterisztikus függvényei

$$e^{im(A)t - m(A)\frac{t^2}{2}}, \quad \text{ill.} \quad e^{-m(A)\frac{t^2}{2}},$$

ahol $m(A)$ az A halmaz Lebesgue-mértéke, akkor a $\xi(A) = 0$ reláció maga után vonja, hogy $\eta(A) = 0$. Ennek ellenére nem található olyan $\varphi(h)$ függvény, melyre

$$\eta(A) = \int_A \varphi(h)\, \xi(dA) \qquad (A \in \mathfrak{S}).$$

IV. FEJEZET

A VÁRHATÓ ÉRTÉKRE ÉS A SZÓRÁSRA VONATKOZÓ TÉTELEK

1. §. Általános megjegyzések

Ha $\xi(A)$ egy $\mathfrak{R}$ gyűrűn értelmezett additív halmazfüggvény és minden $A \in \mathfrak{S}$ halmazra létezik az

$$M(A) = \mathbf{M}(\xi(A)) \tag{4.1}$$

várható érték, akkor $M(A)$ nyilván additív számértékű halmazfüggvény. Ugyanez érvényes a

$$D^2(A) = \mathbf{D}^2(\xi(A)) \tag{4.2}$$

szórásnégyzetre is, amennyiben az létezik. A (4. 1) és (4. 2) számértékű halmazfüggvények teljes additívitásának a bizonyítása azonban már mélyebb segédeszközöket igényel. Erre vonatkozik a

4. 1 TÉTEL: *Ha $\xi(A)$ egy $\mathfrak{R}$ gyűrűn értelmezett teljesen additív halmazfüggvény és $\mathbf{M}(\xi(A))$ (ill. $\mathbf{D}^2(\xi(A))$) létezik minden $A \in \mathfrak{R}$ halmazra, akkor a (4. 1) (ill. (4. 2)) számértékű halmazfüggvény teljesen additív.*

BIZONYÍTÁS: Legyen $A_1, A_2, \ldots$ az $\mathfrak{R}$ gyűrű egy diszjunkt halmazsorozata, melyre $A = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathfrak{R}$. DOOB egy tétele szerint ([5] 339. old.

THEOREM 5. 2)

$$\mathbf{M}(\xi(A)) = \sum_{k=1}^{\infty}{}' \mathbf{M}(\xi(A_k)),$$

tehát

(4. 3)
$$M(A) = \sum_{k=1}^{\infty}{}' M(A_k).$$

Lássuk most a szórásra vonatkozó állítás bizonyítását. Feltehetjük, hogy $M(B)=0$ minden $B \in \mathfrak{R}$ halmazra. DOOB előbb idézett tételéből az is következik, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{M}\left[\left(\xi(A) - \sum_{k=1}^{n}{}' \xi(A_k)\right)^2\right] = 0.$$

Mivel

$$\xi(A) - \sum_{k=1}^{n}{}' \xi(A_k) = \xi(B_{n+1}),$$

ahol $B_n = \sum_{k=n}^{\infty}{}' A_k$, tehát

(4. 4)
$$\lim_{n\to\infty} D^2(B_{n+1}) = \lim_{n\to\infty} D^2(\xi(B_{n+1})) = 0.$$

Másrészt

$$D^2(A) = \sum_{k=1}^{n}{}' D^2(A_k) + D^2(B_{n+1}),$$

ahonnan állításunk leolvasható. Q. e. d.

1. MEGJEGYZÉS: Abból, hogy egy $\mathfrak{R}$ gyűrűn értelmezett és $\mathfrak{S}(\mathfrak{R})$-re kiterjeszthető halmazfüggvényre az $\mathbf{M}(\xi(A))$ $(A \in \mathfrak{R})$ várható értékek léteznek, nem következik, hogy a kiterjesztett halmazfüggvény valószínűségi változói is véges várható értékkel rendelkeznek. Egy egyszerű példa erre a következő, független valószínűségi változókból álló sor ($\mathfrak{R}$ a természetes számok véges halmazainak gyűrűje). Legyen

(4. 5)
$$\mathbf{P}\left(\xi_n = \begin{matrix} n^2 \\ 0 \end{matrix}\right) = \begin{matrix} \dfrac{1}{n^2} \\ 1 - \dfrac{1}{n^2} \end{matrix},$$

akkor $\sum_{n=1}^{\infty}{}' \xi_n$ minden sorrendben 1 valószínűséggel konvergál, tehát a $\xi(A) = \sum_{n\in A}{}' \xi_n (A \in \mathfrak{R})$ halmazfüggvény kiterjeszthető $\mathfrak{S}(\mathfrak{R})$-re. Ámde

$$\mathbf{M}(\xi_n) = 1 \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

tehát $\sum_{n=1}^{\infty}{}' \mathbf{M}(\xi_n) = \infty$ és így $\mathbf{M}\left(\sum_{n=1}^{\infty}{}' \xi_n\right) = \infty$.

2. MEGJEGYZÉS: Lehetséges az is, hogy a $\xi(A)$ és $M(A)$ $(A \in \mathfrak{R})$ halmazfüggvények mindegyike kiterjeszthető, de $\mathfrak{S}(\mathfrak{R})$-en a kiterjesztett halmazfüggvény valószínűségi változói nem feltétlenül véges várható értékűek. Ismét egy független valószínűségi változókból álló $\sum_{n=2}^{\infty} \xi_n$ végtelen sort tekintve, legyen ξ_n összetett Poisson-eloszlású, karakterisztikus függvényének a logaritmusa legyen a következő

$$\sum_{k \neq 0} C_k^{(n)} (e^{ikt} - 1), \text{ ahol } C_k^{(n)} = \frac{1}{|k|(\log |k|)^n} \quad (k = \pm 1, \pm 2, \ldots; n = 1, 2, \ldots).$$

Ekkor a $\sum_{n=2}^{\infty} \xi_n$ minden sorrendben 1 valószínűséggel konvergál (vö. [5] 115. old. THEOREM 2. 7 (II)) és az összeg karakterisztikus függvénye

$$\sum_{k \neq 0} C_k (e^{ikt} - 1), \quad \text{ahol} \quad C_k = \sum_{n=2}^{\infty} C_k^{(n)} = \frac{1}{|k|} \frac{1}{\log^2 |k| - 1}.$$

Ámde $\mathbf{M}(\xi_n) = 0$ $(n = 2, 3, \ldots)$ és a $\sum_{n=2}^{\infty} \xi_n$ összeg várható értéke nem létezik, mert

$$\sum_{k \neq 0} |k| C_k = \sum_{k \neq 0} \frac{1}{\log^2 |k| - 1} = \infty,$$

aminek éppen az abszolut várható értéket kellene megadnia. Így a

$$\xi(A) = \sum_{k \in A} \xi_k \qquad (A \in \mathfrak{R})$$

sztochasztikus és az

$$M(A) = \mathbf{M}(\xi(A)) \equiv 0$$

számértékű halmazfüggvény kiterjeszthető $\mathfrak{S}(\mathfrak{R})$-re, de a kiterjesztett halmazfüggvény valószínűségi változói nem mind véges várható értékűek.

3. MEGJEGYZÉS: Ha $\xi(A)$ $(A \in \mathfrak{R})$ kiterjeszthető $\mathfrak{S}(\mathfrak{R})$-re és $\xi^*(B)$ véges várható értékkel rendelkezik minden $B \in \mathfrak{S}(\mathfrak{R})$ halmazra, akkor a 4. 1 TÉTELből következik, hogy $M(A)$ $(A \in \mathfrak{R})$ is kiterjeszthető $\mathfrak{S}(\mathfrak{R})$-re és

$$M^*(B) = \mathbf{M}(\xi^*(B)) \qquad (B \in \mathfrak{S}(\mathfrak{R})),$$

ahol M^* az M számértékű halmazfüggvény kiterjesztettje.

4. MEGJEGYZÉS: Ha $\xi(A)$ $(A \in \mathfrak{R})$ teljesen additív halmazfüggvény, továbbá minden $A \in \mathfrak{R}$ halmazra létezik a $D^2(A) = \mathbf{D}^2(\xi(A))$ mennyiség és ez $M(A)$-val együtt mint halmazfüggvény kiterjeszthető $\mathfrak{S}(\mathfrak{R})$-re, akkor $\xi(A)$ is kiterjeszthető $\mathfrak{S}(\mathfrak{R})$-re és

$$\mathbf{D}^2(\xi^*(B)) = D^{*2}(B), \ \mathbf{M}(\xi^*(B)) = M^*(B) \ (B \in \mathfrak{S}(\mathfrak{R})), \tag{4. 6}$$

ahol D^{*2}, ill. M^* a D^2, ill. M halmazfüggvény kiterjesztettje.

BIZONYÍTÁS: Tekintsük a $\xi(A)-M(A)$ teljesen additív halmazfüggvényt. Ez [13] 3.11 TÉTELe szerint kiterjeszthető $\mathfrak{S}(\mathfrak{R})$-re. Jelölje $\mathfrak{M}$ azoknak a B halmazoknak az összességét, amelyekre (4.6) fennáll. A független valószínűségi változókból álló végtelen sorokra vonatkozó jólismert tételekből (vö. [5] 108. old. THEOREM 2.3) egyszerűen következik, hogy $\mathfrak{M}$ monoton osztály. Mivel $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{M}$, következik, hogy $\mathfrak{M} = \mathfrak{S}(\mathfrak{R})$ (vö. [7] 27. old. THEOREM).

2. §. Az (1.3) integrál várható értékére és szórására vonatkozó tételek

Most rátérünk az (1.3) integrál várható értékének és szórásának a vizsgálatára.

4.2 TÉTEL: *Legyen $\xi(A)$ $(A \in \mathfrak{S})$ teljesen additív halmazfüggvény. Tegyük fel, hogy minden $B \in \mathfrak{S}$ halmazra létezik az $M(B) = \mathbf{M}(\xi(B))$ várható érték és van olyan ζ valószínűségi változó, hogy $\mathfrak{S}$ minden $A_1, \ldots, A_r$ diszjunkt halmazrendszerére*

$$\sum_{k=1}^{r} |\xi(A_k)| \leq \zeta.$$

Ez esetben korlátos $\varphi(h)$ függvényre léteznek az

$$\eta(B) = \int_B \varphi(h)\xi(dA) \tag{4.7}$$

valószínűségi változók várható értékei és

$$\mathbf{M}(\eta(B)) = \int_B \varphi(h) M(dA), \tag{4.8}$$

ahol a jobboldalon Radon-integrál áll.

BIZONYÍTÁS: Állításunk a Lebesgue-féle korlátos konvergencia-tétel felhasználásával igen egyszerűen belátható.

4.3 TÉTEL: *Legyen $\xi(A)$ $(A \in \mathfrak{S})$ teljesen additív halmazfüggvény. Tegyük fel, hogy minden $B \in \mathfrak{S}$ halmazra létezik a $D(B) = \mathbf{D}(\xi(B))$ szórás és $\varphi(h)$ olyan függvény, melyre létezik a (4.8) jobboldalán álló Radon- és a következő*

$$\int_B \varphi^2(h)\, D^2(dA)$$

Lebesgue-integrál. Ez esetben léteznek az $\mathbf{M}(\eta(B))$, $\mathbf{D}^2(\eta(B))$ mennyiségek és fennáll a (4.8) és a

$$\mathbf{D}^2(\eta(B)) = \int_B \varphi^2(h)\, D^2(dA). \tag{4.9}$$

reláció.

BIZONYÍTÁS: Válasszunk egy $\{y_k^{(n)}\}$ osztópont-kettőssorozatot és legyen $\{H_k^{(n)}\}$ a $\varphi(h)$ függvény által meghatározott megfelelő felosztássorozat. Könynyen belátható, hogy a

$$\zeta_n = \sum_k y_k^{(n)} \xi(BH_k^{(n)}) \tag{4.10}$$

sorozat négyzetes középben konvergens. Mivel ilyen értelemben (0 valószínűségű halmaztól eltekintve) a sorozat csak egy valószínűségi változóhoz tarthat, következik, hogy ez a határérték $\eta(B)$. Ebből azonban az is következik, hogy

$$\begin{aligned} &\mathbf{M}(\zeta_n) \to \mathbf{M}(\eta(B)), \\ &\mathbf{M}(\zeta_n^2) \to \mathbf{M}(\eta^2(B)), \end{aligned} \quad \text{ha } n \to \infty. \tag{4.11}$$

Felhasználva azt, hogy a $\xi(BH_k^{(n)})$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ valószínűségi változók függetlenek, következik, hogy

$$\mathbf{D}^2(\zeta_n) = \mathbf{M}(\zeta_n^2) - \mathbf{M}^2(\zeta_n) = \sum_k (y_k^{(n)})^2 D^2(BH_k^{(n)}), \tag{4.12}$$

ahonnan a (4. 9) reláció leolvasható. A (4. 8) reláció ekvivalens (4. 11) első sorával. Q. e. d.

Hasonló formulát lehetne levezetni a harmadik centrális momentumra, ugyanis független valószínűségi változók esetében ezek is összeadódnak. Mivel ennek nincs különösebb jelentősége, ezt a kérdést nem tárgyaljuk.

V. FEJEZET

A KARAKTERISZTIKUS FUNKCIONÁL

Jelölje $\mathfrak{B}$ a H térben értelmezett, $\mathfrak{S}$-re nézve mérhető és egy $\xi(A)$ teljesen additív halmazfüggvényre nézve majdnem mindenütt[5] korlátos $\varphi(h)$ függvények terét. $\mathfrak{B}$ Banach-tér, ha egy függvény normáján az abszolut értékének valódi maximumát értjük. Tekintsük a $\mathfrak{B}$ térben értelmezett

$$\mathbf{L}(f) = \mathbf{M}\left[\exp\left(i\int_H \varphi(h)\xi(dA)\right)\right] \tag{5.1}$$

funkcionált. Ezt a $\xi(A)$ halmazfüggvény *karakterisztikus funkcionáljának* nevezzük. A 2. 8 TÉTEL szerint az $\mathbf{L}(\varphi)$ funkcionál folytonos.

A karakterisztikus funkcionált, mint a Fourier-integrál általánosítását, KOLMOGOROV [11] vezette be 1935-ben. Valószínűségszámítási alkalmazás céljából LE CAM [3] vezette be sztochasztikus folyamatokra 1947-ben és ugyancsak ebben az évben S. BOCHNER [1] véletlen értékű *additív* halmazfüggvényekre. Az általunk definiált (5. 1) funkcionál sem nem általánosítása sem nem speciális esete az előbbieknek. Ha $\xi(A)$ realizációi teljesen additív halmazfüggvények, akkor (5. 1) speciális esete a KOLMOGOROV által definiált

[5] Vö. 340. old.

karakterisztikus funkcionálnak. A BOCHNER által bevezetett fogalom definíciója lényegesen eltér az előbbitől.

Az (5. 1) karakterisztikus funkcionál ismeretében ismerjük a $\xi(A)$ $(A \in \mathfrak{S})$ valószínűségi változók valószínűségi viszonyait. Ezt fejezi ki pontosabban az

5. 1 TÉTEL: *Az* $\mathbf{L}(\varphi)$ *funkcionál teljesen meghatározza az* Ω *eseménytérben annak a legkisebb* σ*-gyűrűnek az elemein értelmezett valószínűséget, amelyen a* $\xi(A)$ $(A \in \mathfrak{S})$ *valószínűségi változók mérhetők.*

BIZONYÍTÁS: Legyen $A_1, A_2, \ldots, A_n$ az $\mathfrak{S}$ σ-gyűrű n tetszőleges halmaza. Megmutatjuk, hogy $\mathbf{L}(\varphi)$ meghatározza a $\xi(A_1), \ldots, \xi(A_n)$ valószínűségi változók együttes karakterisztikus függvényét. Definiáljuk a következő függvényeket:

$$\varphi_{t_k}(h) = \begin{cases} t_k, & \text{ha } h \in A_k, \\ 0 & \text{egyébként,} \end{cases} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Nyilvánvaló, hogy

$$\begin{aligned} &\mathbf{M}[\exp i(t_1\xi(A_1) + \cdots + t_n\xi(A_n))] = \\ &= \mathbf{M}\left[\exp i \int_H \varphi_{t_1,\ldots,t_n}(h)\xi(dA)\right], \end{aligned} \tag{5. 2}$$

ahol

$$\varphi_{t_1,\ldots,t_n}(h) = \sum_{k=1}^{n} \varphi_{t_k}(h), \tag{5. 3}$$

tehát, ha $t_1, \ldots, t_n$ befutják a valós számokat, $\mathbf{L}(\varphi_{t_1}, \ldots, t_n(h))$ megadja a $\xi(A_1), \ldots, \xi(A_n)$ vektor karakterisztikus függvényét. Ezek az ún. végesdimenziós eloszlások már meghatározzák a valószínűséget a szóbanforgó σ-gyűrűn. Q. e. d.

Ha léteznek az $\int_H \varphi(h)\xi(dA)$ valószínűségi változók n-edik momentumai minden $\varphi(h) \in \mathfrak{F}$ függvényre, akkor az

$$\mathbf{L}_n(\varphi) = \mathbf{M}\left[\left(\int_H \varphi(h)\xi(dA)\right)^n\right] \tag{5. 4}$$

funkcionált a $\xi(A)$ $(A \in \mathfrak{S})$ halmazfüggvény n-edik momentumának nevezzük. (5. 1)-ből sorfejtéssel belátható, hogy

$$\mathbf{L}(\varphi) = 1 + i\mathbf{L}_1(\varphi) + i^2\frac{\mathbf{L}_2(\varphi)}{2!} + \cdots + i^{n-1}\frac{\mathbf{L}_{n-1}(\varphi)}{(n-1)!} + i^n\frac{\mathbf{L}_n'(\varphi)}{n!}\mathbf{R}_n(\varphi), \tag{5. 5}$$

ahol

$$\mathbf{L}_n'(f) = \mathbf{M}\left(\left|\int_H \varphi(h)\xi(dA)\right|^n\right) \tag{5. 6}$$

és $\mathbf{R}_n(\varphi)$ olyan funkcinál, melyre $|\mathbf{R}_n(\varphi)| \leq 1$.

Most felírjuk néhány egyszerű sztochasztikus halmazfüggvény-típus karakterisztikus funkcionálját. Mindegyik esetben eleve feltesszük, hogy a szóbanforgó halmazfüggvény teljesen additív.

1. Poisson-típusú halmazfüggvények. Ez esetben

$$f(t, A) = e^{\lambda(A)(e^{it}-1)} \qquad (A \in \mathfrak{S}), \tag{5.7}$$

ahol $\lambda(A)$ az $\mathfrak{S}$ σ-gyűrűn értelmezett véges mérték. Egyszerűen belátható, hogy

$$\mathsf{L}(\varphi) = \exp\left\{ \int_H (e^{i\varphi(h)} - 1)\lambda(dA) \right\}. \tag{5.8}$$

2. Összetett Poisson-típusú halmazfüggvények. Ez esetben

$$f(t, A) = \exp\left\{ \sum_{k=1}^{\infty} C_k(A)(e^{i\lambda_k t} - 1) \right\} \qquad (A \in \mathfrak{S}), \tag{5.9}$$

ahol $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ valós számokból álló additív félcsoport, továbbá $C_k(A)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ és

$$C(A) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k(A) \tag{5.10}$$

véges mérték az $\mathfrak{S}$ σ-gyűrűn. Egyszerűen belátható, hogy

$$\mathsf{L}(\varphi) = \exp\left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \int_H (e^{i\lambda_k \varphi(h)} - 1) C_k(dA) \right\}. \tag{5.11}$$

3. Laplace—Gauss-típusú halmazfüggvények. Ez esetben

$$f(t, A) = e^{itM(A) - \frac{D^2(A)}{2}t^2} \qquad (A \in \mathfrak{S}), \tag{5.12}$$

ahol $M(A)$ teljesen additív számértékű halmazfüggvény, $D^2(A)$ pedig véges mérték az $\mathfrak{S}$ σ-gyűrűn. A karakterisztikus funkcionál — amint az a 4. 3 TÉTEL alapján közvetlenül is adódik, — a következő alakú

$$\mathsf{L}(\varphi) = \exp\left\{ it \int_H \varphi(h) M(dA) - \frac{t^2}{2} \int_H \varphi^2(h) D^2(dA) \right\}, \tag{5.13}$$

ahol a jobboldalon az exponensben Radon-, illetve absztrakt Lebesgue-integrál áll.

Az (5. 1) karakterisztikus funkcionált lehetne általánosabban a ξ halmazfüggvényre nézve a H halmazon integrálható függvények terében értelmezni. Ez a tér azonban általában nem lesz Banach-tér.

IRODALOM

[1] S. BOCHNER: Stochastic processes, *Ann. Math.*, **48** (1947) 1014—1061.

[2] S. BOCHNER: *Harmonic analysis and the theory of probability*, Berkeley and Los Angeles, 1955.

[3] L. LE CAM: Un instrument d'étude des fonctions aléatoires: la fonctionelle caractéristique, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **224** (1947) 710—711.

[4] H. CRAMÉR: *A contribution to the theory of stochastic processes*, Proc. Sec. Berkeley Symp., Berkeley and Los Angeles, 1951, 329—340.

[5] J. L. DOOB: *Stochastic processes*, New York, London, 1953.

[6] B. V. Gnyegyenko és A. N. Kolmogorov, *Független valószínűségi változók összegeinek összegeinek határeloszlásai* (Budapest, 1951).

[7] P. HALMOS: *Measure Theory*, New York, 1950.

[8] K. Ito, On stochastic differential equations, *Mem. Amer. Math. Soc.*, n. **4** (1951).

[9] A. N. KOLMOGOROV: Kurven in Hilbertschen Raum die gegenüber eine einparametrigen Gruppe von Bewegungen invariant sind, *Doklady Akad. Nauk. S. S. S. R. (N. S.)*, **26** (1940) 6—9.

[10] A. N. KOLMOGOROV: Wienersche Spiralen und einige andere interessante Kurven in Hilbertschen Raum, *Doklady Akad. Nauk. S. S. S. R. (N. S.)*, **26** (1940), 115—118.

[11] A. N. KOLMOGOROV: La transformation de Laplace dans les espaces linéaires, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **200** (1935) 1717—1718.

[12] A. OBUKHOV: On the energy distribution in the spectrum of a turbulent flow, *Doklady Akad Nauk S. S. S. R.*, **32** (1941) 19—21.

[13] PRÉKOPA A.: Sztochasztikus halmazfüggvényekről, I. *Magyar Tud. Akad. III. Oszt. Közl.*, **6** (1956) 289—337.

[14] J. RADON: Théorie und Anwendung der absolut-additiven Mengenfunktionen, *Sitzsber. Akad. Wiss. Wien, Math. Naturwiss. Kl.*, **122** (1913) 1295—1438.

[15] F. RIESZ, B. SZ.-NAGY: *Leçons d'analyse fonctionnelle*, Budapest, 1952.

[16] N. WIENER: Differential space, *J. Math. Phys. Math. Inst. Tech.*, 2 (1923) 131—174.

(Beérkezett: 1957. VII. 15.)