TARTÓZKODÁSI IDŐ PROBLÉMÁKRÓL

TAKÁCS LAJOS

Bevezetés

Tekintsük a $\{\xi(t), 0 \leqq t < \infty\}$ sztochasztikus folyamatot, ahol a $\xi(t)$ valószínűségi változók értékkészletét valamilyen X absztrakt tér elemei alkotják. Legyen $X = A + B$, ahol A és B rögzített közös pont nélküli halmazok. Tegyük fel, hogy $\xi(0) \in A$. Ekkor a $\{\xi(t)\}$ folyamat növekvő t értékekre váltakozva A és B állapotot vesz fel. Jelölje az egymásutáni A állapotban való tartózkodási időtartamokat rendre $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ és a B állapotban való tartózkodási időtartamokat rendre $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n, \ldots$ valószínűségi változó. Feltesszük, hogy a $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n, \ldots$ nem-negatív független valószínűségi változók, amelyekre

$$\mathbf{P}\{\xi_n < x\} = G(x) \quad \text{és} \quad \mathbf{P}\{\eta_n \leqq x\} = H(x) \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Megjegyezzük, hogy a fenti értelmezés szerint $G(x)$ balról folytonos és $H(x)$ jobbról folytonos eloszlásfüggvény.

Értelmezzük most a $\{\chi(t), 0 \leqq t < \infty\}$ sztochasztikus folyamatot olymódon, hogy

$$\chi(t) = \begin{cases} 1, & \text{ha} \quad \xi(t) \in B \\ 0, & \text{ha} \quad \xi(t) \in A. \end{cases}$$

Legyen

$$\beta(t) = \int_0^t \chi(u)\, du.$$

A $\beta(t)$ valószínűségi változó a $(0, t)$ intervallum azon u pontjaiból álló halmaz mértéke, amelyekre $\xi(u) \in B$. Következőleg $\alpha(t) = t - \beta(t)$ a $(0, t)$ intervallum azon u pontjaiból álló halmaz mértéke, amelyekre $\xi(u) \in A$.

A következőkben meghatározzuk a $\beta(t)$ valószínűségi változó eloszlását, továbbá $\beta(t)$ aszimptotikus eloszlását és $\mathbf{M}\{\beta(t)\}$ és $\mathbf{D}\{\beta(t)\}$ aszimptotikus viselkedését, midőn $t \to \infty$. Ezenkívül több példát ismertetünk.

Hasonló kérdésekkel Markov-láncok esetén P. Lévy [11], A. N. Kolmogorov [10] és R. L. Dobrusin [4], [6] foglalkozott. A $\beta(t)$ eloszlását bizonyos rekurrens folyamatok esetén szerző [14], [15], [16] munkáiban vizsgálta. A jelenleg ismertetendő eredmények legnagyobb része bentfoglaltatik szerző [18], [19], [20] munkáiban.

A következő jelöléseket vezetjük be. Legyen $\zeta_n = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, $\eta_0 \equiv 0$ és $\chi_n = \eta_0 + \eta_1 + \cdots + \eta_n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. Továbbá legyen

$$\mathbf{P}\{\zeta_n < x\} = G_n(x), \quad \text{ha} \quad n = 1, 2, \ldots$$

és

$$\mathbf{P}\{\chi_n \leqq x\} = H_n(x), \quad \text{ha} \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Ekkor $H_0(x) = 1$, ha $x \geqq 0$ és $H_0(x) = 0$, ha $x < 0$ és állapodjunk meg abban, hogy $G_0(x) \equiv 1$.

A $\beta(t)$ eloszlásfüggvénye legyen

$$\mathbf{P}\{\beta(t) \leqq x\} = \Omega(t, x).$$

Ekkor $\mathbf{P}\{\alpha(t) < x\} = 1 - \Omega(t, t-x)$. Végül legyen

$$\alpha = \int_0^\infty x\,dG(x) \quad \text{és} \quad \beta = \int_0^\infty x\,dH(x),$$

továbbá

$$\sigma_\alpha^2 = \int_0^\infty (x-\alpha)^2\,dG(x) \quad \text{és} \quad \sigma_\beta^2 = \int_0^\infty (x-\beta)^2\,dH(x).$$

1. §. A $\beta(t)$ eloszlásának meghatározása

1. TÉTEL: *A $\beta(t)$ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye*

$$\Omega(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x)\,[G_n(t-x) - G_{n+1}(t-x)]. \tag{1}$$

BIZONYÍTÁS: Adott $x\,(0 \leqq x \leqq t)$ esetén jelölje τ azt a legkisebb időpontot, amelyre $\alpha(\tau) = t - x$. Ekkor nyilvánvalóan $\xi(\tau) \in A$. A τ egyértelműen meghatározott valószínűségi változó. Most megmutatjuk, hogy

$$\mathbf{P}\{\beta(t) \leqq x\} = \mathbf{P}\{\beta(\tau) \leqq x\}.$$

Ugyanis ha tekintetbe vesszük, hogy $\alpha(t) + \beta(t) = t$ minden t értékre $(0 \leqq t < \infty)$ és $\alpha(t)$ és $\beta(t)$ a t-nek monoton nemcsökkenő függvényei, akkor könnyen beláthatóak az alábbi azonosságok

$$\{\beta(t) \leqq x\} \equiv \{\alpha(\tau) \leqq \alpha(t)\} \equiv \{\tau \leqq t\} \equiv \{\alpha(\tau) + \beta(\tau) \leqq t\} \equiv \{\beta(\tau) \leqq x\}.$$

Így tehát felírható, hogy

$$\Omega(t, x) = \mathbf{P}\{\beta(t) \leqq x\} = \mathbf{P}\{\beta(\tau) \leqq x\},$$

vagyis $\Omega(t, x)$ kiszámítását visszavezettük $\mathbf{P}\{\beta(\tau) \leqq x\}$ meghatározására. A $\beta(\tau) \leqq x$ esemény több egymást kizáró módon valósulhat meg, még pedig a τ időpont lehet az első, második, ..., s. i. t „A szakaszon". Ha τ az $n+1$ -edik $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ „A szakaszon" van, akkor $\beta(\tau) = \chi_n$. Így tehát felírható, hogy $\beta(\tau)=\eta_0+\eta_1+\cdots+\eta_\nu$, ahol ν maga is valószínűségi változó. Mivel a ν változó értékét a $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n, \ldots$ változók értékei egyértelműen meghatározzák, tehát fennáll, hogy ν *független* az $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n, \ldots$ változóktól. Most $\mathbf{P}\{\nu<n\}=\mathbf{P}\{\zeta_n \geqq t-x\}$ $(n=1,2,\ldots)$, azaz $\mathbf{P}\{\nu=n\}=G_n(t-x)-G_{n+1}(t-x)$, ha $n=0,1,2,\ldots$. Így a teljes valószínűségi tétel szerint

$$\mathbf{P}\{\beta(\tau)\leqq x\}=\sum_{n=0}^{\infty}\mathbf{P}\{\nu=n\}\,\mathbf{P}\{\chi_n\leqq x\},$$

azaz $0\leqq x<t$ értékekre

$$\Omega(t,x)=\sum_{n=0}^{\infty}[G_n(t-x)-G_{n+1}(t-x)]\,H_n(x),$$

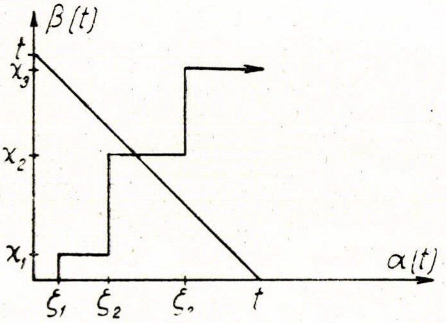
ami bizonyitandó volt. Egyéb x értékekre (1) triviálisan igaz.

1. MEGJEGYZÉS: A fenti bizonyításból kiderül, hogy az 1. TÉTEL akkor is fennáll, ha nem tesszük fel, hogy a $\{\xi_n\}$ és $\{\eta_n\}$ változók függetlenek és egyforma eloszlásúak. Ehelyett elegendő annyit feltenni, hogy a ζ_n és χ_n és a ζ_{n+1} és χ_n változópárok $n=1,2,\ldots$-ra legyenek függetlenek.

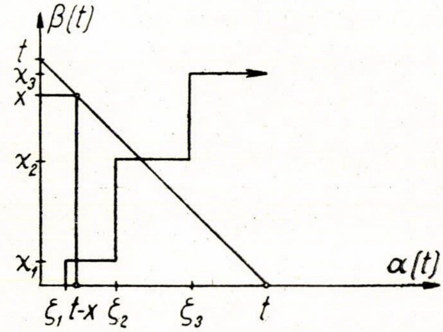
2. MEGJEGYZÉS: A $\beta(t)$ valószínűségi változó bizonyos „*B* szakaszok" hosszának összegeként állítható elő, ahol az utolsó „*B* szakasz" esetleg csonka. Ennek dacára meglepő, hogy a $\beta(t)$ változó eloszlását meghatározó (1) képlet nem tartalmazza ennek a csonka szakasznak az eloszlását. Még meglepőbb, hogy a $\beta(t)$ eloszlásának kiszámitása visszavezethető véletlen tagszámú független valószínűségi változók összege eloszlásának kiszámítására, ahol a tagok száma független a változóktól, holott a $\beta(t)$-nek valószínűségi változók összegeként való előállításában a tagok száma függ maguktól a változóktól.

3. MEGJEGYZÉS: A $\mathbf{P}\{\beta(\tau)\leqq x\}=\mathbf{P}\{\beta(t)\leqq x\}$ összefüggés fennállása meglepő, hiszen $\beta(\tau)\leqq\beta(t)$, sőt $\beta(\tau)<\beta(t)$ is lehet.

4. MEGJEGYZÉS: Tekintsük az $\{\alpha(t), \beta(t)\}$ vektor változók sorozatát $0\leqq t<\infty$ értékekre. Ez a változó sorozat a sík origójából elinduló bolyongó pont pályáját írja le (vö. 1. ábra). A bolyongó pont helyzete t időpontban a $(0,t)$ és $(t,0)$ pontokat összekötő egyenes szakaszon van, ugyanis $\alpha(t)+\beta(t)=t$. Ezen modellen egyszerűen lehet szemléltetni a $\beta(t)\leqq x$ és $\beta(\tau)\leqq x$ eseményeket. A $\beta(t)\leqq x$ esemény azt jelenti, hogy a bolyongó pont eléri a $(t-x,x)$ és $(t,0)$ pontokat összekötő egyenes szakaszt és a $\beta(\tau)\leqq x$, esemény pedig azt, hogy eléri a $(t-x,x)$ és $(t-x,0)$ pontokat összekötő egyenes szakaszt (vö. 2. ábra). Nyilvánvaló, hogy a bolyongó pont vagy mindkét egyenes szakaszt eléri vagy egyiket sem, azaz fennáll $\{\beta(t)\leqq x\}\equiv\{\beta(\tau)\leqq x\}$. Bár a probléma vizsgálatára a fenti bolyongási modellt is alkalmaztam, mégis elkerülte figyelmemet, hogy az ábrából közvetlenül leolvasható a két esemény azonossága. Erre a tényre RÉNYI ALFRÉD volt szíves a figyelmemet felhívni.



1. ábra



2. ábra

5. MEGJEGYZÉS: Tekintsük azt a speciális esetet, amidőn

$$G(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & \text{ha } x\geqq 0\\ 0, & \text{ha } x<0.\end{cases}$$

Ekkor

$$\Omega(t,x)=\sum_{n=0}^{\infty}e^{-\lambda(t-x)}\frac{[\lambda(t-x)]^n}{n!}H_n(x). \tag{2}$$

Ha $t-x=a$ rögzített érték, akkor

$$\Omega(a+x,x)=\sum_{n=0}^{\infty}e^{-\lambda a}\frac{(\lambda a)^n}{n!}H_n(x).$$

Az $\Omega(a+x,x)$ függvény x-ben eloszlásfüggvény és Laplace—Stieltjes transzformáltja

$$\int_0^{\infty}e^{-sx}\,d_x\Omega(a+x,x)=e^{-\lambda a[1-\Psi(s)]}, \tag{3}$$

ahol

$$\Psi(s)=\int_0^{\infty}e^{-sx}\,dH(x).$$

1. PÉLDA: (Vö. F. J. KARPELEVICS és V. A. USZPENSZKIJ ([4] p. 296)). Legyen $\{\xi(t),\ 0\leqq t<\infty\}$ Markov-folyamat két lehetséges állapottal A és B-vel. Legyen annak a valószínűsége, hogy $\xi(t)\in A$ esetén a $(t,t+\Delta t)$ időközben $A\to B$ átmenet történik $\lambda\Delta t+o(\Delta t)$ és ha $\xi(t)\in B$, akkor annak a valószínűsége, hogy a $(t,t+\Delta t)$ időközben $B\to A$ átmenet történik $\mu\Delta t+o(\Delta t)$. Ebben az esetben $G(x)=1-e^{-\lambda x}$ (ha $x\geqq 0$) és $H(x)=1-e^{-\mu x}$ (ha $x\geqq 0$). Továbbá $\Psi(s)=\mu/(\mu+s)$. Így (3) szerint

$$\int_0^{\infty}e^{-sx}\,d_x\Omega(a+x,x)=e^{-\frac{\lambda a s}{\mu+s}}$$

és inverz transzformációval

$$\Omega(a+x, x) = e^{-\lambda a}\left[1+\sqrt{\lambda\mu a}\int_0^x \frac{e^{-\mu y}}{y^{1/2}} I_1(2\sqrt{\lambda\mu a y})\,dy\right],$$

ahol $I_1(x)$ az első rendű imaginárius argumentumú Bessel-függvény,

$$I_1(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{2j+1}}{j!\,(j+1)!}.$$

Ha $a = t-x$, akkor

$$\Omega(t, x) = e^{-\lambda(t-x)}\left[1+\sqrt{\lambda\mu(t-x)}\int_0^x \frac{e^{-\mu y}}{y^{1/2}} I_1(2\sqrt{\lambda\mu(t-x)y})\,dy\right].$$

2. §. A $\beta(t)$ aszimptotikus eloszlásának meghatározása

Láttuk, hogy fennáll $\mathbf{P}\{\beta(t) \leqq x\} = \mathbf{P}\{\beta(\tau) \leqq x\}$, ha $0 \leqq x \leqq t$ és a $\beta(\tau)$ előállítható véletlen tagszámú egyforma eloszlású független valószínűségi változók összegeként, ahol a tagok száma független a változóktól. Így tehát a $\beta(t)$ változó aszimptotikus eloszlásának meghatározására visszavezethető véletlen tagszámú független valószínűségi változók összege eloszlásának vizsgálatára. Ezen az alapon tekintsük a $0 \leqq y < \infty$ értékekre a következőképpen értelmezett nem negatív egészértékű ν_y valószínűségi változók sorozatát: $\{\nu_y < n\} = \{\zeta_n \geqq y\}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Ekkor $\mathbf{P}\{\nu_y < n\} = \mathbf{P}\{\zeta_n \geqq y\} = 1 - G_n(y)$, tehát

$$\mathbf{P}\{\nu_y = n\} = G_n(y) - G_{n+1}(y) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{4}$$

Tekintsük most a

$$\chi_{\nu_y} = \eta_0 + \eta_1 + \cdots + \eta_{\nu_y}$$

összeget. Itt a ν_y változó független az $\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_n, \ldots$ változóktól, hiszen ν_y értékét $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n, \ldots$ egyértelműen meghatározza. Legyen $\mathbf{P}\{\chi_{\nu_y} \leqq x\} = \Psi(x, y)$. A teljes valószínűségi tétel szerint felírható, hogy

$$\mathbf{P}\{\chi_{\nu_y} \leqq x\} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}\{\nu_y = n\}\mathbf{P}\{\chi_n \leqq x\},$$

azaz

$$\Psi(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x)[G_n(y) - G_{n+1}(y)]. \tag{5}$$

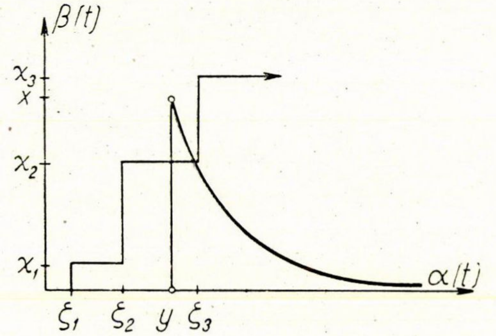
A fentiek szerint

$$\Omega(t, x) = \Psi(x, t-x) \tag{6}$$

és így az $\Omega(t, x)$ aszimptotikus viselkedésének vizsgálata visszavezethető a $\Psi(x, y)$ aszimptotikus viselkedésének vizsgálatára. Ezen utóbbira pedig felhasználhatjuk R. L. DOBRUSIN [5] tételét.

6. MEGJEGYZÉS: Ahhoz, hogy a fenti visszavezetést alkalmazhassuk, ismét elegendő lenne csupán annyit feltenni, hogy a ζ_n és χ_n és a ζ_{n+1} és χ_n változó párok függetlenek $n=1,2,\ldots$-re.

7. MEGJEGYZÉS: Tekintsük a 4. MEGJEGYZÉS-ben említett bolyongási modellt. Ennek segítségével $\Psi(x,y)$ úgy interpretálható, mint annak a valószínűsége, hogy a bolyongó pont eléri az (y,x) és $(y,0)$ pontokat összekötő egyenes szakaszt. Ez viszont nyilvánvalóan megegyezik annak a valószínűségével, hogy a bolyongó pont eléri az (y,x) pontból kiinduló és monoton csökkenve $(\infty,0)$-hoz tartó, egyébként tetszőleges görbét. (Vö. 3. ábra.)



3. ábra

Nyilvánvaló, hogy $\beta(t)$-nek akkor és csakis akkor létezik aszimptotikus eloszlása, ha $\zeta_n=\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_n$ és $\chi_n=\eta_1+\eta_2+\cdots+\eta_n$ változóknak van aszimptotikus eloszlása midőn $n\to\infty$. Erre nézve pedig szükséges és elegendő feltételt adott W. DOEBLIN [7] (Vö. W. FELLER [8]). Kissé megszorítva DOEBLIN feltételeit és elhagyva néhány extrém esetet, fel fogjuk tenni, hogy a $H(x)$ és $G(x)$ eloszlásfüggvények kielégítik a következő (h_1), (h_2), (h_3), illetve (g_1), (g_2), (g_3) feltételek egyikét. Ilyenkor mindig létezik határeloszlás. Előrebocsátjuk, hogy a következőkben $F_\gamma(x)$ $(0<\gamma<2, \gamma\neq 1)$ azt a stabilis eloszlásfüggvényt jelöli, amelyiknek karakterisztikus függvénye

$$\varphi_\gamma(z)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{izx}\,dF_\gamma(x)=\exp\left\{-|z|^\gamma\left(\cos\frac{\pi\gamma}{2}-i\sin\frac{\pi\gamma}{2}\operatorname{sign} z\right)\Gamma(1-\gamma)\right\}$$

és

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-y^2/2}\,dy,$$

továbbá A és B véges pozitív állandók.

A $H(x)$-re vonatkozó feltevések:

(h_1): $\sigma_\beta < \infty$. Ekkor a centrális határeloszlástétel szerint fennáll

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left\{\frac{\chi_n - n\beta}{n^{1/2}\sigma_\beta} \leqq x\right\} = \Phi(x).$$

(h_2): $\lim_{x\to\infty} [1-H(x)]x^{\gamma_2} = B$, ahol $1 < \gamma_2 < 2$. Ekkor W. Doeblin [7] tétele szerint

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left\{\frac{\chi_n - n\beta}{(nB)^{1/\gamma_2}} \leqq x\right\} = F_{\gamma_2}(x).$$

(h_3): $\lim_{x\to\infty} [1-H(x)]x^{\gamma_2} = B$, ahol $0 < \gamma_2 < 1$. Ekkor W. Doeblin [7] tétele szerint

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left\{\frac{\chi_n}{(nB)^{1/\gamma_2}} \leqq x\right\} = F_{\gamma_2}(x).$$

Ha tekintetbe vesszük, hogy $\mathbf{P}\{\nu_y < n\} = \mathbf{P}\{\zeta_n \geqq x\}$, akkor láthatjuk, hogy ν_y aszimptotikus eloszlásának meghatározására visszavezethető $\zeta_n = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n$ aszimptotikus viselkedésének meghatározása. W. Feller [8] módszerét alkalmazva nyerjük a következő határeloszlásokat.

A $G(x)$-re vonatkozó feltevések:

(g_1): $\sigma_\alpha < \infty$. Ekkor fennáll

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left\{\frac{\nu_y - \dfrac{y}{\alpha}}{\left(\dfrac{\sigma_\alpha^2 y}{\alpha^3}\right)^{1/2}} \leqq x\right\} = \Phi(x).$$

(g_2): $\lim_{x\to\infty} [1-G(x)]x^{\gamma_1} = A$, ahol $1 < \gamma_1 < 2$. Ekkor

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left\{\frac{\nu_y - \dfrac{y}{\alpha}}{\left(\dfrac{Ay}{\alpha^{1+\gamma_1}}\right)^{1/\gamma_1}} \leqq x\right\} = F_{\gamma_1}(x).$$

(g_3): $\lim_{x\to\infty} [1-H(x)]x^{\gamma_1} = A$, ahol $0 < \gamma_1 < 1$. Ekkor

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left\{\frac{\nu_y A}{y^{\gamma_1}} \leqq x\right\} = F_{\gamma_1}(x).$$

Ha $H(x)$ kielégíti a (h_1), (h_2), (h_3) feltételek egyikét és $G(x)$ a (g_1), (g_2), (g_3) feltételek egyikét, akkor R. L. Dobrusin [5] tételének alkalmazásával azt nyerjük, hogy létezik a következő határeloszlás

$$\lim_{y\to\infty} \mathbf{P}\left\{\frac{\chi_{\nu_y} - My^\lambda}{Dy^\mu} \leqq z\right\} = P(z) \tag{7}$$

megfelelő M, λ, D, μ állandókkal és $P(z)$ eloszlásfüggvénnyel. Az állandók és a $P(z)$ eloszlásfüggvény könnyen meghatározhatók az említett tétel segítségégével. Az I. TÁBLÁZAT tartalmazza a különböző feltevéseknek megfelelő határeloszlások alakját. A táblázatban ξ és η független valószínűségi változók $\mathbf{P}\{\xi \leqq x\} = F_{\gamma_1}(x)$ és $\mathbf{P}\{\eta \leqq x\} = F_{\gamma_2}(x)$ eloszlásfüggvénnyel.

Így tehát megmutattuk, hogy a fenti esetekben fennáll a

$$\lim_{y \to \infty} \Psi(My^{\lambda} + zDy^{\mu}, y) = P(z)$$

határérték megfelelő $P(z)$ eloszlásfüggvénnyel és M, λ, D, μ állandókkal. Megjegyezzük, hogy ha y_t és z_t egy t paraméter függvényei és $\lim\limits_{t \to \infty} y_t = \infty$, $\lim\limits_{t \to \infty} z_t = z$, akkor az is fennáll, hogy

$$\lim_{t \to \infty} \Psi(My_t^{\lambda} + z_t Dy_t^{\mu}, y_t) = P(z), \tag{8}$$

ugyanis $P(z)$ valamennyi esetben folytonos eloszlásfüggvény. A (8) határérték segítségével könnyen bebizonyíthatjuk az alábbi tételt.

2. TÉTEL: *Tegyük fel, hogy $H(x)$ kielégíti a (h_1), (h_2), (h_3) feltételek egyikét és $G(x)$ kielégíti a (g_1), (g_2), (g_3) feltételek egyikét. Ekkor a $\beta(t)$ valószínűségi változónak létezik aszimptotikus eloszlása, midőn $t \to \infty$. A különböző feltételeknek megfelelő határeloszlásokat a* II. TÁBLÁZAT *tartalmazza.*

A II. TÁBLÁZAT-ban ξ és η független valószínűségi változók, amelyekre $\mathbf{P}\{\xi \leqq x\} = F_{\gamma_1}(x)$ és $\mathbf{P}\{\eta \leqq x\} = F_{\gamma_2}(x)$.

A 2. TÉTEL BIZONYÍTÁSA:

Az 1., 2., 4., 5., 6., 7. *állítás bizonyítása:* Legyen (8)-ban

$$y_t = \frac{\alpha t}{\alpha + \beta} - x\left(\frac{t}{\alpha + \beta}\right)^{\mu}$$

és

$$z_t = \frac{\dfrac{\beta t}{\alpha + \beta} + x\left(\dfrac{t}{\alpha + \beta}\right)^{\mu} - \dfrac{\beta}{\alpha} y_t}{Dy_t^{\mu}}$$

a megfelelő D és μ-vel. Ekkor $\lim\limits_{t \to \infty} y_t = \infty$ és

$$\lim_{t \to \infty} z_t = z = \frac{x(\alpha + \beta)}{D\alpha^{1+\mu}}.$$

(6) szerint

$$\Omega\left(t, \frac{\beta t}{\alpha + \beta} + x\left(\frac{t}{\alpha + \beta}\right)^{\mu}\right) = \Psi\left(\frac{\beta}{\alpha} y_t + z_t Dy_t^{\mu}, y_t\right)$$

I. TÁBLÁZAT

	$H(x)$	$G(x)$	γ	M	λ	D	μ	$P(z)$
1.	h_1	g_1		$\frac{\beta}{\alpha}$	1	1	$\frac{1}{2}$	$\Phi\left(\frac{\alpha^{3/2} z}{\sqrt{\beta^2\sigma_\alpha^2+\alpha^2\sigma_\beta^2}}\right)$
2.	h_1	g_2		$\frac{\beta}{\alpha}$	1	$\frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{A}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\gamma_1}}$	$\frac{1}{\gamma_1}$	$1-F_{\gamma_1}(-z)$
3.	h_1	g_3		0	—	$\frac{\beta}{A}$	γ_1	$1-F_{\gamma_1}\left(z^{-\frac{1}{\gamma_1}}\right)$
4.	h_2	g_1		$\frac{\beta}{\alpha}$	1	$\left(\frac{B}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\gamma_2}}$	$\frac{1}{\gamma_2}$	$F_{\gamma_2}(z)$
5.	h_2	g_2	$\gamma_2 > \gamma_1$	$\frac{\beta}{\alpha}$	1	$\frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{A}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\gamma_1}}$	$\frac{1}{\gamma_1}$	$1-F_{\gamma_1}(-z)$
6.	h_2	g_2	$\gamma_i=\gamma$ $(i=1,2)$	$\frac{\beta}{\alpha}$	1	1	$\frac{1}{\gamma}$	$\mathbf{P}\left\{\frac{\alpha B^{1/\gamma}\eta-\beta A^{1/\gamma}\xi}{\alpha^{\frac{1+\gamma}{\gamma}}}\leqq z\right\}$
7.	h_2	g_2	$\gamma_2 < \gamma_1$	$\frac{\beta}{\alpha}$	1	$\left(\frac{B}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\gamma_2}}$	$\frac{1}{\gamma_2}$	$F_{\gamma_2}(z)$
8.	h_2	g_3		0	—	$\frac{\beta}{A}$	γ_1	$1-F_{\gamma_1}\left(z^{-\frac{1}{\gamma_1}}\right)$
9.	h_3	g_1		0	—	$\left(\frac{B}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\gamma_2}}$	$\frac{1}{\gamma_2}$	$F_{\gamma_2}(z)$
10.	h_3	g_2		0	—	$\left(\frac{B}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\gamma_2}}$	$\frac{1}{\gamma_2}$	$F_{\gamma_2}(z)$
11.	h_3	g_3	$\gamma_2 > \gamma_1$	0	—	$\left(\frac{B}{A}\right)^{\frac{1}{\gamma_2}}$	$\frac{\gamma_1}{\gamma_2}$	$\mathbf{P}\left\{\eta\xi^{-\frac{\gamma_1}{\gamma_2}}\leqq z\right\}$
12.	h_3	g_3	$\gamma_i=\gamma$ $(i=1,2)$	0	—	$\left(\frac{B}{A}\right)^{\frac{1}{\gamma}}$	1	$\mathbf{P}\left\{\frac{\eta}{\xi}\leqq z\right\}$
13.	h_3	g_3	$\gamma_2 < \gamma_1$	0	—	$\left(\frac{B}{A}\right)^{\frac{1}{\gamma_2}}$	$\frac{\gamma_1}{\gamma_2}$	$\mathbf{P}\left\{\eta\xi^{-\frac{\gamma_1}{\gamma_2}}\leqq z\right\}$

II. TÁBLÁZAT

	$H(x)$	$G(x)$	γ	Ω_t	$\lim\limits_{t\to\infty} \Omega_t$	x
1.	h_1	g_1		$\Omega\left(t, \frac{\beta t}{\alpha+\beta} + x\left(\frac{t}{\alpha+\beta}\right)^{\frac{1}{2}}\right)$	$\Phi\left(\frac{(\alpha+\beta)x}{\sqrt{\beta^2\sigma_\alpha^2+\alpha^2\sigma_\beta^2}}\right)$	$(-\infty, \infty)$
2.	h_1	g_2		$\Omega\left(t, \frac{\beta t}{\alpha+\beta} + x\left(\frac{t}{\alpha+\beta}\right)^{\frac{1}{\gamma_1}}\right)$	$1-F_{\gamma_1}\left(\frac{-(\alpha+\beta)x}{\beta A^{\frac{1}{\gamma_1}}}\right)$	$(-\infty, \infty)$
3.	h_1	g_3		$\Omega(t, x t^{\gamma_1})$	$1-F_{\gamma_1}\left(\left(\frac{\beta}{Ax}\right)^{\frac{1}{\gamma_1}}\right)$	$(0, \infty)$
4.	h_2	g_1		$\Omega\left(t, \frac{\beta t}{\alpha+\beta} + x\left(\frac{t}{\alpha+\beta}\right)^{\frac{1}{\gamma_2}}\right)$	$F_{\gamma_2}\left(\frac{(\alpha+\beta)x}{\alpha B^{\frac{1}{\gamma_2}}}\right)$	$(-\infty, \infty)$
5.	h_2	g_2	$\gamma_2 > \gamma_1$	$\Omega\left(t, \frac{\beta t}{\alpha+\beta} + x\left(\frac{t}{\alpha+\beta}\right)^{\frac{1}{\gamma_2}}\right)$	$1-F_{\gamma_1}\left(\frac{-(\alpha+\beta)x}{\beta A^{\frac{1}{\gamma_1}}}\right)$	$(-\infty, \infty)$
6.	h_2	g_2	$\gamma_i = \gamma$ $(i = 1, 2)$	$\Omega\left(t, \frac{\beta t}{\alpha+\beta} + x\left(\frac{t}{\alpha+\beta}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\right)$	$\mathbf{P}\left\{\frac{\alpha B^{\frac{1}{\gamma}}\eta - \beta A^{\frac{1}{\gamma}}\xi}{(\alpha+\beta)} \leq x\right\}$	$(-\infty, \infty)$
7.	h_2	g_2	$\gamma_2 < \gamma_1$	$\Omega\left(t, \frac{\beta t}{\alpha+\beta} + x\left(\frac{t}{\alpha+\beta}\right)^{\frac{1}{\gamma_1}}\right)$	$F_{\gamma_2}\left(\frac{(\alpha+\beta)x}{\alpha B^{\frac{1}{\gamma_2}}}\right)$	$(-\infty, \infty)$
8.	h_2	g_3		$\Omega(t, x t^{\gamma_1})$	$1-F_{\gamma_1}\left(\left(\frac{\beta}{Ax}\right)^{\frac{1}{\gamma_1}}\right)$	$(0, \infty)$
9.	h_3	g_1		$\Omega(t, t-x t^{\gamma_2})$	$F_{\gamma_2}\left(\left(\frac{\alpha}{Bx}\right)^{\frac{1}{\gamma_2}}\right)$	$(0, \infty)$
10.	h_3	g_2		$\Omega(t, t-x t^{\gamma_2})$	$F_{\gamma_2}\left(\left(\frac{\alpha}{Bx}\right)^{\frac{1}{\gamma_2}}\right)$	$(0, \infty)$
11.	h_3	g_3	$\gamma_2 > \gamma_1$	$\Omega\left(t, x t^{\frac{\gamma_1}{\gamma_2}}\right)$	$\mathbf{P}\left\{\frac{\eta^{\gamma_2}}{\xi^{\gamma_1}} < \frac{A x^{\gamma_2}}{B}\right\}$	$(0, \infty)$
12.	h_3	g_3	$\gamma_i = \gamma$ $(i = 1, 2)$	$\Omega(t, tx)$	$\mathbf{P}\left\{\frac{\eta}{\xi} < \left(\frac{A}{B}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \frac{x}{1-x}\right\}$	$(0, 1)$
13.	h_3	g_3	$\gamma_2 < \gamma_1$	$\Omega\left(t, t-x t^{\frac{\gamma_2}{\gamma_1}}\right)$	$\mathbf{P}\left\{\frac{\eta^{\gamma_2}}{\xi^{\gamma_1}} < \frac{A}{B x^{\gamma_1}}\right\}$	$(0, \infty)$

és (8) szerint

$$\lim_{t\to\infty} \Psi\left(\frac{\beta}{\alpha}y_t + z_t D y_t^\mu, y_t\right) = P(z) = P\left(\frac{x(\alpha+\beta)}{D\alpha^{1+\mu}}\right)$$

a megfelelő D és μ állandókkal és $P(z)$ eloszlásfüggvénnyel.

A 3., 8., 11., 12. állítás bizonyítása: Legyen (8)-ban

$$y_t = t - xt^\mu$$

és

$$z_t = \frac{xt^\mu}{Dy_t^\mu}.$$

Ekkor $\lim_{t\to\infty} y_t = \infty$ és

$$\lim_{t\to\infty} z_t = z = \begin{cases} \dfrac{x}{D}, & \text{ha} \quad \mu < 1 \\ \dfrac{x}{D(1-x)}, & \text{ha} \quad \mu = 1. \end{cases}$$

(6) szerint

$$\Omega(t, xt^\mu) = \Psi(z_t D y_t^\mu, y_t)$$

és

$$\lim_{t\to\infty} \Psi(z_t D y_t^\mu, y_t) = P(z) = \begin{cases} P\left(\dfrac{x}{D}\right), & \text{ha} \quad \mu < 1 \\ P\left(\dfrac{x}{D(1-x)}\right), & \text{ha} \quad \mu = 1, \end{cases}$$

a megfelelő D állandóval és $P(z)$ eloszlásfüggvénnyel.

A 9., 10., 13. állítás bizonyítása: Legyen (8)-ban

$$y_t = xt^{1/\mu}$$

és

$$z_t = \frac{t - y_t}{Dy_t^\mu}.$$

Ekkor $\lim_{t\to\infty} y_t = \infty$ és

$$\lim_{t\to\infty} z_t = z = \frac{1}{Dx^\mu}.$$

(6) szerint

$$\Omega(t, t - xt^{1/\mu}) = \Psi(z_t D y_t^\mu, y_t)$$

és

$$\lim_{t\to\infty} \Psi(z_t D y_t^\mu, y_t) = P(z) = P\left(\frac{1}{Dx^\mu}\right)$$

a megfelelő D és μ állandókkal és $P(z)$ eloszlásfüggvénnyel.

8. MEGJEGYZÉS: Ha a fentieknél általánosabb feltevéssel élünk a $\{\xi_n\}$ és $\{\eta_n\}$ változókra vonatkozóan, mint azt az 1. MEGJEGYZÉS-ben említettük,

akkor is kifejezhető $\beta(t)$ aszimptotikus eloszlása a fenti módon ζ_n és χ_n aszimptotikus eloszlásai segítségével.

2. PÉLDA. Tegyük fel, hogy $\lim_{x\to\infty}[1-G(x)]\,x^{\frac{1}{2}}=A$ és $\lim_{x\to\infty}[1-H(x)]\,x^{\frac{1}{2}}=B$. Ekkor a 2. TÉTEL 12. állítása szerint fennáll

$$\lim_{t\to\infty}\mathbf{P}\{\beta(t)\leqq tx\}=\begin{cases}0 & \text{, ha } x\leqq 0\\ \dfrac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{\dfrac{A^2x}{A^2x+B^2(1-x)}}, & \text{ha } 0<x<1\\ 1 & \text{, ha } x\geqq 1.\end{cases}\tag{9}$$

(9) bizonyítására megjegyezzük, hogy $\gamma=\frac{1}{2}$ esetén

$$F_{\frac{1}{2}}(x)=\begin{cases}2\left[1-\Phi\left(\sqrt{\dfrac{\pi}{2x}}\right)\right], & \text{ha } x\geqq 0,\\ 0 & \text{, ha } x<0.\end{cases}$$

Most a 12. állításban a ξ és η valószínűségi változók helyettesíthetők $\xi=\pi/2\xi^{*2}$ és $\eta=\pi/2\eta^{*2}$ valószínűségi változókkal, ahol ξ^* és η^* független normális eloszlású változók, amelyekre $\mathbf{M}\{\xi^*\}=\mathbf{M}\{\eta^*\}=0$ és $\mathbf{D}\{\xi^*\}=$ $=\mathbf{D}\{\eta^*\}=1$. Így a 12. állítást $\gamma=\frac{1}{2}$ esetre alkalmazva

$$\lim_{t\to\infty}\mathbf{P}\{\beta(t)\leqq tx\}=\mathbf{P}\left\{\frac{\eta^{*2}}{\xi^{*2}}\leqq\frac{A^2}{B^2}\frac{x}{1-x}\right\}=\mathbf{P}\left\{\left|\frac{\eta^*}{\xi^*}\right|\leqq\frac{A}{B}\sqrt{\frac{x}{1-x}}\right\}.$$

Jól ismert tény, hogy az η^*/ξ^* valószínűségi változó Cauchy-eloszlású, azaz $\mathbf{P}\left\{\frac{\eta^*}{\xi^*}\leqq x\right\}=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\operatorname{arc\,tg} x$. Tehát

$$\mathbf{P}\left\{\left|\frac{\eta^*}{\xi^*}\right|\leqq\frac{A}{B}\sqrt{\frac{x}{1-x}}\right\}=\frac{2}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\frac{A}{B}\sqrt{\frac{x}{1-x}}=\frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{\frac{A^2x}{A^2x+B^2(1-x)}}.$$

9. MEGJEGYZÉS. Ha az előbbi példában speciálisan $A=B$, akkor (9) szerint

$$\lim_{t\to\infty}\mathbf{P}\{\beta(t)\leqq tx\}=\begin{cases}0 & \text{, ha } x\leqq 0\\ \dfrac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{x}\,, & \text{ha } 0<x<1\\ 1 & \text{, ha } x\geqq 1.\end{cases}\tag{10}$$

Ez az eredmény speciális esetként tartalmazza P. LÉVY [11] következő tételét. (Vö. W. FELLER [9] p. 252). Legyenek $\delta_1,\delta_2,\ldots,\delta_n,\ldots$ független valószínűségi változók, amelyekre $\mathbf{P}\{\delta_n=1\}=\mathbf{P}\{\delta_n=-1\}=\frac{1}{2}$. Legyen $\xi(t)=\delta_0+$ $+\delta_1+\cdots+\delta_{[t]}$, ahol $\delta_0\equiv 0$ és $[t]$ jelöli t egész részét. A $\{\xi(t)\}$ sztochasztikus folyamat egy bolyongó részecske pályáját írja le. Azt mondjuk, hogy a rendszer t időpontban B állapotban van, ha $\xi(t)>0$ és A állapotban, ha $\xi(t)\leqq 0$. Esetünkben

$$\mathbf{P}\{\xi_n=2j\}=\mathbf{P}\{\eta_n=2j\}=\frac{1}{2j-1}\binom{2j}{j}\frac{1}{2^{2j}}\sim\frac{1}{2\sqrt{\pi}j^{3/2}},$$

ha $j\to\infty$ és így

$$\lim_{x\to\infty}[1-G(x)]x^{1/2}=\lim_{x\to\infty}[1-H(x)]x^{1/2}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

Tehát teljesül $A=B$ és így fennáll (10).

3. PÉLDA: Elégítse ki $G(x)$ a (g_1), vagy (g_2) feltételeket és legyen $\lim_{x\to\infty}[1-H(x)]x^{1/2}=B$. Ekkor a 9., illetve 10. állítások szerint fennáll

$$\lim_{t\to\infty}\mathbf{P}\{\alpha(t)\leqq xt^{\frac{1}{2}}\}=2\Phi\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{Bx}{\alpha}\right)-1, \tag{11}$$

ha $0\leqq x<\infty$.

A (11) eredmény speciális esetként tartalmazza a következő tételt, amelyet R. L. DOBRUSIN [6] bizonyított be (Vö. K. L. CHUNG és M. KAC [3]). Tekintsük a 2. PÉLDÁban értelmezett $\{\xi(t), 0\leqq t<\infty\}$ sztochasztikus folyamatot. Legyen c előírt poztív egészszám. Azt mondjuk, hogy a rendszer t időpontban A állapotban van, ha $\xi(t)=0,1,2,\dots,c-1$ és egyébként B állapotban. Ebben az esetben $\mathbf{M}\{\xi_n\}=\alpha=c$ és $\mathbf{P}\{\eta_n=2j\}=\frac{1}{2j-1}\binom{2j}{j}\frac{1}{2^{2j}}$, azaz $\lim_{x\to\infty}[1-H(x)]x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}$, vagyis $B=\sqrt{\frac{2}{\pi}}$. Így tehát (11)-ből speciálisan

$$\lim_{t\to\infty}\mathbf{P}\{\alpha(t)\leqq xt^{\frac{1}{2}}\}=2\Phi\left(\frac{x}{c}\right)-1,$$

ha $0\leqq x<\infty$.

A 2. TÉTEL 1. állítása szerint $\sigma_\alpha^2+\sigma_\beta^2<\infty$ esetén fennáll

$$\lim_{t\to\infty}\mathbf{P}\left\{\frac{\beta(t)-\frac{\beta t}{\alpha+\beta}}{\sqrt{\frac{\beta^2\sigma_\alpha^2+\alpha^2\sigma_\beta^2}{(\alpha+\beta)^3}t}}\leqq x\right\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{y^2}{2}}dy \tag{12}$$

A következő példák ezen tétel alkalmazására vonatkoznak.

4. PÉLDA: Tekintsünk egy sorbanállási folyamatot egyetlen kiszolgáló esetén. Tegyük fel, hogy a személyek érkezési időpontjai λ eseménysűrűségű Poisson-folyamat eseményeit alkotják és a kiszolgálási időtartamok egyforma eloszlású független valószínűségi változók $R(x)$ eloszlásfüggvénnyel. Legyen

$\varrho = \int_0^\infty x\,dR(x)$, $\sigma_\varrho^2 = \int_0^\infty (x-\varrho)^2\,dR(x)$ és $\pi(s) = \int_0^\infty e^{-sx}\,dR(x)$. Jelölje $\xi(t)$ a t időpontban sorban álló személyek számát, beleértve az esetleg kiszolgálás alatt álló személyt is. Legyen $\xi(0)=0$ és vizsgáljuk a $\{\xi(t), 0 \leqq t < \infty\}$ sztochasztikus folyamatot. Azt mondjuk, hogy a rendszer t időpontban A állapotban van, ha $\xi(t)=0$ és B állapotban, ha $\xi(t)>0$. Könnyen látható, hogy a $\{\xi(t)\}$ folyamatra fennállnak az említett feltételek és így alkalmazhatjuk tételeinket. Most $\beta(t)$ jelöli a $(0, t)$ időintervallumban kiszolgálással töltött időtartamot. Esetünkben fennáll, hogy a $G(x) = 1-e^{-\lambda x}$, ha $x \geqq 0$ és $H(x)$ Laplace—Stieltjes transzformáltja $\psi(s) = \int_0^\infty e^{-sx}dH(x)$ egyértelműen meghatározható, mint a $\psi(s) = \pi(s+\lambda-\lambda\psi(s))$ függvényegyenlet $\psi(\infty)=0$ feltételnek elegettevő analitikus megoldása. (Vö. [17] 6. TÉTEL.) Ha $\lambda\varrho < 1$, akkor $H(x)$ valódi eloszlásfüggvény. A függvényegyenlet segítségével könnyen meghatározhatjuk $H(x)$ momentumait. Így $\beta = \varrho/(1-\lambda\varrho)$ és $\sigma_\beta^2 = (\sigma_\varrho^2 + \lambda\varrho^3)/(1-\lambda\varrho)^3$. Továbbá nyilvánvalóan $\alpha = 1/\lambda$ és $\sigma_\alpha^2 = 1/\lambda^2$. Ha $\lambda\varrho < 1$ és $\sigma_\varrho^2 < \infty$, akkor a 2. TÉTEL 1. állítása szerint fennáll, hogy

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\left\{ \frac{\beta(t)-\lambda\varrho t}{\sqrt{\lambda(\sigma_\varrho^2+\varrho^2)t}} \leqq x \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{y^2}{2}}dy$$

5. PÉLDA: Tekintsünk m fogyasztó gépet, amelyek valamilyen szolgáltatást (áram, gáz, víz stb.) egymástól függetlenül szakaszosan vesznek igénybe. Tegyük fel, hogy minden egyes gépre $\lambda\Delta t + o(\Delta t)$ annak a valószínűsége, hogy ha t időpontban a gép működik, akkor $t+\Delta t$ időpontban megszűnik a működése és $\mu\Delta t + o(\Delta t)$ annak a valószínűsége, hogy ha t időpontban a gép áll, akkor $t+\Delta t$ időpontban működik. Jelölje $\xi(t)$ a t időpontban működő gépek számát. Legyen $\xi(0)=k$, ahol k rögzített egész szám $(0<k<m)$ és legyen $A=\{0, 1, \ldots, k\}$ és $B=\{k+1, k+2, \ldots, m\}$. Könnyen látható, hogy a $\{\xi(t)\,0 \leqq t < \infty\}$ folyamat kielégíti feltételeinket. Esetünkben a $\beta(t)$ jelenti $(0, t)$ időközben azt az időtartamot, amely alatt a működő gépek száma meghaladja k-t. Végül megállapodunk még abban, hogy azt mondjuk, hogy a rendszer t időpontban E_k állapotban van, ha $\xi(t)=k$. Most bebizonyítjuk a következő tételt.

3. TÉTEL: *Fennáll*

$$(13) \qquad \lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\left\{ \frac{\beta(t) - \dfrac{\beta t}{\alpha+\beta}}{\sqrt{\dfrac{\beta^2\sigma_\alpha^2+\alpha^2\sigma_\beta^2}{(\alpha+\beta)^3}}} \leqq x \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{y^2}{2}}dy$$

Itt

(14) $$\alpha = \frac{\mathfrak{P}_k}{(m-k)\mu P_k}$$

és

(15) $$\beta = \frac{1-\mathfrak{P}_k}{(m-k)\mu P_k},$$

ahol

(16) $$P_j = \binom{m}{j} \frac{\mu^j \lambda^{m-j}}{(\mu+\lambda)^m} \qquad (j=0, 1, \dots, m)$$

és

(17) $$\mathfrak{P}_j = P_0 + P_1 + \cdots + P_j \qquad (j=0, 1, \dots, m).$$

Továbbá

(18) $$\sigma_\alpha^2 = \alpha\left(2\frac{R_k}{P_k} + \alpha\right) + 2\frac{R_0 + R_1 + \cdots + R_k}{(m-k)\mu P_k}$$

és

(19) $$\sigma_\beta^2 = \beta\left(2\frac{R_k}{P_k} - \beta\right) - 2\frac{R_0 + R_1 + \cdots + R_k}{(m-k)\mu P_k},$$

ahol

(20) $$R_0 = \frac{P_0}{\mu+\lambda}\left[\frac{k}{P_k}\sum_{j=k+1}^{m}\frac{P_j}{j-k} - \sum_{j=1}^{k}\frac{1}{j}\right]$$

és $j = 1, 2, \dots, m$*-re*

(21) $$R_j = P_j\left[\frac{R_0}{P_0} + \sum_{i=0}^{j-1}\frac{\mathfrak{P}_i}{(m-i)\mu P_i} - \sum_{i=k}^{j-1}\frac{1}{(m-i)\mu P_i}\right].$$

BIZONYÍTÁS: Mindenekelőtt meghatározzuk $G(x)$ és $H(x)$ Laplace—Stieltjes transzformáltjait, amelyeket jelöljünk a következőképpen

$$\gamma(s) = \int_0^\infty e^{-sx}\, dG(x) \quad \text{és} \quad \psi(s) = \int_0^\infty e^{-sx}\, dH(x).$$

Erre a célra vezessük be a következő átmenet valószínűségeket

$$\mathbf{P}\{\xi(t) = j \mid \xi(0) = k\} = P_j(t) \qquad (j=0, 1, \dots, m).$$

$P_j(t)$ közvetlenül meghatározható. Jelölje $P(t)$ annak a valószínűségét, hogy egy olyan gép működik t időpontban, amelyik $t=0$ időpontban is működött és jelölje $Q(t)$ annak a valószínűségét, hogy egy olyan gép működik t időpontban, amelyik $t=0$ időpontban nem működött. Most

$$P(t) = \frac{1}{\mu+\lambda}(\mu + \lambda e^{-(\mu+\lambda)t}),$$

ugyanis $P(0)=1$ és fennáll $P(t+\Delta t)=P(t)(1-\lambda\Delta t)+(1-P(t))\mu\Delta t+ o(\Delta t)$ azaz $P'(t)+(\lambda+\mu)P(t)=1$. Hasonlóan nyerjük, hogy

$$Q(t)=\frac{\mu}{\mu+\lambda}(1-e^{-(\mu+\lambda)t}).$$

Ezek segítségével könnyen felírható, hogy

$$(22)\quad P_j(t)=\sum_{j_1+j_2=j}\binom{k}{j_1}\binom{m-k}{j_2}[P(t)]^{j_1}[1-P(t)]^{k-j_1}[Q(t)]^{j_2}[1-Q(t)]^{m-k-j_2}.$$

Jelölje most $M(t)$ a $(0,t)$ időközben előforduló $E_k\rightarrow E_{k+1}$ átmenetek várható számát és $N(t)$ a $(0,t)$ időközben előforduló $E_{k+1}\rightarrow E_k$ átmenetek várható számát. Könnyen adódik, hogy

$$M'(t)=(m-k)\mu P_k(t)$$

és

$$N'(t)=(k+1)\lambda P_{k+1}(t).$$

Továbbá felírható, hogy

$$\int_0^\infty e^{-st}dM(t)=(m-k)\mu\int_0^\infty e^{-st}P_k(t)dt=\frac{\gamma(s)}{1-\gamma(s)\psi(s)}$$

és

$$\int_0^\infty e^{-st}dN(t)=(k+1)\lambda\int_0^\infty e^{-st}P_{k+1}(t)dt=\frac{\gamma(s)\psi(s)}{1-\gamma(s)\psi(s)}.$$

A fenti két egyenlet összevetéséből azt kapjuk, hogy

$$(23)\qquad \gamma(s)=\frac{(m-k)\mu\int_0^\infty e^{-st}P_k(t)dt}{1+(k+1)\lambda\int_0^\infty e^{-st}P_{k+1}(t)dt}$$

és

$$(24)\qquad \psi(s)=\frac{(k+1)\lambda\int_0^\infty e^{-st}P_k(t)dt}{1+(k+1)\lambda\int_0^\infty e^{-st}P_{k+1}(t)dt}.$$

Ezek megfordításával $G(x)$ és $H(x)$ egyértelműen meghatározható és így az 1. TÉTEL segítségével $\beta(t)$ pontos eloszlását is meghatározhatjuk. $\beta(t)$ aszimptotikus eloszlásának meghatározására alkalmazhatjuk a 2. TÉTEL 1. állítását, amelyhez csak $\alpha, \beta, \sigma_\alpha^2$ és σ_β^2 ismerete szükséges. Ezek a következőképpen nyerhetők $\alpha = -\gamma'(0)$, $\sigma_\alpha^2 = \gamma''(0) - [\gamma'(0)]^2$, $\beta = -\psi'(0)$ és $\sigma_\beta^2 = \psi''(0) - [\psi'(0)]^2$. Ezek kiszámítására vezessük be a következő jelöléseket:

$$P_j = \lim_{t\to\infty} P_j(t), \tag{25}$$

$$R_j = \int_0^\infty [P_j(t) - P_j]\,dt, \tag{26}$$

$$S_j = \int_0^\infty t[P_j(t) - P_j]\,dt, \tag{27}$$

$j = 0, 1, \ldots, m$-re. (22)-ből könnyen adódik, hogy a (25) alatti határérték létezik és megegyezik (16)-tal. A (26) és (27) alatti határértékek szintén léteznek, mivel (25)-ben a konvergencia exponenciális jellegű. A fentiek szerint felírható, hogy

$$\int_0^\infty e^{-st} P_j(t)\,dt = P_j s^{-1} + R_j + S_j s + o(s),$$

ha $s \to 0$. Ennek alkalmazásával és $(m-k)\mu P_k = (k+1)\lambda P_{k+1}$ tekintetbe vételével (23) és (24)-ből azt nyerjük, hogy

$$\alpha = \frac{1 + (k+1)\lambda R_{k+1} - (m-k)\mu R_k}{(m-k)\mu P_k}. \tag{28}$$

$$\beta = \frac{(m-k)\mu R_k - (k+1)\lambda R_{k+1}}{(m-k)\mu P_k}, \tag{29}$$

$$\sigma_\alpha^2 = \alpha\left(\frac{2R_k}{P_k} + \alpha\right) + \frac{2[(m-k)\mu S_k - (k+1)\lambda S_{k+1}]}{(m-k)\mu P_k} \tag{30}$$

és

$$\sigma_\beta^2 = \beta\left(\frac{2R_k}{P_k} - \beta\right) - \frac{2[(m-k)\mu S_k - (k+1)\lambda S_{k+1}]}{(m-k)\mu P_k}. \tag{31}$$

Itt már csak az R_j és S_j mennyiségek ismeretlenek. Ezek meghatározására vegyük észre, hogy $P_j(t)$ $(j = 0, 1, \ldots, m)$ kielégíti a következő differenciálegyenletrendszert

$$\frac{dP_j(t)}{dt} = \Phi_j(t) - \Phi_{j-1}(t) \qquad (j = 0, 1, \ldots, m), \tag{32}$$

ahol

$$\Phi_j(t) = (j+1)\lambda P_{j+1}(t) - (m-j)\mu P_j(t)$$

(nyilvánvalóan $\Phi_m(t) = \Phi_{-1}(t) = 0$) és a kezdeti feltételek

$$P_j(0) = \begin{cases} 1, & \text{ha } j = k \\ 0, & \text{ha } j \neq k. \end{cases}$$

(32)-ből következik, hogy

$$\int_0^\infty \Phi_j(t)\,dt = \int_0^\infty \Phi_{j-1}(t)\,dt + P_j - P_j(0)$$

és ennek ismételt alkalmazásával azt nyerjük, hogy

$$\int_0^\infty \Phi_j(t)\,dt = \sum_{i=0}^{j} [P_i - P_i(0)].$$

Másrészt könnyen belátható, hogy

$$(j+1)\lambda R_{j+1} - (m-j)\mu R_j = \int_0^\infty \Phi_j(t)\,dt = \sum_{i=0}^{j} [P_i - P_i(0)]. \tag{33}$$

Innen speciálisan $j=k$ helyettesítéssel

$$(k+1)R_{k+1} - (m-k)\mu R_k = \mathfrak{P}_k - 1,$$

amely igazolja (14) és (15)-t.

(32)-ből az is következik, hogy

$$\int_0^\infty t\,\Phi_j(t)\,dt = \int_0^\infty t\,\Phi_{j-1}(t)\,dt - R_j$$

és ennek ismételt alkalmazásával

$$\int_0^\infty t\,\Phi_j(t)\,dt = -(R_0 + R_1 + \cdots + R_j).$$

Mivel

$$(k+1)\lambda S_{k+1} - (m-k)\mu S_k = \int_0^\infty t\,\Phi_k(t)\,dt = -(R_0 + R_1 + \cdots + R_k),$$

tehát ezzel (18) és (19) is igazolást nyert. Végül az R_j ismeretlenek explicit meghatározása marad csak hátra. Ezek a (33) egyenletrendszer megoldásával nyerhetők. Eszerint fennáll

$$(j+1)\lambda R_{j+1} - (m-j)\mu R_j = \begin{cases} \mathfrak{P}_j & (j = 0, 1, \ldots, k-1) \\ \mathfrak{P}_j - 1 & (j = k, k+1, \ldots, m) \end{cases}$$

és nyilvánvalóan

$$R_0 + R_1 + \cdots + R_m = 0. \tag{34}$$

Ha tekintetbe vesszük, hogy $(j+1)\lambda P_{j+1} = (m-j)\mu P_j$, úgy a fenti képlet szerint fennáll

$$\frac{R_{j+1}}{P_{j+1}} - \frac{R_j}{P_j} = \begin{cases} \dfrac{\mathfrak{P}_j}{(m-j)\mu P_j} & (j = 0, 1, \ldots, k-1) \\[2ex] \dfrac{\mathfrak{P}_j - 1}{(m-j)\mu P_j} & (j = k, k+1, \ldots, m). \end{cases} \tag{35}$$

Ha a (35) egyenletrendszer első j-számú egyenletét összegezzük, megkapjuk (21)-et. Végül R_0 meghatározható (34) segítségével, vagy közvetlenül is megkapható (22) szerint. Mégpedig

$$\frac{R_0}{P_0}=\int_0^\infty\left[\frac{P_0(t)}{P_0}-1\right]dt=\frac{1}{\mu+\lambda}\int_0^1\frac{(1-z)^k\left(1+\frac{\mu}{\lambda}z\right)^{m-k}-1}{z}\,dz,$$

ahol $z=e^{-(\mu+\lambda)t}$ helyettesítéssel éltünk. Az integrál kiszámításával nyerjük (20)-at.

10. MEGJEGYZÉS: A 2. TÉTEL valamennyi állítására közvetlen bizonyítást adtunk korábbi [18] és [19] dolgozatunkban. A 2. TÉTEL 1. állítása bebizonyítható F. J. ANSCOMBE [1] tétele segítségével is, amely véletlen számú független és egyforma eloszlású valószínűségi változók összegének határeloszlására vonatkozik, ahol azonban a tagok száma függhet maguktól a változóktól. Megjegyezzük, hogy lényegében hasonló módszerrel RÉNYI A. [12] is bebizonyította a 2. TÉTEL 1. állítását.

F. J. ANSCOMBE tétele némi változtatással azt mondja ki, hogy ha $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_n, \ldots$ azonos eloszlású független valószínűségi változók, amelyekre létezik a következő határeloszlás

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}\left\{\frac{\vartheta_1+\vartheta_2+\cdots+\vartheta_n-na}{bn^\delta}\leq x\right\}=P(x), \tag{36}$$

ahol $\delta<1$ és $\nu_t\,(0\leq t<\infty)$ nem negatív egész értékeket felvevő valószínűségi változók sokasága, amelyek függhetnek a $\{\vartheta_n\}$ változóktól, és amelyekre tetszőleges $\varepsilon>0$ esetén fennáll

$$\lim_{t\to\infty}\mathbf{P}\left\{\left|\frac{\nu_t}{t^\lambda}-c\right|<\varepsilon\right\}=1, \tag{37}$$

akkor

$$\lim_{t\to\infty}\mathbf{P}\left\{\frac{\vartheta_1+\vartheta_2+\cdots+\vartheta_{\nu_t}-\nu_t a}{bc^\delta t^{\lambda\delta}}\leq x\right\}=P(x). \tag{38}$$

A fentiek szerint nyilvánvaló, hogy ha (37) helyett az erősebb

$$\lim_{t\to\infty}\mathbf{P}\left\{\left|\frac{\nu_t-ct^\lambda}{t^{\lambda\delta}}\right|<\varepsilon\right\}=1 \tag{39}$$

feltevéssel élünk, akkor fennáll az is, hogy

$$\lim_{t\to\infty}\mathbf{P}\left\{\frac{\vartheta_1+\vartheta_2+\cdots+\vartheta_{\nu_t}-act^\lambda}{bc^\delta t^{\lambda\delta}}\leq x\right\}=P(x). \tag{40}$$

Ha feltesszük, hogy ν_t független a $\{\vartheta_n\}$ változóktól, akkor R. L. DOBRUSIN [5] tételéből is következik (40).

A 2. TÉTEL 1. állításának bizonyítására a (38) tétel alkalmazható, ha feltesszük, hogy $\vartheta_n = \alpha\eta_n - \beta\xi_n$ és ν_t jelöli a $(0, t)$ időközben előforduló $A \to B$ átmenetek számát. Ekkor ugyanis

$$\beta(t) - \frac{\beta t}{\alpha+\beta} \simeq \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2 + \cdots + \vartheta_{\nu_t}}{\alpha+\beta} \tag{41}$$

és $\nu_t/t \Longrightarrow 1/(\alpha+\beta)$. Továbbá a centrális határértéktétel szerint fennáll

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left\{ \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2 + \cdots + \vartheta_n}{\sqrt{(\beta^2\sigma_\alpha^2 + \alpha^2\sigma_\beta^2)\, n}} \leqq x \right\} = \Phi(x).$$

Innen (38) szerint

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\left\{ \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2 + \cdots + \vartheta_{\nu_t}}{\sqrt{\frac{(\beta^2\sigma_\alpha^2 + \alpha^2\sigma_\beta^2)}{\alpha+\beta}\, t}} \leqq x \right\} = \Phi(x),$$

ami (41)-re való tekintettel az 1. állítást igazolja.

Végül megjegyezzük, hogy a 2. TÉTEL többi 12 állítása ilyen módon nem bizonyítható be, kivéve a 6. állítást $A = B$ speciális esetben.

3. §. A $\beta(t)$ várható értékének aszimptotikus viselkedése

Legyen rövidség kedvéért $\mathbf{M}\{\beta(t)\} = B(t)$ és $\mathbf{M}\{\alpha(t)\} = A(t)$. Nyilvánvalóan $A(t) + B(t) = t$ és így $A(t)$ aszimptotikus viselkedésének ismerete megadja a $B(t)$-ét és viszont. Az (1) képlet szerint explicit alakban kiszámítható

$$\mathbf{M}\{\beta(t)\} = \int_0^t [1 - \Omega(t, x)]\, dx. \tag{42}$$

Ha bevezetjük a

$$\gamma(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dG(x) \quad \text{és} \quad \psi(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dH(x)$$

Laplace-Stieltjes transzformáltakat $\Re(s) \geqq 0$-ra úgy (42)-ből könnyen nyerjük, hogy

$$\int_0^\infty e^{-st} dB(t) = \frac{1}{s} \frac{\gamma(s)[1 - \psi(s)]}{1 - \gamma(s)\psi(s)} \tag{43}$$

és innen

$$\int_0^\infty e^{-st} dA(t) = \frac{1}{s} \frac{1 - \gamma(s)}{1 - \gamma(s)\, \psi(s)}. \tag{44}$$

A (43) és (44) képletek segítségével meghatározhatjuk $\mathbf{M}\{\beta(t)\}$ és $\mathbf{M}\{\alpha(t)\}$ aszimptotikus viselkedését $t \to \infty$-re. Így a következő tételeket nyerjük:

4. TÉTEL: *Ha* $\alpha+\beta<\infty$, *akkor*

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\mathbf{M}\{\beta(t)\}}{t}=\frac{\beta}{\alpha+\beta}. \tag{45}$$

Ha $\beta<\infty$ *és* $G(x)$ *kielégíti* (g_3)*-at, akkor*

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\mathbf{M}\{\beta(t)\}}{t}=\frac{\beta\sin\pi\gamma_1}{A\pi}. \tag{46}$$

Ha $\alpha<\infty$ *és* $H(x)$ *kielégíti* (h_3)*-at, akkor*

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\mathbf{M}\{\alpha(t)\}}{t}=\frac{\alpha\sin\pi\gamma_2}{B\pi}. \tag{47}$$

Ha $G(x)$ *kielégíti* (g_3)*-at és* $H(x)$ *a* (h_3)*-at, akkor*

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\mathbf{M}\{\beta(t)\}}{t^{1-\gamma_2+\gamma_1}}=\frac{B\Gamma(1-\gamma_2)}{A\Gamma(1-\gamma_1)\Gamma(1-\gamma_2+\gamma_1)},\quad \text{ha}\quad \gamma_2>\gamma_1 \tag{48}$$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\mathbf{M}\{\beta(t)\}}{t}=\frac{B}{A+B},\quad \text{ha}\quad \gamma_2=\gamma_1 \tag{49}$$

és

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\mathbf{M}\{\alpha(t)\}}{t^{1+\gamma_2-\gamma_1}}=\frac{A\Gamma(1-\gamma_1)}{B\Gamma(1-\gamma_2)\Gamma(1-\gamma_1+\gamma_2)},\quad \text{ha}\quad \gamma_2<\gamma_1. \tag{50}$$

BIZONYÍTÁS: Szorítkozzunk valós $s>0$ értékekre. Ha $G(x)$-re fennáll, hogy $\alpha<\infty$, akkor

$$\gamma(s)=1-\alpha s+o(s),\quad \text{ha}\quad s\to 0$$

és ha (γ_3) áll fenn, akkor

$$\gamma(s)=1-A\Gamma(1-\gamma_1)s^{\gamma_1}+o(s^{\gamma_1}),\quad \text{ha}\quad s\to 0.$$

Hasonlóan, ha $H(x)$-re fennáll, hogy $\beta<\infty$, akkor

$$\psi(s)=1-\beta s+o(s),\quad \text{ha}\quad s\to 0,$$

és ha (h_3) áll fenn, akkor

$$\psi(s)=1-B\Gamma(1-\gamma_2)s^{\gamma_2}+o(s^{\gamma_2}),\quad \text{ha}\quad s\to 0.$$

Ezek segítségével valamennyi esetben meghatározhatjuk $\int_0^\infty e^{-st}dB(t)$ és $\int_0^\infty e^{-st}dA(t)$ aszimptotikus viselkedését $s\to 0$-ra. Valamennyi esetben $C/s^{\mu}(\mu \geqq 1)$ alakú aszimptotikus kifejezést nyerünk $s\to 0$-ra. Mivel $B(t)$ és $A(t)$ a t-nek nemcsökkenő függvényei tehát jól ismert Tauber-típusú tételből következik, hogy $B(t)$ illetve $A(t)$ aszimptotikus alakja $Ct^{\mu-1}/\Gamma(\mu)$. Ily módon megkapjuk a (45)—(50) képleteket.

A fentiekhez kapcsolódnak a következő eredmények. Vezessük be a következő valószínűségeket $P_B(t) = \mathbf{P}\{\xi(t) \in B\} = \mathbf{P}\{\chi(t) = 1\}$ és $P_A(t) = \mathbf{P}\{\xi(t) \in A\} = \mathbf{P}\{\chi(t) = 1\}$. Nyilvánvalóan $P_A(t) + P_B(t) = 1$, valamennyi t értékre. Most bebizonyítjuk a következő tételt.

5. TÉTEL: *Ha* $\alpha + \beta < \infty$, *akkor*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t P_B(u)\,du = \frac{\beta}{\alpha+\beta}. \tag{51}$$

Ha $\alpha + \beta < \infty$ *és* $F(x) = G(x) * H(x)$ *nem rácsos eloszlás-függvény, akkor*

$$\lim_{t\to\infty} P_B(t) = \frac{\beta}{\alpha+\beta}. \tag{52}$$

BIZONYÍTÁS: Mivel $P_B(t) = 1 - P_A(t)$ tehát elegendő a megfelelő állításokat $P_A(t)$-re bizonyítani. Jelölje $F_n(x)$ az $F(x)$ eloszlásfüggvénynek önmagával való n-szeres konvolúcióját és legyen $F_0(x) = 1$, ha $x \geqq 0$ és $F_0(x) = 0$, ha $x < 0$. Ekkor a $[0, t]$ intervallumban előforduló $B \to A$ átmenetek várható száma, ha feltesszük, hogy $t = 0$ időpontban $B \to A$ átmenet történt,

$$M(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(t).$$

Most a teljes valószínűségi tétel szerint felírható, hogy

$$P_A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t [1 - G(t-y)]\,dF_n(y) = \int_0^t [1 - G(t-y)]\,dM(y). \tag{53}$$

Ha $\alpha + \beta < \infty$, akkor fennáll

$$\lim_{t\to\infty} \frac{M(t)}{t} = \frac{1}{\alpha+\beta}, \tag{54}$$

(S. TÄCKLIND [21]) és ha $\alpha + \beta < \infty$ és $F(x)$ nem rácsos eloszlás, akkor valamennyi $h > 0$-ra:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{M(t+h) - M(t)}{h} = \frac{1}{\alpha+\beta} \tag{55}$$

(D. BLACKWELL [2]).

(51) bizonyítása. Fennáll

$$\frac{1}{t}\int_0^t P_A(u)\,du = \frac{1}{t}\int_0^t \left[\int_0^{t-x} (1 - G(y))\,dy\right] dM(x),$$

és innen tetszőleges τ-val $(0<\tau<t)$

$$\frac{M(t-\tau)}{t}\int_0^{\tau}[1-G(y)]\,dy \leqq \frac{1}{t}\int_0^t P_A(u)\,du \leqq \alpha\frac{M(t)}{t}.$$

Ha most először $t\to\infty$ és azután $\tau\to\infty$, akkor (54) szerint fennáll, hogy

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t P_A(u)\,du=\frac{1}{\alpha+\beta}$$

ami egyúttal (51)-et is igazolja.

11. MEGJEGYZÉS: (51) fennállása (45)-ből is következik, ugyanis

$$\mathbf{M}\{\beta(t)\}=\mathbf{M}\{\int_0^t \chi(u)\,du\}=\int_0^t \mathbf{M}\{\chi(u)\}\,du=\int_0^t \mathbf{P}\{\chi(u)=1\}\,du=\int_0^t P_B(u)\,du. \tag{56}$$

(52) bizonyítása: Írjuk (53)-at a következő alakban

$$P_A(t)=\int_0^{t/2}[1-G(t-y)]\,dM(y)+\int_{t/2}^t[1-G(t-y)]\,dM(y). \tag{57}$$

Itt a jobboldal első tagja zérushoz tart, ha $t\to\infty$. Ugyanis

$$0\leqq\int_0^{t/2}[1-G(t-y)]\,dM(y)\leqq\frac{t}{2}\left[1-G\left(\frac{t}{2}\right)\right]\frac{M\left(\frac{t}{2}\right)}{\frac{t}{2}}$$

és itt (54) szerint

$$\lim_{t\to\infty}\frac{M(t)}{t}=\frac{1}{\alpha+\beta}$$

és mivel $\alpha<\infty$, tehát

$$\lim_{t\to\infty}t[1-G(t)]=0$$

is fennáll,

$$0\leqq t[1-G(t)]\leqq\int_t^{\infty}x\,dG(x)\to 0,\qquad \text{ha } t\to\infty,$$

következtében. Az (57) jobboldalán álló második tagról könnyen kimutatható, hogy $1/(\alpha+\beta)$-hez tart, ha tekintetbe vesszük (55) fennállását. Így (52) is igazolást nyert.

12. MEGJEGYZÉS: Megemlítjük, hogy [18] dolgozatunkban bebizonyítottuk, hogy $\sigma_\alpha^2+\sigma_\beta^2<\infty$ esetén fennáll

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\mathbf{D}^2\{\beta(t)\}}{t}=\frac{\alpha^2\sigma_\beta^2+\beta^2\sigma_\alpha^2}{(\alpha+\beta)^3}. \tag{58}$$

13. MEGJEGYZÉS: A (43) és (56) képlet tekintetbevételével azt nyerjük, hogy

$$\int_0^\infty e^{-st} P_B(t)\,dt = \frac{1}{s}\frac{\gamma(s)[1-\psi(s)]}{1-\gamma(s)\psi(s)}. \tag{59}$$

Ebből a képletből kitűnik, hogy ha folyamatunkra vonatkozóan ismerjük a $G(x)$ eloszlásfüggvényt és a $P_B(t)$ valószínűségeket úgy $\psi(s)$ egyértelműen meghatározható. Ha például

$$G(x) = \begin{cases} 1-e^{-\lambda x}, & \text{ha} \quad x \geqq 0, \\ 0 \quad , & \text{ha} \quad x < 0, \end{cases}$$

akkor $\gamma(s) = \lambda/(\lambda + s)$ és így

$$\psi(s) = 1 - \frac{s^2 \int\limits_0^\infty e^{-st} P_B(t)\,dt}{\lambda\left[1 - s\int\limits_0^\infty e^{-st}P_B(t)\,dt\right]}.$$

$\psi(s)$ megfordításával $H(x)$ egyértelműen meghatározható.

Magyar Tudományos Akadémia
Matematikai Kutató Intézete.

IRODALOM

[1] F. J. ANSCOMBE: Large-sample theory of sequential estimation. *Proc. Cambridge Phil. Soc.* **48** (1952) 600—607.

[2] D. BLACKWELL: A renewal theorem. *Duke Math. Journal* **15** (1948) 145—150.

[3] K. L. CHUNG and M. KAC: Remarks on fluctuations of sums of independent random variables. *Memoirs of the American Mathematical Society* No. **6** (1951) 1—11.

[4] Р. Л. Добрушин: Предельные теоремы для цепи Маркова из двух состояний. Изв. Акад. Наук. СССР Сер. Мат. **17** (1953) 291—330.

[5] Р. Л. Добрушин: О пределе сложной случайной функции. Усп. Мат. Наук **10** (1955) в. 4, 157—159.

[6] Р. Л. Добрушин: Две пределные теоремы для простейщего случайного олуждания по прямой. Усп. Мат. Наук **10** (1955), в. 5, 139—146.

[7] W. DOEBLIN: Sur l'ensemble de puissances d'une loi de probabilité. *Studia Mathematica* **9** (1941) 71—96.

[8] W. FELLER: Fluctiation theory of recurrent events. *Transactions of the American Mathematical Society* **67** (1949) 98—119.

[9] W. FELLER: An Introduction to Probability Theory and its Applications (New York, 1950).

[10] А. Н. Колмогоров: Локалная предельная теорема дла классических цепей Маркова Изв. Акад. Наук. СССР сер. мат. **13** (1949) 281—300.

[11] P. Lévy: Sur certains processus stochastiques homogènes. *Compositio Mathematica* 7 (1939) 283—339.

[12] A. Rényi: On the asymptotic distribution of the sum of a random number of independent random variables. *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **8** (1957)

[13] H. Robbins: The asymptotic distribution of the sum of a random number of random variable. *Bull. Amer. Math. Soc.* **54** (1948) 1151—1161.

[14] Takács L.: Bekövetkezési és koincidencia jelenségek tárgyalása időtartamban tetszőleges eloszlású történések esetén. *A Magy. Tud. Akad. III. (Mat. és Fiz.) Oszt. Közl.* **1** (1951) 371—386.

[15] Takács L.: Poisson-folyamat által származtatott történés folyamatokról. *A Magy. Tud. Akad. III. (Mat. és Fiz.) Oszt. Közl.* **4** (1954) 525—541.

[16] Takács L.: Bizonyos típusú rekurrens sztochasztikus folyamatok vizsgálatáról. *A Magy. Tud. Akad. Alk. Mat. Int. Közl.* **3** (1954) 115—128.

[17] Takács L.: „Várakozási idő" problémák tárgyalása Markov-folyamatok segítségével. *A Magy. Tud. Akad. III. (Mat. és Fiz.) Oszt. Közl.* **4** (1954) 543—570.

[18] L. Takács: On certain sojourn time problems in the theory of stochastic processes. *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **8** (1957) 169—191.

[19] L. Takács: On limiting distributions concerning a sojourn time problem. *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **8** (1957).

[20] L. Takács: On a sojourn time problem. Теория вероятностей и ее применения.

[21] S. Täcklind: Elementare Behandlung vom Erneuerungsproblem für den stationären Fall. *Skandinavisk Aktuarietidskrift* **27** (1944) 1—15.

(Beérkezett: 1957. VI. 10.)