A LEGJOBB POLINOMAPPROXIMÁCIÓ LOKALIZÁLÁSÁRÓL. I.

FREY TAMÁS kandidátus

(Bemutatta Alexits György akadémikus 1954-ben)

Bevezetés

Arra a fontos kérdésre, hogy egy 2π periódusú folytonos függvény milyen jól approximálható (Csebisev-féle értelemben) trigonometrikus polinomok sorozatával, JACKSON, DE LA VALLÉE-POUSSIN és BERNSTEIN alapvető vizsgálatai nyomán válaszolni tudunk. Ismeretes, hogy a legjobb megközelítés nagyságrendjét az approximálandó függvény azon struktúrális tulajdonságai határozzák meg, amelyek *bármely* zárt, 2π hosszúságú szakaszon egyformán megtalálhatók, — sőt a Bernstein-féle fordított tételek értelmében ez az összefüggés a legjobb approximáció rendje és a függvény struktúrális tulajdonságai között lényegében megfordítható.

Meg kell jegyeznünk, hogy a Csebisev-féle értelemben legjobban approximáló trigonometrikus polinomsorozatokat általában nem tudjuk felírni. Ismeretesek azonban olyan explicit formulát adó eljárások — pl. DE LA VALLÉE-POUSSIN adott meg egy ilyet [1] — amelyek a legjobb approximációval megegyező nagyságrendű közelítést szolgáltatnak.

A gyakorlatban nem ritkán teljesen különbözőek az alapintervallum egyes szakaszain a függvény struktúrális jellemzői. A legjobb közelítés nagyságrendjét ezesetben természetesen a „legrosszabbul approximálható“ szakasz struktúrája határozza meg. Arról azonban semmit sem tudunk, hogy az ún. „Csebisev-pontok“ ilyenkor hol helyezkednek el; még kevésbé tudjuk azt, hogy a legjobban approximáló polinomsorozat az alapintervallum különböző struktúrájú szakaszai felett milyen közelítést biztosít.

Ebben a dolgozatban éppen arra a kérdésre adunk választ, hogy miképpen konstruálható olyan trigonometrikus polinomsorozat, amely bármely részintervallum felett olyan megközelítési nagyságrendet szolgáltat, amilyent a függvénynek e szakaszon mutatkozó struktúrális tulajdonságai alapján egyáltalán várni lehet. A sorozat heurisztikus konstrukcióját az 1. §-ban találjuk; ki kell emelnünk, hogy explicite könnyen megadható formuláról van szó.

A 3. §-ban a Bernstein-féle fordított tételeket élesítjük és lokalizáljuk, a 4. §-ban pedig a folytonos függvények periodikus folytatásának egy olyan kivitelezését ismertetjük, amely megőrzi a kiindulási szakasz struktúrális jellemzőit. Ezek alapján egyrészt pontosan értelmezzük, hogy az egyes részintervallumok felett milyen megközelítési nagyságrendre lehet egyáltalán számítani és igazoljuk, hogy a megadott polinomsorozat e megközelítési nagyságrendet valóban el is éri (2. §). A dolgozat második része a 2—4. §-t tartalmazza. A következőkben az eljárást tovább finomítjuk és így pontonként is biztosítjuk a várható approximációs nagyságrendet (5. §), megvizsgáljuk a polinomsorozat deriváltjainak viselkedését (6. §), végül az egyes függvényklasszisokat jellemezzük, az eljárás szolgáltatta approximációs nagyságrendek alapján (7. §). A harmadik részben emellett az eljárást általánosítjuk interpoláció sorozatok esetére is (8. §).

A nyert eredmények természetesen átvihetőek a $C[a, b]$ osztály függvényeinek polinomokkal történő approximációjának esetére is.

01. **Bochner eredményeiről.** S. BOCHNER „Localization of best approximation" c. dolgozatában [2] ugyanezt a kérdést veti fel, szűkebb fogalmazásban. Approximációs tétele ezért szűkebb esetcsoportra vonatkozik, itt gyengébb, mint az általunk e csoportra adandó tétel, emellett explicit formulát általában nem is ad. BOCHNER egyik tételével igazolni akarja, hogy approximációs eredménye nem élesíthető: "If for a sequence of exponential polynomials $\{\sigma_n(x)\}$ we have [1]

$$|\sigma_n(x)| \leqq 1,$$

or more generally

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\sigma_n(x)|\, dx \leqq 1,$$

and if for three constants $\alpha > 0$, $\varepsilon_0 > 0$, $C_1 > 0$ we have

$$|\sigma_n(x)| \leqq C_1 \cdot e^{-n\varepsilon_0}$$

for x in

$$-\alpha \leqq x \leqq \alpha,$$

then the sequence $\sigma_n(x)$ converges to 0 uniformly in all of $-\pi \leqq x \leqq \pi$." [2]

1 $$\sigma_n(x) \equiv \sum_{\nu=-n}^{n} c_\nu e^{i\nu x}.$$

2 „Amennyiben a $\{\sigma_n(x)\}$ exponenciális polinomsorozatra érvényes a

$$|\sigma_n(x)| \leqq 1,$$

vagy általánosabb esetben az

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\sigma_n(x)|\, dx \leqq 1$$

egyenlőtlenség, továbbá található három állandó: $\alpha > 0$; $\varepsilon_0 > 0$; $C_1 > 0$, amelyekkel teljesül az

$$|\sigma_n(x)| \leqq C_1 \cdot e^{-n\varepsilon_0}$$

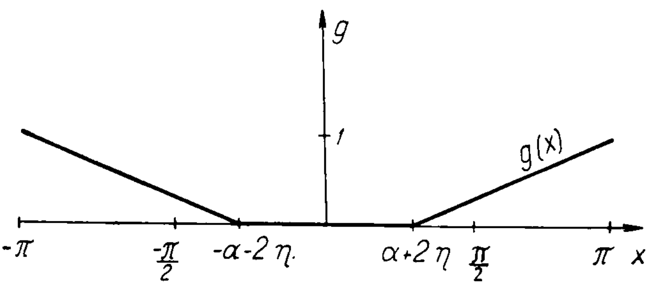
egyenlőtlenség a $-\alpha \leqq x \leqq \alpha$ intervallumon, akkor a $\{\sigma_n(x)\}$ sorozat az egész $-\pi \leqq x \leqq \pi$ intervallumon egyenletesen 0-hoz tart."

Ez azonban téves állítás, *amint azt a következő ellenpélda mutatja:* legyen $g(x) \in C[-\pi, \pi]$:

$$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } -\frac{\pi}{2} < -\alpha - 2\eta \leqq x \leqq \alpha + 2\eta \\ 1, & \text{ha } x \pm \pi, \\ \text{másutt lineáris és folytonos,} \end{cases}$$

$(0 < 2\eta < \alpha)$, továbbá

$$V_n(g;x) = \frac{1}{2\pi} \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \cdot \cos^{2n} \frac{t-x}{2} dt.$$



1. ábra

Könnyű belátni, hogy egyrészt

(01. 1) $$|V_n(g;x)| \leqq C \cdot e^{-n\varepsilon_0},$$

ha

$$-\alpha \leqq x \leqq \alpha; \; 0 < \varepsilon_0 < -2 \log \cos \eta;$$
$$C \geqq \max_{x > 0} 2\pi \sqrt{x}\, e^{-x|2 \log \cos \eta + \varepsilon_0|};$$

másrészt viszont

(01. 2) $$V_n(g;x) > \frac{1}{2} \frac{x - \alpha - 2\eta}{\pi - \alpha - 2\eta},$$

ha

$$\alpha + 3\eta \leqq x \leqq \pi \quad \text{és} \quad n \geqq N_0(\alpha;\eta).$$

A (01. 1) reláció $V_n(g;x)$ becslésével olvasható le, ha felhasználjuk, hogy

$$|g(x)| \leqq 1; \quad \frac{1}{2\pi} \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} < \sqrt{n}$$

és

$$\left| \cos^{2n} \frac{t-x}{2} \right| < e^{-n|2 \log \cos \eta|}; \quad \text{ha} \quad \pi - \eta > \left| \frac{t-x}{2} \right| > \eta,$$

a (01.2) reláció viszont annak a ténynek egyszerű következménye, hogy a de la Vallée-Poussin-féle $\{V_n(g; x)\}$ polinomsorozat $[-\pi, \pi]$-ben egyenletesen a folytonos $g(x)$-hez konvergál.

Megjegyezzük, hogy a BOCHNER által közölt bizonyítás a Poisson—Jensen-féle egyenlőtlenséget tévesen használja fel ([2], 16. old.).

1. §. A trigonometrikus polinomsorozat konstrukciója

11. **A Lebesgue-függvényről.** Jelölje $\{L_n(f; x)\}$ a lineáris operációk egy olyan sorozatát, amelynek segítségével az $f(x) \in L$ függvényhez hozzárendeljük a

$$g_n(x) \equiv L_n(f; x) \tag{11.1}$$

függvénysorozatot. Az operációsorozathoz tartozó $\{\lambda_n(x)\}$ Lebesgue-függvények, ill. $\{\lambda_n\}$ Lebesgue-konstansok sorozatát a következőképp definiálják:

$$\lambda_n(x) = \sup_{\psi \in L^*} L_n(\psi; x); \quad \lambda_n = \sup_x \lambda_n(x), \tag{11.2}$$

ahol L^* az L-tér mindazon ψ függvényeinek halmaza, amelyek csak a -1 és $+1$ értéket vehetik fel.

A következőkben célszerűen használhatjuk e fogalom általánosításait: a külső és belső Lebesgue-függvényt, ill. Lebesgue-konstanst:

$$\Lambda_n^{(k)}(x; \delta) = \sup_{\varphi \in L^{**}_{x;\delta}} L_n(\varphi; x); \quad \Lambda_n^{(k)}(\delta) = \sup_x \Lambda_n^{(k)}(x; \delta); \tag{11.3}$$

$$\Lambda_n^{(b)}(x; \delta) = \lambda_n(x) - \Lambda_n^{(k)}(x; \delta); \quad \Lambda_n^{(b)}(\delta) = \sup_x \Lambda_n^{(b)}(x; \delta), \tag{11.4}$$

aholis $L^{**}_{x;\delta}$ az L-tér mindazon valósértékű φ függvényeinek halmaza, amelyekre

$$\varphi(z) \equiv 0, \quad \text{ha} \quad z \in [x-\delta; x+\delta]; \quad |\varphi(z)| = 1, \quad \text{ha} \quad z \notin [x-\delta; x+\delta].$$

Trigonometrikus polinomsorozattal történő approximáció esetén az operációsorozat alábbi speciálizálása jön szóba: Jelöljük $\{M_n(t)\}$-vel az $N(n)$-ed rendű trigonometrikus polinomok normált sorozatát:

$$\int_a^{a+2\pi} M_n(t)\, dt = 1 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

amelynek segítségével bármely $f(x) \in L[-\pi, \pi]$ függvényhez hozzárendeljük a

$$T_n(f; x) = \int_{-\pi}^{\pi} M_n(t-x) f(t)\, dt \tag{11.5}$$

$N(n)$-edrendű trigonometrikus polinomsorozatot. Ez esetben

$$\lambda_n(x) \equiv \lambda_n = \int_{-\pi}^{\pi} |M_n(t)|\, dt \tag{11.6}$$

és

$$\Lambda_n^{(b)}(x;\delta) \equiv \Lambda_n^{(\delta)}(\delta) = \int_{-\delta}^{\delta} |M_n(t)|\, dt, \tag{11.7}$$

ill.

$$\Lambda_n^{(k)}(x;\delta) \equiv \Lambda_n^{(k)}(\delta) = \left[\int_{-\pi}^{-\delta} + \int_{\delta}^{\pi}\right] |M_n(t)|\, dt \qquad (0<\delta<\pi). \tag{11.8}$$

12. **A magsorozat konstrukciója.** A lokális approximáció biztosítása céljából DE LA VALLÉE-POUSSIN egy gondolatát fejlesztjük tovább, akinek a — bevezetésében [1] alatt említett — konstrukciója egy olyan magfüggvénysorozat megalkotásán alapszik, amelynek

1°. Lebesgue-konstansai összességükben korlátosak, továbbá

2° az $N(n)=(2n-1)$-edrendű polinommag bármely legfeljebb n-edrendű trigonometrikus polinomot rekonstruál.

Mi ezt még kiegészítjük azzal, hogy a magfüggvénysorozat

3° külső Lebesgue-konstansai legalább exponenciális rendben tartsanak 0-hoz.

Ez biztosítja ti., hogy a függvénynek a vizsgált részintervallumon kívül mutatott struktúrális tulajdonságai a kérdéses szakasz belsejében az approximációt csak egy exponenciális rendben 0-hoz tartó faktorral gyengítve befolyásolják.

DE LA VALLÉE-POUSSINhez hasonlóan a

$$S_k(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{1}{2}t} \tag{12.1}$$

Dirichlet-mag bizonyos közepeire támaszkodunk; a 2° követelményt ismét úgy elégítjük ki, hogy a középképzésben szereplő legalacsonyabb rendszámot az n-edik magnál n-nek választjuk. A 3°. követelmény ekkor egy Euler-típusú középképzéssel elégíthető ki:

$$E_n(t) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=n}^{2n} \binom{n}{k-n} S_k(t), \tag{12.2}$$

a 1°. követelmény viszont e polinomok számtani közepével:

$$F_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{l=n}^{2n-1} E_l(t). \tag{12.3}$$

12. 1. TÉTEL: *A* (12. 1)—(12. 3) *alatt definiált* $N(n)=(4n-2)$*-edrendű trigonometrikus polinomsorozat által származtatott eljárás*

1°. *belső Lebesgue-függvényei összességükben korlátosak:*

$$\Lambda_n^{(b)}(\delta) < 1 + \frac{16}{\sqrt{1+8\cos^2\frac{\delta}{2}}}; \qquad n = 3, 4, 5, \ldots: \tag{12. 4}$$

2°. *bármely legfeljebb n-edrendű trigonometrikus polinomot a „$\nu \geqq n$-edik lépésben" rekonstruál:*

$$\int_{-\pi}^{\pi} F_\nu(t-x) f(t)\,dt \equiv f(x), \tag{12. 5}$$

hacsak $f(x) \in H_n^{(T)}$ *és* $\nu \geqq n$, *ahol* $H_n^{(T)}$ *a legfeljebb n-edrendű trigonometrikus polinomok halmaza;*

3°. *Külső Lebesgue-függvényei exponenciális rendben 0-hoz tartanak:*

$$\Lambda_n^{(k)}(\delta) \leqq \frac{4}{\pi} \operatorname{ctg}\frac{\delta}{2} \cdot \frac{q^n}{n}; \; 0 < q = q(\delta) = \cos\frac{\delta}{2} < 1. \tag{12. 6}$$

BIZONYÍTÁS: $F_n(t)$ zárt alakban is előállítható:

$$F_n(t) = \frac{1}{2n\pi} \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{2^k} \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} \frac{\sin\left(k+l+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{1}{2}t} =$$

$$= \frac{1}{2n\pi\sin\frac{t}{2}} \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{2^k} \operatorname{Im}\left\{ \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} e^{i\left(k+l+\frac{1}{2}\right)t} \right\} =$$

$$= \frac{1}{2n\pi\sin\frac{t}{2}} \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{2^k} \operatorname{Im}\left\{ e^{i\left(k+\frac{1}{2}\right)t} \cdot 2^k \cos^k\frac{t}{2} e^{ik\frac{t}{2}} \right\} = \tag{12. 7}$$

$$= \frac{1}{2n\pi\sin\frac{t}{2}} \sum_{k=n}^{2n-1} \operatorname{Im}\left\{ \cos^k\frac{t}{2} \cdot e^{i(3k+1)\frac{t}{2}} \right\} =$$

$$= \frac{\cos^n\frac{t}{2}}{2n\pi\sin\frac{t}{2}} \cdot \operatorname{Im}\left\{ \frac{e^{i\frac{3n+1}{2}t} - \cos^n\frac{t}{2} e^{i\left(3n+\frac{1}{2}\right)t}}{1-\cos\frac{t}{2} e^{i\frac{3}{2}t}} \right\},$$

ahol felhasználtuk az

$$(1+e^{it}) \equiv 2\cos\frac{t}{2} e^{i\frac{t}{2}} \tag{12. 8}$$

azonosságot.

A belső Lebesgue-függvény becslése céljából a szereplő integrált két részre bontjuk:

$$\frac{1}{2}\Lambda_n^{(b)}(\delta)=\int_0^{\delta}|F_n(t)|\,dt=\left[\int_0^{\frac{\pi}{8n-4}}+\int_{\frac{\pi}{8n-4}}^{\delta}\right]|F_n(t)|\,dt;\quad\left(\delta\geqq\frac{\pi}{8n-4}\right). \tag{12.9}$$

Az első tag becslése egyszerű: a $\left[0,\frac{\pi}{8n-4}\right]$ intervallumon az abszolutértékjel elhagyható, hiszen — mint a (12. 1)—(12. 3) relációk mutatják — itt egyetlen, a középképzésben fellépő tag sem negatív. Ez az integrál tehát így becsülhető:

$$\int_0^{\frac{\pi}{8n-4}}|F_n(t)|\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{8n-4}}F_n(t)\,dt=\frac{1}{2n\pi}\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{2^k}\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}\int_0^{\frac{\pi}{8n-4}}\frac{\sin\left(k+l+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}\,dt<$$

$$<\frac{1}{2n\pi}\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{2^k}\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}\frac{\pi\left(k+l+\frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{2}(8n-4)}<\frac{1}{2n\pi}\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{2^k}\cdot\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}\pi=\frac{1}{2}. \tag{12.10}$$

A második tag becslésénél felhasználjuk az

$$\left|\operatorname{Im}\left\{\frac{e^{i\frac{3n+1}{2}t}-\cos^n\frac{t}{2}\,e^{i\left(3n+\frac{1}{2}\right)t}}{1-\cos\frac{t}{2}\,e^{i\frac{3}{2}t}}\right\}\right|\leqq$$

$$\leqq\frac{\left|e^{i\frac{3n+1}{2}t}-\cos^n\frac{t}{2}\,e^{i\left(3n+\frac{1}{2}\right)t}\right|}{\left|1-\cos\frac{t}{2}\,e^{i\frac{3}{2}t}\right|}\leqq\frac{2}{\left|\sin\frac{t}{2}\right|\sqrt{1+8\cos^2\frac{t}{2}}} \tag{12.11}$$

egyenlőtlenséget, ami az

$$\left|1-\cos\frac{t}{2}\,e^{i\frac{3}{2}t}\right|=\left|1-\cos\frac{t}{2}\cos\frac{3}{2}t-i\cos\frac{t}{2}\sin\frac{3}{2}t\right|=$$

$$=\sqrt{1-2\cos\frac{t}{2}\cos\frac{3}{2}t+\cos^2\frac{t}{2}\cos^2\frac{3}{2}t+\cos^2\frac{t}{2}\sin^2\frac{3}{2}t}= \tag{12.12}$$

$$=\sqrt{1-2\cos\frac{t}{2}\cos\frac{3}{2}t+\cos^2\frac{t}{2}}=\sqrt{\sin^2\frac{t}{2}\left(1+8\cos^2\frac{t}{2}\right)}=$$

$$=\left|\sin\frac{t}{2}\right|\cdot\sqrt{1+8\cos^2\frac{t}{2}}$$

elemi átalakítás felhasználásával közvetlenül adódik. Így, $\left(\text{ha } \frac{\pi}{8n-4} \leqq \delta\right)$:

$$(12.13)\quad \begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{8n-4}}^{\delta} |F_n(t)|\,dt &\leqq \frac{1}{2n\pi} \int_{\frac{\pi}{8n-4}}^{\delta} \frac{2}{\frac{t^2}{\pi^2}\sqrt{1+8\cos^2\frac{t}{2}}}\,dt < \\ &< \frac{\pi^2\cdot(8n-4)}{n\pi^2\sqrt{1+8\cos^2\frac{\delta}{2}}} < \frac{8}{\sqrt{1+8\cos^2\frac{\delta}{2}}}, \end{aligned}$$

hiszen $\left|\sin\frac{t}{2}\right| \geqq \frac{2}{\pi}\frac{|t|}{2}$, hacsak $|t| \leqq \pi$.

A (12. 10) és (12. 13) alatti relációkból pedig 1°. alatti állításunk leolvasható. (12. 11) alapján egyébként a külső Lebesgue-függvény is könnyen becsülhető:

$$(12.14)\quad \begin{aligned} \frac{1}{2}\Lambda_n^{(k)}(\delta) &\leqq \frac{1}{2n\pi}\cdot\cos^n\frac{\delta}{2}\int_{\delta}^{\pi} \frac{2}{\sin^2\frac{t}{2}\sqrt{1+8\cos^2\frac{t}{2}}}\,dt < \\ &< \frac{1}{n\pi}\cos^n\frac{\delta}{2}\int_{\delta}^{\pi}\frac{dt}{\sin^2\frac{t}{2}} = \frac{2}{\pi}\operatorname{ctg}\frac{\delta}{2}\cdot\frac{\cos^n\frac{\delta}{2}}{n}, \end{aligned}$$

amivel 3°. alatti állításunkat is igazoltuk. A 2°. alatti rekonstrukciós reláció viszont a konstrukció triviális következménye.

13. **A polinomsorozat explicit előállítása.** A Fourier-sor ismeretében a lokálisan approximáló polinomsorozat könnyen — éspedig ugyanazon közepelő-lépésekben, mint a magfüggvény — állítható elő; $S_n(f;x)$-szel jelölve f Fourier-sorának n-edik szeletét:

$$(13.1)\quad A_n(f;x) = \int_{-\pi}^{\pi} F_n(t-x)f(t)\,dt = \frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{2^k}\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}S_{k+l}(f;x),$$

illetve:

$$(13.2)\quad A_n(f;x) = \sum_{k=0}^{4n-2}\alpha_k(a_k\cos kx + b_k\sin kx),$$

aholis

$$(13.3)\quad \alpha_k = \begin{cases} 1, & \text{ha } k \leqq n \\ \frac{1}{n}\sum\limits_{l=n}^{2n-1}\frac{1}{2^l}\sum\limits_{m=[k-l]^+}^{l}\binom{l}{m}, & \text{ha } n < k < 2n \\ \frac{1}{n}\sum\limits_{l=\{\frac{k}{2}\}}^{2n-1}\frac{1}{2^l}\sum\limits_{m=[k-l]^+}^{l}\binom{l}{m}, & \text{ha } 2n \leqq k \leqq 4n-2, \end{cases}$$

$f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$, végül $\left\{\frac{k}{2}\right\}$ a $\frac{k}{2}$-nél nem kisebb legkisebb természetes számot, $[k-l]^+$ pedig az $\frac{1}{2}\{|k-l|+(k-l)\}$ mennyiséget jelöli.

14. **Az alapvető approximációs becslés.** Az alábbiakban az $A_n(f;x)$ polinomsorozat által szolgáltatott lokális approximációt egy tetszőleges polinomsorozat által elérhető közelítéssel fogjuk összehasonlítani. Legyen tehát $f(x) \in C_{2\pi}$; x_0 egy tetszőleges rögzített pont, a $\tau_n(x) \in H_n^{(T)}$ trigonometrikus polinom pedig közelítse $f(x)$-et az alábbi mértékben:

$$(14.1) \quad |f(x)-\tau(x)| \leqq \begin{cases} \varepsilon_n^{(b)}, & \text{ha} \quad x_0-\delta \leqq x \leqq x_0+\delta;\ (0<\delta<\pi) \\ \varepsilon_n^{(k)}, & \text{ha} \quad -\infty < x < \infty.^3 \end{cases}$$

14.1. TÉTEL: A fenti jelöléseket és feltételeket megtartva, érvényes az alábbi becslés:

$$(14.2) \quad |f(x_0)-A_n(f;x_0)| \leqq \left(2+\frac{16}{\sqrt{1+8\cos^2\frac{\delta}{2}}}\right)\varepsilon_n^{(b)} + \frac{4}{\pi}\operatorname{ctg}\frac{\delta}{2}\cdot\frac{\cos^n\frac{\delta}{2}}{n}\varepsilon_n^{(k)}.$$

BIZONYÍTÁS: Az A_n-operáció linearitását és rekonstrukciós tulajdonságát felhasználva, nyilván:

$$(14.3) \quad |f(x_0)-A_n(f;x_0)| \leqq |f(x_0)-\tau_n(x_0)| + |A_n(f-\tau_n;x_0)|.$$

Csak a jobboldal második tagját kell becsülnünk:

$$(14.4) \quad \begin{aligned} |A_n(f-\tau_n;x_0)| &= \left|\int_{-\pi}^{\pi} F_n(t-x_0)[f(t)-\tau_n(t)]\,dt\right| = \\ &= \left|\int_{-\pi}^{\pi} F_n(t)[f(t+x_0)-\tau_n(t+x_0)]\,dt\right| \leqq \\ &\leqq \left[\left(\int_{-\pi}^{-\delta}+\int_{\delta}^{\pi}\right)+\int_{-\delta}^{\delta}\right]|F_n(t)|\cdot|f(t+x_0)-\tau_n(t+x_0)|\,dt \\ &\leqq \Lambda_n^{(b)}(\delta)\cdot\max_{x_0-\delta\leqq t\leqq x_0+\delta}|f(t)-\tau_n(t)| + \Lambda_n^{(k)}(\delta)\max|f(t)-\tau_n(t)|. \end{aligned}$$

Mármost (14.4), (14.3), (14.1) és (12.4), ill. (12.6) alapján a tétel állítása közvetlenül leolvasható.

[3] A $\{\tau_n(x)\}$ sorozat legjobb megválasztásával, ill. az $\{\varepsilon_n^{(b)}\}$ és $\{\varepsilon_n^{(k)}\}$ sorozatok nagyságrendjét és az $f(x)$ struktúrális tulajdonságait összekapcsoló tételekkel a 2—3. §-ban foglalkozunk majd.

Megjegyezzük még, hogy a 6., ill. 7. §-ban az $f(x) \in C_{2\pi}$ feltétel helyett az $f(x) \in L_{2\pi}$ feltételre támaszkodva is ugyanilyen „értékű" lokális approximációs tételt fogunk kimondani.

IRODALOM

[1] De la Vallée—Poussin, Ch.: *Leçons sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle*, Paris, 1919.

[2] Bochner, S.: Localisation of best approximation, *Annals Math. Study*, No. **25**. (1950). Princetown.

(Beérkezett: 1957. VI. 3.)