TÉRBELI PONTHALMAZOK FELOSZTÁSA KISEBB ÁTMÉRŐJŰ RÉSZHALMAZOK ÖSSZEGÉRE

HEPPES ALADÁR

Tekintsünk egy korlátos ponthalmazt az n-dimenziós térben. Egy adott irányra merőleges két $n-1$-dimenziós támaszsíkjának távolságát a halmaz adott irányú szélességének nevezzük. A ponthalmaz *átmérőjén* a különböző irányú szélességek maximumát, *szélességén* pedig ezek minimumát értjük. Állandó szélességű az olyan test, amelynek átmérője és szélessége megegyezik, azaz bármely két párhuzamos támaszsíkjának távolsága ugyanannyi.

H. G. EGGLESTON [1] 1955-ben bizonyította be először az $n=3$ esetre K. BORSUK alábbi, már 1933-ban kimondott sejtését [2]:

Az n-dimenziós tér minden egységátmérőjű ponthalmaza szétbontható $n+1$ kisebb átmérőjű részhalmazra.

BORSUK sejtése egészében még ma is megoldatlan, részeredményeket azonban többen is értek el a problémával kapcsolatban, ugymint H. HADWIGER [3], H. G. EGGLESTON [1], H. LENZ [4], HEPPES A.—RÉVÉSZ P. [5], B. GRÜNBAUM [1].

E dolgozat célja EGGLESTON tételére egyszerűbb bizonyítást adni.

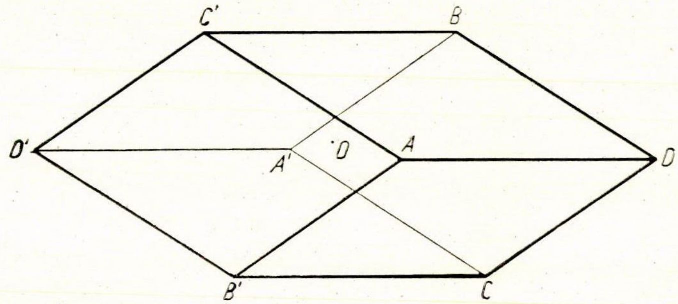
Az $n=2$-esetre — mint H. LENZ is megjegyzi — a következőképp is igazolható a sejtés. Ismeretes [6], hogy minden síkbeli egységátmérőjű ponthalmaz lefedhető egy egységnyi széles szabályos hatszöggel. E hatszög azonban középpontjából minden második oldalára bocsátott merőlegesekkel három $\frac{\sqrt{3}}{2}$ átmérőjű részre vágható. Minthogy ennél kisebb részekre maga a kör sem osztható, felvetődik a kérdés, vajon kettőnél magasabb dimenziós terekben is igaz-e BORSUK sejtésén túlmenően, hogy alkalmas feldarabolásnál a keletkező részek átmérője nem csupán 1-nél kisebb, hanem a gömb felosztásánál keletkező darabok átmérőjét sem haladhatja meg.

TÉTEL: *A háromdimenziós tér minden egységátmérőjű halmaza felosztható négy, egynél kisebb átmérőjű halmazra.*

BIZONYÍTÁS: Minthogy minden egységátmérőjű ponthalmaz része egy egységnyi állandó szélességű testnek [6], elegendő ilyen testek szétdarabolásával foglalkozni.

[1] ERDŐS PÁL szóbeli közlése.

Legyen T a háromdimenziós térben egy 1 átmérőjű állandó szélességű test, P pedig egy tetszőleges olyan parallelepipedon, amely három 1 szélességű térréteg közös részeként keletkezik. Minthogy T átmérője 1, a P-nek egyik, másik, majd harmadik irányú élével párhuzamos eltolással az egyik, másik, majd a harmadik térrétegbe vihető. A harmadik eltolás eredményképp a T test a rétegek közös részébe, P-be kerül, minthogy a három eltolás közül bármely réteggel kettő párhuzamos. Az eredő eltolás, amellyel T a P-be jut, egyértelműen meghatározott, hiszen az állandó szélességű T a P-be tolva annak minden lapját érinti, így további eltolás P-n belül nem lehetséges. Minden T-hez tartozik tehát egy belőle eltolással kelelkező T' test, amelyet

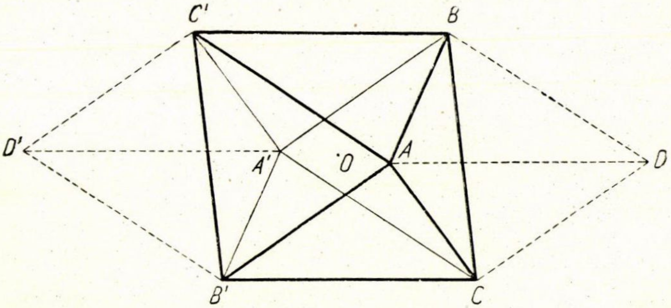


1. ábra

a P parallelepipedon tartalmaz. Könnyen belátható, hogy T folytonos forgatásakor T' is folytonosan változtatja helyzetét P-ben. Tekintsük ugyanis T-nek egy tetszőleges pontját. Minthogy e pontnak T egy rögzített irányra merőleges támaszsíkjától mért távolsága T forgatásakor folytonosan változik, a T' megfelelő pontjának P lapjaitól való távolsága és így e pont helye is folytonosan függ T forgatásától.

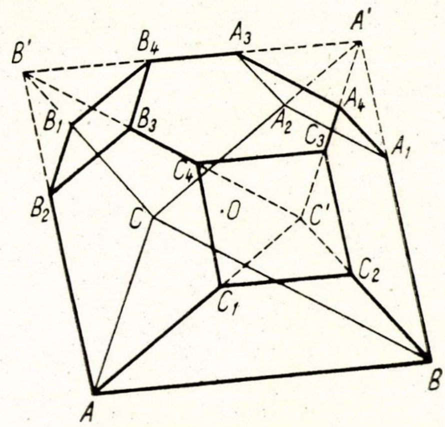
Válasszuk most a P parallelepipedont úgy, hogy oldallapjai 60°-os hegyesszögű rombuszok legyenek. Legyen D a P egyik olyan csúcsa, ahol három hegyesszög találkozik, A, B és C pedig a D-vel szomszédos csúcsok. A', B', C' és D' az $A, B, C,$ illetve D pontoknak a parallelepipedon O középpontjára vonatkozó tükörképe.

Kimutatjuk, hogy T alkalmas elforgatásához tartozó T'-t nemcsak P, hanem az $ABCA'B'C'$ szabályos oktaéder is tartalmazza. Tekintsük a T test valamely állásához tartozó T' testet és tegyük fel, hogy ennek egy Q pontja az $ABCD$ tetraéder belsejében van. Forgassuk el T-t az AB' és az $A'B$ szakaszok felezőpontjain át fektetett tengely körül fél fordulattal. Eközben T' átmegy e tengelyre való tükörképébe, a Q pont tehát az $A'B'C'D'$ tetraéder belsejébe kerül. Előbbi helyzetéből az utóbbiba T' — a fentiek értelmében — folytonosan megy át, van tehát olyan közbülső helyzete, amikor az egymástól egységnyire lévő ABC és $A'B'C'$ lapokat csak érinti, figyelembevéve, hogy egyidejűleg az $ABCD$ és az $A'B'C'D'$ tetraéderek egyikében lehet csak pontja. A T'-t tartalmazó oktaéderbe írt gömbnek az oktaéder egy-egy tengelyére merőleges két érintősíkja közül legalább egyik nem metsz bele T'-be, hiszen e síkok egymástól való távolsága 1. Egy-egy ilyen síkkal levághatjuk tehát az oktaéder három tengelyének egy-egy végét egy-egy négyzetalapú gúlával



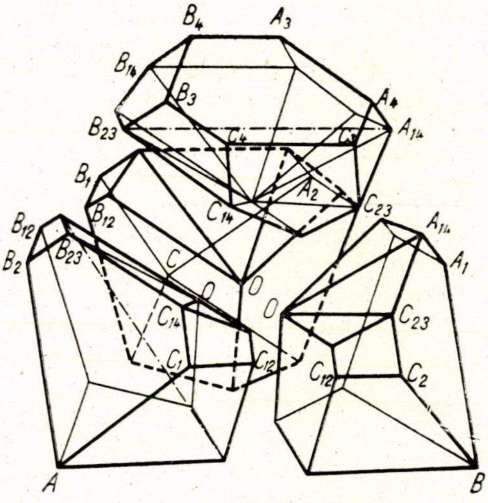
2. *ábra*

együtt anélkül, hogy a T' testet megcsonkítanánk. Minthogy az oktaéder bármely nem szemköztes csúcspárja szomszédos, az eljárás során az oktaéderből — bármilyen adott T-ből indultunk is ki — három páronként szomszédos csúcsot, azaz egy lapjának három csúcsát vágjuk le. Legyen a három levágott csúcs $A'B'$ és C', és legyenek az A', ill. B', ill. C'-ből kiinduló és a B, C, B', C', ill. C, A, C', A', ill. A, B, A', B' csúcsokba futó éleken keletkező új csúcsok rendre A_1, A_2, A_3, A_4; illetve B_1, B_2, B_3, B_4; illetve C_1, C_2, C_3, C_4.



3. *ábra*

A tétel igazolására kimutatjuk, hogy a szabályos oktaéder fent leírt csonkításával keletkező 1 szélességű P^* poliéder — amelyben minden 1 átmérőjű ponthalmaz elhelyezhető — szétdarabolható négy részre úgy, hogy a részek mindegyikének átmérője kisebb legyen 1-nél. Jelöljük A_{ij}-vel az A_iA_j szakasz felezőpontját és értelmezzük hasonlóan a B_{ij} és C_{ij} jeleket. Ha most P^* egyik részeként az $A_3, A_4, B_3, B_4, C_3, C_4, A_{14}, A_{23}, B_{14}, B_{23}, C_{14}, C_{23}$ és O pontok, továbbá az A_1A_{23}, B_1B_{23} és C_1C_{23} szakaszok felezőpontjainak konvex burkát választjuk, a P^*-ból ennek elhagyásával keletkezett „maradékpoliédert" pedig az ABC háromszög súlypontjában emelt merőleges által határolt és a háromszög egy-egy oldalfelezőpontján átmenő félsíkokkal három egybevágó részre vágjuk, akkor P^* négy 1-nél kisebb átmérőjű darabra esik szét. — (Annak igazolására, hogy a keletkezett részek átmérője kisebb 1-nél, célszerű bevezetni az O középpontú és az A, B, illetve C pontokon átmenő tengelyekkel rendelkező koordinátarendszert.) — Az először definiált rész átmérője az A_{14} és B_{23} pontok közt lép fel: $\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} = 0{,}9659\ldots$, a másik három egybevágó rész átmérője pedig az AB és a B_1B_{23} szakaszok felezőpontjainak távolsága: $\frac{\sqrt{9+4\sqrt{3}}}{4} = 0{,}99776\ldots$. P^* ilyen szétdarabolásával a bennelévő T' test, illetve az abba ágyazott 1 átmérőjű ponthalmaz is szétesik négy 1-nél kisebb átmérőjű részre és ezzel a tétel igazolást nyert.



4. ábra

IRODALOM

[1] H. G. Eggleston: Covering a three dimensional set with sets of smaller diameter. *Journal of the London Math. Soc.*, **30** (1955) 11—24.

[2] K. Borsuk: Drei Sätze über die *n*-dimensionale euklidische Sphäre. *Fundamenta Math.*, **20** (1933) 177—190.

[3] H. Hadwiger: Über die Zerstückung eines Eikörpers. *Math. Zeitschrift,* **51** (1949) 161—165.

[4] H. Lenz: Zur Zerlegung von Punktmengen in solche kleineren Duchmessers. *Arch. Math.*, **6** (1955) 413—416.

[5] Heppes A.—Révész P.: A Borsuk-féle feldarabolási problémához. *Mat. Lapok,* **7** (1956) 108—111.

[6] T. Bonnesen—W. Fenchel: Theorie der konvexen Körper. *Ergebnisse d. Math. Chelsea Publishing Company, New-York,* 1948.

(Beérkezett: 1957. VII. 1.)