HÁLÓK IDEÁLJAI ÉS KONGRUENCIARELÁCIÓI, II.

GRÄTZER GYÖRGY és SCHMIDT E. TAMÁS

Bevezetés

Ezen dolgozatunk [6] folytatása. Célunk a [6]-ban felvetett kérdéskör további kidolgozása: az L háló kongruenciarelációinak vizsgálata, és az ideál-kongruenciareláció kapcsolat elmélyítése. Dolgozatunk három részből áll. Az I. részben $\Theta(L)$ néhány tulajdonságát vesszük szemügyre. Ezt főképp két eszköz segítségével érjük el. Egyik segédeszközünk az 1. TÉTEL, mely G. BIRKHOFF közismert tételét élesíti hálók esetében, a másik a szeparábilis kongruenciareláció fogalma; az utóbbi tulajdonságainak vizsgálata az I. rész főcélja. Végeredményül két tételt kapunk, melyek egyike G. BIRKHOFF 72. problémájára ad egy újabb választ, másika pedig disztributív hálók esetében a kongruenciarelációk hálójának duális végtelen disztributivitására ad szükséges és elegendő feltételt.

A II. részben az L háló I ideáljainak és a hozzájuk tartozó minimális Θ_I kongruenciarelációknak kapcsolatát nézzük meg. Bebizonyítjuk, hogy az $I \rightarrow \Theta_I$ megfeleltetés komplett egyesítés-homomorf leképezés, továbbá, hogy disztributív esetben izomorfizmus. A III. részben a hozzárendelt elempár és a kongruencia terjedését leíró klasszikus eszköznek, a projektív intervallumoknak kapcsolatát vizsgáljuk. Végül a disztributivitás egy új fajta jellemzését mutatjuk be, a hozzárendelt elempár segítségével.

I.

Jelölje $\Theta(L)$ az L háló kongruenciarelációinak halmazát. $\Theta(L)$-et részben rendezzük, ha benne a $\leqq$ relációt a következő módon definiáljuk: $\Theta \leqq \Phi$ ($\Theta, \Phi \in \Theta(L)$) akkor és csak akkor, ha $x \equiv y(\Theta)$ maga után vonja $x \equiv y(\Phi)$-t. $\Theta(L)$ vizsgálatánál alapvető a következő eredmény (lásd [1] 23—24 old.):

G. BIRKHOFF TÉTELE: A fentebb értelmezett $\leqq$ reláció $\Theta(L)$-et komplett hálóvá teszi. Legyen $\Theta(L)$ egy részhalmaza A. Értelmezzük a ξ és η relációkat: $x \equiv y(\xi)$ akkor és csak akkor, ha $x \equiv y(\Theta)$ minden $\Theta \in A$-ra; $x \equiv y(\eta)$

ekvivalens azzal, hogy létezik olyan $x=z_0, z_1, \ldots, z_n=y$ sorozat, hogy $z_{i-1}\equiv z_i(\Theta_i)$ $(i=1,2,\ldots,n)$ alkalmas $\Theta_i\in A$-val. ξ és η kongruenciareláció, mégpedig az A-beli kongruenciarelációk metszete, illetve egyesítése, azaz $\xi=\bigwedge_{\Theta_\alpha\in A}\Theta_\alpha$ és $\eta=\bigvee_{\Theta_\alpha\in A}\Theta_\alpha$.

G. BIRKHOFF ezen tételét, melyet véges operációjú struktúrákra mondott ki, hálókban kedvezőbb alakra hozhatjuk.

1. TÉTEL: *Legyen $\Theta(L)$ egy részhalmaza A. Értelmezzük L-ben az η relációt úgy, hogy $x\equiv y(\eta)$ akkor és csak akkor, ha van olyan $x\cup y=$ $=u_0\geqq u_1\geqq\ldots\geqq u_n=x\cap y$ sorozat, hogy $u_{i-1}\equiv u_i(\Theta_i)$ $(i=1,2,\ldots,n)$ alkalmas $\Theta_i\in A$-ra. η ekkor kongruenciareláció és $\eta=\bigvee_{\Theta_\alpha\in A}\Theta_\alpha$.*

I. BIZONYÍTÁS: Nyilván, ha $x\equiv y(\eta)$, akkor G. BIRKHOFF tétele szerint $x\equiv y(\bigvee_{\Theta_\alpha\in A}\Theta_\alpha)$. Megfordítva legyen $x\equiv y(\bigvee_{\Theta_\alpha\in A}\Theta_\alpha)$. Ismeretes, hogy akkor egyszersmind $x\cup y\equiv x\cap y(\bigvee_{\Theta_\alpha\in A}\Theta_\alpha)$. Ezért létezik olyan $x\cup y=z_0, z_1,\ldots$ $\ldots, z_n=x\cap y$ sorozat, hogy $z_{i-1}\equiv z_i(\Theta_i)$ $(i=1,2,\ldots,n)$ alkalmas $\Theta_i\in A$-val. Tekintsük az $u_i=(x\cap y)\cup\bigwedge_{j=0}^{i}z_j$ elemeket. Világos, hogy $u_0=(x\cap y)\cup z_0=$ $=x\cup y$, $u_n=(x\cap y)\cup\bigwedge_{j=0}^{n}z_j=x\cap y$, továbbá a hálóoperációk monotonitásából $u_0\geqq u_1\geqq\ldots\geqq u_n$, végül $u_{i-1}\equiv u_i(\Theta_i)$ $(i=1,2,\ldots,n)$. Az u_i elemek tehát kielégítik az 1. TÉTEL követelményeit.

Az 1. TÉTELt szeretnénk G. BIRKHOFF tételére való támaszkodás nélkül is bizonyítani. Előrebocsátjuk a következőt:

1. LEMMA: *Az L hálóban értelmezett ξ reláció akkor és csak akkor kongruenciareláció, ha*

(a) *$x\equiv x(\xi)$ minden $x\in L$-re;*

(b) *$x\equiv y(\xi)$ ekvivalens $y\equiv x(\xi)$-vel;*

(c) *$x\geqq y\geqq z$, $x\equiv y(\xi)$ és $y\equiv z(\xi)$ esetén $x\equiv z(\xi)$;*

(d) *$x\geqq y$, $x\equiv y(\xi)$ esetén $x\cup t\equiv y\cup t(\xi)$ és $x\cap t\equiv y\cap t(\xi)$ minden $t\in L$-re;*

(e) *$x\equiv y(\xi)$ ekvivalens $x\cup y\equiv x\cap y(\xi)$-vel.*

Az 1. LEMMA szerint elegendő, ha a kongruenciareláció szokásos ismérvei összehasonlítható elempárokra teljesülnek. Az (a) és (b) a reflexivitás és szimmetricitás, (c) és (d) a tranzitivitás, illetve a helyettesítési elv összehasonlítható elempárokra. Érdemes megjegyezni, hogy a fenti öt feltétel független, amint az egyszerű példákkal kimutatható.

BIZONYÍTÁS: Nyilván elegendő azt bizonyítanunk, hogy ha ξ eleget tesz a fenti feltételeknek, akkor kongruenciareláció. Az (a) és (b) szerint ξ *reflexív* és *szimmetrikus*. Legyen $u \geqq v, u \equiv v(\xi)$ és $a, b \in [v, u]$, azaz $u \geqq a \cup b \geqq a \cap b \geqq v$. (d)-ből $u \cap (a \cup b) \equiv v \cap (a \cup b)$ és $u \cap (a \cup b) \geqq \geqq v \cap (a \cup b)$, így ismét (d)-t alkalmazva $a \cup b = [u \cap (a \cup b)] \cup (a \cap b) \equiv \equiv [v \cap (a \cup b)] \cup (a \cap b) = a \cap b\,(\xi)$, vagyis (e)-ből $a \equiv b(\xi)$. Ezek után legyen $x \equiv y(\xi)$ és $y \equiv z(\xi)$. (e) miatt $x \cup y \equiv x \cap y(\xi)$, így (d)-ből $x \cup y \cup z = = (x \cup y) \cup (y \cup z) \equiv (x \cap y) \cup (y \cup z) = y \cup z(\xi)$, hasonlóképp $x \cap y \cap z \equiv \equiv y \cap z(\xi)$, vagyis $x \cup y \cup z \geqq y \cup z \geqq y \cap z \geqq x \cap y \cap z$, és az egyenlőtlenség-sorozat szomszédos tagjai kongruensek modulo ξ, s így (c) kétszeri alkalmazásával $x \cup y \cup z \equiv x \cap y \cap z(\xi)$. Mivel $x, z \in [x \cap y \cap z, x \cup y \cup z]$ ezért a fentebb bizonyítottak miatt $x \equiv z(\xi)$, vagyis ξ *tranzitív*. *A helyettesítési elv* is könnyen adódik, mert ha $x \equiv y(\xi)$, akkor (e) és (d)-ből $x \cup y \equiv x \cap y(\xi)$ és $(x \cup y) \cup t \equiv (x \cap y) \cup t(\xi)$, de $x \cup t$ és $y \cup t \in [(x \cap y) \cup t, (x \cup y) \cup t]$, így $x \cup t \equiv y \cup t(\xi)$ és hasonlóképp $x \cap t \equiv y \cap t(\xi)$. ξ tehát reflexív, szimmetrikus, tranzitív és érvényes rá a helyettesítési elv, vagyis kongruenciareláció. Q. e. d.

Az 1. LEMMA segítségével most már könnyen adódik a

II. BIZONYÍTÁS: Az nyilvánvaló, hogy ha az 1. TÉTELben értelmezett η reláció kongruenciareláció, akkor $\eta = \bigvee_{\Theta_\alpha \in A} \Theta_\alpha$. Elég tehát belátni, hogy η kongruenciareláció. η reflexív és szimmetrikus. Ha $x \geqq y \geqq z$ és $x \equiv y(\eta)$, $y \equiv z(\eta)$, akkor az x-et és y-t összekötő lánc az y-t és z-t összekötő lánccal együtt éppen egy az x és z elemeket összekötő kívánt tulajdonságú lánc, vagyis $x \equiv z(\eta)$. Végül, ha $x = z_0 \geqq z_1 \geqq \cdots \geqq z_n = y$, akkor $t \cup x = t \cup z_0 \geqq \geqq t \cup z_1 \geqq \cdots \geqq t \cup z_n = t \cup y$, így $x \equiv y(\eta)$ és $x \geqq y$ esetén rögtön találtunk $t \cup x$ és $t \cup y$-t összekötő megfelelő tulajdonságú láncot, vagyis $t \cup x \equiv t \cup y(\eta)$. Ugyanígy $t \cap x \equiv t \cap y(\eta)$. Látjuk, hogy η kielégíti az 1. LEMMA feltételeit, így η kongruenciareláció és éppen ezt akartuk bizonyítani.

Az 1. TÉTEL hasznossága abban mutatkozik meg, hogy az $[a, b]$ intervallumon belül dönti el, hogy $a \equiv b(\bigvee_{\Theta_\alpha \in A} \Theta_\alpha)$, vagy $a \not\equiv b(\bigvee_{\Theta_\alpha \in A} \Theta_\alpha)$. Így például az 1. TÉTEL alapján minden nehézség nélkül bizonyítható FUNAYAMA és NAKAYAMA [3] azon nevezetes tétele, hogy $\Theta(L)$-ben teljesül a

$$\text{(ID)} \qquad \Theta \cap \bigvee_{\Theta_\alpha \in A} \Theta_\alpha = \bigvee_{\Theta_\alpha \in A} (\Theta \cap \Theta_\alpha)$$

végtelen disztributív törvény.

FUNAYAMA és NAKAYAMA rámutattak arra is, hogy (ID) duálisa

$$\text{(DID)} \qquad \Theta \cup \bigwedge_{\Theta_\alpha \in A} \Theta_\alpha = \bigwedge_{\Theta_\alpha \in A} (\Theta \cup \Theta_\alpha)$$

nem szükségképp igaz. Alább (2. lemma) egyszerű elégséges feltételt adunk meg (DID) fennállására. Ehhez bevezetünk egy új fogalmat.

1. DEFINÍCIÓ: Az L háló Θ kongruenciarelációját *szeparábilisnek* nevezzük, ha bármely $a > b$ $(a, b \in L)$-hez található olyan $a = z_0 \geqq z_1 \geqq \cdots \geqq z_n = b$ sorozat, hogy minden i-re, vagy $z_i \equiv z_{i-1}(\Theta)$, vagy $z_i \not\equiv z_{i-1}(\Theta)$ és ekkor $x \equiv y(\Theta)$, $x, y \in [z_i, z_{i-1}]$ esetén $x = y$.

Az ilyen $\{z_i\}$ láncot Θ-ra nézve szeparáltnak nevezzük, vagy azt is mondhatjuk, hogy a és b-t $\{z_i\}$ szeparálja Θ-ra nézve.

Ezen definíció létjogosultsága az 1. TÉTELen alapszik, amely szerint a Θ kongruenciareláció által létesített osztályok szeparáltságát a fentebb leírt módon biztosíthatjuk.

A definícióból látható, hogyha L-ben bármely a, b $(a > b; a, b \in L)$ között található véges hosszúságú maximális lánc, akkor L minden kongruenciarelációja szeparábilis.

Nem szeparábilis kongruenciarelációra is rögtön láthatunk példát: legyen E a pozitív egészek lánca $+\infty$-nel lezárva. E-ben a Θ kongruenciarelációt definiáljuk úgy, hogy $2i \equiv 2i+1$ $(i = 1, 2, \ldots)$ és minden $x \equiv y(\Theta)$ az előbbi alakú. Könnyű látni, hogy Θ nem szeparábilis, mert 1 és $+\infty$ nem szeparálható.

A definícióból azonnal adódik, hogy ha Θ szeparábilis, akkor bármely a és b $(a > b, a, b \in L)$ között van olyan maximális lánc, melyen Θ csak véges sok egynél több elemű osztályt létesít, és ezek az osztályok (mint intervallumok) zártak. Elég ugyanis egy tetszőleges a és b közti maximális láncot venni, mely mindegyik z_i-t tartalmazza.

Ezen állítás megfordítása azonban általában nem igaz. Nem áll, hogy ha minden a és b $(a > b)$ között van egy fentebb leírt tulajdonságú lánc, akkor bármely kongruenciareláció szeparábilis lenne, se az, hogy ha Θ szeparábilis, akkor minden a és b közti maximális lánc megfelelő tulajdonságú. Ezekre az I. rész végén látunk ellenpéldákat.

A következőkben bebizonyítunk nyolc lemmát, melyek előkészítik a 2. és 3. TÉTELt.

Először lássuk (DID) fennállásának egy elégséges feltételét.

2. LEMMA: *Legyen L egy szeparábilis kongruenciarelációja Θ, ekkor $\Theta(L)$ minden A részhalmazára*

$$\Theta \cup \bigwedge_{\Theta_\alpha \in A} \Theta_\alpha = \bigwedge_{\Theta_\alpha \in A} (\Theta \cup \Theta_\alpha).$$

BIZONYÍTÁS: Mivel $\Theta \cup \bigwedge_{\Theta_\alpha \in A} \Theta_\alpha \leqq \bigwedge_{\Theta_\alpha \in A} (\Theta \cup \Theta_\alpha)$ mindig igaz, ezért elég $\Theta \cup \bigwedge_{\Theta_\alpha \in \alpha} \Theta_\alpha \geqq \bigwedge_{\Theta_\alpha \in A} (\Theta \cup \Theta_\alpha)$-t kimutatni. Legyen $x \equiv y(\bigwedge_{\Theta_\alpha \in A} (\Theta \cup \Theta_\alpha))$. Θ szeparábilitása miatt van olyan $x \cup y = z_0 \geqq z_1 \geqq \cdots \geqq z_n = x \cap y$ lánc, hogy $z_{i-1} \equiv z_i$ (Θ) vagy $[z_{i-1}, z_i]$ egyetlen részintervalluma sem kongruens moduló

Θ. Az utóbbinak elegettevő i-kre $z_{i-1} \equiv z_i\,(\bigwedge_{\Theta_\alpha \in A} (\Theta \smile \Theta_\alpha))$ miatt $z_{i-1} \equiv z_i (\bigwedge \Theta_\alpha)$. Így $x \equiv y(\Theta \smile \bigwedge \Theta_\alpha)$, ami épp a bizonyítandó állítást jelenti.

A 2. LEMMA nem fordítható meg. Később mutatunk példát olyan hálóra (amely, mint a későbbiekből nyilvánvaló, szükségképp nem disztributiv), amelyben (DID) korlátlanul fennáll, mégis van nem szeparábilis kongruenciarelációja.

Sok példát lehetne felsorolni szeparábilis és nem szeparábilis kongruenciarelációra. Illusztrációként álljon itt a következő.

3. LEMMA: *Legyen I az L háló neutrális ideálja,*[1] *és tegyük fel, hogy van olyan $x \in L$, melyre $x \geqq i$ minden $i \in I$-re.*[2] *Az I ideálhoz tartozó Θ minimális kongruenciareláció akkor és csak akkor szeparábilis, ha I főideál.*

BIZONYÍTÁS: Ha I nem főideál, akkor x, y $(y \in I)$ nem szeparálható, mert $x > z > y$, $z \equiv y(\Theta)$ esetén csak akkor lehetne $[z, x]$ egyetlen részintervalluma sem kongruens Θ-nál, ha z generálóeleme volna I-nek. Megfordítva, ha I főideál, $I = (a]$, akkor $x > y$ szeparálható $z = y \smile a$-val.

4. LEMMA: *L szeparábilis kongruenciarelációi $\Theta(L)$-nek $\Theta_S(L)$ részhálóját alkotják.*

A bizonyítás előtt felhívjuk a figyelmet arra, hogy $\Theta_S(L)$ nem üres, mert a definícióból adódólag $\Theta(L)$ legnagyobb és legkisebb eleme benne van.

BIZONYÍTÁS: Legyen $\Theta, \Phi \in \Theta_S(L)$, továbbá $b < a$ $(a, b \in L)$. Θ szeparábilitása miatt van olyan $a = z_0 \geqq z_1 \geqq \cdots \geqq z_n = b$ összekötő sorozat, mely a definícióban előírt tulajdonságokkal rendelkezik. Φ szeparábilitása miatt minden i-re z_{i-1} és z_i összeköthető egy Φ-re nézve szeparált lánccal:

$$z_{i-1} = u_{i,0} \geqq \cdots \geqq u_{i,k} = z_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Az $\{u_{ij}\}$ lánc $\Theta \frown \Phi$ és $\Theta \smile \Phi$-re nézve is szeparált, amint az a definícióból közvetlenül adódik, így $\Theta \frown \Phi$ és $\Theta \smile \Phi \in \Theta_S(L)$.

Mivel $\Theta(L)$ disztributív, ezért centruma, $\Theta_Z(L)$, azon kongruenciarelációk összessége, melyeknek van komplementumuk. Ismeretes, hogy $\Theta_Z(L)$ részhálója $\Theta(L)$-nek (ez egyébként nyilvánvaló, mert[3] $(\Theta \smile \Phi)' = \Theta' \frown \Phi'$ és $(\Theta \frown \Phi)' = \Theta' \smile \Phi'$). Fennáll az

[1] Az L háló I ideálját neutrálisnak nevezzük, ha L ideáljainak hálójában I neutrális elem, vagyis minden $\{I, J, K\}$ részháló disztributív. Ha értelmezzük a Θ relációt úgy, hogy $x \equiv y\,(\Theta)$, akkor és csak akkor, ha $(x \frown y) \smile t \geqq x \smile y$ valamilyen $t \in I$-re, akkor Θ kongruenciareláció lesz, mégpedig modulo Θ I osztály, és Θ az ilyen tulajdonságú kongruenciarelációk közt minimális. (Ezekre nézve lásd [1] 28, 79, 119, és 124. oldalát, vagy [2] 167. oldalát.)

[2] Ez teljesül például, ha van L-ben legnagyobb elem.

[3] Θ' a Θ komplementumát jelöli.

5. LEMMA: *Ha a Θ kongruenciarelációnak van komplementuma, akkor Θ szeparábilis, azaz $\Theta_Z(L) \subseteq \Theta_S(L)$.*

BIZONYÍTÁS: Θ komplementumát jelölje Θ'. Minden $a \geqq b$-hez $a \equiv b(\Theta \cup \Theta')$ miatt az 1. TÉTEL szerint van olyan $a = z_0 \geqq z_1 \geqq \cdots \geqq z_n = b$ lánc, hogy $z_i \equiv z_{i-1}(\Theta)$, vagy $z_i \equiv z_{i-1}(\Theta')$. Belátjuk, hogy a $\{z_i\}$ lánc Θ-ra nézve szeparált. Valóban, ha $z_i \not\equiv z_{i-1}(\Theta)$ és $x, y \in [z_i, z_{i-1}]$ mellett $x \equiv y(\Theta)$, akkor $z_{i-1} \equiv z_i(\Theta')$-ből $x \equiv y(\Theta \cap \Theta')$, azaz $x = y$.

A továbbiakban (mint ahogy ezt [6]-ban is tettük) $\Theta_{a,b}$-vel jelöljük az L hálóban az $a \equiv b$ által indukált kongruenciarelációt. Érvényes a következő

6. LEMMA: *Az L disztributív hálóban, ha $a > b \geqq c > d$, akkor $\Theta_{a,b} \cap \Theta_{c,d} = 0$.*

BIZONYÍTÁS: Legyen $x \equiv y(\Theta_{a,b} \cap \Theta_{c,d})$ $(x > y)$. Ekkor [6] 2. TÉTELe értelmében $(c \cup y) \cap x = x$ és $(d \cup y) \cap x = y$. Azonban $c \cap (d \cup y) < c$ (ugyanis $c \cap (d \cup y) = c$-ből $c \cap (c \cup y) = c$ és $c \cup (d \cup y) = c \cup y$ miatt a relatív komplementumok egyértelműsége folytán $c \cup y = d \cup y$, ebből pedig $x = y$ következnék, ellentmondásban az $x > y$ feltevéssel) és $c \equiv c \cap (d \cup y)(\Theta_{x,y})$, ami $\Theta_{x,y} < \Theta_{a,b}$ miatt azt jelenti, hogy $c \equiv c \cap (d \cup y)(\Theta_{a,b})$, de $c \cap (d \cup y) < c \leqq b < a$ ellentmondásban van [6] második tételének 2. korolláriumával.

Az 5. és 6. LEMMÁból könnyen adódik a

7. LEMMA: *Az L disztributív hálóban $\Theta_{a,b}$-nek $(a > b;\, a, b \in L)$ van komplementuma, tehát szeparábilis.*

BIZONYÍTÁS: Jelölje Φ az $[a)$ duális főideálhoz és $(b]$ főideálhoz tartozó minimális kongruenciarelációk egyesítését s $\Theta_{a,b}$ helyett írjunk röviden Θ-t. Ekkor $\Theta \cup \Phi = I$ (I a $\Theta_S(L)$ legnagyobb eleme, s $I \in \Theta_S(L)$, mint már említettük), mert minden $x > y$-ra $[y, x] \subseteq [y \cap b, x \cup a]$ és $x \cup a \equiv y \cap b(\Theta \cup \Phi)$ miatt $x \equiv y(\Theta \cup \Phi)$. Ha $x \equiv y(\Theta \cap \Phi)$ és $x < y$ fennállna, akkor egyrészt $x \equiv y(\Phi)$, azaz $x \equiv y(\bigvee_{a_1 \in [a)} \Theta_{a,a_1} \cup \bigvee_{b_1 \in (b]} \Theta_{b,b_1})$ lenne, s így az 1. TÉTEL szerint volna olyan $x \geqq u > v \geqq y$, hogy $u \equiv v(\Theta_{a,a_1})$ vagy $u \equiv v(\Theta_{b,b_1})$ alkalmas $a_1 (> a)$-val vagy $b_1 (< b)$-vel. Másrészt $x \equiv y(\Theta)$ miatt $u \equiv v(\Theta)$ is fennállna, s így mindkét előbbi eset, $a_1 > a > b > b_1$ miatt, ellentmond a 6. LEMMÁnak.

Nem szeparábilis kongruenciarelációra most már újabb fontos példát is tudunk mutatni.

8. LEMMA: *Legyen L disztributív háló, melyben adottak az $[a_i, b_i]$ $(i = 1, 2, \ldots)$ intervallumok, úgy hogy $a < a_1 < b_1 < \cdots a_i < b_i < \cdots < b$, akkor $\bigvee_{i=1}^{\infty} \Theta_{a_i, b_i}$ nem szeparábilis kongruenciareláció.*

BIZONYÍTÁS: Tegyük fel, hogy $\Theta = \bigvee_{i=1}^{\infty} \Theta_{a_i, b_i}$ szeparábilis, ekkor van olyan $a = z_0 > z_1 > \cdots > z_n = b$, hogy $z_{i-1} \equiv z_i(\Theta)$, avagy $[z_i, z_{i-1}]$ egyetlen részintervalluma sem kongruens Θ-nál. Ha $z_{i-1} \equiv z_i(\Theta)$, akkor $z_i \equiv z_{i-1}\left(\bigvee_{i=1}^{r} \Theta_{a_{j_i}, b_{j_i}}\right)$, vagyis *véges sok* $[a_i, b_i]$ által generált kongruenciareláció már indukálja a $\{z_i\}$ láncon az összes $z_i \equiv z_{i-1}(\Theta)$ kongruenciát. Legyen $[a_t, b_t]$ ezen véges sok intervallumtól különböző intervallum. $a \equiv b(\Theta_{a_t, b_t} \cup \Theta'_{a_t, b_t})$ (Θ_{a_t, b_t} komplementuma Θ'_{a_t, b_t}, amely a 7. LEMMA szerint létezik), viszont $a \not\equiv b(\Theta'_{a_t, b_t})$, mert $a \equiv b(\Theta'_{a_t, b_t})$-ből $a_t \equiv b_t(\Theta'_{a_t, b_t})$ adódna ellentétben $a_t \equiv b_t(\Theta_{a_t, b_t})$-vel. Következésképp nem lehet minden i-re $z_i \equiv z_{i-1}(\Theta'_{a_t, b_t})$, így van olyan i, hogy $z_i \not\equiv z_{i-1}(\Theta'_{a_t, b_t})$. Az 1. TÉTEL értelmében [mivel $z_i \equiv z_{i-1}(\Theta_{a_t, b_t} \cup \Theta'_{a_t, b_t})$], ekkor van olyan u, v hogy $z_i \leqq u < v \leqq z_{i-1}$ és $u \equiv v(\Theta_{a_t, b_t})$. Erre az i-re azonban $z_i \equiv z_{i-1}(\Theta)$, azaz $z_i \equiv z_{i-1}\left(\bigvee_{i=1}^{r} \Theta_{a_{j_i}, b_{j_i}}\right)$, vagyis $u \equiv v\left(\bigvee_{i=1}^{r} \Theta_{a_{j_i}, b_{j_i}}\right)$. Az előzővel összevetve $u \equiv v\left(\Theta_{a_t, b_t} \cap \bigvee_{i=1}^{r} \Theta_{a_{j_i}, b_{j_i}}\right)$; azaz $u \equiv v\left(\bigvee_{i=1}^{r} (\Theta_{a_{j_i}, b_{j_i}} \cap \Theta_{a_t, b_t})\right)$. A LEMMA feltételei és $[a_{j_i}, b_{j_i}] \neq [a_t, b_t]$ miatt minden i-re, vagy $a_{j_i} < b_{j_i} < a_t < b_t$, vagy $a_t < b_t < a_{j_i} < b_{j_i}$, azaz teljesülnek a 6. LEMMA feltételei ezért $\Theta_{a_{j_i}, b_{j_i}} \cap \Theta_{a_t, b_t} = 0$ minden i-re. Így az előbbi kongruencia $u \equiv v(0)$-ba megy át, azaz $u = v$ adódik, ellentmondásban a fentebbi $u < v$-vel. Ez az ellentmondás igazolja állításunkat.

A továbbiakban ismét szükségünk lesz a hozzárendelt elempár fogalmára. Emlékeztetünk arra, hogyan definiáltuk [6]-ban a hozzárendelt elempár fogalmát.

Azt mondjuk, hogy az a, b elempárhoz c, d $(a, b, c, d \in L)$ hozzá van rendelve, jelben $\overline{a, b} \to \overline{c, d}$, ha alkalmas $x_1, \ldots, x_n \in L$ elemekkel

(1) $$\{\cdots\{[(a \cup b) \cap x_1] \cup x_2\} \cap \cdots\} \cap x_n = c \cup d,$$

(2) $$\{\cdots\{[(a \cap b) \cap x_1] \cup x_2\} \cap \cdots\} \cap x_n = c \cap d.$$

A hozzárendelt elempár[4] segítségével megadhatunk egy feltételt arra, hogy $\Theta_s(L)$ és $\Theta_z(L)$ megegyezzék.

Az egyszerűség kedvéért vezessük be a következő elnevezést:

2. DEFINÍCIÓ: Az L hálót *gyengén modulárisnak* nevezzük, ha valahányszor $\overline{a, b} \to \overline{c, d}$ $(a, b, c, d \in L;\ a < b,\ c \neq d)$, mindannyiszor található olyan $a_1, b_1 \in L$, $(a_1 < b_1)$, hogy $[a_1, b_1] \subseteq [a, b]$ és $\overline{c, d} \to \overline{a_1, b_1}$.

[4] Megengedett az is, hogy x_1 előtt $\cup$, x_2 előtt $\cap$ stb. legyen (1) és (2)-ben. Ez nyilvánvalóan ekvivalens az előbbivel. Az azonban már fölösleges, hogy egymás után többször álljon pl. az $\cup$ jel; az asszociativitás miatt ezek a lépések összevonhatók.

9. LEMMA: *Az L gyengén moduláris hálóban minden szeparábilis kongruenciarelációnak van komplementuma és így*

$$\Theta_S(L) = \Theta_Z(L).$$

BIZONYÍTÁS: Legyen Θ szeparábilis kongruenciareláció. Definiáljuk a Φ relációt a következőképp:

$x \equiv y(\Phi)$ akkor és csak akkor, ha $[x \cap y, x \cup y]$-ban nincs Θ-nak több, mint egy elemű osztálya.

Per definitionem $x \equiv x(\Phi)$ és a Φ reláció szimmetrikus. Legyen $x \equiv y(\Phi)$, $y \equiv z(\Phi)$ és $x > y > z$, s tegyük fel, hogy valamely u, v-re emellett $u \equiv v(\Theta), x \geqq u > v \geqq z$. Φ definíciója miatt kell, hogy $[v, u]$-nak $[z, y]$-nal és $[y, x]$-szel legfeljebb egy közös eleme legyen. Ez a közös elem y nyilván nem lehet, ezért $y \cup v > v$. Feltesszük, hogy $y \cup v \geqq u$, mert ha ez nem áll, akkor okoskodásunkat az u, v elempár helyett az $y \cup v$, $y \cup u \cup v$ elempárral folytatnánk. Ebben az esetben viszont a gyenge modularitásból, mivel $\overline{y, z} \to \overline{v, v \cup y}$ s ezért $\overline{y, z} \to \overline{u, v}$ is fennáll, olyan $y > y_1 > z_1 > z$ adódik, hogy $\overline{u, v} \to \overline{y_1, z_1}$ azonban akkor $y_1 \equiv z_1(\Theta)$, amely ellentmondás igazolja $x \equiv z(\Phi)$-t. Végül legyen $x > y$, $x \equiv y(\Phi)$, belátjuk, hogy $x \cup t \equiv y \cup t(\Phi)$. Ellenkező esetben ugyanis volna $x \cup t \geqq u > v \geqq y \cup t$, hogy $u \equiv v(\Theta)$. Viszont $\overline{x, y} \to \overline{u, v}$, ezért a gyenge modularitás miatt van olyan x_1, y_1 $(x \geqq x_1 > y_1 \geqq y)$, hogy $\overline{u, v} \to \overline{x_1, y_1}$, de akkor $x_1 \equiv y_1(\Theta)$, ami ellentmond $x \equiv y(\Phi)$-nek. Bebizonyítottuk, hogy Φ eleget tesz az 1. LEMMA (a)—(d) feltételeinek, mivel (e) triviálisan igaz, ezért Φ kongruenciareláció. Φ definíciójából $\Theta \cap \Phi = 0$ következik; $\Theta \cup \Phi = I$ pedig így látható be. Legyen $a > b$ két tetszőleges eleme L-nek. Tekintsük a és b között azt az $a = z_0 \geqq z_1 \geqq \cdots \geqq z_n = b$ láncot, amely Θ-t szeparálja. Ekkor vagy $z_i \equiv z_{i-1}(\Theta)$, vagy $[z_i, z_{i-1}]$ egyetlen (több mint egy elemű) részintervalluma sem kongruens Θ-nál, azaz Φ definíciójából folyólag $z_i \equiv z_{i-1}(\Phi)$, vagyis $a \equiv b(\Theta \cup \Phi)$. Ezzel beláttuk, hogy Φ komplementuma Θ-nak, amivel a 9. LEMMA bizonyítását befejeztük.

Eddigi diszkussziónk egyik célja volt, hogy feleletet adjunk a következő, G. BIRKHOFF által felvetett (lásd [1], 153 old., 72. probléma) kérdésre:

Keressük annak szükséges és elegendő feltételét az L hálóra, hogy kongruenciarelációi Boole-algebrát alkossanak.

T. TANAKA [4] adott először erre a kérdésre feleletet:

Az L háló kongruenciarelációi akkor és csak akkor alkotnak Boole-algebrát, ha L egyszerű hálók diszkrét szubdirekt szorzata — azaz olyan szubdirekt szorzata, melyben bármely két elem csak véges sok komponensében különbözik.

T. TANAKA tétele azon L hálók struktúratételének tekinthető, melyekre $\Theta(L)$ Boole-algebra. Nem látszik azonban érdektelennek ezen hálókat a fentebb bevezetett fogalmak segítségével is leírni.

2. TÉTEL: *Az L háló kongruenciarelációi akkor és csak akkor alkotnak Boole-algebrát, ha*

(W) *L gyengén moduláris;*

(S) *L minden kongruenciarelációja szeparábilis.*

BIZONYÍTÁS:

Szükségesség. Tegyük fel, hogy L kongruenciarelációinak hálója Boole-algebra. Ekkor minden kongruenciarelációnak van komplementuma, így az 5. LEMMA szerint mind szeparábilis, vagyis (S) teljesül. Tegyük fel, hogy L-ben $\overline{a, b} \to \overline{c, d}$, s erre a hozzárendelésre a gyenge modularitás feltétele nem teljesülne. Állítjuk, hogy ekkor $\Theta_{c,d}$-nek nincs komplementuma; ugyanis, ha $\Theta_{c,d}$ komplementuma Φ lenne, akkor $a \equiv b(\Theta_{c,d} \cup \Phi)$, $a \not\equiv b(\Phi)$ esetén az 1. TÉTELből olyan $a \cup b \geqq a_1 > b_1 \geqq a \cap b$ létezése adódna, melyre $a_1 \equiv b_1(\Theta_{c,d})$. [6] 5. tétele szerint ez viszont éppen olyan $a_1 \geqq a_2 > b_2 \geqq b_1$ létezését jelenti, hogy $\overline{c, d} \to \overline{a_2, b_2}$, azaz a gyenge modularitás teljesülne, ellentétben a feltevéssel. Kell tehát, hogy $a \equiv b(\Phi)$ fennálljon, de ekkor $\overline{a, b} \to \overline{c, d}$ miatt $c \equiv d(\Phi)$ is fennállana, ellentétben $\Theta_{c,d} \cap \Phi = 0$-val.

Elégségesség. A (W) feltétel miatt, mint azt a 9. LEMMÁban bebizonyítottuk, $\Theta_Z(L) = \Theta_S(L)$. Az ($S$) feltétel így is írható: $\Theta_S(L) = \Theta(L)$, ami az előbbivel összevetve $\Theta(L) = \Theta_Z(L)$-et adja, ami bizonyítandó volt.

A gyenge modularitás valóban a modularitás általánosítása. Ezt a következőképp láthatjuk be: Legyen $a > b$ és $t \cup a \geqq c > d \geqq t \cup b$. $a \cup c = a \cup d$, ezért $a \cap c > a \cap d$ (lásd [1] 66. old.), vagyis $\overline{a, b} \to \overline{c, d}$-ből ezesetben $\overline{c, d} \to \overline{a \cap c, a \cap d}$ következik. Az általános eset tárgyalása triviális teljes indukcióval történhet a hozzárendelés lépésszámára (az (1) és (2) képletekben szereplő n-re) vonatkozólag. A következő eredményt kaptuk:

1. KOROLLÁRIUM: *Az L moduláris háló kongruenciarelációinak hálója akkor és csak akkor Boole-algebra, ha (S) teljesül.*

Megjegyezzük, hogy a gyenge modularitás más irányú általánosítása a modularitásnak, mint a féligmodularitás, ugyanis már a legegyszerűbb féligmoduláris háló, amely nem moduláris ([1]-ben a 7a ábrán látható háló duálisa) egyúttal nem is gyengén moduláris.

Disztributív hálókra a 2. TÉTEL tovább élesíthető.

2. KOROLLÁRIUM (J. HASHIMOTO TÉTELE [2]): *Az L disztributív háló kongruenciarelációinak hálója akkor és csok akkor Boole-algebra, ha L lokálisan véges.*

BIZONYÍTÁS: Az 1. korollárium értelmében elég belátnunk, hogy (S) ekvivalens a lokális végességgel. Valóban, ha L lokálisan véges, akkor per definitionem minden kongruenciarelációja szeparábilis, megfordítva, ha L nem lokálisan véges, akkor van $[a, b]$ $(a < b)$ nem véges hosszúságú intervalluma s ekkor a szokásos „felezési-eljárás"-sal konstruálható a 8. LEMMÁban szereplő intervallum-sorozat, s így a 8. LEMMA szerint van nem szeparábilis kongruenciarelációja. Ezzel a bizonyítást befejeztük.

Az 1. KOROLLÁRIUM más irányú specializálása a következő:

3. KOROLLÁRIUM (SHIH-CHIANG WANG TÉTELE [5]): *Az L komplementumos moduláris háló kongruenciarelációinak hálója akkor és csak akkor Boole-algebra, ha minden neutrális ideálja főideál.*

BIZONYÍTÁS: G. BIRKHOFF egyik tétele szerint a fenti feltételek mellett L minden kongruenciarelációja egy neutrális ideálhoz tartozó minimális kongruenciareláció (lásd [1] 125. old.). A 3. LEMMA szerint viszont L bármely neutrális ideáljához tartozó minimális kongruenciareláció akkor és csak akkor szeparábilis, ha ez a neutrális ideál főideál.

Disztributív hálók esetében most már nehézség nélkül válaszolhatunk arra a kérdésre, hogy $\Theta(L)$-ben mikor teljesül (DID).

3. TÉTEL: *Az L disztributív háló kongruenciarelációinak hálójában* (DID) *akkor és csak akkor teljesül korlátlanul, ha L lokálisan véges.*

BIZONYÍTÁS: Ha L lokálisan véges, akkor minden kongruenciarelációja szeparábilis és így a 2. LEMMA szerint (DID) fennáll.

Megfordítva, tegyük fel, hogy $\Theta(L)$-ben (DID) korlátlanul teljesül. Nyilván $\Theta = \bigvee_{a \equiv b(\Theta)} \Theta_{a, b}$. A 7. LEMMA szerint $\Theta_{a, b}$-nek van komplementuma, $\Theta'_{a, b}$. Tekintsük a $\Phi = \bigwedge \Theta'_{a, b}$ kongruenciarelációt,[5] (ID)-ből

$$\Theta \cap \Phi = \bigvee \cdot \Theta_{a, b} \cap (\cdot \bigwedge \Theta'_{a, b}) = \bigvee (\Theta_{a, b} \cap \bigwedge \Theta'_{a, b}) \leqq \bigvee (\Theta_{a, b} \cap \Theta'_{a, b}) = \bigvee 0 = 0,$$

ezért $\Theta \cap \Phi = 0$ és (DID)-ből

$$\Theta \cup \Phi = \bigvee \Theta_{a, b} \cup (\bigwedge \Theta'_{a, b}) = \bigwedge (\Theta'_{a, b} \cup \bigvee \Theta_{a, b}) \geqq \bigwedge (\Theta'_{a, b} \cup \Theta_{a, b}) = I,$$

így $\Theta \cup \Phi = I$, vagyis Φ komplementuma Θ-nak. Beláttuk, hogy Θ(L) Boole-algebra, de ekkor a 2. TÉTEL 2. KOROLLÁRIUMa miatt L lokálisan véges. Ezzel a tétel bizonyítását befejeztük.

Konstruáljuk meg a szeparábilis kongruenciareláció definíciójánál megígért ellenpéldákat. Először legyen E a nem pozitív egészek $-\infty$-nel lezárt lánca. $E \cdot E$-ben (E-nek önmagával vett kardinális szorzata, [1] 7. oldalának értelmében) tekintsük a $\Theta = \Theta_{(0, 0), (-\infty, 0)}$ kongruenciarelációt és egy, az összes (x, x) alakú elemet tartalmazó C maximális láncot. Θ a 7. LEMMA szerint

[5] A bizonyítás során $\bigvee$ és $\bigwedge$ mindig az összes olyan a, b-re értendő, melyekre $a \equiv b(\Theta)$.

szeparábilis kongruenciareláció, mégis a C láncon végtelen sok egynél több elemű osztályt létesít.

Tekintsünk most egy olyan nem szeparábilis kongruenciarelációt, amelynek megvan az a tulajdonsága, hogy bármely $a > b$-hez található olyan maximális lánc, melyen Θ csak véges sok egynél több elemű zárt osztályt létesít. Ezt megkonstruálandó, legyen P a pozitív egészek lánca, L a $P \cdot P$ háló I elemmel felülről lezárva, és $\Theta = \bigvee_{i=1}^{\infty} \Theta_{(2i,0),(2i+1,0)}$. Θ a 8. LEMMA szerint nem szeparábilis. Tekintsük egy tetszőleges $a > b$ elempárt. Feltehető, hogy $a = I$, különben $[b, a]$ véges. Ha viszont $a = I$, akkor az a és b közti kívánt tulajdonságú maximális láncot szolgáltatják az összes (b_1, x) alakú elemek, ahol b_1 első komponense b-nek és $x = b_2, b_2 + 1, b_2 + 2, \ldots$. Érdekes talán megjegyezni, hogy ebben a két ellenpéldában szereplő háló disztributív.

Végül konstruáljuk meg a 2. LEMMÁnál említett ellenpéldát. Legyen P ismét a pozitív egészek lánca, s tekintsük azt az L halmazt, amely P-ből és a O, x, y, I elemekből áll. L háló lesz a következő definícióval: P rendezése a szokásos, továbbá $i = 1, 2, \ldots$-re $x \cup i = y \cup i = x \cup y = x \cup I = y \cup I = I$ és $x \cap i = y \cap i = I \cap 0 = 0$. Tekintsük át L kongruenciarelációit. Könnyen kimutatható, hogy $I \equiv i$ vagy $i \equiv 0$ $(i = 1, 2, \ldots)$ esetén az egész háló egybeesik, s ebből már az is adódik, hogy az egység-kongruenciareláción, ξ-n kívül L kongruenciarelációi lényegében P kongruenciarelációi, abban az értelemben, hogy L-nek P-n kívüli elemeit nem ejti egybe. Láthatjuk tehát, hogy $\Theta(L)$ $\Theta(P)$-ből úgy áll elő, hogy $\Theta(P)$-hez hozzávesszük még a ξ kongruenciarelációt, melyre $\xi > \Theta$ minden $\Theta \in \Theta(P)$-re. $\Theta(P)$ azonban duálisan végtelenül disztributív a 3. TÉTEL értelmében, ezért kis számolással belátható, hogy $\Theta(L)$ is duálisan végtelenül disztributív. L-nek azonban mégis van nem szeparábilis kongruenciarelációja, ilyen például az a kongruenciareláció, melyben $2i \equiv 2i + 1$ $(i = 1, 2, \ldots)$. (Pl. 1 és I nem szeparálhatók.)

Most már azt is láthatjuk, hogy minden harmadik típusú ellenpélda nem disztributív háló, ugyanis ha L disztributív volna, akkor (DID) fennállása maga után vonná a 3. TÉTEL szerint L lokális végességét, így nem lehetne nem szeparábilis kongruenciarelációja.

II.

A következőkben az L háló ideáljai $\mathfrak{L}$ hálójának és az ideálokhoz tartozó minimális kongruenciarelációknak kapcsolatával szeretnénk foglalkozni. A továbbiakhoz szükséges a következő:

10. LEMMA: *Az $I_\alpha(\alpha \in A)$ ideálok komplett-egyesítése létezik és azon c elemekből áll, melyekre*

$$c \leqq i_{\alpha_1} \cup \cdots \cup i_{\alpha_n}, \tag{3}$$

ahol $i_{\alpha_s} \in I_{\alpha_s}$, $\alpha_s \in A (s = 1, 2, \ldots, n)$ és n tetszőleges véges szám.

A bizonyítás az ideál és a komplett-egyesítés definíciójából automatikusan adódik. Láthatjuk továbbá, hogy *az $\overset{n}{\underset{\alpha \in A}{\bigvee}} I_\alpha$ ideál az I_α ideálok véges egyesítéseinek halmazelméleti egyesítése,* és az is nyilvánvaló, hogy $\mathfrak{L}$ *akkor és csak akkor komplett háló, ha L 0-elemes.* Disztributív hálókra több is igaz, nevezetesen, *ha L disztributív, akkor $\overset{n}{\underset{\alpha \in A}{\bigvee}} I_\alpha$ elemei*

$$t = i_{\alpha_1} \cup \cdots \cup i_{\alpha_n} \qquad (\alpha_j \in A, i_{\alpha_j} \in I_{\alpha_j} (j = 1, \ldots, n)) \tag{4}$$

alakban írhatók.

Ehhez csak azt kell belátnunk, hogy ha t (4) alakú és $x \leqq t$, akkor x is (4) alakú, de valóban $x = x \cap t = \bigvee_{r=1} (i_{\alpha_r} \cap x)$, ahol $i_{\alpha_r} \cap x \in I_{\alpha_r} (r = 1, 2, \ldots, n)$, ami a bizonyítandó volt.

Jelölje a továbbiakban Θ_I az I ideálhoz tartozó minimális kongruenciarelációt, azaz azt a minimális kongruenciarelációt, melyben I minden eleme a homomorf kép 0 elemére képeződik le.[6] Θ_I létezése abból adódik, hogy az összes olyan kongruenciareláció metszete, melynél I a homomorf kép 0 elemére képeződik le, ugyanilyen tulajdonságú.

4. TÉTEL: *Az $\bigvee_{\alpha \in A} I_\alpha$ ideálhoz tartozó minimális kongruenciareláció $\bigvee_{\alpha \in A} \Theta_{I_\alpha}$, vagyis*

$$\Theta_{\bigvee_{\alpha \in A} I_\alpha} = \bigvee_{\alpha \in A} \Theta_{I_\alpha}. \tag{5}$$

BIZONYÍTÁS: Nyilvánvaló, hogy

$$\Theta_{I_\alpha} = \bigvee_{a, b \in A} \Theta_{a, b} \tag{6}$$

(lásd a dolgozat első részében a 2. TÉTEL 4. KOROLLÁRIUMának bizonyítását).

[6] Félreértések elkerülése végett megjegyezzük, hogy Θ_I-nél I-n kívüli elemek is képeződhetnek le a homomorf kép 0 elemére.

Először belátjuk, hogy ha $a \leqq b$ és $a \leqq c$, akkor

$$\Theta_{a, b} \cup \Theta_{a, c} = \Theta_{a, b \cup c}. \tag{7}$$

Mivel $a \equiv b(\Theta_{a, b \cup c})$ és $a \equiv c(\Theta_{a, b \cup c})$, ezért $\Theta_{a, b} \cup \Theta_{a, c} \leqq \Theta_{a, b \cup c}$; megfordítva $a \equiv b(\Theta_{a, b})$ és $a \equiv c(\Theta_{a, c})$ miatt $a \equiv b \cup c(\Theta_{a, b} \cup \Theta_{a, c})$, azaz $\Theta_{a, b \cup c} \leqq \Theta_{a, c} \cup \Theta_{b, c}$. A két egyenlőtlenség összevetése éppen (7)-et adja.

(6) segítségével (5) a következő alakra hozható:

$$\bigvee_{x, y \in \bigvee_{\alpha \in A} I_\alpha} \Theta_{x, y} = \bigvee_{\alpha \in A} \bigvee_{a, b \in I_\alpha} \Theta_{a, b}. \tag{8}$$

Tegyük fel, hogy $\Theta_{a, b}$ szerepel (8) jobboldalában az egyesítésben. Ekkor valamely $\alpha \in A$-ra $a, b \in I_\alpha$, így $a, b \in \bigvee_{\alpha \in A} I_\alpha$, s ezért $\Theta_{a, b}$ szerepel (8) baloldalában is; következésképp

$$\bigvee_{x, y \in \bigvee_{\alpha \in A} I_\alpha} \Theta_{x, y} \geqq \bigvee_{\alpha \in A} \bigvee_{a, b \in I_\alpha} \Theta_{a, b}.$$

Megfordítva, legyen $\Theta_{x, y}$ $(x, y \in \bigvee_{\alpha \in A} I_\alpha)$ (8) baloldalában az egyesítésnél az egyik tag. $x, y \in \bigvee_{\alpha \in A} I_\alpha$ a 10 LEMMA szerint olyan i_{α_r} $(\in I_{\alpha_r}, \alpha_r \in A, r = 1, 2, \ldots, n)$ elemek létezését jelenti, hogy $x, y \leqq i_{\alpha_1} \cup \cdots \cup i_{\alpha_r}$. Legyen $u = \bigwedge_{r=1}^{n} i_{\alpha_r} \cap (x \cap y)$. Nyilván $u \in I_{\alpha_r}$ $(r = 1, 2, \ldots, n)$, s így $\Theta_{u, i_{\alpha_r}}$ szerepel (8) jobboldalában. (7)-ből $\bigvee_{r=1}^{n} \Theta_{u, i_{\alpha_r}} = \Theta_{u, \bigvee_{r=1}^{n} i_{\alpha_r}} \geqq \Theta_{x, y}$, ezért

$$\bigvee_{x, y \in \bigvee_{\alpha \in A} I_\alpha} \Theta_{x, y} \leqq \bigvee_{\alpha \in A} \bigvee_{a, b \in I_\alpha} \Theta_{a, b},$$

vagyis (8) fennáll. Q. e. d.

$\bar{\Theta}_I$-vel jelöljük azt a minimális kongruenciarelációt, melynek I magja. $\bar{\Theta}_I$ nyilván nem szükségképp létezik, de ha létezik, akkor[7] $\bar{\Theta}_I = \Theta_I$.

KOROLLÁRIUM: Ha $\bar{\Theta}_{I_\alpha}$ minden $\alpha \in A$-ra létezik, akkor $\bar{\Theta}_{\bigvee_{\alpha \in A} I_\alpha}$ is létezik és $\bigvee_{\alpha \in A} \bar{\Theta}_{I_\alpha} = \bar{\Theta}_{\bigvee_{\alpha \in A} I_\alpha}$.

A 4. TÉTELből láthatjuk, hogy akárhány minimális osztályozás egyesítése újból minimális osztályozás. Ez a metszetre már általában nem igaz. Ezt mutatja már a nem moduláris ötelemű háló példája is. A $\bigwedge \Theta_{I_\alpha} = \Theta_{\bigwedge I_\alpha}$ egyenlet különben sem állhatna fenn korlátozás nélkül, mert $\bigwedge I_\alpha$ nem szükségképp létezik.

[7] Érdekes volna azon ideálok összességét vizsgálni, melyekhez $\bar{\Theta}_I$ létezik. Könnyű például beigazolni, hogy ezek disztributív hálót alkotnak. Valószínűleg több probléma nyerne megoldást ezen háló részletesebb vizsgálatával.

Érdekes volna megadni annak szükséges és elegendő feltételét, hogy az L hálóban az ideálokhoz tartozó minimális kongruenciarelációk metszete is valamely ideálhoz tartozó minimális kongruenciareláció legyen. Az alábbiakban erre két elégséges feltételt adunk.

11. LEMMA: *Tartozzék az L 0-elemes háló minden ideáljához legfeljebb egy osztályozás. Jelölje $\bar{\mathfrak{L}}$ azon ideálok összességét, amelyekhez tartozik osztályozás. $\bar{\mathfrak{L}}$ $\Theta(L)$-lel izomorf háló, azaz*

$$\Theta_{\bigvee\limits_{\alpha\in A} I_\alpha} = \bigvee_{\alpha\in A} \Theta_{I_\alpha}, \qquad (I_\alpha \in \bar{\mathfrak{L}}) \tag{9}$$

$$\Theta_{\bigwedge\limits_{\alpha\in A} I_\alpha} = \bigwedge_{\alpha\in A} \Theta_{I_\alpha}; \qquad (I_\alpha \in \bar{\mathfrak{L}}) \tag{10}$$

legyen $(\bar{I}, \bar{K}, \bar{X}_i, \bar{Y}_j \in \bar{\mathfrak{L}})$,

$$\bar{I} = \bar{X}_0 \supset \bar{X}_1 \supset \cdots \supset \bar{X}_n = \bar{K}$$

és

$$\bar{I} = \bar{Y}_0 \supset \bar{Y}_1 \supset \cdots \supset \bar{Y}_s = \bar{K},$$

e két láncnak van közös hosszúságú finomítása.

BIZONYÍTÁS: (9)-et a 4. TÉTEL igazolja, (10) viszont abból adódik, hogy $0 \in L$ miatt $\bigwedge I_\alpha$ létezik, továbbá $\bigwedge \Theta_{I_\alpha}$ magja $\bigwedge I_\alpha$. A $\bigwedge I_\alpha$ ideálhoz legfeljebb egy osztályozás tartozik, ezért $\bigwedge \Theta_I = \Theta_{\bigwedge I_\alpha}$. Ezzel beláttuk, hogy az $\bar{I} \to \bar{\Theta}_{\bar{I}}$ $(\bar{I} \in \bar{\mathfrak{L}})$ megfeleltetés izomorfia, s így $\bar{\mathfrak{L}}$ disztributív. Alkalmazható tehát $\bar{\mathfrak{L}}$-ben a Jordan—Dedekind-tétel, amely rögtön megadja a láncok finomítására vonatkozó állítást.

Disztributív hálókban $\Theta_I = \bar{\Theta}_I$ minden I-re (sőt ez a tulajdonság [6] 1. tétele szerint jellemzi is a disztributivitást). Érvényes a következő

5. TÉTEL: *Ha L disztributív háló, akkor az összes Θ_I-k $\Theta(L)$-nek részhálóját alkotják, azaz*

$$\Theta_{I_1} \cup \Theta_{I_2} = \Theta_{I_1 \cup I_2} \tag{11}$$

és

$$\Theta_{I_1} \cap \Theta_{I_2} = \Theta_{I_1 \cap I_2}. \tag{12}$$

BIZONYÍTÁS: Mivel (11)-et tetszőleges hálóban már igazoltuk, ezért elég (12)-t belátni. (12)-t (6) alapján átírjuk:

$$\bigvee_{a,\, b\in I_1} \Theta_{a,b} \cap \bigvee_{c,\, d\in I_2} \Theta_{c,d} = \bigvee_{x,\, y\in I_1 \cap I_2} \Theta_{x,y},$$

ami (ID) felhasználásával ekvivalens a következővel:

$$\bigvee_{a,\, b\in I_1;\, c,\, d\in I_2} (\Theta_{a,b} \cap \Theta_{c,d}) = \bigvee_{x,\, y\in I_1 \cap I_2} \Theta_{x,y}. \tag{13}$$

Lássuk be, hogy ha $a \leqq b$ és $a \leqq c$, akkor

$$\Theta_{a,b} \cap \Theta_{a,c} = \Theta_{a,b\cap c}. \tag{14}$$

Felhasználva [6] 2. TÉTELét $u \equiv v(\Theta_{a,b})$ és $u \equiv v(\Theta_{a,c})$ az $u \geqq v$ feltétel mellett ekvivalens a következő egyenletek fennállásával.

$$(a \cup v) \cap u = v, \tag{15}$$

$$(b \cup v) \cap u = u, \tag{16}$$

$$(c \cup v) \cap u = u. \tag{17}$$

(16) és (17)-ből a disztributivitás segítségével

$$u = u \cap u = (b \cup v) \cap u \cap (c \cup v) \cap u = [(b \cap c) \cup v] \cap u. \tag{18}$$

(15) és (18) együtt az előbb idézett tétel szerint $u \equiv v(\Theta_{a, b \cap c})$-t jelenti. Beláttuk, hogy $\Theta_{a,b} \cap \Theta_{a,c} \leqq \Theta_{a, b \cap c}$; $\Theta_{a,b} \cap \Theta_{a,c} \geqq \Theta_{a, b \cap c}$ azonnal adódik abból, hogy $\Theta_{a,b}, \Theta_{a,c} \geqq \Theta_{a, b \cap c}$. Így (14) igazolását befejeztük.

Nyilván, ha $\Theta_{x,y}$ szerepel (13) jobboldalában, azaz $x, y \in I_1 \cap I_2$, akkor $\Theta_{x,y}$ szerepel (13) baloldalában is, azaz

$$\bigvee_{a, b \in I_1;\, c, d \in I_2} (\Theta_{a,b} \cap \Theta_{c,d}) \geqq \bigvee_{x, y \in I_1 \cap I_2} \Theta_{x,y}.$$

Bizonyítjuk a fordított egyenlőtlenséget. Látjuk, hogy ha $t \leqq a \cap b \cap c \cap d$ $(a, b \in I_1;\, c, d \in I_2)$ akkor (14) felhasználásával

$$\Theta_{a,b} \cap \Theta_{c,d} \leqq \Theta_{a \cup b, t} \cap \Theta_{c \cup d, t} = \Theta_{(a \cup b) \cap (c \cup d), t},$$

ahol $(a \cup b) \cap (c \cup d) \in I_1 \cap I_2$ és $t \in I_1 \cap I_2$, azaz (13) baloldalának bármely tagja $\leqq$ mint a jobboldal alkalmas eleme. Ezzel (13) bizonyítását befejeztük.

A tétel bizonyításából látható, hogy igaz a következő

KOROLLÁRIUM: *A Θ_I-k akkor és csak akkor alkotják $\Theta(L)$-nek részhálóját, ha* (14) *fennáll.*

E korollárium mégsem mondható a felvetett probléma megoldásának, inkább csak kényelmes átfogalmazásul szolgál.[8]

(9) és (10) fennállását elég sok kikötés mellett biztosítja a

6. TÉTEL: *Ha L 0-elemes komplett és duálisan végtelen disztributív háló, (azaz L-ben* (DID) *teljesül), akkor a Θ_I kongruenciarelációk $\Theta(L)$ komplett reszhálóját alkotják, azaz* (9) *és* (10) *fennáll.*

BIZONYÍTÁS: Megint elég csak (10)-et belátni. Ezt teljesen az 5. TÉTEL bizonyításának megfelelő úton tehetjük. Elegendő megjegyeznünk, hogy L 0-elemessége $\bigwedge I_\alpha$ létezéséhez szükséges, a (DID) feltétel pedig (14) analogonjának bizonyításához szükséges, azaz, hogy ha $b_\alpha \geqq a$, akkor

$$\bigwedge \Theta_{a, b_\alpha} = \Theta_{a, \bigwedge b_\alpha}. \tag{19}$$

(19) és a bizonyítás többi részének részletezése könnyen elvégezhető.

[8] Az 5. TÉTEL a [6] 2. tételének 4. korolláriuma alapján egyszerűbben igazolható. Ekkor azonban a fenti korolláriumot nem kaptuk volna meg.

III.

Az alábbiakban a hozzárendelt elempárral kapcsolatos néhány kérdéssel foglalkozunk. Tekintsük az L háló a, b, c, d elemeit, melyekre $\overline{a, b} \to \overline{c, d}$ és $\overline{c, d} \to \overline{a, b}$ is áll. Ekkor nyilván $a \equiv b$ és $c \equiv d$ bármely kongruenciarelációra nézve ekvivalensek. Ugyanez a helyzet, ha a, b és c, d projektívek[9] (lásd [1], 72. és 73. old.; ugyanitt a transzponáltság definíciója is megtalálható), amit $[a, b]\pi[c, d]$ módon jelölünk. Láthatjuk, hogy a, b és c, d akkor és csak akkor projektívek, ha $\overline{a, b} \to \overline{c, d}$ és hozzárendelés mindig relatív komplementummal történik. Felvetjük a következő problémát: a, b és c, d projektivitásának, mely L hálókban szükséges és elegendő feltétele

(20) $$\overline{a, b} \to \overline{c, d} \text{ és } \overline{c, d} \to \overline{a, b}.$$

A hálóknak két osztályát adhatjuk meg, melyekre ez a feltétel teljesül.

7. TÉTEL: *Ha az L hálóra teljesül, hogy*

A. *L disztributív, vagy*

B. *L lokálisan véges és moduláris,*

akkor a, b és c, d ($a < b, c < d; a, b, c, d \in L$) *projektivitásának szükséges és elegendő feltétele* (20) *fennállása.*

Nyilván mindig csak azt kell belátnunk, hogy (20)-ból következik $[a, b]\pi[c, d]$.

A. BIZONYÍTÁSA: [6] 2. tételének állítása szerint a (20) feltétel disztributív hálóban ekvivalens a következő négy egyenlettel:

(21) $$(a \cup c) \cap d = c,$$

(22) $$(b \cup c) \cap d = d,$$

(23) $$(a \cup c) \cap b = a,$$

(24) $$(a \cup d) \cap b = b.$$

Lássuk be a

$$b \cup (a \cup c) = d \cup (a \cup c)$$

egyenletet, vagyis, hogy

(25) $$b \cup c = d \cup a.$$

(22)-ből $b \cup c \geqq d$ és $b > a$ miatt $b \cup c \geqq d \cup a$, és megfordítva, (24)-ből $a \cup d \geqq b$ és $d > c$ miatt $a \cup d \geqq b \cup c$, amely egyenlőtlenségek (25)-öt adják. (21), (23) és (25) épp azt mutatják, hogy az $[a, b]$, $[a \cup c, b \cup c]$, $[c, d]$ intervallumok közül a szomszédosak transzponáltak, vagyis $[a, b]\pi[c, d]$, ami a bizonyítandó volt.

[9] Legtöbbször *intervallumok* projektivitásáról és transzponáltságáról szoktak írni, nekünk kényelmesebb a fenti terminológia.

Mellékeredményként azt kaptuk, hogy ha $[a, b]\pi[c, d]$, akkor már két lépésben eljuthatunk a, b-ből c, d-be.

B. BIZONYÍTÁSA több állításra bontható, melyek mindegyike teljes indukcióval bizonyítható, ezért a részletes okoskodást mellőzzük. Az $[a, b]$ intervallum maximális láncainak hosszát (ezek a hosszak megegyeznek) jelölje $l[a, b]$.

12. LEMMA: *A* B. *feltétel mellett*

(26) $$l[a, b] \geqq l[a \cup c, b \cup c] \text{ és } l[a, b] \geqq l[a \cap c, b \cap c],$$

és ha (26)*-ban egyenlőségjel áll, akkor a megfelelő intervallumok transzponáltak.*

BIZONYÍTÁSA $l[a, b]$-re vonatkozó teljes indukcióval történik.

13. LEMMA: *Ha* $\overline{a, b} \to \overline{c, d}$, *akkor*

(27) $$l[a, b] \geqq l[c, d].$$

BIZONYÍTÁSA (26)-ot felhasználva, a hozzárendelés lépésszámára vonatkozó teljes indukcióval végezhető el. Érdemes megjegyezni, hogy mind (26), mind (27) a lokálisan véges hálók körében jellemzi a modularitást.

A B. eset bizonyítása ezután a következőképpen fejezhető be: Ha a, b, c, d-re $(a<b, c<d)$ a (20) feltétel teljesül, akkor (27)-ből $l[a, b]=l[c, d]$; így a 12. LEMMÁból $[a, b]\pi[c, d]$ adódik.

Láthatjuk, hogy A.-ban a tétel állításánál általánosabb tételt bizonyítottunk:

7. A. TÉTEL: *Az L disztributív hálóban* $\Theta_{a,b} = \Theta_{c,d}$ *akkor és csak akkor érvényes, ha* $[a, b]$ *és* $[c, d]$ *projektívek.*

A disztributivitás ismételt alkalmazásából nyilvánvaló, hogy ha $\overline{a, b} \to \overline{c, d} (a < b, c < d)$, akkor alkalmas p és q elemekkel

(28) $$(a \cup p) \cap q = c$$

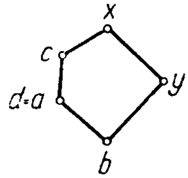
és

(29) $$(b \cup p) \cap q = d$$

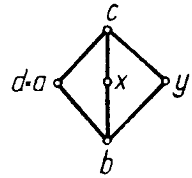
8. TÉTEL: *Az* $\overline{a, b} \to \overline{c, d}$ $(a < b, c < d; a, b, c, d \in L)$ *feltétel akkor és csak akkor ekvivalens* (28) *és* (29)*-cel, ha L disztributív.*

BIZONYÍTÁS: A disztributivitás nyilván elegendő feltétel. Kimutatjuk, hogy szükséges is.

Tegyük fel, hogy az L hálóban teljesül a tétel feltétele. Belátjuk, hogy $c \geqq b$ nem lehetséges. Ugyanis, ha $c \geqq b$, akkor $(a \cup p) \cap q \geqq b$, tehát $a \cup p \geqq b$, de ekkor $c = (a \cup p) \cap q = [a \cup (b \cup p)] \cap q = (b \cup p) \cap q = d$ $c < d$-vel ellentétben.



1. ábra



2. ábra

Ha L nem disztributív, akkor van az 1., vagy 2. ábrán látható részhálója; viszont az 1. esetben

$$[(a \cup y) \cap c] \cup a = c \text{ és}$$
$$[(b \cup y) \cap c] \cup a = d;$$

és a 2. esetben:

$$[(a \cup x) \cap y] \cup a = c \text{ és}$$
$$[(b \cup x) \cap y] \cup a = d$$

és így $d = a$, már pedig beláttuk, hogy $d \geqq a$ nem lehetséges. Ez az ellentmondás igazolja a disztributivitás szükségességét is.

IRODALOM

[1] G. Birkhoff: Lattice theory, *Amer. Math. Coll. Publ.*, **25**, Revised Edition (New-York, 1948).

[2] J. Hashimoto: Ideal Theory for Lattices, *Math. Japonicae*, **2** (1952) 149—186.

[3] N. Funayama and T. Nakayama: On the distributivity of a lattice of lattice-congruences, Proc. Imp. Acad Tokyo **18** (1942) 553—556.

[4] T. Tanaka: Canonical subdirect factorizations of lattices, *J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A.* **16** (1952) 239—246.

[5] Shih-Chiang Wang: On permutable congruence relations[10], 1953.

[6] Grätzer Gy. és Schmidt E. T.: Hálók ideáljai és kongruenciarelációi I., *Magyar Tud. Akad. III. Oszt. Közl.*, **7** (1957) 93—109.

Eötvös Loránd Tudományegyetem
III. év. alkalmazott-matematika szak.

(Beérkezett: 1957. VI. 7.)

[10] Ez a cikk kínai nyelven jelent meg, ezért nem idézzük a folyóirat címét.