CSOPORTOK ÉS GYŰRŰK HOLOMORFELMÉLETE

RÉDEI LÁSZLÓ

1. §. Bevezetés

Az algebra különböző ágai egymástól többé-kevésbbé függetlenül fejlődtek és csak az utóbbi időben észlelhető bizonyos céltudatos törekvés a fogalmilag összetartozó részek egységesítésére, mindenesetre azonban ebben a vonatkozásban még sok a tennivaló. Ennek az egységesítésnek egyik fontos eszköze analóg elméletek kiépítése a különböző területeken.

Dolgozatunkban egy új csoportelméleti analógiáról lesz szó, amely a *csoportoknak* már kész *holomorfelmélete* és a *gyűrűknek* itt kidolgozandó *holomorfelmélete* közt áll fenn. A csoportok holomorfelméletén a csoportelmélet azon részét értjük, amely elsősorban két, egymással szorosan összefüggő fogalommal, tudniillik valamely csoport karakterisztikus részcsoportjának és holomorfjának fogalmával foglalkozik, valamint az ezekkel nemkevésbbé szorosan összefüggő teljes csoport fogalmával. Ennek megfelelően a gyűrűk „holomorfelméletében" is a három analóg fogalom fog szerepelni. E fogalmak közül az első kettőt a gyűrű *karakterisztikus részgyűrűjének* ill. *holomorfjainak*[1] fogjuk nevezni (definíciójukat később fogjuk megadni.) Meglepetés lesz, hogy az említett harmadik csoportelméleti fogalom, a „teljes csoport" gyűrűelméleti analogonjaként az „egységelemes gyűrű" fog fellépni.[2]

Most még a következőt kívánjuk megjegyezni. Ismeretes, hogy bizonyos leképezések, mégpedig a homo-, izo-, auto-, endo- és meroforfizmusok az algebra minden ágában vezetőszerepet játszanak. Kutatásaink fontos részleteképpen ehhez az öt fogalomhoz (kizárólag gyűrűk esetében) egy hatodik, nemkevésbbé fontos fog csatlakozni. Ez a gyűrű önmagába való leképezéseiből alkotott bizonyos párokat fog jelenteni; egy ilyen leképezéspárt *duplahomote-*

[1] A „holomorfok" többesszám nem sajtóhiba! Ki fog ugyanis derülni, hogy ellentétben a csoport holomorfjának egyértelműségével, a gyűrűnek általában több holomorfja van. Ez — mint látni fogjuk — teljesen a dolog természetében rejlik, és bizonyára annak a körülménynek köszönhető, hogy a gyűrű fogalma összetettebb, mint a csoporté.

[2] Az egységelemes gyűrűk mindig is különösen fontos szerepet játszottak az összes gyűrűk között (pl. az oszthatóság kérdésében, az ideálelméletben, a lineáris algebrában stb.). Ez a különös fontosság formális magyarázatát természetesen abban leli, hogy az egységelem létezése jelentős számolásbeli egyszerűsödést okoz. Ezzel szemben a fenti analógiában az egységelemes gyűrűk fontos helyzetének mintegy *belső okát* látjuk. Ezeket a jövőben tulajdonképpen „teljes gyűrűknek" kellene neveznünk, ezt mégsem tesszük, javasoljuk azonban az olvasónak, hogy „egységelemes gyűrű" helyett mindenütt „teljes gyűrűt" is értsen.

tizmusnak fogunk nevezni. Mint látni fogjuk, a duplahomotetizmusok nemcsak a holomorfelméletben szerepelnek, hanem más, gyűrűkkel kapcsolatos kérdésekben is, és bármilyen hihetetlenül hangzik, a csoport automorfizmusainak analogonját alkotják.

Miután az eddigiekben röviden vázoltuk dolgozatunk tartalmát, most néhány megjegyzést kívánunk tenni a csoport- és gyűrűelméleti fogalmak analógiáját illetően.[3]

Γ és P mindenütt csoportot, ill. gyűrűt jelöl.

P^+ a P modulusát, vagyis a P elemeiből álló modulust jelenti.

A $\therefore$ B azt jelenti, hogy A és B analóg fogalmak, éspedig A csoportelméleti, B gyűrűelméleti.

Egyik legfontosabb ilyen analógia

$$\Gamma \text{ homomorfizmusa} \therefore P \text{ homomorfizmusa.} \tag{1}$$

Ezzel szorosan összefügg:

$$\Gamma \text{ faktorcsoportja} \therefore P \text{ faktorgyűrűje,}^{4}, \tag{2}$$

minthogy lényegében (vagyis izomorfiától eltekintve) a baloldalon Γ, a jobboldalon pedig P összes homomorf képei állnak.

(2) következtében fennáll a következő, szintén nagyon erős analógia:

$$\Gamma \text{ normálosztója} \therefore P \text{ ideálja,} \tag{3}$$

mert a faktorcsoportok és faktorgyűrűk az ismert módon megadhatók a normálosztók, ill. ideálok segítségével. A

$$\Gamma \text{ részcsoportja} \therefore P \text{ részgyűrűje} \tag{4}$$

analógia kevésbbé erős, mivel helyette gyakran a (mindenesetre gyengébb)

$$\Gamma \text{ részcsoportja} \therefore P \text{ részmodulusa,} \tag{5}$$

$$\Gamma \text{ részcsoportja} \therefore P \text{ egyoldali ideálja} \tag{6}$$

analógiák valamelyike lép fel, továbbá bizonyos kutatásokban (6) helyett az ugyancsak gyengébb

$$\Gamma \text{ normálosztója} \therefore P \text{ egyoldali ideálja} \tag{7}$$

analógia jut érvényre.

Látszólag

$$\Gamma \text{ automorfizmusa} \therefore P \text{ automorfizmusa} \tag{8}$$

ugyanolyan erős analógia, mint (1). Ha azonban figyelembe vesszük (3)-at és meggondoljuk, hogy Γ normálosztói úgy jellemezhetők, mint bizonyos (t. i. a belső) automorfizmusokkal szemben megengedett részcsoportok, míg P ideál-

[3] Természetesen mindig ízlés dolga, hogy az ember bizonyos fogalmakat analógoknak tekint-e, és ha igen, mennyire. Mikor tehát analógiáról beszélünk és esetleg annak fokát is megjelöljük („pontos, erős, gyenge" stb.), akkor ez mindig csak „felfogást" jelent.

[4] „Maradékosztálygyűrű" helyett „faktorgyűrűt" mondunk.

jainak automorfizmusokkal való hasonló jellemzése nem lehetséges,[5] akkor indokoltnak látszik lemondani a (8) analógiáról. A (8) analógia egy másik „gyengéje“, hogy míg minden, kettőnél több elemű csoportnak, mint ismeretes, vannak nemidentikus automorfizmusai, addig számos olyan gyűrű van, amely csupán egy (az identikus) automorfizmussal rendelkezik.[6] Már ebből is látszik, hogy (8) jobboldala nem játszhat ugyanolyan fontos szerepet, mint a baloldal, és tapasztalatból is tudjuk, hogy — ellentétben az automorfizmusok állandó alkalmazásával a csoportelméletben — gyűrűk automorfizmusairól nagyon ritkán esik szó.[7] Végül a (8) analógia ellen szól az is, hogy míg Γ automorfizmusai csoportot alkotnak, addig P automorfizmusai nem alkotnak gyűrűt: az előbbi miatt létezik „Γ Schreier-féle bővítése teljes automorfizmuscsoportjával“, az utóbbi miatt P számára nincs olyan analóg fogalom,[8] amely szintén P és teljes automorfizmuscsoportja által volna meghatározható.

Másrészt a gyűrű modulusának endomorfizmusai hasonlóan gyakori szerepet játszanak a gyűrűelméletben, mint a csoport automorfizmusai a csoportelméletben. Ezért

$$\Gamma \text{ automorfizmusa } \therefore \mathrm{P}^{+} \text{ endomorfizmusa} \tag{9}$$

bizonyos fokig az előbbiek alapján nagyon gyenge (8) analógia pótlásának tekinthető. Mindenesetre a (9) analógiát is gyengének kell tekintenünk, már csak azért is, mert (9) jobboldala általában a P-ban definiált szorzástól független.

Egyes esetekben ez mégsincs így, hiszen a

$$\varrho \to \alpha\varrho, \quad \varrho \to \varrho\alpha \qquad (\varrho \in \mathrm{P}) \tag{10}$$

leképezések minden $\alpha(\in \mathrm{P})$-ra P^{+} két endomorfizmusát definiálják. Ezeket *Bourbaki* [1][9] nyomán így nevezzük: P-nak α által indukált *belső bal- illetve jobb homotetizmusa.*[10] Röviden mindkettőt *belső homotetizmusnak* nevezzük. Akkor

[5] Csoportok belső automorfizmusainak egységelem nélküli gyűrű automorfizmusain belül egyáltalán nincs analogonja. (Erre csakhamar visszatérünk).

[6] Például az egész számok I gyűrűjének csak identikus automorfizmusa van. Tekintsük továbbá az I [x] polinomgyűrűt. Ennek magának, mint ismeretes, végtelen sok automorfizmusa van, éspedig összes automorfizmusai $x \to x + c$ és $x \to -x + c$ ($c \in$ I) alakban adhatók meg. Ha azonban $f(x)$ ($\in$ I [x]) olyan polinomot jelent, amelyre az összes $\pm f(\pm x + c)$ különböző, akkor az $f(x)$ I [x] gyűrűnek nyilvánvalóan csak identikus automorfizmusa van. Hasonlóan áll a dolog az $\{f^{-1}(x), \mathrm{I}(x)\}$ gyűrűvel. — Mind itt, mind később $\{\ldots\}$ a zárójelben levő elemek által generált (algebrai) struktúrát jelöli.

[7] Egyes speciális esetekben (mindenesetre nem sokban), így elsősorban bizonyos testek és ferdetestek esetében az automorfizmusok mégis rendkívül fontosak, pl. a *Galois*-elméletben. Mindazonáltal ezek a különleges esetek nem befolyásolják a fentebb mondottakat.

[8] Ezt a most még hiányzó analóg fogalmat később mégis meg fogjuk találni.

[9] A [ ] jellel a dolgozat végén elhelyezett irodalomjegyzékre hivatkozunk.

[10] Maga *Bourbaki* az „homothétie a gauche“, illetve „a droite“ kifejezéseket használja. E szerint „homotetizmus“ helyett „homotétiát“ kellene mondanunk, nekünk azonban jobban tetszik az „-izmus“ végződés például a homo-, izo-, automorfizmushoz való hasonlósága miatt.

a gyenge (9) analógia „része“ :[11]

Γ belső automorfizmusa $\therefore$ P belső homotetizmusa (11)

már erős analógiát képez. Valóban (11) jól összeillik (3)-mal, mivel egyrészt (mint már említettük) Γ normálosztói éppen a Γ összes belső automorfizmusaival szemben megengedett részcsoportok, másrészt P ideáljai hasonlóan éppen a P összes belső homotetizmusaival szemben megengedett részgyűrűk (lásd [5]).

Ezzel be is fejezzük a csoport- és gyűrűelméleti alapfogalmak közt fennálló, lényegében ismert analógiák felsorolását, amelyek számát még szaporíthatnánk, de célunkhoz, a későbbiek megvilágításához, elégséges az eddigi.

Most néhány újabb kutatásról kívánunk említést tenni, amelyekben a csoport- és gyűrűelmélet közti analógiák kiépítése történt.

Everett [3] kidolgozta a *Schreier*-féle bővítéselméletet gyűrűkre.[12] Ez a két analóg elmélet (a *Schreier*-féle és az *Everett*-féle) teljes egészében a (3) analógiára épül és a csoport- illetve gyűrűelmélet igen fontos részét alkotja.

Fuchs [4] a fontos *Frattini*-részcsoportok fogalmát kiterjesztette operátorcsoportokra, és kimutatta, hogy egységelemes P esetében P *Jacobson*-féle radikálja azonos P^+ *Frattini*-féle részcsoportjával, ha P belső jobbhomotetizmusait, mint P^+-on megadott operátorokat fogjuk fel.

Rédei [9], [10] a *Hamilton*-féle csoportok két különböző gyűrűelméleti analogonját vizsgálta (a második kutatás még befejezetlen).[13]

Az utóbbi két példával eltértünk tulajdonképpeni tárgyunktól, de most visszatérünk rá, éspedig megkíséreljük a gyenge (8) analógia helyett a baloldal megtartása mellett és a jobboldal megfelelő változtatásával egy erős analógia felállítását. Abból a fenti megjegyzésből indulunk ki, hogy (11) erős analógia. Célunk elérésére (11)-et úgy szándékozunk „kibővíteni“, hogy ez által megkapjuk a kívánt analógiát, ami már (11) „helyes“ általánosításának tekinthető. Mármost ez az általánosítás kézenfekvő olymódon, hogy (10)-ben az $\alpha(\in P)$ elem helyére egy P-t tartalmazó $\bar{P}$ gyűrű valamely a elemét helyettesítjük, amelyet azonban alávetünk annak a feltételnek, hogy az $a\varrho, \varrho a$ szorzatok P-ban feküdjenek, ami által valóban P-nak önmagába való leképezéseit nyerjük. Minthogy a mondott feltétel azt jelenti, hogy $\bar{P}$ a P gyűrűt mint

[11] (11)-et abban az értelemben nevezzük (9) részének, hogy (11) mindkét oldala (9) két oldalának speciálls esetét alkotja.

[12] A *Schreier*-féle bővítések elméletének alapjait illetően mindig *Rédei* [6]-hoz tartjuk magunkat. — Egyöntetűség kedvéért *Schreier*-féle bővítési gyűrűről fogunk beszélni *Everett*-féle helyett, valamint „*Schreier*-féle bővítési csoport“ és „*Schreier*-féle bővítési gyűrű“ helyett mindkét esetben röviden „*Schreier*-féle bővítést“ fogunk mondani, amennyiben ebből nem származhat félreértés.

[13] Mint ismeretes, egy csoportot akkor nevezünk *Hamilton*-félének, ha minden részcsoportja normális. A (3), valamint a (4), (5), (6) analógiák alapján három különböző gyűrűelméleti analogon definiálható, amelyek közül az első kettőt *Rédei* [10], [9] „bővebb értelemben vett teljesideálgyűrűnek“, illetve „teljesideálgyűrűnek“ nevezte.

ideált tartalmazza, vagyis $\bar{P}$ a P *Schreier*-féle bővítése, azért a következő definícióhoz jutunk:

Ha a a P valamely Schreier-féle bővítésének eleme, akkor a

$$\varrho \rightarrow a\varrho, \quad \varrho \rightarrow \varrho a \tag{12}$$

leképezéseket az a által indukált *bal-*, illetve *jobbhomotetizmusnak* nevezzük.[14] Röviden mindkettőt *homotetizmusoknak* is nevezzük. Világos, hogy a belső homotetizmusok valóban a homotetizmusok speciális esetei. P azon homotetizmusait, amelyek nem belsők, P *külső bal-*, illetve *jobbhomotetizmusainak* nevezzük.[15]

Továbbá a (12)-ben definiált két homotetizmus rendezett rendszerét így nevezzük: P-nak a által indukált *duplahomotetizmusa*.[16] Ha a a P-ban van, akkor P *belső duplahomotetizmusáról* beszélünk, míg P *külső duplahomotetizmusán* olyan duplahomotetizmust értünk, amely nem belső. (A 2. §-ban (30)—(33)-mal a duplahomotetizmusoknak egy másik, ekvivalens definícióját fogjuk adni.)

Mint azt már jóval előbb megjegyeztük, a duplahomotetizmusok számunkra nagy fontossággal fognak birni. Erre vonatkozólag mindenekelőtt megjegyezzük, hogy (11) helyett a még erősebb

$$\Gamma \text{ belső automorfizmusa} \therefore \text{P belső duplahomotetizmusa} \tag{13}$$

analógia sokkal hasznosabbnak fog bizonyulni. Egyrészt ugyanis a (11)-re vonatkozó megjegyzés érvényes (13)-ra is. Másrészt P belső duplahomotetizmusai — mint látni fogjuk — egyszerű műveleti szabályokkal rendelkező gyűrűt alkotnak, amely Γ belső automorfizmuscsoportja pontos analogonjának tekinthető. (Az utóbbihoz hasonló állitás (11)-re nem igaz.)

Fennáll továbbá (általánosabban mint (13)) a véleményünk szerint nagyon erős

$$\Gamma \text{ automorfizmusa} \therefore \text{P duplahomotetizmusa} \tag{14}$$

analógia, amelyet már előre jeleztünk; ezt tekintjük helyes analógiának a nagyon gyenge (8) analógia helyett, éspedig még sokkal több joggal mint (9)-et. Ennek a felfogásnak tulajdonképpeni igazolása későbbi vizsgálataink során fog kialakulni, itt megelégszünk néhány rövid megjegyzéssel.

[14] Nyilvánvaló általánosítás áll elő úgy, hogy a (12) leképezésekről csak azt tesszük fel, hogy a olyan gyűrű eleme, amelyik P-t bal-, illetve jobbideálként tartalmazza.

[15] *Bourbaki* [1] lényegesen eltérő értelemben „külső homotétiáról" (= homothétie externe) beszél, mégpedig ezen a P^+-nak olyan A endomorfizmusát érti, amelyre $A\alpha\beta = (A\alpha)\beta = \alpha(A\beta)$ teljesül. (Ezek az egyenletek az algebrák esetében szokásos „operátorfeltételeket" jelentik.) A P-nak két „külső homotétiája" általában nem alkot duplahomotétizmust.

[16] A duplahomotetizmus tehát egy-egy bal- és jobbhomotetizmusból áll, amelyek azonban nem tetszőlegesek, hanem mindkettő *egy* elem által indukálható, amint azt fent félreérthetetlenül megmondtuk.

Mint ismeretes, Γ összes automorfizmusai (és csak ezek) úgy nyerhetők, mint a Γ *Schreier*-féle bővítéseinek a elemei által meghatározott

$$\varrho \to a^{-1}\varrho a \qquad (\varrho \in \Gamma)$$

leképezések. Ennek a definíciónak a duplahomotetizmusokéval való analógiája szembeötlő.

Ellentétben a P automorfizmusairól mondottakkal (lásd [6]) $P \neq 0$ esetén P-nak mindig legalább két duplahomotetizmusa van. Ebben az esetben ugyanis mindig létezik a *triviális* és az *identikus duplahomotetizmus;* így nevezzük azt a két speciális esetet, amikor minden ϱ elemre az $a\varrho$, ϱa képelemek egyenlők 0-sal, illetve ϱ-val.[17]

A duplahomotetizmusok (hasonlóan a belsőkhöz) egyszerű szabályok szerint egymással összeadhatók és szorozhatók lesznek. Jóllehet P összes duplahomotetizmusainak halmaza az általános esetben nem alkot gyűrűt, de ez a halmaz tartalmaz bizonyos gyűrűket, amelyek P-val kapcsolatban hasonló szerepet játszanak mint Γ teljes automorfizmuscsoportja, s ezért ezen csoport (pontos) gyűrűelméleti analogonjának tekinthetők. Az említett gyűrűket arra fogjuk felhasználni, hogy P bizonyos *Schreier*-féle bővítéseit képezzük velük, amire már [8] alatt utaltunk; ezek a bővítések lesznek P holomorfjai.

Jegyezzük meg végül, hogy amint a normálosztók és ideálok a (11) vagy (13) analogiával állnak kapcsolatban, hasonlóképpen a karakterisztikus részcsoportok és -gyűrűk a (14) analógiával fognak összefüggeni.

Dolgozatunk hátralevő része a következőképpen tagozódik:

A 2. §-ban néhány előkészületet végzünk.

A 3. §-ban a csoportok holomorfelméletének lényegében ismert alapjait célunknak megfelelő formában állítjuk össze.

A 4. §-ban következik az analóg elmélet megalapozása gyűrűkre.

Az 5. §-ban speciális esetként megvizsgáljuk az egységelemes gyűrűket (mint a teljes csoportok analogonját).

A 6. §-ban néhény további speciális esettel foglalkozunk.

Bár főként gyűrűelméletről lesz szó, némi ujdonságot a csoportelméletben is fogunk nyerni.[18]

[17] Az előbbi esetet nyerjük, ha (12)-ben $a = 0$. Az utóbbi eset is lehetséges, tudniillik úgy, hogy (12)-ben a számára P-nak egy alkalmas *Schreier*-féle bővítéséből az egységelemet vesszük; ilyen bővítés, mint ismeretes, mindig létezik. Még megjegyezzük, hogy P triviális duplahomotetizmusa mindig belső, viszont az identikus akkor és csak akkor belső ha P egységelemes.

[18] Ezen dolgozat főproblémája — a holomorfelmélet kidolgozása gyűrűkre — *Steinfeld Ottó* aspiránsommal folytatott megbeszélés alkalmával merült fel bennem. Ő és *Fuchs László, Pollák György, Szendrei János,* továbbá *Kalmár László, Szele Tibor* professzorok hasznos megjegyzéseikkel hozzájárultak munkám végleges összeállításához, amiért őszinte köszönetet mondok nekik.

2. §. Előkészületek

Az első paragrafusban bevezetett $\Gamma, \mathrm{P}, \mathrm{P}^+$ jelöléseken kívül bevezetjük még a következő állandó jelöléseket:

$\alpha, \beta, \ldots$ a Γ, illetve P tetszőleges elemeit jelölik aszerint, amint csoportokról vagy gyűrűkről lesz szó. Ezen belül ε a Γ vagy P egységelemét jelöli, az utóbbit természetesen csak akkor, ha P egységelemes gyűrű.

Γ_*, P_* jelölik Γ centrumát, illetőleg P annullátorát. Ez utóbbi azon ν elemekből álló ideál, amelyekre $\nu\mathrm{P} = \mathrm{P}\nu = 0$. A hasonló Γ_*, P_* jelöléseket azért alkalmazzuk, mert ((14)-gyel összefüggésben) tapasztalni fogjuk, hogy fennáll a

$$(\Gamma_* =)\Gamma \text{ centruma } \therefore (\mathrm{P}^* =)\mathrm{P} \text{ annullátora} \qquad (15)$$

erős analógia.[19]

α_* jelöli a Γ/Γ_* faktorcsoport, illetve a P/P_* faktorgyűrű α által reprezentált elemét, tehát az $\alpha\Gamma_*$, illetve $\alpha+\mathrm{P}_*$ osztályt.

$X < Y$ vagy azt jelöli, hogy X és Y csoportok, s X az Y részcsoportja, vagy azt, hogy gyűrűk és X az Y részgyűrűje.

$X \lhd Y$ azt jelöli, hogy $X < Y$ és X normális[20] Y-ban.

$X \blacktriangleleft Y$ azt jelöli, hogy $X < Y$ és X karakterisztikus[21] Y-ban.

$a, b, \ldots$-vel vagy Γ-nak önmagába való leképezéseit jelöljük, vagy P-nak önmagába való rendezett leképezéspárjait, röviden P-nak önmagába való *duplaleképezéseit.* Pontosabban szólva P-nak önmagába való duplaleképezésén P két önmagába való leképezésének egy rendszerét értjük. E két leképezést a *duplaleképezés első,* illetve *második alkatrészének* nevezzük.

e a Γ-nak önmagába való identikus leképezését jelöli, illetve P-nak (két identikus leképezéséből álló) *identikus duplaleképezését,* aszerint amint Γ-ról vagy P-ról beszélünk.

Γ-nak valamely önmagába való a leképezése esetén az α-nak megfelelő képet α^a-val jelöljük. E szerint a nem egyéb mint az $\alpha \to \alpha^a$ leképezés. E leképezések halmazában az ab szorzatot úgy definiáljuk mint a halmaz azon elemét, amelyre

$$\alpha^{ab} = (\alpha^a)^b. \qquad (16)$$

P-nak valamely önmagába való a duplaleképezése esetén az α-nak megfelelő két képet $a\alpha$-val, illetve αa-val jelöljük, így a az $\alpha \to a\alpha, \alpha \to \alpha a$ leképezésekből áll (ebben a sorrendben). E duplaleképezések halmazában az

[19] Ezzel szemben a

$$\Gamma \text{ centruma } \therefore \mathrm{P} \text{ centruma}$$

analógiát nagyon gyengének kell neveznünk.

[20] Részgyűrűt akkor nevezünk normálisnak, ha ideál. Az „$X \lhd Y$" jelölés más szóval azt jelenti, hogy Y az X *Schreier*-féle bővítése (tetszésszerinti Y/X faktorstruktúrával).

[21] A karakterisztikus részgyűrűt azonban majd csak a 4. §-ban definiáljuk.

$a+b$ összeget és az ab szorzatot a következőképpen definiáljuk:

$$(a+b)\alpha = a\alpha + b\alpha, \qquad \alpha(a+b) = \alpha a + \alpha b, \tag{17}$$

$$ab\alpha = a(b\alpha), \qquad \alpha(ab) = (\alpha a)b.^{22} \tag{18}$$

Γ illetve P egyik H részhalmaza esetén a H^a illetve aH, Ha képeken szokás szerint a H-beli elemek megfelelő képeinek halmazát értjük.

Aszerint hogy Γ leképezéseinek illetve P duplaleképezéseinek egy M halmazáról lesz szó, megengedettnek fogjuk nevezni Γ illetve P valamely H részhalmazát, ha $H^a \subseteq H$ illetve $aH, Ha \subseteq H$ $(a \in M)$.

Egyébként pedig Γ összes önmagába való leképezései közül csak az automorfizmusokat fogjuk tekinteni. Ezek a (16) alatt definiált szorzásra nézve csoportot alkotnak, *Γ teljes automorfizmuscsoportját.* E csoport részcsoportjait röviden Γ automorfizmuscsoportjainak nevezzük.

Továbbá P összes duplaleképezései közül csak azokkal lesz dolgunk, amelyek P$^+$ két endomorfizmusából állnak. Ezeket P$^+$ *duplaendomorfizmusainak* nevezzük. A (12) definíció szerint ezeknek további speciális esetei a P duplahomotetizmusai. Később minket csak ez a speciális eset fog érdekelni, mégis az általános esettel is röviden foglalkoznunk kell.

E célból jelöljük egy pillanatra R-rel P$^+$ teljes endomorfizmusgyűrűjét. Ezt szokás szerint úgy értjük, hogy R két A, B elemének a szorzatát $AB\alpha = A(B\alpha)$-val definiáljuk. R'-vel jelöljük R inverz gyűrűjét, amelyet ugyanis R-ből úgy kapunk, hogy az AB szorzásról a BA inverz szorzásra térünk át. (17) és (18) alapján rögtön belátható, hogy P$^+$ összes *duplaendomorfizmusai* gyűrűt alkotnak, amelyet P$^+$ *teljes duplaendomorfizmusgyűrűjének* nevezünk, és hogy ez P$^+$ teljes endomorfizmusgyűrűjének és az ehhez inverz gyűrűnek direkt összege.[23] Itt egyszersmindenkorra megjegyezzük, hogy P minden később fellépő duplahomotetizmusgyűrűje P$^+$ teljes duplaendomorfizmusgyűrűjének részgyűrűje lesz.

Folytatjuk az előkészületeket és most már két esetet különböztetünk meg:

Γ eset:

Ha A a Γ-nak valamely automorfizmuscsoportja (nem szükségképpen a teljes automorfizmuscsoport), akkor az összes

$$(a, \alpha) \qquad (a \in A, \alpha \in \Gamma) \tag{19}$$

párok halmazában a szorzatot így definiáljuk:

$$(a, \alpha)(b, \beta) = (ab, \alpha^b \beta). \tag{20}$$

[22] Ha $ab\alpha\beta$-t vagy $\alpha\beta ab$-t írunk, azon $(ab)(\alpha\beta)$-t illetve $(\alpha\beta)(ab)$-t értünk. A (18) egyenletek baloldalát is így kell érteni.

[23] Jegyezzük meg, hogy P$^+$ duplaendomorfizmusgyűrűjének fogalma nem függ a P-ban értelmezett szorzástól (tehát P$^+$ helyett bármely modulusra is van értelme).

Így (16) miatt csoportot kapunk, amelynek egységeleme (e, ε). E csoportot

$$A \cdot \Gamma \tag{21}$$

-val jelöljük. Ez a csoport ugyanis (lásd *Rédei* [6] 1. tétel 1 korolláriuma 260. oldal) Γ-nak A-val való faktormentes (tehát széteső) *Schreier*-féle bővítése, amelyet ezért röviden így nevezünk: *Γ-nak A-hoz tartozó széteső bővítése.*[24] Ebben az (e, α) elemek Γ-val izomorf normálosztót alkotnak, ezért a szokásos $(e, \alpha) \to \alpha$ beágyazást rendesen elvégzettnek tekintjük, aminek következtében teljesül:

$$\Gamma \lhd (A \cdot \Gamma) \tag{22}$$

Ha A speciálisan *belső automorfizmuscsoport* (tudniillik belső automorfizmusokból álló csoport), akkor a (21) csoportnak explicitebb alakot adhatunk. E célból tekintsük Γ-nak α által meghatározott

$$\varrho \to \alpha^{-1} \varrho \alpha \tag{23}$$

belső automorfizmusát. Ez csak az $\alpha_* = \alpha \Gamma_*$ osztálytól függ, s e miatt hozzárendelhetjük ehhez az osztályhoz. Ez a hozzárendelés megfordítva is egyértelmű. E miatt (23)-at „α_* automorfizmusnak" is nevezhetjük és α_*-gal jelölhetjük, anélkül hogy ebből félreértés származnék. Ekkor

$$\varrho^{\alpha_*} = \alpha^{-1} \varrho \alpha, \tag{24}$$

továbbá a (16)-nak megfelelő $\varrho^{\alpha_* \beta_*} = (\varrho^{\alpha_*})^{\beta_*}$ feltétel is teljesül. Következésképpen a megadott hozzárendelés izomorfizmus a Γ/Γ_* faktorcsoport és Γ *teljes belső automorfizmuscsoportja* között; utóbbin Γ összes belső automorfizmusainak csoportját értjük. Ezt tehát a megfelelő elemek azonosítása után egyszerűen Γ/Γ_*-gal jelölhetjük. E szerint fenti A megadható, mint a Γ/Γ_* tetszőleges részcsoportja. Akkor $A \cdot \Gamma$ az

$$(\alpha_*, \beta) \qquad (\alpha_* \in A \subseteq (\Gamma/\Gamma_*), \quad \beta \in \Gamma) \tag{25}$$

elemekből áll, és a szorzásszabály (20) és (24) alapján

$$(\alpha_*, \beta)(\gamma_*, \delta) = (\alpha_* \gamma_*, \gamma^{-1} \beta \gamma \delta), \tag{26}$$

ahol a jobboldalon γ helyében a γ_* osztály tetszőleges reprezentánsát kell érteni.

Ha e mellett Γ centrummentes (vagyis $\Gamma_* = \varepsilon$), akkor $\Gamma/\Gamma_* = \Gamma$, $\alpha_* = \alpha$ írható. Ennek megfelelően (25), (26) alapján az $A \cdot \Gamma$ csoport elemei és szorzásszabálya most

$$(\alpha, \beta) \qquad (\alpha \in A \subseteq \Gamma, \beta \in \Gamma), \tag{27}$$

$$(\alpha, \beta)(\gamma, \delta) = (\alpha\gamma, \gamma^{-1} \beta \gamma \delta) \tag{28}$$

alakban adhatók meg.

[24] Vegyük észre, hogy Γ-nak A-val általában több, lényegesen különböző széteső *Schreier*-féle bővítése lehetséges, hiszen ide tartozik többek közt A és Γ direkt szorzata is, de a (21) csoport A és Γ által egyértelműen meg van határozva.

Kimutatjuk azt is, hogy $A \cdot \Gamma$ ebben az esetben direkt szorzat:

$$A \cdot \Gamma \approx A \otimes \Gamma, \tag{29}$$

ahol „$\approx$“, „$\otimes$“ az izomorfia, illetve a direkt szorzat jele. Ehhez segítségül vesszük $A \cdot \Gamma$ elemeinek

$$(\alpha, \beta) \to \Pi(\alpha, \beta) = (\alpha, \alpha\beta)$$

permutációját és (28)-ról az új

$$(\alpha, \beta) \times (\gamma, \delta) = \Pi(\Pi^{-1}(\alpha, \beta)\, \Pi^{-1}(\alpha, \delta))$$

szorzásra térünk át. A jobboldal $\Pi^{-1}(\alpha, \beta) = (\alpha, \alpha^{-1}\beta)$ és (28) miatt:

$$\Pi((\alpha, \alpha^{-1}\beta)(\gamma, \gamma^{-1}\delta)) = \Pi(\alpha\gamma, \gamma^{-1}\alpha^{-1}\beta\delta) = (\alpha\gamma, \beta\delta).$$

Ebből következik (29) (l. *Rédei* [8] 2. §).

P eset:

Itt az előbbiekkel analóg előkészületeket akarunk végezni. Ebből a célból legkényelmesebben úgy járunk el, hogy egyelőre figyelmen kívül hagyjuk a duplahomotetizmusok (12) alatti definícióját és helyette a következő definícióból indulunk ki, amelyről később ki fogjuk mutatni, hogy ekvivalens a fentivel.[25]

P duplahomotetizmusán P-nak olyan önmagába való a duplaleképezését értjük, amely a következő tulajdonságokkal bir:

$$a(\alpha+\beta) = a\alpha + a\beta, \qquad (\alpha+\beta)a = \alpha a + \beta a, \tag{30}$$

$$a\alpha\beta = (a\alpha)\beta, \qquad \alpha\beta a = \alpha(\beta a), \tag{31}$$

$$(\alpha a)\beta = \alpha(a\beta), \tag{32}$$

$$(a\alpha)a = a(\alpha a). \tag{33}$$

(30) miatt P minden duplahomotetizmusa P^+-nak duplaendomorfizmusa. Ennek megfelelően P valamely duplahomotetizmusgyűrűjén mindig P^+, teljes duplaendomorfizmusgyűrűjének olyan részgyűrűjét értjük, amely P duplahomotetizmusaiból áll. Mármost P összes duplahomotetizmusai, mint azt már az 1. §-ban említettük, általában véve nem alkotnak gyűrűt. Ezt csak a 6. §-ban fogjuk látni (ez nem sürgős). Első tájékozódásképpen azonban már most kimutatjuk a következőt:

P-nak két a, b duplahomotetizmusára nézve $a+b$ akkor és csak akkor P-nak duplahomotetizmusa, ha teljesül az

$$(a\alpha)b + (b\alpha)a = a(\alpha b) + b(\alpha a) \tag{34}$$

feltétel.

Tudjuk ugyanis, hogy $a+b$ mindenesetre P^+ duplaendomorfizmusa, tehát (30) teljesül $a+b$-re. (17) miatt az is világos, hogy (31), (32) a-val és b-vel

[25] Ez a „második" definíció inkább összhangban van Γ automorfizmusainak szokásos definíciójával és explicitebb, viszont fogalmilag nem olyan egyszerű, mint a (12) alatti „első" definíció.

együtt $a+b$-re is teljesül. Ahhoz tehát, hogy $a+b$ duplahomotetizmus legyen, szükséges és elegendő, hogy (33) teljesüljön $a+b$-re. Ez a feltétel így szól:

$$((a+b)\alpha)(a+b)=(a+b)(\alpha(a+b)).$$

Ez (33) és a hozzá hasonló, b-re vonatkozó egyenlet, valamint (17) miatt a (34) alakra hozható s ezzel állításunkat bebizonyítottuk.

Az imént nyert (34) kritérium azonban figyelmen kívül fog maradni, mert (szerencsére) egyidejüleg P-nak csak olyan a, b duplahomotetizmusaival lesz dolgunk, amelyekre teljesül az

$$(a\alpha)b=a(\alpha b), \qquad (b\alpha)a=b(\alpha a) \tag{35}$$

feltétel; P-nak két a, b duplahomotetizmusát, amelyek ezzel a (35) tulajdonsággal bírnak, *barátságosnak* nevezzük.[26] Továbbá P *barátságos duplahomotetizmusainak egy halmazán* vagy *gyűrűjén* P páronként barátságos duplahomotetizmusaiból álló halmazt illetve gyűrűt értünk. Bennünket (P összes duplahomotetizmusainak halmazából) főként P barátságos duplahomotetizmusainak gyűrűi fognak érdekelni. Következő célunk ezekről áttekintést nyerni.

Mivel (35) $a=b$ esetén (33)-ba megy át, azért mindenekelőtt azt látjuk, hogy P minden duplahomotetizmusa barátságos sajátmagával, vagyis már önmagában P barátságos duplahomotetizmusainak egyik (egy elemből álló) halmazát képezi. Éppen ez biztosítja P barátságos duplahomotetizmusai halmazainak létezését.

Fontos, hogy P *barátságos duplahomotetizmusainak minden halmaza része egy ugyanilyen maximális*[27] *halmaznak.*

Ha ugyanis $M_1 \subset M_2 \subset \ldots$ a P gyűrű barátságos duplahomotetizmusai halmazainak egy végtelen lánca, akkor világos, hogy $M_1, M_2, \ldots$ egyesítési halmaza is P barátságos duplahomotetizmusainak egy halmaza. Ebből *Zorn* lemmája szerint következik az állítás helyessége.

Kimutatjuk továbbá, hogy P *barátságos duplahomotetizmusainak valamely* M *halmaza által generált* $\{M\}$ *gyűrű mindig* P *barátságos duplahomotetizmusainak egy gyűrűje.*

Mindenekelőtt ugyanis $\{M\}$, mint tudjuk, P^+ teljes duplaendomorfizmusgyűrűjének részgyűrűje. Az állítás hátralévő részének bizonyítása céljából nevezzük P^+ duplaendomorfizmusai valamely M halmazának egy tulajdonságát permanensnek, ha ezzel a tulajdonsággal az $\{M\}$ gyűrű elemeinek halmaza is bír. Mármost (17), (18) miatt indukcióval következik, hogy az M halmaz összes a elemeiről, illetve összes a, b elempárjairól feltételezett (31), (32), (35)[28] egyenletek csupa permanens tulajdonságot fejeznek ki. Ezzel állításunkat igazoltuk.

[26] A fenti definíció jelentősége abban áll, hogy — amint később látni fogjuk — két duplahomotetizmus akkor és csak akkor barátságos, ha P-nak egyugyanazon *Schreier*-féle bővítésébe tartozó elemek által indukálhatók. — Mivel (34) következik (35)-ből, azért a fentiek szerint mindenesetre igaz, hogy P két a, b barátságos duplahomotetizmusának $a+b$ összege is duplahomotetizmus. Ezt az eredményt a későbbiek túl fogják haladni.

[27] A „maximális" szót mindig a szokásos halmazelméleti értelemben használjuk.

[28] (33)-ról nem kell külön beszélni, mivel azt (35) már tartalmazza.

P barátságos duplahomotetizmusainak minden maximális halmaza gyűrűt alkot, ezeket a gyűrűket P *barátságos duplahomotetizmusai maximális gyűrűinek nevezzük.*

Ha ugyanis M a P barátságos duplahomotetizmusainak egy maximális halmaza, akkor $\{M\}$ az előbbiek szerint P barátságos duplahomotetizmusainak egy gyűrűje. Minthogy azonkívül $M \subseteq \{M\}$, azért M maximális voltából következik az $M = \{M\}$ egyenlőség, vagyis az állítás helyessége.

A fentiekből az is következik, hogy P *barátságos duplahomotetizmusainak minden gyűrűje (sőt minden halmaza) legalább egy ugyanilyen maximális gyűrűnek része.*

Tekintsük mármost P barátságos duplahomotetizmusainak egy tetszésszerinti (nem feltétlenül maximális) D gyűrűjét. Ismételjük, hogy ez (17), (18), (30), (31), (32), (35)[28] szerint azt jelenti, hogy D a P duplaleképezéseinek olyan gyűrűje, amely a következő tulajdonságokkal bír:

$$a(\alpha+\beta) = a\alpha + a\beta, \qquad (\alpha+\beta)a = \alpha a + \beta a, \tag{36}$$

$$(a+b)\alpha = a\alpha + b\alpha, \qquad \alpha(a+b) = \alpha a + \alpha b, \tag{37}$$

$$a\alpha\beta = (a\alpha)\beta, \qquad \alpha\beta a = \alpha(\beta a), \tag{38}$$

$$ab\alpha = a(b\alpha), \qquad \alpha ab = (\alpha a)b, \tag{39}$$

$$(\alpha a)\beta = \alpha(a\beta), \tag{40}$$

$$(a\alpha)b = a(\alpha b), \tag{41}$$

ahol $a, b \in D$ és $\alpha, \beta \in$ P.

Minden ilyen D gyűrűre az összes

$$(a, \alpha) \qquad (a \in D, \alpha \in \mathrm{P}) \tag{42}$$

párok halmazában definiálunk két műveletet (összeadást és szorzást):

$$(a, \alpha) + (b, \beta) = (a+b, \alpha+\beta), \quad (a, \beta)(b, \beta) = (ab, \alpha b + a\beta + \alpha\beta). \tag{43}$$

Így *Rédei* [6] 4. tétel és korolláriuma[29] értelmében előáll P-nak egy D-vel való faktormentes (tehát széteső) *Schreier*-féle bővítése, amelyet

$$D \cdot \mathrm{P} \tag{44}$$

-val jelölünk és így nevezzük: P-*nak D-hez tartozó széteső bővítése.*[30] Ebben a gyűrűben a $(0, \alpha)$ elemek egy P-val izomorf ideált alkotnak, aminek megfelelően a $(0, \alpha) \to \alpha$ beágyazást rendesen elvégzettnek tekintjük, s ez által

$$\mathrm{P} \lhd (D \cdot \mathrm{P}) \tag{45}$$

teljesül.[31]

[29] Kijavítjuk a fentebb idézett korollárium szembeszökő hibáját, éspedig az ottani (56)—(60) feltételeket ki kell egészíteni a következőkkel:

$$ab\gamma = a(b\gamma), \quad \alpha bc = (\alpha b)c.$$

[30] Mutatis mutandis a [24] megjegyzés itt is érvényes.

[31] Már a fentiekből látható a duplahomotetizmusok jelentősége különösen a *Schreier*-féle bővítések elméletével kapcsolatban. Lényegében a duplahomotetizmusok (külön elnevezés nélkül) már *Rédei* [7] 2. tételben is szerepeltek.

Itt iktatjuk be annak bizonyítását, hogy a duplahomotetizmusok (12), illetve (30)—(33) által megadott definíciói ekvivalensek. Ezeket a definíciókat röviden mint első, illetve második definíciót különböztetjük meg.

A bizonyítás céljából legyen először a a P-nak duplahomotetizmusa az első definícó értelmében. Ez (12) szerint azt jelenti, hogy van egy $\bar{P}$ gyűrű, amelyre $P \lhd \bar{P}$, és ennek egy olyan $\bar{a}$ eleme, amelyre

$$a\alpha = \bar{a}\alpha, \quad \alpha a = \alpha\bar{a}. \tag{46}$$

(A jobboldalak a $\bar{P}$-beli közönséges szorzást jelentik.) Mármost (30)—(33) a-ra triviális módon teljesül. Következésképpen a a P-nak olyan duplaleképezése, amelyre (46) miatt (30)—(33) teljesül s így a második definíció értelmében is P-nak duplahomotetizmusa.

Megfordítva, jelentsen most a duplahomotetizmust az utóbbi értelemben. Akkor a benne van P barátságos duplahomotetizmusainak egy D maximális gyűrűjében. (Egyébként D helyett az $\{a\}$ gyűrű is megfelelne.) Segítségül vesszük a (44) gyűrűt, amelyben most a $(0, \alpha) \to \alpha$ beágyazást egyelőre nem végezzük el. Ebben a gyűrűben a $(0, \alpha)$ elemek egy P_1 ideált alkotnak. Ezért (44) $(a, 0)$ eleme P_1-nek duplahomotetizmusát indukálja az első definíció értelmében, amelynek alkatrészei (12) szerint a

$$(0, \varrho) \to (a, 0)(0, \varrho), \quad (0, \varrho) \to (0, \varrho)(a, 0)$$

leképezések. E helyett (43_2) alapján írhatjuk:

$$(0, \varrho) \to (0, a\varrho), \quad (0, \varrho) \to (0, \varrho a).$$

Ez a beágyazás után éppen (12)-be megy át, s ezzel kimutattuk, hogy a az első definíció értelmében is P-nak duplahomotetizmusa. Ezzel igazoltuk a duplahomotetizmusok két definíciójának ekvivalenciáját.

(36)—(41)-ből világos, hogy P összes belső duplahomotetizmusai P barátságos duplahomotetizmusainak egyik gyűrűjét alkotják, amelyet röviden P *teljes belső duplahomotetizmusgyűrűjének* fogunk nevezni.

Ha D a P-nak *belső duplahomotetizmusgyűrűje,* amin az előbbinek tetszőleges részgyűrűjét értjük, akkor a (44) gyűrűnek explicitebb alakot adhatunk. E célból tekintsük P-nak α által indukált (belső) duplahomotetizmusát, amely tehát a

$$\varrho \to \alpha\varrho, \quad \varrho \to \varrho\alpha \tag{47}$$

leképezésekből áll. Ez nyilván csak az $\alpha_* = \alpha + P_*$ osztálytól függ, azért hozzárendelhetjük ehhez az α_* osztályhoz. Ez a hozzárendelés fordítva is egyértelmű. Ezért (47)-et „α_* duplahomotetizmusnak" nevezhetjük és α_*-gal jelölhetjük. Akkor

$$\alpha_*\varrho = \alpha\varrho, \quad \varrho\alpha_* = \varrho\alpha. \tag{48}$$

Ezenkívül az említett hozzárendelés izomorfizmus a P/P_* faktorgyűrű és P teljes belső duplahomotetizmusgyűrűje közt, miértis az utóbbit a megfelelő elemek azonosítása után egyszerűen P/P_*-gal jelölhetjük. Tehát a jelenlegi D mint

P/P_* tetszőleges részgyűrűje adható meg. Akkor $D\cdot\mathsf{P}$ az

$$(\alpha_*, \beta) \qquad (\alpha_* \in D \subseteq \mathsf{P}/\mathsf{P}_*, \beta \in \mathsf{P}) \tag{49}$$

elemekből áll és (43), (48) szerint műveleti szabályokul

$$(\alpha_*, \beta)+(\gamma_*, \delta)=(\alpha_*+\gamma_*, \beta+\delta), \quad (\alpha_*, \beta)(\gamma_*, \delta)=(\alpha_*\gamma_*, \alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta) \tag{50}$$

szolgálnak, ahol a második egyenlet jobboldalán az α_*, γ_* maradékosztályok tetszőleges α, illetve γ reprezentánsa veendő.

Ha e mellett P *annullátormentes* (vagyis $\mathsf{P}_*=0$), akkor $\mathsf{P}/\mathsf{P}_*=\mathsf{P}$, $\alpha_*=\alpha$ írható. Ennek megfelelően ilyenkor a $D\cdot\mathsf{P}$ gyűrű elemei és műveleti szabályai (49), (50) szerint

$$(\alpha, \beta) \qquad (\alpha \in D \subseteq \mathsf{P}, \beta \in \mathsf{P}), \tag{51}$$

$$(\alpha, \beta)+(\gamma, \delta)=(\alpha+\gamma, \beta+\delta), \quad (\alpha, \beta)(\gamma, \delta)=(\alpha\gamma, \alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta) \tag{52}$$

által adhatók meg.

Most kimutatjuk, hogy ebben az esetben $D\cdot\mathsf{P}$ direkt összeg:[32]

$$D\cdot\mathsf{P} \approx D \oplus \mathsf{P}, \tag{53}$$

ahol „$\oplus$" a direkt összeget jelöli. Ebből a célból vesszük $D\cdot\mathsf{P}$ elemeinek

$$(\alpha, \beta) \to \Pi(\alpha, \beta)=(\alpha, \alpha+\beta)$$

permutációját és (52)-ről a következő új szorzásra térünk át:

$$(\alpha, \beta)\times(\gamma, \delta)=\Pi(\Pi^{-1}(\alpha, \beta)\,\Pi^{-1}(\gamma, \delta)).$$

A jobboldal $\Pi^{-1}(\alpha, \beta)=(\alpha, -\alpha+\beta)$ és (52_2) miatt

$$\Pi((\alpha, -\alpha+\beta)(\gamma, -\gamma+\delta))=\Pi(\alpha\gamma, -\alpha\gamma+\beta\delta)=(\alpha\gamma, \beta\delta).$$

Minthogy továbbá (52_1) a hasonló „transzformációval" szemben invariáns, azért következik (53) (l. *Rédei* [8] 2. §).

3. §. A csoportok holomorfelméletének alapjai

Itt a csoport karakterisztikus részcsoportjaira és holomorfjára vonatkozó ismert definíciókat és tételeket gyűjtjük össze:

1_0 definíció. *A Γ csoport Γ' részcsoportját karakterisztikusnak nevezzük, ha Γ' a Γ valamennyi Schreier-féle bővítésében normális.* (Jelekben: $\Gamma' \blacktriangleleft \Gamma$ azt jelenti, hogy $\Gamma' < \Gamma$ és hogy $\Gamma \lhd \bar{\Gamma}$-ból mindig következik $\Gamma' \lhd \bar{\Gamma}$.)

1_0 tétel. (A karakterisztikus részcsoportok első kritériuma.) *A Γ csoport Γ' részcsoportja akkor és csak akkor karakterisztikus, ha Γ' a Γ valamennyi automorfizmusával szemben megengedett.*[33]

[32] Erre *Szendrei János* hívta fel a figyelmemet, s ezután figyeltem fel (29)-re is.

[33] Vagyis Γ minden a automorfizmusára $\Gamma'^a \subseteq \Gamma'$. Mivel a^{-1} is Γ automorfizmusa, azért ez a feltétel azt jelenti, hogy $\Gamma'^a=\Gamma'$ minden a-ra teljesül, azaz Γ' invariáns Γ minden automorfizmusával szemben. Az 1_0 tétel miatt tehát kiindulhatunk ebből a tulajdonságból is mint definícióból, amint ez az irodalomban szokásos, és akkor az 1_0 definíció tétellé válik. A definíciónak és tételnek általunk végzett megcserélése teljesen jogos, s a 4. §-ban hasznosnak fog bizonyulni.

2_0 **definíció.** *A Γ csoport holomorfján Γ-nak teljes A automorfizmus-csoportjához tartozó $A \cdot \Gamma$ széteső bővítését értjük.*[34]

2_0 **tétel.** (A karakterisztikus részcsoportok második kritériuma.) *A Γ csoport Γ' részcsoportja akkor és csak akkor karakterisztikus, ha Γ' a Γ holomorfjában normális.*

Az 1_0, 2_0 tételek bizonyítását illetően a tankönyvekre hivatkozunk.

4. §. A gyűrűk holomorfelméletének alapjai

Az 1_0 definícióhoz hasonlóan definiáljuk a következőt;[35]

1. Definíció. *A P gyűrű P' részgyűrűjét karakterisztikusnak nevezzük, ha P' a P valamennyi Schreier-féle bővítésében normális (vagyis ideál).* (Jelekben: $P' \blacktriangleleft P$ azt jelenti, hogy $P' < P$ és hogy $P \lhd \bar{P}$-ból mindig következik $P' \lhd \bar{P}$.)

Megjegyzés. Ezek szerint minden karakterisztikus részgyűrű ideál, amint-hogy minden karakterisztikus részcsoport is normálosztó. Ezt az analógiát joggal el is várhattuk, mivel — mint már említettük — normálosztó és ideál teljesen analóg fogalmak. Ha azonban a karakterisztikus részcsoportoknak az 1_0 tételben foglalt tulajdonságához csatlakoztunk volna (amellyel ezeket — mint [33] alatt említettük — definiálni szokás), akkor P azon részgyűrűihez jutottunk volna el, amelyek P összes automorfizmusaival szemben megengedettek, azaz (lásd [33] elejét) invariánsok. Mármost jóllehet ezek az „invariáns részgyűrűk" igen fontos fogalmakat képeznek, mindazonáltal semmiképpen sem tekinthetők a karakterisztikus részcsoportok analogonjának, már csak azért sem, mert az invariáns részgyűrűk nem szükségképpen ideálok. Ez megmagyarázza, miért döntöttünk a fenti 1 definíció mellett. Ezekből a magyarázatokból az is látható, hogy a csoport-gyűrűelméteti analógiák nem mindig magától értetődők, hanem gyakran meglehetősen rejtettek.

1. tétel. (A karakterisztikus részgyűrűk első kritériuma.) *A P gyűrű P' részgyűrűje akkor és csak akkor karakterisztikus, ha P' a P valamennyi duplahomotetizmusával szemben megengedett.*[36]

[34] Γ holomorfját úgy szokás definiálni, mint Γ elemeinek egy permutációcsoportját (l. *Zassenhaus* [14], 46.), de az olvasó könnyen beláthatja, hogy a két definíció lényegileg megegyezik. A fenti definíció fogalmilag egyszerűbb s azt minden célra alkalmasabbnak tartjuk, mint a régebbit. Az irodalomban nem találkoztunk vele, de *Fuchs László* levélbeli közlése szerint ő is felfedezte. — E dolgozat megfogalmazása után vettük észre, hogy a csoport holomorfjának miénkhez hasonló definíciója már a következő dolgozatban is szerepel: W. H. Mills, On the non-izomorphism of certain holomorphs, Transactions of the Amer. Math. Soc.. *74* (1953), 428—443.

[35] Az analóg csoport- és gyűrűelméleti tételeket $1_0, 2_0 \ldots$ illetve $1, 2 \ldots$ sorszámokkal fogjuk ellátni.

[36] Vagyis P minden a duplahomotetizmusára $aP', P'a \subset P'$.

Megjegyzés. Az 1_0, 1. tételek szemmellátható analógiája újra megerősíti a (14) analógiát is.

Az 1. tétel bizonyítása céljából tekintsük P-nak egy P′ karakterisztikus részgyűrűjét és egy a duplahomotetizmusát. Az utóbbit a duplahomotetizmusok két definíciójának ekvivalenciája miatt P egy $\overline{\mathrm{P}}$ *Schreier*-féle bővítésének valamely $\bar{a}$ eleme indukálja. Az 1 definíció miatt igaz $\mathrm{P}' \lhd \overline{\mathrm{P}}$, tehát

$$\bar{a}\mathrm{P}',\ \mathrm{P}'\bar{a} \subseteq \mathrm{P}'. \tag{54}$$

E helyett

$$a\mathrm{P}',\ \mathrm{P}'a \subseteq \mathrm{P}' \tag{55}$$

írható, s ezzel a feltétel szükségességét bebizonyítottuk.

Az elegendőség bizonyítása céljából legyen (55) igaz valamely $\mathrm{P}'(<\mathrm{P})$-re és P összes a duplahomotetizmusaira. Tekintsünk egy $\overline{\mathrm{P}}$-t, amelyre $\mathrm{P} \lhd \overline{\mathrm{P}}$. Minthogy $\overline{\mathrm{P}}$ minden a eleme P-nak egy duplahomotetizmusát indukálja, azért (55)-ből (54) következik. Ez azt jelenti, hogy fennáll $\mathrm{P}' \lhd \overline{\mathrm{P}}$. Ezzel az 1. tételt bebizonyítottuk.

A 2_0 definícióhoz hasonlóan definiáljuk a következőt:

2. definíció. *A* P *gyűrű holomorfjain a* P *barátságos duplahomotetizmusainak maximális* D *gyűrűihez tartozó* $D\cdot\mathrm{P}$ *széteső bővítéseket értjük.*

Megjegyzés. A „gyűrű holomorfja" elnevezést az alább következő, a 2_0 tétel analogonját képező 2. tétel is indokolja. — Egy $D\cdot\mathrm{P}$ holomorf könnyen megalkotható P-ból és D-ből (43) alapján. Ha tehát P összes holomorfjait meg akarjuk találni, akkor ehhez P barátságos duplahomotetizmusainak valamennyi maximális D gyűrűjét kell meghatároznunk. Ennek a kérdésnek a kikutatása speciális P gyűrűk esetére érdekes és nehéz feladat, amellyel még alig foglalkoztunk. (A nagyon egyszerű „egységelemes P" esetre vonatkozólag lásd a 3. tételt.) Az általános esetről a következőt jegyezzük meg. (35)-ből rögtön következik, hogy P két duplahomotetizmusa barátságos, ha legalább egyikük belső vagy indentikus. Jelölje $D_0(\approx \mathrm{P}/\mathrm{P}_*)$ a P-nak teljes belső duplahomotetizmusgyűrűjét és e (mint P-val kapcsolatosan mindig) P identikus duplahomotetizmusát. (Tudjuk, hogy e nem tartozik bele D_0-ba, ha P-nak nincs egységeleme.) A mondottak szerint minden D-nek tartalmaznia kell $\{e, D_0\}$-t, sőt ha P-nak $\{e, D_0\}$-n kívül van legalább még egy duplahomotetizmusa, akkor valódi módon kell tartalmaznia. Nyilvánvaló továbbá, hogy akkor és csak akkor van egynél több D (azaz P-nak egynél több) holomorfja, ha P-nak van két (külső) nembarátságos duplahomotetizmusa. Megjegyezzük még, hogy $e \in D$-ből és (43)-ból következik, hogy P minden holomorfjának van egységeleme, éspedig $(e, 0)$.

2. tétel. (A karakterisztikus részgyűrűk második kritériuma). *A* P *gyűrű* P′ *részgyűrűje akkor és csak akkor karakterisztikus, ha* P′ *a* P *összes holomorfjaiban normális (vagyis ideál).*

A szükségesség rögtön következik az 1, 2. definíciókból.

Az elegendőség bizonyítása céljából tegyük fel, hogy a 2. tételben megadott feltétel teljesül, és tekintsük P-nak egy a duplahomotetizmusát. A 2. § szerint a-t tartalmazza P barátságos duplahomotetizmusainak egy D maximális gyűrűje. A feltevés szerint $D \cdot \mathrm{P}$ holomorf ideálként tartalmazza a P′ részgyűrűt. Másrészt a $D \cdot \mathrm{P}$-nak $(a, 0)$ eleme, mint láttuk, éppen az a duplahomotetizmust indukálja. Ebből következik (55). Az 1. tétel értelmében tehát $\mathrm{P}' \lhd \overline{\mathrm{P}}$, s ezzel a 2. tételt bebizonyítottuk.

5. §. Teljes csoportok. Egységelemes gyűrűk

A csoport- és gyűrűelmélet közötti analógia, amelyet az eddigiekben kifejtettünk, tovább is kiépíthető. Így látni fogjuk, hogy az egységelemes gyűrűk a teljes csoportokkal[37] analóg módon viselkednek.

3_0 tétel. *Egy csoport akkor és csak akkor teljes, ha minden Schreier-féle bővítésének direkt tényezője. Ha egy csoport saját holomorfjában direkt tényező, akkor a csoport vagy teljes, vagy egy teljes csoport és egy másodrendű csoport direkt szorzata.*

Megjegyzés. A „csak akkor" állítás ismert (l. *Speiser* [11], 110. tétel, ahol csak véges csoportokról van szó). Az „akkor" állítás lényegében *Baer* [1] tétele. A 3_0 tétel második fele tudomásunk szerint új. A 3_0 tételt teljes egészében be fogjuk bizonyítani.

3. tétel. *Egy gyűrűnek akkor és csak akkor van egységeleme, ha minden Schreier-féle bővítésének direkt összeadandója. Az egységelemes gyűrűk úgy is jellemezhetők, mint olyanok, amelyeknek csak belső duplahomotetizmusai vannak.*[38] *Következésképpen minden ideáljuk karakterisztikus, továbbá csak egy holomorfjuk van.*[39] *Megfordítva, ha egy gyűrű valamelyik holomorfjában direkt összeadandó, akkor egységelemes* (következésképpen csak egy holomorfja van).[40]

[37] Mint ismeretes, egy csoportot teljesnek nevezünk, ha csak belső automorfizmusai vannak és nincs centruma (l. *Speiser* [11] 125. oldal). Tehát minden teljes csoport izomorf teljes automorfizmuscsoportjával.

[38] Mivel az egységelemes gyűrű annullátormentes, azért elemei csupa különböző belső duplahomotetizmust indukálnak, tehát izomorf saját „teljes duplahomotetizmusgyűrűjével" (v. ö. [37] végével). — Általában, ha P „összes" duplahomotetizmusai gyűrűt alkotnak, úgy ezt P teljes duplahomotetizmusgyűrűjének nevezhetjük. Ez természetesen akkor is létezhet, ha P-nak nincs egységeleme.

[39] Egységelemes P gyűrű holomorfja egyszerűen $\mathrm{P} \cdot \mathrm{P}$ alakban adható meg (l. (51), (52) $D = \mathrm{P}$ esetét).

[40] Világosabban szólva: ha egy gyűrűnek nincs egységeleme, akkor egy holomorfjában sem direkt összeadandó, ha van egységeleme, akkor csak egy holomorfja van és ebben direkt összeadandó.

Megjegyzés. A 3. tétel elejének „akkor" állítása *Szendrei János* tétele, erről szóló dolgozata előkészületben van. Egyébként pedig a 3. tétel utolsó állítása *Szendrei* tételének élesítése. A „csak akkor" állítás egy speciális esetben már *Csebotarjev* [15] számára is ismert volt.[40a] A 3_0, 3. tételek alapján a teljes csoportok és az egységelemes gyűrűk egymás pontos analogonjának tekinthetők.[2] Figyelemreméltó, hogy a 3. tétel egészében sokkal tartalmasabb, mint a 3_0 tétel.[41]

A 3_0 *tétel bizonyítása.* Ezt a „csak akkor" állítással kezdjük. Tekintsünk egy Γ teljes csoportot és ennek $\bar{\Gamma}$ *Schreier*-féle bővítését. Ki kell mutatnunk, hogy $\bar{\Gamma}$ direkt tényezőként tartalmazza Γ-t. A feltevés miatt Γ minden $\bar{\alpha}$ elemére a

$$\varrho \to \bar{\alpha}^{-1}\varrho\bar{\alpha}$$

leképezés Γ belső automorfizmusa. Minthogy továbbá Γ centrummentes, azért $\bar{\alpha}$-hoz Γ-nak egyetlen olyan $\bar{\alpha}'$ eleme található, amely ezt az automorfizmust indukálja. Akkor $\bar{\alpha}^{-1}\bar{\alpha}'$ a Γ összes elemeivel felcserélhető, következésképpen $\bar{\Gamma}$-nak minden Γ szerinti maradékosztályában egyetlen olyan elem van, amely Γ összes elemeivel felcserélhető. Ezek az elemek $\bar{\Gamma}$-nak egy Γ_0 részcsoportját alkotják, továbbá Γ_0 a Γ szerinti maradékosztályoknak egy reprezentánsrendszere. Ezért $\bar{\Gamma}$ a Γ, Γ_0 csoportok direkt szorzata, s ezzel a „csak akkor" állítás bizonyítást nyert.

Most bebizonyítjuk a 3_0 tétel utolsó állítását. Ebből a célból tegyük fel, hogy a Γ csoport az $A \cdot \Gamma$ holomorfnak direkt faktora, ahol A-val Γ teljes automorfizmuscsoportját jelöljük. (20) és *Rédei* [6] 3. tétel szerint a feltevés miatt A-nak van olyan

$$a \to a'$$

leképezése Γ-ba, amelyre

$$(ab)'^{-1}a'b' = \varepsilon, \quad a'^{-1}\varrho a' = \varrho^{a}. \tag{56}$$

(56_2)-ből következik, hogy A csupa belső automorfizmusból áll. Akkor $A = \Gamma\Gamma_*$ írható, továbbá (56_1)-ből következik

$$(\alpha_*\beta_*)' = \alpha_*'\beta_*', \quad \alpha_*'^{-1}\varrho\alpha_*' = \varrho^{\alpha_*}, \tag{57}$$

ahol

$$\alpha_* \to \alpha_*'$$

Γ/Γ_*-nak leképezése Γ-ba. (57_2)-ből és $\varrho^{\alpha_*} = \alpha^{-1}\varrho\alpha$-ból következik, hogy α_*'

[40a] A korrektúra alkalmával vettük észre, hogy a 3. tétel „csak akkor" állítása teljes általánosságban szerepel már a következő dolgozatban: *B. Brown* and *N, H. McCoy*. The maximal regular ideal of a ring, Proceedings of the Amer. Math. Soc., *1* (1950), 165—171 (Lemma 3).

[41] Az egységelemes gyűrűk egyébként is bizonyos tekintetben eltérően viselkednek a teljes csoportoktól. Például triviális, hogy minden gyűrűnek van egységelemes *Schreier*-féle bővítése, sőt a 2. definíció utáni megjegyzés vége szerint egy gyűrű minden holomorfja egységelemes gyűrű, ezzel szemben nincs tudomásunk róla, hogy minden csoport teljes csoporttá volna bővíthető *Schreier* értelmében.

az $\alpha_* = \alpha \Gamma_*$ osztályban van. Minthogy továbbá az α'_*-elemek (57_1) miatt Γ-nak egy Γ' részcsoportját alkotják, azért Γ felbomlik a $\Gamma' \Gamma_*$ szorzatra, amin azt értjük, hogy Γ minden eleme egyértelműen felírható egy $\varrho\sigma(\varrho \in \Gamma', \in \varrho \Gamma_*)$ szorzat alakjában. Mivel azonban Γ_* a Γ centruma, azért ebből következik

$$\Gamma = \Gamma' \otimes \Gamma_*,$$

továbbá, hogy Γ' centrummentes. Ha egy direkt szorzatnak csak belső automorfizmusai vannak, amint ez a fentiek alapján Γ-ra fennáll, akkor ugyanez igaz a tényezőkre is. Ebből következik, hogy Γ' teljes és Γ_* (mint *Abel*-féle csoport) legfeljebb két elemből áll. Ezzel a 3_0 tétel utolsó állítását bebizonyítottuk.

A 3_0 tételből még csak az „akkor" állítás bizonyítása van hátra. Minthogy a holomorf *Schreier*-féle bővítés, elegendő bebizonyítani a következőt: Ha egy

$$\Gamma = \mathrm{A} \otimes \mathrm{B} \tag{58}$$

csoport két A, B részcsoportjának direkt szorzata, amelyek közül $\mathrm{A}(\neq \varepsilon)$ *Abel*-féle és véges, akkor Γ-nak van olyan $\bar{\Gamma}$ *Schreier*-féle bővítése, amelyben Γ nem direkt tényező. Vegyünk egy $\bar{\mathrm{A}}$ *Abel*-féle csoportot, amely A-t valódi módon tartalmazza és amelynek nincs A-val izomorf direkt tényezője, s legyen

$$\bar{\Gamma} = \bar{\mathrm{A}} \otimes \mathrm{B}. \tag{59}$$

E mellett feltehetjük, hogy $\Gamma < \bar{\Gamma}$, s akkor $\Gamma \lhd \bar{\Gamma}$ is igaz. Elegendő bebizonyítani, hogy Γ nem direkt tényező $\bar{\Gamma}$-ban. Tegyük fel, hogy Γ direkt tényező $\bar{\Gamma}$-ban. Akkor (58) miatt

$$\bar{\Gamma} = \mathrm{A}_1 \otimes \mathrm{A} \otimes \mathrm{B}, \tag{60}$$

ahol A_1 a $\bar{\Gamma}$ részcsoportja. (59), (60) miatt fennáll az

$$\bar{\mathrm{A}} \approx \mathrm{A}_1 \otimes \mathrm{A}$$

izomorfia.[42] Ez az ellenmondás teljessé teszi a 3_0 tétel bizonyítását.

A 3. tétel bizonyítása. Kezdjük a második állítással. Tekintsünk egy P gyűrűt és tegyük fel először, hogy P tartalmazza az ε egységelemet. Akkor (31)-ből P-nak minden a duplahomotetizmusára következik:

$$a\varrho = a\varepsilon\varrho = (a\varepsilon)\varrho, \quad \varrho a = \varrho\varepsilon a = \varrho(\varepsilon a).$$

Másrészt (32) miatt

$$(\varepsilon a)\varepsilon = \varepsilon(a\varepsilon),$$

vagyis $a\varepsilon = \varepsilon a$. Ezért a azonos P-nak $a\varepsilon (= \varepsilon a)$ által indukált duplahomotetizmusával.

Megfordítva, ha P-nak csak belső duplahomotetizmusai vannak, akkor az identikus is ilyen, amiből következik olyan α elem létezése, amelyre $\alpha\varrho = \varrho, \varrho\alpha = \varrho$. Akkor α éppen P egységeleme. Ezzel a 3. tétel második állítását bebizonyítottuk. A 3. tétel közepén említett következmények is fennáll-

[42] Ha ugyanis $G = A \otimes B = A' \otimes B$, ahol A, A', B a G csoport részcsoportja akkor $A \approx A'$.

nak, részben az 1. tétel miatt, részben mert a belső duplahomotetizmusok páronként barátságosak.

A 3. tétel „csak akkor“ állításának igazolása céljából tegyük fel, hogy P-ban létezik ε egységelem és tekintsük P-nak egy $\bar{\mathrm{P}}$ *Schreier*-féle bővítését. Azt kell bizonyítanunk, hogy P direkt összeadandó $\bar{\mathrm{P}}$-ban. $\bar{\mathrm{P}}$ minden $\bar{\alpha}$ elemével a

$$\varrho \rightarrow \bar{\alpha}\varrho, \quad \varrho \rightarrow \varrho\bar{\alpha}$$

leképezések duplahomotetizmust képeznek. Következésképpen a feltétel és a már bebizonyítottak miatt van olyan $\alpha(\in \mathrm{P})$, amelyre

$$\bar{\alpha}\varrho = \alpha\varrho, \quad \varrho\bar{\alpha} = \varrho\alpha. \tag{61}$$

A feltevés miatt igaz $\mathrm{P}_* = 0$ is, ezért $\bar{\alpha}$ egyértelműen meghatározza α-t. Ezután (61)-et

$$(\bar{\alpha} - \alpha)\varrho = \varrho(\bar{\alpha} - \alpha) = 0$$

alakban írva látjuk, hogy

$$\bar{\alpha} = \alpha + \bar{\nu},$$

ahol $\bar{\nu}(\in \bar{\mathrm{P}})$ a

$$\bar{\nu}\mathrm{P} = \mathrm{P}\bar{\nu} = 0 \tag{62}$$

tulajdonsággal bír. Az összes (62) tulajdonságú $\bar{\nu}$ elemek $\bar{\mathrm{P}}$-ban egy $\mathfrak{n}$ ideált alkotnak („P-nak $\bar{\mathrm{P}}$-beli annullátorát“), amelynek a feltevés miatt nincs 0-tól különböző közös eleme P-val. Azt kaptuk, hogy $\bar{\mathrm{P}}$ a P, $\mathfrak{n}$ ideálok direkt öszszege, s ezzel a 3. tétel „csak akkor“ állítását bebizonyítottuk.

A 3. tétel utolsó állításának bizonyítása céljából tekintsünk egy P gyűrűt és ennek egy $D \cdot \mathrm{P}$ holomorfját, ahol D a P barátságos duplahomotetizmusainak egy maximális gyűrűje. Feltesszük, hogy $D \cdot \mathrm{P}$ direkt összeadandóként tartalmazza P-t; bizonyítandó, hogy P egységelemes. A feltétel miatt (43) és *Rédei* [6] 6. tétel szerint D-nek van olyan

$$a \rightarrow a'$$

leképezése P-ba, amelyre[43]

$$a' + b' - (a+b)' = 0, a'b + ab' + a'b' - (ab)' = 0, \alpha b + \alpha b' = 0, a\beta + a'\beta = 0$$
$$(a, b \in D,\ \alpha, \beta \in \mathrm{P}). \tag{63}$$

$(63_{3,4})$-ből következik, hogy D csupa belső duplahomotetizmusból áll. Minthogy ezek, mint már említettük, P minden duplahomotetizmusával barátságosak, azért D maximális voltából következik, hogy P-nak egyáltalán csak belső duplahomotetizmusai lehetnek. A 3. tétel fentebb bebizonyított részének alapján ez azt jelenti, hogy P-ban van egységelem, s ezzel a 3. tétel utolsó állítását is bebizonyítottuk.

Mivel minden holomorf *Schreier*-féle bővítés, azért ebből a 3. tétel „akkor“ állítása is következik, amivel a tétel bizonyítását befejeztük.

[43] Helyesbítjük az idézett tételben levő sajtóhibát, ahol tudniillik (74)-ben az első $(ab)'$ helyett $(a+b)'$ olvasandó.

6. §. További alkalmazások. Példák

A 3. tétel szerint egységelemes gyűrű minden ideálja karakterisztikus. Ezzel közel rokon *Nagata* [5][44] egy újabb tétele, amely azt mondja ki, hogy ha $\mathfrak{p}$ prímideál[45] P-ban és $\mathsf{P} \lhd \bar{\mathsf{P}}$, akkor $\mathfrak{p} \lhd \bar{\mathsf{P}}$, tehát így is kimondható:

4. tétel. *A prímideálok karakterisztikusok.*

Az 1. tételen alapuló rövid bizonyítást adunk. Jelöljük $\mathfrak{p}$-vel P valamely prímideálját és α-val P valamely duplahomotetizmusát. $\mathfrak{p} = \mathsf{P}$ esetén a tétel igaz, ezért a $\mathfrak{p} \neq \mathsf{P}$ esetre szorítkozhatunk. (32) miatt $\mathsf{P}(\alpha\mathfrak{p}) \subseteq \mathfrak{p}$, tehát

$$\mathsf{P}(\mathfrak{p} + \alpha\mathfrak{p}) \subseteq \mathfrak{p},$$

$$\mathfrak{p} + \alpha\mathfrak{p} \lhd \mathsf{P}.$$

Ebből és a feltevésből adódik

$$\mathfrak{p} + \alpha\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p},$$

tehát $\alpha\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p}$. Ugyanígy kapjuk: $\mathfrak{p}\alpha \subseteq \mathfrak{p}$. Ez az 1. tétel szerint igazolja a 4. tételt.

A 4. tételben figyelemreméltó, hogy (véleményünk szerint) nincs csoportelméleti analogonja. A 3, 4. tételek alapján a karakterisztikus részgyűrűket gyakoribb jelenségnek kell tartanunk, mint a karakterisztikus részcsoportokat.

Vannak-e egyáltalán nemkarakterisztikus ideálok? Erre a kérdésre egy példával adunk igenlő választ. Legyen p prímszám, I az egész számok gyűrűje. A

$$p^2 f(x) + pxg(x) \qquad (f(x), g(x) \in \mathrm{I}[x])$$

és

$$p^2 h(x) + pxk(x^2) \qquad (h(x), k(x) \in \mathrm{I}[x])$$

polinomok $\mathrm{I}[x]$-nek egy-egy P, illetve P' részgyűrűjét alkotják. Ezekre nyilván fennáll $\mathsf{P}' \lhd \mathsf{P}, \mathsf{P} \lhd \mathrm{I}[x]$, viszont $\mathsf{P}' \lhd \mathrm{I}[x]$ már nem igaz. E szerint P' valóban P olyan ideálja, amely nem karakterisztikus részgyűrű.

Bebizonyítjuk a következő figyelemreméltó tételt, amelynek, úgy látszik, szintén nincs csoportelméleti analogonja:

5. tétel. *Kommutatív zérusosztómentes gyűrű minden holomorfja kommutatív.* (V. ö. a 6. tétellel.)

Jelöljünk ugyanis egy ilyen gyűrűt P-val. (32) szerint P minden a duplahomotetizmusára $(\alpha a)\alpha = \alpha(a\alpha)$, amiből a feltevés miatt $\alpha(\alpha a) = \alpha(a\alpha)$,

[44] L. még *Steinfeld* [12]. Ez a dolgozat is, amelyet már kéziratban ismertem, hozzájárult a „gyűrűk holomorfelméletének" létrejöttéhez.

[45] Mint újabban szokás, valamely P gyűrű prímideálján P-nak olyan ideálját értjük, amelyre abból, hogy $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{p}$ $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \lhd \mathsf{P})$, mindig következik $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$ vagy $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{p}$. A „régi értelemben vett primideált" ma (teljes vagy) komplett prímideálnak hívjuk; ezeket, mint ismeretes, azzal a tulajdonsággal definiáljuk, hogy ha $\alpha\beta \in \mathfrak{p}$, akkor $\alpha \in \mathfrak{p}$ vagy $\beta \in \mathfrak{p}$. A komplett prímideálok a prímideálok speciális esete, s kommutatív gyűrűk esetén a két fogalom egybeesik.

vagyis

$$\alpha a = a\alpha \tag{64}$$

következik. (E szerint most P minden duplahomotetizmusa P két egyenlő endomorfizmusából áll.) Ha mármost a, b a P-nak barátságos duplahomotetizmusai, akkor (18), (64), (35) miatt

$$ab\alpha = a(b\alpha) = a(\alpha b) = (a\alpha)b = b(a\alpha) = ba\alpha,$$

vagyis

$$ab = ba. \tag{65}$$

Mivel (43_2) szerint P valamely holomorfjának elemei

$$(a, \alpha)(b, \beta) = (ab, \alpha b + a\beta + \alpha\beta)$$

szabály szerint szorzódnak, amiből

$$(b, \beta)(a, \alpha) = (ba, \beta a + b\alpha + \beta\alpha)$$

is következik, azért (64), (65) igazolják az 5. tételt.

Egynél több holomorffal rendelkező gyűrűre a zérógyűrűk[46] szolgáltatnak példát. Igaz ugyanis a következő:

6. tétel. *Egy P zérógyűrűnek akkor és csak akkor van csak egy holomorfja, ha P^+ teljes endomorfizmusgyűrűje kommutatív.*[47] *Ha van több holomorfja, akkor ezek között nemkommutatív is előfordul.*

A bizonyítás céljából előrebocsátjuk a következőt: A feltétel miatt $\alpha\beta = 0$ korlátlanul igaz, tehát (31), (32) azonosan teljesülnek. Következésképpen most (30), (33) szerint P duplahomotetizmusai P^+ azon duplaendomorfizmusaival egyeznek meg, amelyek P^+ két felcserélhető endomorfizmusából állnak.

Ha mármost P^+ teljes endomorfizmusgyűrűje kommutatív, akkor a (35) feltétel teljesül. Ez azt jelenti, hogy P összes duplahomotetizmusai páronként barátságosak, vagyis gyűrűt alkotnak, amely most P egyetlen maximális duplahomotetizmusgyűrűje, tehát P-nak csak egy holomorfja van.

Megfordítva, ha P teljes endomorfizmusgyűrűje nemkommutatív, akkor tekintsük P^+-nak két nemfelcserélhető A, B endomorfizmusát. Jelölje a, b (a fenti megjegyzés alapján) P két duplahomotetizmusát úgy, hogy a mindkét alkatrésze A, és b mindkét alkatrésze B legyen. Minthogy a, b (35) miatt nem barátságosak, azért P barátságos duplahomotetizmusainak két különböző maximális gyűrűjében vannak. Mivel utóbbiak P-nak két különböző holomorfját határozzák meg, azért a 6. tétel első felét bebizonyítottuk. Ha az előbbi A, B endomorfizmusokhoz egy-egy 0 triviális endomorfizmust hozzáveszünk, akkor nyilván két $a = (A, 0)$, $b = (B, 0)$ barátságos duplahomotetizmus áll elő,

[46] Zérógyűrű olyan P gyűrűt jelent, amelyre $P^2 = 0$ (vagyis $P_* = P$).

[47] Azt az érdekes problémát, hogy egy modulus teljes endomorfizmusgyűrűje mikor kommutatív, *Szele* és *Szendrei* [13] vetették fel nemrég és részben megoldották. Eredményük szerint aránylag kevés ilyen modulus van.

s ezekre $ab \neq ba$ teljesül. Következőleg a, b beletartoznak P barátságos duplahomotetizmusainak egy nemkommutatív maximális gyűrűjébe. Ehhez P-nak egy nemkommutatív holomorfja tartozik, amivel a 6. tétel bizonyítását befejeztük.

Megjegyezzük, hogy a karakterisztikus sorozatok fogalma magától értetődően átvihető gyűrűkre. Éspedig P *karakterisztikus sorozatán* olyan nemfinomítható véges

$$P = P_0, P_1, \ldots, P_r = 0$$

sorozatot értünk, amelyben P_{i+1} a P_i valódi részgyűrűje $(i = 0, 1, \ldots, r-1)$ és $P_i \blacktriangleleft P (i = 0, \ldots, r)$. Lényegében tehát P^+ (additív) csoportjának kompozició-sorozatáról van szó, ha operátorokként P összes duplahomotetizmusait adjuk meg. Ennek megfelelően alkalmazhatók *Schreier* és *Jordan—Hölder* ismert tételei.

Az 1. § kiegészítéséül ideírjuk még a következő (nagyon erős) analógiákat, amelyekre vizsgálataink során bukkantunk:

Γ karakterisztikus részcsoportja $\therefore$ P karakterisztikus részgyűrűje,

Γ holomorfja $\therefore$ P holomorfjai,

teljes csoport $\therefore$ egységelemes gyűrű,

Γ karakterisztikus sorozata $\therefore$ P karaszterisztikus sorozata,

Γ teljes automorfizmuscsoportja $\therefore$ P barátságos duplahomotetizmusainak maximális gyűrűi.

IRODALOM

[1] *R. Baer,* Absolute retracts in group theory, *Bull. of the Amer. Math. Soc., 52* (1946), 501—506.

[2] *N. Bourbaki, Éléments de Mathématique,* premiere partie, Livre II: *Algébre,* Chap. I. (Paris, 1942), 1—165.

[3] *C. I. Everett,* An extension theory for rings, *American Journal of Math., 64* (1942), 363—370.

[4] *L. Fuchs,* A remark on the Jacobson radical, *Acta Sci. Math. Szeged, 14* (1952), 167—168.

[5] *M. Nagata,* On the theory of radicals in a ring, *Journal of the Math. Soc. of Japan, 3* (1951), 330—344.

[6] *L. Rédei,* Die Verallgemeinerung der Schreierschen Erweiterungstheorie, *Acta Sci. Math. Szeged, 14* (1952), 252—273.

[7] *L. Rédei,* Über gewisse Ringkonstruktionen durch schiefes Produkt, *Acta Math. Acad. Sci. Hung., 2* (1951), 185—189.

[8] *L. Rédei,* Die Anwendung des schiefen Produktes in der Gruppentheorie, *Journal f. d. reine u. angew. Math., 188* (1950), 201—227.

[9] *L. Rédei,* Die Vollidealringe, *Monatshefte f. Math., 56* (1952), 89—95.

[10] *L. Rédei,* Vollidealringe im weiteren Sinn, I, *Acta Math. Acad. Sci. Hung., 3* (1952), 243—268.

[11] *A. Speiser,* Die Theorie der Gruppen, dritte Aufl. (Berlin, 1937).

[12] *O. Steinfeld,* Über Idealquotienten und Primideale, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* (megjelenés alatt).

[13] *T. Szele* and *J. Szendrei,* On abelian groups with commutative endomorphism ring, *Acta Math. Acad. Sci. Hung., 2* (1951), 309—323.

[14] *H. Zassenhaus, Lehrbuch der Gruppentheorie* (Leipzig und Berlin, 1937).

[15] Н. Г. Чеботарев: Введение в теорию алгебр (Москва, 1949).