KÉT GYŰRŰELMÉLETI STRUKTÚRATÉTEL GEOMETRIAI BIZONYÍTÁSA

SZELE TIBOR

1. §. Bevezetés

Az ú. n. első és második *Wedderburn—Artin*-féle struktúratétel a modern gyűrűelmélet legfontosabb és legszebb eredményei közé tartozik. Fontos tulajdonságokkal jellemzett gyűrűosztályok teljes leírását és explicit megadását teszik lehetővé, úgyhogy gyűrűelméleti jelentőségük nyilvánvaló. Ezen túlmenően azonban a matematika számos más ágának legújabb fejlődési irányát is döntő módon befolyásolta ez a két tétel, mert ezek az eredmények rendkívül ösztönzőleg hatottak azokra az általános vizsgálatokra, amelyek gyűrűk tágabb kategóriáinak lineáris transzformációk útján való előállítására irányultak, s ismeretes, hogy ez az egyik legfontosabb segédeszköz, amelyet a modern algebra a matematika egyéb ágainak nyújt.

A két említett gyűrűelméleti struktúratétel története már majdnem fél évszázadra tekint vissza, s ez alatt az idő alatt számos különböző bizonyítást adtak rájuk a gyűrűelmélet kutatói. A tételek legelső, még *Wedderburn*től származó alakja ú. n. algebrákra, más szóval hiperkomplex rendszerekre vonatkozott [14]*. Az algebrák elméletében alakultak ki azok a klasszikus módszerek is (idempotens elemek konstruálása, *Peirce*-féle felbontás, stb.), amelyek segítségével *Wedderburn* az algebrákra vonatkozó korszakalkotó jelentőségű eredményeit bebizonyította. *Artin*nak köszönhető az a nagyfontosságú felfedezés [1], hogy az algebrák elméletének főeredményeit sokkal tágabb területen is be lehet bizonyítani, s hogy ezeknek az eredményeknek természetes talaját a gyűrűknek éppen ez a tágabb osztálya alkotja: nevezetesen az ú. n. *minimumkövetelménynek elegettevő gyűrűk.* ** Ez a fontos felfedezés nemcsak elmélyítését jelentette az algebrák elméletének, hanem éppen a legfontosabb tételek bizonyításánál lényeges technikai egyszerűsítéseket is tett lehetővé. Így maga *Artin, E. Noether* és iskolájuk több tagja olyan bizonyításokat nyertek a *Weddernburn—Artin*-féle struktúratételekre is, amelyek egyre mélyebb bepillantást nyújtottak a probléma lényegébe, s egyre egyszerűbb technikai apparátust igényeltek [2], [3], [6], [8], [12], [13], [14]. Így ma már e tételek megfogalmazásában és bizonyításában nem is szerepel a hiperkomplex rendszerek

* A szegletes zárójelbe tett számok a dolgozat végén található irodalomra utalnak.

** A használt fogalmakat és elnevezéseket a további §-okban részletesen definiáljuk ill. megmagyarázzuk.

fogalma. Viszont a fejlődésnek ezen a fokán azért még nélkülözhetetlen volt az a fogalomrendszer, amely *Wedderburn* eredeti bizonyításának gerincét alkotja, és ezek a bizonyítások még abban is hasonlók a *Wedderburn*-féléhez, hogy a vizsgált gyűrű bizonyos értelemben önkényesen kitüntetett, nem-invariáns elemeivel illetve részgyűrűivel operálnak, bár kétségtelenül lényegesen egyszerűbb technikával.

Az a legutóbbi évek során bekövetkezett újabb nagyszabású fejlődés, amely a *Wedderburn—Artin*-féle struktúratételek lényegének teljes feltárásához vezetett, s lehetővé tette e tételek elvben annyira egyszerű, közvetlenül célhoz vezető bizonyítását, hogy a megelőző bizonyításokban használt fogalomrendszer és technikai apparátus teljesen mellőzhetőnek bizonyult, csírájában szintén *Emmy Noether*nek köszönhető. Ő ismerte fel az említett struktúratételek mélyreható kapcsolatát a vektorterek lineáris transzformációival, és ő dolgozta ki az alapjait annak a nagyfontosságú modern elméletnek, amelynek lényege abban áll, hogy a gyűrűelmélet problémáit vektorterekkel kapcsolatos kérdésekre fogalmazza át. Ennek a felfedezésnek felbecsülhetetlenül nagy az elvi jelentősége is — a jelek szerint ma még csupán kezdetén állunk a benne rejlő óriási lehetőségek kiaknázásának, — de ezenfelül még azzal a rendkívül kedvező következménnyel is járt, hogy eleven szemléletességgel telített geometriai intuiciót vitt bele a kutatásokba, s ily módon friss, új lendületet adott ezeknek a vizsgálatoknak. *Noether* életében azonban még nem bontakozott ki ennek a rendkívüli jelentőségű gondolatnak az a legmélyebbre ható konzekvenciája, amelynek azt köszönhetjük, hogy ma már nemcsak olyan út áll rendelkezésünkre a *Wedderburn—Artin*-féle struktúratételek bizonyításához, mely mindegyik megelőző bizonyításnál jóval egyszerűbb és sokkal mélyebben feltárja a problémák lényegét, hanem az említett tételek messzemenő általánosításához is vezetett. A matematika fejlődése során más esetekben is gyakran tapasztalható ama jelenség mutatkozott meg ebben az örvendetes tényben, hogy egy probléma legmélyebb gyökerének megtalálása egyszerre ad lehetőséget a tárgyalás egyszerűsítésére és általánosítására. A gyűrűelmélet *Wedderburn—Artin*-féle struktúratételeivel kapcsolatos eme nagy felfedezést a második világháború alatt egymástól függetlenül *J. Dieudonné* és *N. Jacobson* tette [7], [9]. Az általánosítás lényege az, hogy míg a *Wedderburn—Artin*-féle tételek a *minimumkövetelményt* kielégítő egyszerű, ill. féligegyszerű gyűrűk szerkezetét írják le, addig *Dieudonné* és *Jacobson* tételei csupán minimális féloldali ideál létezését posztulálják a tekintett gyűrűkben. Ennek megfelelően a *Wedderburn—Artin*-féle tételekben véges rangú vektorterek lineáris transzformációinak gyűrűi szerepelnek, viszont *Dieudonné* és *Jacobson* tételeiben a fellépő vektorterek rangja tetszőleges.

Legújabban *Artin* egyik cikkében, amely *Wedderburn* munkásságának a modern algebra fejlődésére való mély hatását méltatja, megmutatta, hogy *Jacobson* egyik tételén keresztül igen szép, egyszerű és geometriai szemléletességű bizonyítás adható a második *Wedderburn—Artin*-féle struktúratételre. Ez az *Artin*-féle bizonyítás, csupán a vektorterek elméletének elemeit használva fel, igazolja *Jacobson* egyik eredményét, s ebből igen rövid úton, közvetlenül levezeti a második *Wedderburn—Artin*-féle tételt [4]. *Artin* lényeges észrevétele abban áll, hogy nem szükséges a minimumkövetelmény-nélküli egyszerű gyűrűk *Jacobson*-féle „nagy elméletét" felépíteni (amelyből speciális esetben természetesen kiadódik a minimumkövetelményt kielégítő egyszerű gyűrűk struktúráját leíró második *Wedderburn—Artin*-féle tétel), hanem elegendő ebből az elméletből csak az egyik eredményt kiemelni és igazolni. Ezt a *Jacobson*-féle tételt mi is igazoljuk az alábbi 5. §-ban, a [4]-ben található *Artin*-féle bizonyítást némileg tovább egyszerűsítve. A jelen dolgozat főcélja annak megmutatása, hogy *Jacobson* említett tételéből a második *Wedderburn—Artin*-féle struktúratételnél általánosabb első *Wedderburn—Artin*-féle tétel is, (amely a minimumkövetelményt kielégítő féligegyszerű gyűrűk szerkezetét adja meg) közvetlenül levezethető, éspedig alig több fáradsággal, mint amennyit a második struktúratétel *Artin*-féle levezetése igényel. Ezt a 6. §-ban mutatjuk meg. Mivel a második struktúratétel [4]-beli bizonyítása lényegesen egyszerűbb bármely más, az eddigi irodalomban szereplő bizonyításnál, kombinálva ezt a féligegyszerű gyűrűk struktúraproblémájának az egyszerű gyűrűkre való szokásos visszavezetésével (lásd pl. [3], 27—31. old.), ugyancsak olyan igazolását nyerjük az első struktúratételnek, amely a klasszikus utakon haladó bizonyítások bármelyikénél számottevő mértékben egyszerűbb. Másfelől sikerült *Jacobson*nak a féligegyszerű gyűrűk struktúraelméletét az ú. n. *primitív* gyűrűk tőle származó mély elméletéből is levezetnie modern eszközökkel [10]. Az első *Wedderburn—Artin*-féle struktúratétel alábbi bizonyítása azonban (amely az 5. és 6. § anyagát alkotja) egyszerűbb és közvetlenebb mindkét említett módszernél. Speciális esetként természetesen megkapjuk a második *Wedderburn—Artin*-féle tételt is, sőt arra is rá kell mutatnunk, hogy a *Jacobson*-féle módszer segítségével nyert alábbi, közvetlenül célhoz vezető tárgyalásmód végeredményéből triviális következményként adódnak mindazok a jellemző tulajdonságok ill. részleteredmények, amelyek az eléggé körülményes klasszikus bizonyítás során megtett út egyes állomásai voltak (pl. az a tény, hogy a féligegyszerű gyűrű baloldalilag és jobboldalilag teljesen redukálható s van egységeleme, stb.)

A 2. és 3. §-ban a szükséges alapfogalmakat és az ezekre vonatkozó legfontosabb alaptényeket ismertetjük, a *Wedderburn—Artin*-féle struktúratételeket pedig a 4. §-ban fogalmazzuk meg.

2. §. Operátormodulusok, vektorterek

Vizsgálatainkban a szereplő gyűrűket Abel-féle csoportok endomorfizmusgyűrűjeként állítjuk elő, s ezért mindenekelőtt csoportelméleti megalapozást kell adnunk meggondolásainknak.

Moduluson olyan Abel-féle csoportot értünk, amelyben az alapművelet az összeadás. Ennek megfelelően a modulus neutrális elemét 0-val jelöljük, az a elem inverzét pedig $-a$-val. Modulus jelölésére latin nagybetűt, modulusok elemeinek jelölésére latin kisbetűket használunk. Az A, B, C, D, E, F betűket azonban endomorfizmusok jelölésére tartjuk fenn. *Endomorfizmuson* valamely modulus önmagába való homomorf leképezését értjük. Részletezve: ha M tetszőleges modulus, A pedig olyan

$$x \rightarrow xA \qquad (x \in M,\ xA \in M)$$

egyértelmű leképezése M-nek önmagába, amelyre

$$(x+y)A = xA + yA,$$

akkor azt mondjuk, hogy A az M modulusnak endomorfizmusa. Az M modulus összes endomorfizmusai gyűrűt alkotnak, s e gyűrűt M *endomorfizmusgyűrűjének* nevezzük. E gyűrűben a tetszőleges A, B endomorfizmusok összege, ill. szorzata a következőképpen van értelmezve:*

$$x \rightarrow x(A+B) = xA + xB\,;$$

$$x \rightarrow \quad x(AB) = (xA)B.$$

A gyűrűaxiómák teljesülése minden nehézség nélkül igazolható. Az endomorfizmusgyűrű általában nem kommutatív gyűrű (amin azt értjük, hogy e gyűrűben a szorzás nem mindig kommutatív művelet), és tartalmazhat nullosztókat (azaz két olyan endomorfizmus szorzata is lehet zérus, amelyek egyike sem zérus). Az endomorfizmusgyűrű zéruseleme az az endomorfizmus, amely az M modulus valamennyi elemét 0-ra képezi le. Egységeleme is mindig van az endomorfizmusgyűrűnek: az az endomorfizmus, amely M bármely elemét önmagára képezi le. Ha A az M modulus egyik endomorfizmusa, akkor az összes xA elemek halmaza (ahol x befutja az egész M halmazt) M-nek részmodulusa; e részmodolust MA-val jelöljük, és az A endomorfizmushoz tartozó *képmodulusnak* hívjuk. M mindamaz x elemei, amelyekre $xA = 0$, szintén részmodolust alkotnak, amelyet $K(A)$-val jelölünk, s az A endomorfizmus *magvának* nevezünk. Nyilvánvaló, hogy A akkor és csak akkor *automorfizmusa* (azaz önmagára való kölcsönösen egyértelmű és művelettartó leképezése) M-nek, ha A magva 0, képmodulusa pedig M. Az automorfizmusok pontosan azok az elemei az endomorfizmusgyűrűnek, amelyeknek van reciprok eleme az endomorfizmusgyűrűben (azaz amelyek alkalmas endomorfizmussal megszorozva az endomorfizmusgyűrű egységelemével egyenlők). Számos fontos gyűrű előállítható endomorfizmusgyűrűként. Így pl. a rac. egész számok gyűrűje a végtelen ciklikus csoport endomorfizmusgyűrűjével, e gyűrű modulo m vett maradékosztályainak gyűrűje pedig az m elemű ciklikus csoport endo-

* Az endomorfizmusok szorzásának értelmezéséből tűnik ki, miért célszerű jobbról írni az endomorfizmus jelét (a függvényeknek az analízisben szokásos jelölésmódjával ellentétben). Ha balról írnánk az endomorfizmus jelét, akkor az A és B endomorfizmusok AB szorzata az $x \rightarrow B(Ax)$ leképezés volna.

morfizmusgyűrűjével izomorf; a racionális számok teste a test additív csoportjának endomorfizmusgyűrűjével izomorf. Mindeme példákban a szereplő modulus teljes endomorfizmusgyűrűjéről van szó. Az endomorfizmusgyűrűk igazi jelentősége azonban akkor domborodik ki, ha a modulusok teljes endomorfizmusgyűrűjének részgyűrűit is tekintjük. A gyűrűk struktúraelméletében legfontosabbak a modulusok teljes endomorfizmusgyűrűjének azok a részgyűrűi, amelyeket a következőképpen kapunk: tekintsük valamely M modulus tetszőlegesen kiszemelt endomorfizmusait; M mindamaz endomorfizmusai, amelyek a kiszemelt endomorfizmusok bármelyikével (a szorzásra nézve) felcserélhetők, mint közvetlenül beláthatjuk, gyűrűt alkotnak: az M modulus teljes endomorfizmusgyűrűjének egyik részgyűrűjét. Világos, hogy a teljes endomorfizmusgyűrűk így nyert részgyűrűi is mindig egységelemes gyűrűk, hiszen a teljes endomorfizmusgyűrű egységeleme bármely endomorfizmussal felcserélhető. De könnyen bebizonyítható ennek a ténynek a megfordítottja is: bármely egységelemes gyűrű izomorf valamely modulus (éspedig éppen a tekintett gyűrű additív csoportja) teljes endomorfizmusgyűrűjének egyik, az előbbi módon nyert részgyűrűjével. Ez a tétel már mutatja az endomorfizmusgyűrűk nagy jelentőségét a gyűrűk struktúraelméletében, de nekünk a továbbiakban ennek a tételnek csak arra a speciális esetére lesz szükségünk, amely a mátrixgyűrűk ilyen módon való előállíthatóságát mondja ki.

Most rátérünk az *operátormodulus* fogalmának ismertetésére. Ez a fogalom alapvető fontosságú további meggondolásainkban. Legyen M tetszőleges modulus, Ω pedig tetszőleges gyűrű. Ω elemeinek jelölésére görög kisbetűket használunk. Az Ω gyűrűről akkor mondjuk, hogy *baloldali operátortartománya* az M modolusnak, ha Ω bármely α és M bármely x eleméhez egyértelműen hozzá van rendelve az M modulus egy eleme, amelyet αx-szel jelölünk, s az α, x elempár szorzatának nevezünk, és ha ezenfelül ez a hozzárendelés olyan tulajdonságú, hogy mindig teljesülnek az alábbi követelmények:

$$\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y, \tag{1}$$

$$(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x, \tag{2}$$

$$(\alpha\beta)x=\alpha(\beta x), \tag{3}$$

ahol α, β tetszőleges Ω-beli, x, y pedig tetszőleges M-beli elemek. (Klasszikus példaként gondoljunk a jól megszokott háromdimenziós euklideszi térre, amelynek összes vektorai a közönséges vektor-összeadásra nézve operátormodulust alkotnak, ha az Ω operátortartománynak a valós számok halmazát választjuk, amely ebben a speciális esetben nemcsak gyűrű, hanem test is). Nézzük meg közelebbről a felírt követelmények jelentését. Az (1) követelmény azt fejezi ki, hogy az

$$x \to \alpha x \qquad (\alpha\in\Omega, \quad x\in M) \tag{4}$$

leképezés bármely Ω-beli rögzített α elem esetén M-nek endomorfizmusa. Ezt az endomorfizmust *az α operátor által indukált endomorfizmusnak* nevezzük.

Jól vigyázzunk azonban arra, hogy az Ω operátorgyűrű α elemét általában nem azonosíthatjuk egyszerűen az általa indukált (4) alatti endomorfizmussal, mert Ω különböző elemei is indukálhatják ugyanazt az endomorfizmust. (Példát szolgáltat erre bármely véges M modulus, ha Ω-nak az összes rac. egész számok gyűrűjét választjuk, az αx szorzaton $|\alpha|$ számú x ill. $-x$ elem öszszegét értve aszerint, hogy $\alpha > 0$ ill. $\alpha < 0$, a $0 . x$ szorzaton pedig a modulus 0 elemét értve.) Nyilvánvalóan következik (1)-ből az is, hogy az Ω gyűrű zéruselemének az M modulus bármely elemével való szorzata egyenlő az M modulus zéruselemével. — A (2) követelmény azt jelenti, hogy két Ω-beli elem összege által indukált endomorfizmus mindig megegyezik a két elem által indukált endomorfizmusok összegével, (3) pedig az jelenti, hogy két Ω-beli elem szorzata által indukált endomorfizmus a második és az első elem által indukált endomorfizmusok (ebben a sorrendben vett!) szorzatával egyezik meg. Az (1)—(3) követelményeket tehát összefoglalva, együtt így fejezhetjük ki: az Ω operátortartomány mindegyik eleme az M modulus egy endomorfizmusát indukálja, és Ω-nak így adódó leképezése az indukált endomorfizmusok gyűrűjére *antihomomorfizmus.* Ez a kifejezés arra utal, hogy a szorzat képe a képelemek ellenkező sorrendben vett szorzatával egyenlő. A szorzással kapcsolatban észlelt eme bonyadalom nyilván megszűnnék akkor, ha az M modulus elemeihez jobbról írnánk oda az Ω-beli elemeket mint szorzótényezőket, azaz ha Ω *jobboldali operátortartománya* volna az M modulusnak (az (1)—(3) előírások mintájára közvetlenül felírható követelményekkel). Ilyen szempontból tehát a jobboldali operátormodulusok kényelmesebben kezelhetők, mint a baloldaliak, mert jobboldali operátormodulus esetében az operátortartománynak *homomorf képét* alkotják az operátorok által indukált endomorfizmusok. Nem rekeszthetjük ki azonban e miatt az alapjábanvéve nem lényeges komplikáció miatt tárgyalásaink köréből a baloldali operátormodulusokat, mert a dolog úgy áll, hogy nem mindig pusztán formális megállapodáson múlik az, hogy melyik oldalról írjuk az operátorokat a modulus elemei mellé; sőt gyakran megtörténik, hogy az előttünk álló problémából folyó adottság a szereplő operátortartomány baloldali vagy jobboldali volta. Az is előfordul, hogy ugyanaz a modulus egyidejűleg el van látva baloldali és jobboldali operátortartománnyal egyaránt: látni fogjuk ennek egy nagyfontosságú esetét az 5. §.-ban. — Végül megjegyezzük, hogy ha az Ω operátorgyűrűben van ε egységelem, akkor többnyire megkívánjuk az (1)—(3) követelményeken kívül még azt is, hogy ε identikus operátor legyen, azaz $\varepsilon x = x$ teljesüljön bármely $x \in M$ elemre.

Az operátormodulussal kapcsolatban felmerülő további fogalmakat is csak abban az esetben ismertetjük részletesen, ha az alapul vett modulus baloldali operátormodulus. A megfelelő megállapítások jobboldali operátormodulus esetére közvetlenül nyerhetők. Az Ω operátortartománnyal ellátott M modulus — röviden Ω-modulus — részmodulusai (azaz alcsoportjai) között a dolog természeténél fogva különös fontosságuk van azoknak, amelyek maguk is *Ω-modulusok,* vagy amint mondani szokás, az Ω operátortartomány szempontjából *megengedhető részmodulusok.* Az M modulus valamely N részmodulusa akkor rendelkezik ezzel a tulajdonsággal, ha tetszőleges Ω-beli α és N-beli x elem esetén az αx szorzat eleme N-nek. Ezt a követelményt rövid jelekkel így fejezhetjük ki:

$$\Omega N \subseteq N, \tag{5}$$

ahol ΩN az összes olyan αx szorzatok halmaza, amelyekre $\alpha \in \Omega$ és $x \in N$. (Hogy egy Ω-modulusnak lehetnek olyan részmodulusai, amelyek nem Ω-modulusok, azaz nem megengedhetők, azt a háromdimenziós tér vektorainak modulusa által szolgáltatott példa is mutatja, ahol mint már említettük, Ω a valós számok testének vehető. Ekkor pl. az origóból a csupa egész szám koordinátájú pontokba húzott vektorok halmaza részmodulus, de ez a részmodulus az említett operátortartomány szempontjából nem megengedhető. A megengedhető modulusok vektorhalmazai éppen az ú. n. lineáris altereket töltik ki; ezek: az egész tér, az origón átmenő síkok, az origón átmenő egyenesek, és a zérusvektor, mint egyelemű részmodulus.) Bármely Ω-modulusnak van legalább két Ω-részmodulusa: maga a teljes modulus és az egyetlen elemből álló 0 részmodulus. (Ez a kettő csak abban a triviális esetben esik egybe, ha maga az alapul vett M modulus is csupán a 0 elemet tartalmazza.) Ha az M modulusnak az Ω operátortartományra nézve csak ez a két megengedhető részmodulusa van, akkor azt mondjuk, hogy az M modulus az Ω operátortartományra nézve *irreducibilis.* (Alább látunk példát irreducibilis operátormodulusra.)

Amint az alapul vett Ω-modulus összes részmodulusai közül természetszerűen ki vannak tüntetve az Ω-részmodulusok, ugyanúgy az M modulus endomorfizmusai közül is ki vannak tüntetve az Ω-endomorfizmusoknak nevezett endomorfizmusok. Az M Ω-modulusnak valamely önmagába való

$$x \to xA \qquad (x \in M, \quad xA \in M) \tag{6}$$

egyértelmű leképezését akkor nevezzük *Ω-endomorfizmus*nak, ha a közönséges értelemben endomorfizmus, azaz M tetszőleges x, y elemei esetén

$$(x+y)A = xA + yA \tag{7}$$

és ezenfelül még az

$$(\alpha x)A = \alpha(xA) \tag{8}$$

követelményt is teljesíti bármely Ω-beli α operátor és M-beli x elem mellett. Ez az utóbbi követelmény azt jelenti, hogy ha az M modulus x elemét előbb megszorozzuk az α operátorral, s az így kapott elemnek vesszük a képét a (6) alatti A endomorfizmusnál, akkor ugyanahhoz az elemhez kell jutnunk, mint hogyha az x elemnek előbb vesszük az xA képét, s az így nyert elemet azután szorozzuk meg az α operátorral. Ennélfogva a (8) követelmény pontosan annyit jelent, hogy az A endomorfizmus *felcserélhető* az Ω-beli α operátorok által indukált endomorfizmusokkal (vagy rövidebben: az α operátorokkal, ha t. i. a felcserélhetőség szempontjából egyértelműnek vesszük az operátort az általa indukált endomorfizmussal, amit nyilván nyugodtan megtehetünk). Megállapíthatjuk tehát, hogy *az M Ω-modulusnak valamely endomorfizmusa akkor és csak akkor Ω-endomorfizmus, ha felcserélhető az Ω-beli operátorok mindegyikével.* (A már ismételten szereplő példa, a tér vektorainak modulusa esetében, ahol Ω a valós számtest, Ω-endomorfizmust kapunk pl. oly módon, hogy a tér bármely vektorához ennek egy rögzített síkra eső vetületét rendeljük hozzá képelemként.)

Igen fontos, és az alábbiakban is lényeges szerepet betöltő fogalom az operátormodulusok direkt összegre való felbonthatósága is. Ez is természetes módon adódik a tetszőleges részmodulus fogalmának Ω-részmodulussal való helyettesítése útján. Akkor mondjuk, hogy *az M Ω-modulus felbontható az $N_1, \ldots, N_k$ Ω-részmodulusok direkt összegére,* e tényt így jelölve:

$$M = N_1 + \cdots + N_k, \tag{9}$$

ha M bármely x eleme pontosan egyféleképpen előállítható

$$x = x_1 + \cdots + x_k \qquad (x_1 \in N_1, \ldots, x_k \in N_k) \tag{10}$$

alakban. Világos, hogy ennek szükséges és elegendő feltétele a következő: M bármely x eleme legyen előállítható (legalább egyféleképpen) $x = x_1 + \cdots + x_k$ $(x_i \in N_i)$ alakban, — ezt úgy szokás kifejezni, hogy az $N_1, \ldots, N_k$ részmodulusok *generálják* az M modulust, — és $0 = x_1 + \cdots + x_k$ csak $x_1 = \cdots = x_k = 0$ esetén teljesüljön. (Ez az utóbbi követelmény biztosítja a (10) előállítás egyértelműségét.) A $k = 2$ speciális esetben, azaz ha

$$M = N_1 + N_2, \tag{11}$$

érvényes a következő, gyakran alkalmazott és fontos tény:

$$N_1 \cong M/N_2,$$

azaz N_1 operátorizomorf (Ω-izomorf) az M/N_2 faktormodulussal. Nyilvánvaló ugyanis, hogy egyrészt az M/N_2 faktormodulus is Ω-modulus, hiszen bármely Ω-beli α operátor és M-nek az x elemet tartalmazó N_2 szerinti mellékosztálya (mint M/N_2 tetszőleges eleme) esetén az α operátornak az említett mellékosztállyal való szorzata *egyértelműen* meg van határozva az αx elemet tartalmazó mellékosztályként; (világos, hogy ez utóbbi nem függ attól, hogy mely x elemét tekintettük az $N_2 + x$ mellékosztálynak;) másrészt N_1 bármely x_1 eleméhez hozzárendelve M-nek N_2 szerinti $N_2 + x_1$ mellékosztályát, olyan izomorfizmust adtunk meg N_1 és M/N_2 között, amely egyszersmind Ω-izomorfizmus, azaz αx_1-hez az x_1-et tartalmazó $N_2 + x_1$ mellékosztály α-szorosa van hozzárendelve.

Hogy miért alkalmazhatók igen hatékonyan az operátormodulusokra vonatkozó vizsgálatok és eredmények a gyűrűk struktúraelméletében, azt már az is mutatja, hogy bármely R gyűrű operátormodulusnak tekinthető, önmagával, mint operátortartománnyal ellátva. Ekkor tehát az M modulus szerepét maga R mint additív csoport tölti be, másfelől az Ω operátorgyűrű is egybeesik az R gyűrűvel. Egy operátorelemnek valamely moduluselemmel való szorzata az R gyűrűben definiált szorzás eredménye (hiszen mindkét elem R-ben van). Nyilvánvaló azonban, hogy éles különbséget kell tennünk ama két lehetőség között, hogy R-et mint baloldali R-modulust, vagy mint jobboldali R-modulust tekintjük. Ha R nem kommutatív gyűrű, akkor ez a két operátormodulus nem megegyező, hiszen az $\alpha \in R$ operátorelemhez és az $x \in R$ moduluselemhez a baloldali esetben αx, a jobboldali esetben $x\alpha$ van hozzárendelve operátorszorzatként. Ez a fontos példa is mutatja, hogy miért nem rekeszthetjük ki vizsgálataink köréből sem a baloldali, sem a jobboldali operátormodulusokat (oly módon, hogy tárgyalásainkat csak a másik esetre korlátozzuk). Ha R kommutatív gyűrű, akkor természetesen azonos a két eset, és pusztán célszerűségi szempontok alapján áll módunkban eldönteni, hogy R-et baloldali vagy jobboldali operátormodulusnak tekintsük. — Az általános esetben, azaz ha R nem szükségképpen kommutatív gyűrű, akkor R-et mint önmagával ellátott baloldali operátormodulust tekintve, a megengedhető részmodulusok a *baloldali ideálok.* Ezek tehát a következő követelményekkel vannak értelmezve: H akkor és csak akkor baloldali ideálja az R gyűrűnek, ha egyrészt additív alcsoport, másrészt $RH \subseteq H$, azaz R bármely r és H bármely h elemének rh szorzata bennevan H-ban. Hasonlóan vannak értelmezve az R gyűrű J *jobboldali ideáljai,* mint az önmagával jobboldali operátortartományként ellátott R operátormodulus megengedhető részmodulusai, azaz R-nek olyan J additív alcsoportjai, amelyekre $JR \subseteq J$ teljesül. Ha az R gyűrűnek valamely részhalmaza baloldali ideál is, jobboldali ideál is R-ben, akkor kétoldali ideálnak, vagy röviden *ideál*nak nevezzük. — Az Ω gyűrű *ferdetest* (vagy más elnevezéssel: *divizíógyűrű*), ha az összeadáson, kivonáson és szorzáson kívül még a (baloldali és jobboldali) osztás is mindig elvégezhető benne, amennyiben természetesen az osztó nem zérus, azaz ha bármely Ω-beli $\alpha \neq 0$ és β elemekhez van olyan ξ és ξ' elem Ω-ban, amelyekre $\alpha\xi = \beta$ és $\xi'\alpha = \beta$ teljesül. A ferdetest zérustól különböző elemei csoportot alkotnak a szorzásra, mint alapműveletre nézve, s ez a követelmény (azonfelül, hogy Ω gyűrű legyen) jellemzi is a ferdetestet. Ennélfogva a ferdetest mindig egységelemes gyűrű, és bármely 0-tól különböző α elemének van reciproka, azaz olyan α^{-1} elem, amelyre $\alpha \cdot \alpha^{-1} = \alpha^{-1} \cdot \alpha = 1$. Másrészt a ferdetest úgy is definiálható, mint olyan egységelemes gyűrű, amelyben bármely 0-tól különböző elemnek van reciproka. Ha a ferdetest kommutatív, akkor *test*nek nevezzük. Ha az Ω gyűrű ferdetest, akkor Ω, mint operátortartományként önmagával ellátott (akár baloldali, akár jobboldali) operátormodulus példát szolgáltat irreducibilis operátormodulusra. Igen könnyen beláthatjuk ugyanis, hogy ferdetestnek önmagán és 0-on kívül sem baloldali, sem jobboldali ideálja nincsen.

A V operátormodulust akkor nevezzük *vektortérnek*, ha operátortartománya ferdetest. Ezt a fontos tényt, hogy t. i. az operátortartomány ebben az esetben ferdetest, azzal is kidomborítjuk, hogy az operátortartományt Ω helyett (a diviziógyűrű kezdőbetűjére emlékeztető) Δ-val jelöljük, míg a vektortér V jele a „vektortér" szó kezdőbetűjére utal. Megállapodunk abban, hogy a vektortér Δ operátortartományát, amelyet a közönséges háromdimenziós térrel kapcsolatban megszokott elnevezés analógiájára *skaláris tartománynak* is hívnak, mindig baloldali operátortartományként írjuk. Ez a megállapodás azonban természetesen nem zárja ki azt, hogy a vektortérhez egy jobboldali operátortartományt is megadjunk, ha ez célszerű lesz.

Mármost annak a ténynek, hogy a V vektortér Δ operátortartománya nem akármilyen egységelemes gyűrű, hanem ferdetest, igen nagyjelentőségű következményei vannak. Ez teszi ugyanis lehetővé, hogy a közönséges háromdimenziós vektortér egész affingeometriája átvihető, illetve kiterjeszthető az általunk definiált absztrakt vektortér esetére is, és ennek a rendkívül általános, mégis geometriai szemléletességű tulajdonságokkal felruházott fogalomnak igen messzeható és nagyjelentőségű alkalmazásai vannak a gyűrűk modern struktúraelméletében.

Alapvető fontosságú a következő fogalomalkotás: *a Δ skaláris tartománnyal ellátott V vektortér véges számú $x_1, \dots, x_k$ elemét akkor nevezzük lineárisan függetlennek, ha*

$$\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_k x_k = 0 \qquad (\alpha_i \in \Delta, \quad i = 1, \dots, k) \tag{12}$$

alakú összefüggés kizárólag csak $\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 0$ esetén teljesül. V-nek végtelen sok elemét akkor mondjuk lineárisan függetlennek, ha közülük bármely véges számú vektor lineárisan független. (A továbbiakban a V vektortér elemeit röviden csak vektoroknak, Δ elemeit pedig skalárisoknak nevezzük.) Világos, hogy lineárisan független vektorok közül egyik sem lehet zérus. Ha az $x_1, \dots, x_k$ vektorok nem lineárisan függetlenek, akkor azt mondjuk, hogy *lineárisan függők*. Ez esetben, előbbi definiciónk értelmében, van olyan (12) alakú összefüggés, amelyben az egyik α_i skaláris nem zérus. Minthogy az $x_1, \dots, x_k$ vektorok sorrendje lényegtelen, az általánosság korlátozása nélkül feltehetjük, hogy $i = k$, azaz, hogy $\alpha_k \neq 0$. (Ez megkönnyíti az írásmunkát a most következő néhány sorban.) Ekkor α_k^{-1}-gyel való szorzás útján az következik (12)-ből, hogy

$$x_k = -\alpha_k^{-1}\alpha_1 x_1 - \cdots - \alpha_k^{-1}\alpha_{k-1} x_{k-1} = \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_{k-1} x_{k-1}, \tag{13}$$

amit úgy szokás kifejezni, hogy x_k *lineáris kombinációja az* $x_1, \dots, x_{k-1}$ *vektoroknak.* Minthogy megfordítva: abból, hogy véges számú vektor közül az egyik lineáris kombinációja a többinek, nyilvánvalóan következik, hogy a tekintett vektorok nem alkotnak lineárisan független rendszert, azt kaptuk, hogy *a V vektortér véges számú vektora akkor és csak akkor nem lineárisan független, ha van közöttük olyan vektor, amely lineáris kombinációja a többinek.*

A Δ operátortartománnyal ellátott V vektortér, mint operátormodulus megengedhető részmodulusait (azaz Δ-részmodulusait) röviden V *altereinek* nevezzük. Ennélfogva a W halmaz akkor és csak akkor altere V-nek, ha egyrészt additív alcsoportja, másrészt bármely $\alpha \in \Delta$ és $x \in W$ esetén $\alpha x \in W$, azaz

$$\Delta W \subseteq W. \tag{14}$$

A V vektortér valamely alteréhez jutunk a következő konstrukció útján. Tekintsük V tetszőleges (nem okvetlenül lineárisan független) $x_1, \ldots, x_k$ vektorait, és alkossuk meg minden lehetséges $\beta_1, \ldots, \beta_k$ skaláris rendszerrel e vektorok

$$\beta_1 x_1 + \cdots + \beta_k x_k$$

lineáris kombinációit. Ezek halmaza V-nek nyilván egyik W altere, éspedig a lehető legszűkebb olyan altér (t. i. bármely olyan altérnek részhalmaza), amely a kiszemelt $x_1, \ldots, x_k$ vektorok mindegyikét tartalmazza. Ezért az ily módon konstruált W alteret *az* $x_1, \ldots, x_k$ *vektorok által generált altérnek nevezzük,* és így jelöljük:

$$W = \{x_1, \ldots, x_k\}. \tag{15}$$

A $k = 1$ speciális esetben az egyetlen x_1 vektor által generált

$$\{x_1\} = \Delta x_1 \tag{16}$$

alteret kapjuk, amely az összes αx_1 vektorok halmaza (α befutja a teljes Δ skaláris tartományt). Ez az altér az egyetlen elemű 0 altér, ha $x_1 = 0$; ha azonban $x_1 \neq 0$, akkor az x_1 vektorral meghatározott *egyenes*, vagy *egydimenziós* altér.

Mivel a (15) altér a véges számú $x_1, \ldots, x_k$ vektorral van generálva, az ilyen módon kapott altereket *végesen generált altereknek* nevezzük. Számunkra a továbbiakban az az eset fontos, amikor maga az alapul vett V vektortér is végesen generált, azaz megadható benne véges számú vektor úgy, hogy azok lineáris kombinációjaként V bármely elemét előállíthatjuk. Ezért a továbbiakban (egészen a 4. § végéig) feltételezzük, hogy V végesen generált vektortér.

E § további részében főcélunk annak megmutatása, hogy egy vektortér bármely végesen generált alterének (s így legutóbbi kikötésünk szerint magának az alapul vett V vektortérnek is) egyértelműen meghatározott dimenziószáma van, amelyet az altér rangjának is nevezünk. Ez a fogalom szoros kapcsolatban van az altér bázisának fogalmával.

Ha a (15) alatti W altér $x_1, \ldots, x_k$ generátorrendszere nem lineárisan független, akkor, mint előbb láttuk, e vektorok egyike, pl. x_k, lineáris kombinációja a többi $x_1, \ldots, x_{k-1}$ vektornak. Ez azonban azt jelenti, hogy

$$W = \{x_1, \ldots, x_{k-1}\},$$

hiszen ekkor az $x_1, \ldots, x_k$ vektorok bármely lineáris kombinációja egyszersmind lineáris kombinációja az $x_1, \ldots, x_{k-1}$ vektoroknak is. Amennyiben még az $x_1, \ldots, x_{k-1}$ vektorok sem lineárisan függetlenek, akkor hasonló meggondolás arra az eredményre vezet, hogy még legalább egy további vektor is „törölhető" közülük anélkül, hogy az így csökkentett vektorrendszer által generált altér megváltoznék. Az ilyen módon feleslegesnek bizonyuló vektorok törlését a generátorrendszerből mindaddig folytathatjuk, míg a megmaradó $x_1, \ldots, x_r$ vektorok már lineárisan függetlenek lesznek. Azt a fontos eredményt nyertük tehát, hogy *bármely végesen generált altérnek van lineárisan független generátorrendszere*, vagy rövidebben: *bázisa*. Ha továbbá $b_1, \ldots, b_r$ bázisa a W altérnek, akkor a direkt összeg és a lineáris függetlenség értelmezéséből következőleg W *előállítható*

$$W = \{b_1, \ldots, b_r\} = \{b_1\} + \cdots + \{b_r\} = \Delta b_1 + \cdots + \Delta b_r \tag{17}$$

alakban, azaz *egydimenziós alterek direkt összegeként*, ahol a szereplő egydimenziós altereket éppen a tekintett bázisban szereplő vektorok határozzák meg. Ugyanannak az altérnek lehetnek különböző vektorrendszerek is bázisai (gondoljunk a közönséges háromdimenziós tér példájára), de megmutatjuk, hogy végesen generált altér esetében *az altér bármely bázisa ugyanannyi elemből áll*. A bázis elemeinek száma tehát, amelyet az altér *dimenziószám*ának vagy *rang*jának nevezünk, az altérnek invariánsa.

Állításunk igazolása céljából elegendő azt megmutatnunk, hogy *olyan W altérben, amelynek van r elemű bázisa, $r+1$ vektor sohasem lehet lineárisan független.* Ebből ugyanis már következik, hogy r-nél több elemű bázisa nincsen a tekintett W altérnek; másrészt r-nél kevesebb elemű bázisa sincsen W-nek, mert ha volna, akkor egy ilyen bázisból kiindulva, ellentmondást jelent igazolásra kitűzött legutóbbi (dőltbetűs) állításunkkal az a tény, hogy W-nek van r elemű bázisa.

Mármost legutóbbi állításunkat, mely szerint r elemű bázissal rendelkező W altérben $r+1$ vektor sohasem lineárisan független, r szerinti teljes indukcióval igazoljuk. Az $r=1$ esetben állításunk helyessége közvetlenül világos: ekkor $W = \{b_1\} = \Delta b_1$, úgyhogy W két eleme $y_1 = \alpha_1 b_1, y_2 = \alpha_2 b_1$ alakban vehető fel, s e két vektor nyilván nem lineárisan független, mert vagy $y_1 = 0$ vagy $\alpha_2 \alpha_1^{-1} y_1 - y_2 = 0$. Tegyük fel tehát, hogy igazolandó állításunk r helyett $r-1$ esetén már helyes. Legyen továbbá W olyan altér, melynek $b_1, \ldots, b_r$ bázisa, azaz amelyre (17) teljesül. Tekintsünk $r+1$ tetszőleges vektort a W altérben, amelyek előállítása az említett bázis segítségével:

$$\begin{aligned} y_1 &= \alpha_{11} b_1 + \cdots + \alpha_{1r} b_r \\ y_2 &= \alpha_{21} b_1 + \cdots + \alpha_{2r} b_r \\ &\vdots \\ y_{r+1} &= \alpha_{r+1,1} b_1 + \cdots + \alpha_{r+1,r} b_r. \end{aligned}$$

Indukciós feltevésünk alapján bebizonyítjuk, hogy a felírt vektorok lineárisan függők. Elegendő azt az esetet vennünk, amikor az egyenletrendszer jobboldalán az r-edik oszlopban álló $\alpha_{1r}, \ldots, \alpha_{r+1,r}$ skaláris együtthatók nem mindegyike zérus, mert ellenkező esetben azzal a helyzettel állanánk szemben, hogy a felírt, $y_1, \ldots, y_{r+1}$ vektorok mind benne vannak már egy $r-1$ elemű bázissal rendelkező altérben is, s ekkor indukciós feltevésünk értelmében a felírt vektorok közül már bármely r számú is lineárisan függő (ami természetesen maga után vonja azt, hogy a felírt $r+1$ számú vektor is lineárisan függő). Mivel az $y_1, \ldots, y_{r+1}$ vektorok sorrendje nem lényeges, feltehetjük még azt is, hogy $\alpha_{1r} \neq 0$. Ekkor a felírt egyenletek közül az első

$$\alpha_{1r}^{-1} y_1 = \alpha_{1r}^{-1} \alpha_{11} b_1 + \cdots + b_r$$

alakban írható, s így ennek megfelelő skalárisokkal szorzott oldalait az egyenletrendszer többi egyenleteinek megfelelő oldalaiból kivonva, azt találjuk, hogy az

$$y_2 - \alpha_{2r} \alpha_{1r}^{-1} y_1, \ y_3 - \alpha_{3r} \alpha_{1r}^{-1} y_1, \ldots, y_{r+1} - \alpha_{r+1,r} \alpha_{1r}^{-1} y_1$$

vektoroknak a $b_1, \ldots, b_r$ bázis segítségével való előállításában a b_r elem már seholsem szerepel. Ez azonban annyit jelent, hogy e legutóbb felírt r számú vektor benne van a $\{b_1\} + \cdots + \{b_{r-1}\}$ altérben, úgyhogy indukciós feltevésünk szerint e vektorok lineárisan függők. Bármely olyan reláció, amely mutatja e vektorok lineáris függőségét, nyilván ugyanezt mutatja az $y_1, \ldots, y_{r+1}$ vektorokra vonatkozólag is. Ezzel megmutattuk, hogy a W altérben bármely $r+1$ számú vektor lineárisan függő, és így állításunk bizonyítását befejeztük.

Minthogy feltételeztük, hogy maga az alapul vett V vektortér is végesen generált, V-nek is van véges bázisa, s ha $a_1, \ldots, a_n$ bázisa V-nek, akkor V n rangú vektortér, és érvényes a

$$V = \{a_1\} + \cdots + \{a_n\} = \Delta a_1 + \cdots + \Delta a_n \tag{18}$$

direkt felbontás. *Ez másszóval azt jelenti, hogy V bármely v eleme előállítható*

$$v = \varrho_1 a_1 + \cdots + \varrho_n a_n$$

alakban egy és csak egy $\varrho_1, \ldots, \varrho_n$ skaláris együtthatórendszerrel.

A továbbiakban fontos lesz még számunkra a következő megjegyzés: *a V vektortér bármely W alterének bármely bázisa kiegészíthető V-nek egy bázisává.* Tekintsük ugyanis a (17)-ben szereplő W alteret, amelynek $b_1, \ldots, b_r$ tetszőleges bázisa. Ha $W = V$, akkor nem kell kiegészítenünk a $b_1, \ldots, b_r$ bázist, mert ez már maga is bázisa a $V = W$ vektortérnek. Ha viszont W valódi részhalmaza V-nek, akkor legyen $c_{r+1} \in V$ olyan vektor, amelyre $c_{r+1} \notin W$. Ekkor a $b_1, \ldots, b_r, c_{r+1}$ rendszer lineárisan független, mert ellenkező esetben fennállna közöttük egy olyan reláció, amelyben c_{r+1} együtthatója nem zérus, s így ennek az együtthatónak reciprokával szorozva, a reláció azt mutatná, hogy $c_{r+1} \in W$, ellentmondásban feltevésünkkel. Ha még a $b_1, \ldots, b_r, c_{r+1}$ rendszer sem bázisa V-nek, akkor hasonló módon továbbfolytathatjuk a bázis kibővítését tetszőleges olyan vektorral, amely nem eleme a $W + \{c_{r+1}\}$ altérnek. Így végül a V vektortér $b_1, \ldots, b_r, c_{r+r}, \ldots, c_n$ bázisához jutunk, amely, mint állítottuk, a tetszőleges W altér tetszőleges $b_1, \ldots, b_r$ bázisának kiegészítésével jött létre. Nyilván pontosan akkor ér véget kiegészítő eljárásunk, amikor már n tagja van a kibővített lineárisan független rendszernek, mert a dimenziószám igazolt invarianciája miatt V bármely bázisa n elemű.

Az előbbi meggondolásból következik az is, hogy ha W valódi altere V-nek, és $z \in V$, $z \notin W$, akkor V előállítható

$$V = W + \{z\} + U \tag{19}$$

alakú direkt összegként, ahol U alkalmas altér.

Ugyancsak az altér bázisának bármely bővebb altér bázisává való kiegészíthetőségéből következik az, hogy ha a V vektortér W_1 és W_2 altereire $W_1 \subseteq W_2$ teljesül, akkor ekvivalens a következő két állítás:

W_1 valódi része W_2-nek;

W_1 rangja kisebb W_2 rangjánál.

Ebből, valamint az altér rangjának invarianciájából közvetlenül nyerjük az alábbi tételt:

Az n dimenziós V vektortér altereinek bármely

$$W_1 \subset W_2 \subset W_3 \subset \cdots \tag{20}$$

szigorúan növekvő lánca legfeljebb $n+1$ tagot tartalmazhat. Az előbbiek szerint ugyanis az alterek eme szigorúan növő láncához a rangszámok szigorúan növő sorozata tartozik, de a rangszámok csak 0-tól n-ig emelkedhetnek.

Végül megjegyezzük, hogy tetszőleges (nem okvetlenül végesen generált) vektortérre vonatkozólag is kimutatható a következő tétel: vektortérnek mindig van lineárisan független generátorrendszere, azaz bázisa és ugyanannak a vektortérnek két bázisa mindig megegyező számosságú. Ezt az invariáns (véges vagy végtelen) számosságot az általános esetben is a vektortér dimenziószámosságának, vagy rangjának nevezzük. Nekünk azonban erre a tételre a továbbiakban csak végesen generált vektortér esetében lesz szükségünk, úgyhogy elegendő volt a fenti bizonyítást csak erre az esetre végezni el.

3. §. Lineáris transzformációk. A teljes mátrixgyűrű

Vizsgálataink alapja ebben a §-ban is egy Δ ferdetesttel, mint skaláris tartománnyal ellátott n rangú V vektortér lesz. Tekintsük e vektortér Δ-endomorfizmusait, azaz az olyan önmagába való $x \to xA$ egyértelmű leképezéseit, amelyek teljesítik a (7) és (8) követelményt V tetszőleges x, y vektorai és tetszőleges $\alpha \in \Delta$ skaláris esetén. Idézzük emlékezetünkbe, hogy a (8) követelmény jelentése a következő: az A endomorfizmusnak bármely Δ-beli skalárissal felcserélhetőnek kell lennie. Mint az előző §-ban láttuk, a V vektortér összes Δ-endomorfizmusai gyűrűt alkotnak, s ez a gyűrű részgyűrűje a V modulus teljes endomorfizmusgyűrűjének.

A V vektortér Δ-endomorfizmusait V *lineáris transzformációi*nak fogjuk nevezni. (Indokolttá teszi ezt az elnevezést az a tény, hogy ha Δ a valós számtest, akkor ilyen módon éppen az n dimenziós V euklideszi tér jól ismert lineáris transzformációit kapjuk meg, amelyeket affin leképezéseknek is szokás nevezni.) A V vektortér összes lineáris transzformációiból álló gyűrűt Δ_n-el fogjuk jelölni, ami szokott jelölési mód a Δ ferdetest elemeiből felépíthető n-szer n-es mátrixok gyűrűjére, s rögtön látni fogjuk, hogy ez az utóbbi gyűrű lényegében ugyanaz, mint a lineáris transzformációk gyűrűje.

Tekintsük a V vektortér (18) alatti előállításában szereplő $a_1, \ldots, a_n$ bázisát, éspedig a báziselemeknek ebben a *rögzített sorrendjében.* Legyen A tetszőleges lineáris transzformációja V-nek. Világos, hogy a tekintett rendezett bázis elemeinek

$$\left.\begin{aligned} a_1 A &= \alpha_{11} a_1 + \ldots + \alpha_{1n} a_n = c_1 \\ a_2 A &= \alpha_{21} a_1 + \ldots + \alpha_{2n} a_n = c_2 \\ &\vdots \\ a_n A &= \alpha_{n1} a_1 + \ldots + \alpha_{nn} a_n = c_n \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

képei teljesen meghatározzák az A lineáris transzformációt, hiszen a (7) és (8) követelmények teljesülése következtében a V vektortér tetszőleges

$$v = \varrho_1 a_1 + \ldots + \varrho_n a_n$$

elemének képe az A transzformációnál

$$\begin{aligned} vA &= (\varrho_1 a_1 + \ldots + \varrho_n a_n) A = (\varrho_1 a_1) A + \ldots + (\varrho_n a_n) A = \\ &= \varrho_1 (a_1 A) + \ldots + \varrho_n (a_n A) = \varrho_1 c_1 + \ldots + \varrho_n c_n, \end{aligned} \tag{22}$$

azaz valóban meg van határozva az $a_1 A = c_1, \ldots, a_n A = c_n$ képvektorokkal. Másfelől az is nyilvánvaló, hogy a (21) összefüggések jobboldalán szereplő $c_1, \ldots, c_n$ vektorokat egészen tetszőlegesen írva elő a V vektortér elemei közül, van a vektortérnek olyan A lineáris transzformációja, amely az $a_1, \ldots a_n$ bázis elemeit rendre ezekbe a tetszőlegesen előírt vektorokba viszi át, vagyis amelyre a (21) alatti összefüggések teljesülnek. Ezt az A lineáris transzformációt egyszerűen úgy nyerjük, hogy a V vektortér bármely

$$v = \varrho_1 a_1 + \ldots + \varrho_n a_n$$

vektorának vA képét a (22) összefüggés szerint így adjuk meg:

$$vA = \varrho_1 c_1 + \ldots + \varrho_n c_n.$$

Minthogy pedig az A lineáris transzformációt ilyen módon egyértelműen jellemző $a_1 A = c_1, \ldots, a_n A = c_n$ képvektorokat (21) alapján n^2 számú α_{ik} skaláris elem határozza meg, amelyeket az alábbi mátrix által adott elrendezésben tekinthetünk át, meggondolásaink a következő eredményhez vezettek: *Az*

$$A \longleftrightarrow \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} \tag{23}$$

hozzárendelés kölcsönösen egyértelmű leképezést jelent a V vektortér összes *lineáris transzformációinak rendszere és a Δ ferdetest (a V vektortér skaláris tartománya) elemeiből felépülő összes lehetséges n-szer n-es mátrixok rendszere között. E hozzárendelés alapjául a V vektortér egy tetszőlegesen kijelölt, de a továbbiakban sorrend szerint is rögzített $a_1, \ldots, a_n$ bázisa szolgál, éspedig azzal a megállapodással, hogy a tetszőleges A lineáris transzformációhoz hozzárendelt mátrix i-edik sorában az $a_i A$ képvektornak az alapul vett bázis szerinti (21) előállításában fellépő skaláris együtthatók állanak; s megfordítva, egy tetszőlegesen előírt (23) alatti mátrix ahhoz a lineáris transzformációhoz van hozzárendelve, amelynél az a_i bázisvektor képe a mátrix i-edik sora által meghatározott $\alpha_{i1}a_1+\ldots+\alpha_{in}a_n$ vektor. Világos, hogy ilyen módon bármely lineáris transzformációhoz pontosan egy mátrix van hozzárendelve, és bármely mátrix pontosan egy lineáris transzformációhoz van hozzárendelve. Az így megállapított kölcsönösen egyértelmű leképezés izomorfizmussá válik, ha a lineáris transzformációk gyűrűjében értelmezett összeadást és szorzást éppen e kölcsönösen egyértelmű leképezés szerint átvisszük a mátrixok halmazára. Az endomorfizmusok (tehát egyszersmind a lineáris transzformációk) összegének, ill. szorzatának a 2. § elején adott definíciója szerint ez az átvitel a következő eredményre vezet. Két mátrix összegén azt a mátrixot értjük, amelynek i-edik sorában és k-adik oszlopában az összeadott mátrixok ugyanezen helyén álló elemek összege áll. Két mátrix szorzatát pedig úgy nyerjük, hogy a szorzatmátrix i-edik sorában és k-adik oszlopában álló elem a baloldali tényezőmátrix i-edik sorának (balról jobbra haladva) és a jobboldali tényezőmátrix k-adik oszlopának (felülről lefelé haladva) „belső szorzata" lesz.* — E legutóbbi megállapítás helyességét így láthatjuk be. Ha a B lineáris transzformációhoz hozzárendelt mátrix általános eleme β_{ik}, akkor a lineáris transzformációk szorzatának értelmezése szerint

$$\begin{aligned} a_i(AB) &= (a_iA)B = (\alpha_{i1}a_1+\ldots+\alpha_{in}a_n)B = \alpha_{i1}(a_1B)+\ldots+\alpha_{in}(a_nB) = \\ &= \alpha_{i1}(\beta_{11}a_1+\ldots+\beta_{1n}a_n)+\ldots+\alpha_{in}(\beta_{n1}a_1+\ldots+\beta_{nn}a_n) = \\ &= (\alpha_{i1}\beta_{11}+\alpha_{i2}\beta_{21}+\ldots+\alpha_{in}\beta_{n1})a_1+\ldots+(\alpha_{i1}\beta_{1n}+\ldots+\alpha_{in}\beta_{nn})a_n, \end{aligned}$$

s látjuk innen, hogy az $a_i(AB)$ vektornak az $a_1, \ldots, a_n$ bázis szerinti előállításában a_k együtthatója

$$\alpha_{i1}\beta_{1k}+\alpha_{i2}\beta_{2k}+\ldots+\alpha_{in}\beta_{nk},$$

azaz éppen a fentebb említett „belső szorzat"; s minthogy ennek a skaláris elemnek éppen az AB szorzatmátrix i-edik sorában és k-adik oszlopában kell állania, ilyen módon legutóbbi megállapításunk helyességét is igazoltuk.

A nyert eredmény alapján nem kell lényeges különbséget tennünk a V vektortér lineáris transzformációinak gyűrűje és a Δ ferdetest elemeiből felépülő n-szer n-es mátrixok imént értelmezett teljes gyűrűje között. A két gyűrű azonosnak tekinthető a V vektortér egy rendezett bázisának megadása alapján. Ezért a továbbiakban a lineáris transzformációk gyűrűjét is a teljes mátrixgyűrű szokásos Δ_n jelével jelöljük.

E dolgozatban főcélunk a gyűrűelmélet *Wedderburn—Artin*-féle struktúratételeinek bizonyítása. E tételekben tetszőleges ferdetestből felépülő teljes mátrixgyűrűk szerepelnek. A tételek bizonyítása éppen azáltal válik a klasszikus módszerekkel dolgozó bizonyításoknál jóval egyszerűbbé, s azáltal nyer geometriai szemléletességet, hogy módunkban lesz a továbbiakban a teljes mátrixgyűrű helyett egy vektortér lineáris transzformációinak gyűrűjéről beszélni.

E § további részét arra használjuk fel, hogy áttekintést szerzünk a Δ_n teljes mátrixgyűrű jobboldali ideáljainak rendszeréről. Ezek a vizsgálatok nem nélkülözhetetlenek a *Wedderburn—Artin*-féle struktúratételek bizonyításához (mert az, hogy Δ_n eleget tesz a minimumkövetelménynek jobboldali ideálokra, másképpen is bizonyítható) de teljesség kedvéért érdemes lesz részletesen foglalkozni velük, mivel a vektortérhez kapcsolódó szemléletes módszert szépen illusztrálják, és lényegesen több felvilágosítást nyujtanak a Δ_n gyűrű jobboldali ideáljairól, mint a klasszikus módszerek. Főcélunk annak bizonyítása, hogy *a Δ_n gyűrű egyszerű,* azaz nincsen Δ_n-től és 0-tól különböző ideálja, és hogy *a Δ_n gyűrű eleget tesz a minimumkövetelménynek jobboldali ideálokra nézve,* amin azt értjük, hogy Δ_n jobboldali ideáljainak bármely

$$J_1 \supset J_2 \supset J_3 \supset \ldots \tag{24}$$

szigorúan fogyó lánca csak véges számú tagból állhat. Ennél azt az élesebb eredményt fogjuk nyerni, hogy egy ilyen lánc legfeljebb $n+1$ tagot tartalmazhat.

Hogy az alábbi bizonyítás egyszerűen áttekinthető legyen, előrebocsátunk néhány alkalmazásra kerülő fogalmat, és egy ezekre vonatkozó tételt. Legyen $A \in \Delta_n$ tetszőleges lineáris transzformációja a V vektortérnek. Jelöljük VA-val az összes xA vektorok halmazát, ha x befutja V-t. Ez a VA halmaz nyilván altere V-nek, s ezt A képterének, a VA altér rangját pedig egyszersmind az *A lineáris transzformáció rangjának* is nevezzük. Idézzük emlékezetünkbe, hogy VA pontosan megegyezik a V modulusnak az A endomorfizmushoz tartozó és a 2. § elején értelmezett képmodulusával. Ugyanott értelmeztük az A endomorfizmus magvát. Ezt a V vektortér esetében az A lineáris transzformáció *magterének* nevezzük s $K(A)$-val jelöljük. $K(A)$ mindazon $x \in V$ vektorok halmaza, amelyekre $xA = 0$. Nyilvánvaló, hogy $K(A)$ is altere V-nek, s e $K(A)$ altér rangját az A lineáris transzformáció *nullitásának* nevezzük. Fontos és önmagában is érdekes tény az, hogy *bármely lineáris transzformáció rangjának és nullitásának összege megegyezik a V vektortér n rangjával.*

Ennek bizonyítása céljából legyen az A lineáris transzformáció rangja r, nullitása pedig m. Ekkor

$$K(A) = \Delta b_1 + \ldots + \Delta b_m, \tag{25}$$

ahol $b_1, \ldots, b_m$ a $K(A)$ magtér egyik bázisa. Ezt az előző § egyik eredménye szerint kiegészíthetjük a V vektortér egyik

$$b_1, \ldots, b_m, c_{m+1}, \ldots, c_n \tag{26}$$

bázisává, úgyhogy a

$$b_1A, \ldots, b_m A, c_{m+1}A, \ldots, c_n A \tag{27}$$

képvektorok az A lineáris transzformáció VA képterének generátorrendszerét alkotják. E vektorok közül azonban az első m számú (25) miatt zérus. Így a (27) alatti utolsó $n-m$ számú vektor is generálja a VA képteret. Másrészt e vektorok már lineárisan függetlenek, mert

$$\beta_{m+1}(c_{m+1}A) + \ldots + \beta_n(c_n A) = (\beta_{m+1}c_{m+1} + \ldots + \beta_n c_n)A = 0 \qquad (\beta_j \in \varDelta)$$

esetén

$$\beta_{m+1}c_{m+1} + \ldots + \beta_n c_n \in K(A) = \varDelta b_1 + \ldots + \varDelta b_m$$

(lásd (25)), ami a (26) alatti vektorok lineáris függetlensége miatt csak úgy lehetséges, hogy

$$\beta_{m+1} = \ldots = \beta_n = 0.$$

Megmutattuk ezzel, hogy a (27) alatti utolsó $n-m$ számú vektor lineárisan független generátorrendszere, azaz bázisa a VA képtérnek. Ez azt jelenti, hogy az A lineáris transzformáció r rangja megegyezik az $n-m$ számmal, azaz $r+m=n$, s éppen ezt kellett igazolnunk.

Most már rátérhetünk annak a tételnek bizonyítására, amely a $\varDelta_n$ gyűrű jobboldali ideáljainak teljes rendszerét feltárja előttünk. Legyen W a V vektortér tetszőleges altere, és tekintsük a V vektortér mindazon D lineáris transzformációit, amelyekre $WD=0$, azaz amelyek magtere tartalmazza W-t. Az összes ilyen tulajdonságú B lineáris transzformációk nyilván jobboldali ideált alkotnak a $\varDelta_n$ gyűrűben, s ezt a J jobboldali ideált röviden a W altér *annihilátorának* nevezzük. Bebizonyítjuk, hogy ilyen úton megkapjuk a $\varDelta_n$ gyűrű valamennyi jobboldali ideálját, azaz: *$\varDelta_n$ bármely jobboldali ideálja V egyik alterének annihilátora.* Ezzel egyidejűleg azt a szintén nem érdektelen eredményt is nyerjük, hogy *a $\varDelta_n$ teljes mátrixgyűrű jobboldali főideálgyűrű,* amin azt értjük, hogy a $\varDelta_n$ gyűrű bármely J jobboldali ideálja főideál, azaz van J-ben olyan A elem, amelyre $J = A\cdot\varDelta_n$. (Az $A\cdot\varDelta_n$ szorzat az összes $A\cdot F$ lineáris transzformációk halmazának jele, ahol F befutja $\varDelta_n$ összes elemeit.)

Állításaink igazolása céljából tekintsük a $\varDelta_n$ gyűrű valamely J jobboldali ideálját. A V vektortér mindama v elemei, amelyekre bármely, J-be tartozó B lineáris transzformáció esetén $vB=0$, egy W alteret alkotnak. Ezt a J jobboldali ideállal egyértelműen meghatározott alteret *a J által annullált altér*nek nevezzük. Nyilvánvaló, hogy ez a W altér része bármely olyan B lineáris transzformáció magterének, amelyre $B\in J$. Legyen W rangja r. Ekkor

$$W = \{b_1\} + \ldots + \{b_r\} = \varDelta b_1 + \ldots + \varDelta b_r, \tag{28}$$

ahol $b_1, \ldots, b_r$ a W altér egyik bázisa. A következőkben megmutatjuk, hogy *van J-ben olyan A lineáris transzformáció, amelynek rangja $n-r$.* Ebből az előrebocsátott állításunkból, mint rögtön látni fogjuk, közvetlenül adódik, hogy

$$J \subset W \text{ annihilátora} \subseteq A\cdot\varDelta_n \subseteq J. \tag{29}$$

Ebben pedig már benne van mindkét előbbi tétel, hogy t. i. J megegyezik a V vektortér egyik alterének annihilátorával, és $J = A \cdot \Delta_n$, azaz J főideál. A (29) alatti állítások közül csupán az szorul indokolásra, hogy a W altér annihilátora része az $A \cdot \Delta_n$ transzformációhalmaznak (hiszen az, hogy J része W annihilátorának, a W altér definíciójából, $A \cdot \Delta_n \subseteq J$ pedig a jobboldali ideál definíciójából nyilvánvaló, minthogy föltevésünk szerint $A \in J$). Az egyedül indokolásra szoruló állítást is könnyen beláthatjuk, felhasználva azt az előrebocsátott állításunkat, hogy van J-ben $n-r$ rangú A lineáris transzformáció.

Azt kell megmutatnunk, hogy a W altér annihilátora része az $A \cdot \Delta_n$ halmaznak, ami egyértelmű azzal az állítással, hogy *bármely olyan D lineáris transzformáció felírható*

$$D = A \cdot F \tag{30}$$

alakban (Δ_n alkalmas F elemével), amely eleme W annihilátorának, azaz amelyre (lásd (28))

$$b_1 D = \ldots = b_r D = 0 \tag{31}$$

teljesül. Ennek igazolása céljából legyen D tetszőleges olyan lineáris transzformáció, amely kielégíti (31)-et. Egészítsük ki a W altér $b_1, \ldots, b_r$ bázisát a V vektortér

$$b_1, \ldots, b_r, b_{r+1}, \ldots, b_n \tag{32}$$

bázisává. Tudjuk, hogy bármely lineáris transzformáció egyértelműen meg van határozva a V vektortér egy bázisának képével. Ennélfogva (30) helyessége következik olyan F lineáris transzformáció létezéséből, amelyre

$$b_1 D = b_1 AF, \quad \ldots, \quad b_n D = b_n AF \tag{33}$$

teljesül. Emez egyenlőségek közül azonban az első r számú (31) miatt bármely $F \in \Delta_n$ lineáris transzformáció esetén teljesül, hiszen feltevésünk szerint $A \in J$, s így W definíciója értelmében $WA = 0$, azaz $b_1 A = \ldots = b_r A = 0$. Eszerint csak olyan F lineáris transzformáció létezését kell bebizonyítanunk, amelynél a (33) alatti utolsó $n-r$ egyenlőség ki van elégítve. De ez már egészen könnyen megy. Mivel ugyanis a (32) alatti vektorok V bázisát alkotják, és $A \in J$ miatt $b_1 A = \ldots = b_r A = 0$, világos, hogy a

$$b_{r+1} A, \ldots, b_n A \tag{34}$$

vektorok generálják az $n-r$ rangú VA képteret. Ekkor azonban ezek a vektorok lineárisan függetlenek (mert ellenkező esetben $(n-r)$-nél kevesebb vektor, t. i. a (34) alatti vektorok egy valódi részhalmaza alkotná a VA képtér egyik bázisát, ami a rang invariancája miatt, és amiatt, hogy A rangja $n-r$, lehetetlen). Mármost mivel a (34) alatti vektorok lineárisan függetlenek, a V vektortér valamely bázisává egészíthetők ki, s így van olyan F lineáris transzformáció, amely az így nyert bázis elemeit (ezek között tehát a (34) alatti elemeket is) tetszőlegesen előírt elemekbe viszi át; ha az említett bázis elemei közül a (34) alatti elemekhez előírt képelemeknek rendre a

$$b_{r+1} D, \ldots, b_n D$$

vektorokat választjuk, akkor az ilyen módon megadható F lineáris transzformációra teljesül a (33) alatti utolsó $n-r$ egyenlőség. Így (29) bizonyítását befejeztük.

Csupán annak az előrebocsátott állításunknak igazolása van még hátra, hogy *amennyiben a* Δ_n *gyűrű* J *jobboldali ideálja által annullált* (28) *altér rangja* r, *van* J*-ben* $n-r$ *rangú lineáris transzformáció*. Ez pedig nyilvánvalóan következik az alábbi állításból: *Ha a* J*-beli* B *lineáris transzformáció rangja kisebb* $n-r$*-nél, akkor van* J*-ben olyan* F *lineáris transzformáció, amelynek rangja nagyobb* B *rangjánál.* Ennek bizonyítása céljából legyen a J-beli B lineáris transzformáció rangja k, és legyen $k<n-r$. Ekkor

$$VB = \Delta v_1' + \ldots + \Delta v_k' \qquad (k<n-r), \tag{35}$$

és

$$V = \Delta v_1' + \ldots + \Delta v_k' + \Delta v_{k+1}' + \ldots + \Delta v_n', \tag{36}$$

ahol $v_1', \ldots, v_k'$ a VB képtér bázisa, a legutóbbi egyenlet szerint pedig ezt a bázist kiegészítettük V egyik bázisává. Legyenek $v_1, \ldots, v_k$ inverz képei a $v_1', \ldots, v_k'$ vektoroknak a B lineáris transzformációnál, azaz olyan vektorok, amelyekre

$$v_1 B = v_1', \ldots, v_k B = v_k'. \tag{37}$$

Szögezzük le, hogy $v_1, \ldots, v_k$ *lineárisan független vektorok*, mert csak ekkor lehetnek e vektorok képei B-nél lineárisan függetlenek. — Mármost mivel $v_1', \ldots, v_k', v_{k+1}', \ldots, v_n'$ bázisa V-nek (lásd (36)), van olyan $B_1 \in \Delta_n$ lineáris transzformáció, amelyre

$$v_1' B_1 = v_1, \ldots, v_k' B_1 = v_k, v_{k+1}' B_1 = \ldots = v_n' B_1 = 0 \tag{38}$$

teljesül. Ekkor azonban a $B \in J$ miatt szintén J-beli

$$D = BB_1 \in J, \tag{39}$$

lineáris transzformáció (37) szerint kielégíti a

$$v_1 D = v_1, \ldots, v_k D = v_k, \quad \text{és} \quad VD = \Delta v_1 + \ldots + \Delta v_k \tag{40}$$

összefüggéseket, ahol az utóbbi a $v_1, \ldots, v_k$ vektorok előbb leszögezett lineáris függetlenségéből következik, valamint abból, hogy (38) miatt $VB_1 = \{v_1, \ldots, v_k\}$ és így egyszersmind $VD = \{v_1, \ldots, v_k\}$ (lásd (39)). Minthogy D rangja (40) szerint k, a lineáris transzformációk rangjának és nullításának összegére vonatkozó tétel értelmében D nullitása $n-k$. Másrészt $k<n-r$, tehát D nullitása $>n-(n-r)=r$, úgyhogy D magtere nem része a (28) alatti r rangú W altérnek. Ez azt jelenti, hogy van olyan x vektor, amely eleme D magterének, de nem eleme W-nek:

$$xD = 0, \qquad x \notin W, \tag{41}$$

azaz amelyhez van olyan

$$E \in J \tag{42}$$

lineáris transzformáció, hogy

$$xE = x' \neq 0.$$

(W értelmezése szerint ugyanis csak a W altér elemeit annullálják az összes J-beli lineáris transzformációk, úgyhogy a (41) szerint W-n kívüleső x vektorhoz található olyan J-beli E lineáris transzformáció, amely x-et nem nullára képezi le.) De ekkor (az x' vektor kiegészíthető V egy bázisává, azaz) alkalmas $E_1 \in \Delta_n$ lineáris transzformáció esetén $x'E_1 = x$, és így

$$xEE_1 = xC = x. \tag{43}$$

Minthogy másfelől (39) szerint $D \in J$, és (42) miatt $EE_1 = C \in J$, azt nyertük, hogy egyszersmind

$$D + C - DC = F \in J. \tag{44}$$

De ekkor az így előállított F lineáris transzformációra (40), (41) és (43) alapján

$$v_i F = v_i D + v_i C - v_i DC = v_i + v_i C - v_i C = v_i \qquad (i = 1, \ldots, k),$$

és

$$xF = xD + xC - xDC = 0 + x - 0 = x$$

teljesül. Ennélfogva a (44) szerint J-beli F lineáris transzformáció képtere tartalmazza a $k+1$ számú és (40), (41) miatt nyilván lineárisan független $v_1, \ldots, v_k, x$ vektorokat, s ilyen módon sikerült megmutatnunk, hogy van J-ben olyan F lineáris transzformáció, amelynek rangja nagyobb a B transzformáció k rangjánál. — Ezzel legutóbb kitűzött állításunkat igazoltuk, s így egyszersmind a fenti tételek bizonyítását valamennyi részletében befejeztük.

Nyert eredményeinket a következő tételben rögzíthetjük: *Ha a Δ_n gyűrű tetszőleges J jobboldali ideáljának annulált altere W, akkor W annihilátora éppen J.* — Ehhez hozzáfűzhetjük teljesség kedvéért a következő, sokkal könnyebben adódó megfordítást: *Ha a V vektortér tetszőleges W alterének annihilátora a Δ_n gyűrű J jobboldali ideálja, akkor a J által annulált altér éppen W.* Ennek helyessége abból következik, hogy ha W a V vektortér tetszőleges altere, és J a W altér annihilátora, akkor J annulálja W-t, de egyetlen W-n kívüleső z vektort sem annullál (ami azt jelenti, hogy van J-ben olyan A lineáris transzformáció, amelyre $zA \neq 0$). Amennyiben ugyanis z a V vektortérnek tetszőleges W-n kívüleső vektora (s ilyen van, mert nyilván szorítkozhatunk arra az esetre, amikor W valódi része V-nek, minthogy a $W = V$ esetben az előző mondat állítása semmitmondó), akkor a V vektortér (19) alatti előállítása szerint van V-nek olyan A lineáris transzformációja, amelyre $WA = UA = 0$, de $zA = z$. Ez az A lineáris transzformáció eleme J-nek (hiszen annullálja W-t), s így megmutattuk, hogy V-nek bármely W-n kívüleső z vektorához található z-t nem annulláló J-beli lineáris transzformáció. Ezzel a fenti tétel megfordítása is bizonyítást nyert. — Mindezzel a következő tételt igazoltuk:

Az n dimenziós V vektortér összes altereinek rendszere és e vektortér lineáris transzformációból álló Δ_n gyűrű összes jobboldali ideáljainak rendszere között kölcsönösen egyértelmű vonatkozás áll fenn. E kölcsönösen egyértelmű vonatkozás által V bármely W alteréhez Δ_n-nek az a jobboldali ideálja van *hozzárendelve, amely éppen W annihilátora, Δ_n bármely J jobboldali ideáljához pedig V-nek J által annullált altere van hozzárendelve. Ez a kölcsönösen egyértelmű vonatkozás kiterjeszkedik V összes alterére és Δ_n összes jobboldali ideáljára, s ezenfelül szimmetrikus: Δ_n tetszőleges J jobboldali ideáljához hozzárendelt W altérnek éppen J a hozzárendelt jobboldali ideálja, és V tetszőleges W alteréhez hozzárendelt J jobboldali ideálnak éppen W a hozzárendelt altere.*

Külön kiemeljük, hogy *ha a Δ_n gyűrű J_1 és J_2 jobboldali ideáljaira $J_1 \supset J_2$, azaz ha J_2 valódi része J_1-nek, akkor a megfelelő alterekre $W_1 \subset W_2$ teljesül.* Ez a fentebb bebizonyított legsúlyosabb eredményből következik, mely szerint J_1 is, J_2 is annihilátora a V vektortér bizonyos, jól meghatározott W_1 ill. W_2 alterének. Mármost $J_1 \supset J_2$ miatt nyilvánvaló, hogy $W_1 \subseteq W_2$. De $W_1 = W_2$ lehetetlen, mert ebből $J_1 = J_2$ következnék, minthogy bármely altér egyértelműen meghatározza annihilátorát, s így megegyező altereknek az annihilátora is megegyező. — Ezzel egyszersmind igazoltuk azt is, hogy *a Δ_n teljes mátrixgyűrű eleget tesz a minimumkövetelménynek jobboldali ideálokra nézve,* azaz Δ_n jobboldali ideáljainak bármely (24) alatti szigorúan fogyó lánca csak véges számú tagból állhat. Ennél többet is kaptunk: nevezetesen azt, hogy a (24) alatti láncnak legfeljebb $n+1$ tagja lehet. Előbbi megjegyzésünk szerint ugyanis a (24) alatti jobboldali ideálok bármelyike a V vektortér egyik alterének annihilátora, és e megfelelő alterek egy (20) alatti szigorúan növekvő láncot alkotnak. Az utóbbi láncról azonban már tudjuk az előző §-ból, hogy legfeljebb $n+1$ tagja lehet.

Abból a fentebb bebizonyított tételből, amelyet e § főeredményének tekinthetünk, s mely szerint a Δ_n gyűrű bármely jobboldali ideálja V egyik alterének annihilátora, nyomban következik az is, hogy *a Δ_n teljes mátrixgyűrű egyszerű,* azaz nincsen Δ_n-től és 0-tól különböző (kétoldali) ideálja. Legyen ugyanis P tetszőleges kétoldali ideál a Δ_n gyűrűben. Minthogy P jobboldali ideál, P a V vektortér W alterének annihilátora. Ha $W=0$, akkor $P=\Delta_n$, mert a 0 altér annihilátora az egész Δ_n gyűrű. Legyen a továbbiakban $W \neq 0$. Ekkor W-ben van $y \neq 0$ vektor, s erre

$$y\Delta_n = V \tag{45}$$

érvényes. (Egy zérustól különböző vektort ugyanis a V vektortér bármely vektorába átvisz alkalmasan választott lineáris transzformáció.) Mármost minthogy P baloldali ideál is, $\Delta_n P \subseteq P$, és így (45) szerint azt kapjuk, hogy

$$0 = yP \supseteq y(\Delta_n P) = (y\Delta_n)P = VP.$$

($yP=0$ abból következik, hogy P a W altér annihilátora és $y \in W$.) Eszerint a P transzformációhalmaz bármely eleme annullálja az egész V vektorteret. Ekkor azonban P csak a zérustranszformációt tartalmazhatja, azaz $P=0$, mert bármely nem-zérus transzformáció V-nek valódi alterét annullálja. Ezzel megmutattuk, hogy a Δ_n gyűrű tetszőleges P ideálja vagy Δ_n, vagy 0, azaz Δ_n valóban egyszerű gyűrű.

Megemlítjük, hogy e § főeredménye, mely szerint Δ_n bármely jobboldali ideálja V egyik alterének annihilátora, valamint az ebből nyert kölcsönösen egyértelmű vonatkozás V altereinek rendszere és Δ_n jobboldali ideáljainak rendszere között, részletesen tárgyalva van az [5] és [11] művekben is. A mi fenti bizonyításunk azonban lényegesen egyszerűbb, és kisebb technikai apparátust igényel.

Megemlítjük továbbá, hogy a fentebb kifejtetthez hasonló elmélet építhető fel a Δ_n teljes mátrixgyűrű baloldali ideáljaira is, amelynek lényege az, hogy a V vektortér altereinek rendszere és a Δ_n gyűrű baloldali ideáljainak rendszere között ugyancsak kölcsönösen egyértelmű, mindkét rendszert kimerítő és szimmetrikus vonatkozás áll fenn a következő alapon: Mindama lineáris transzformációk, amelyek a V vektorteret egy kijelölt W altérbe képezik le (azaz amelyeknél a képtér $\subset W$) a Δ_n gyűrű egy meghatározott H baloldali ideálját alkotják, s ez lesz a W altérhez hozzárendelt baloldali ideál; tetszőlegesen megadott H baloldali ideálhoz pedig az összes VF képterek egyesítési halmazaként értelmezett altér tartozik hozzá ebben a hozzárendelésben, ahol F befutja a H-t alkotó összes lineáris transzformációkat. A Δ_n gyűrű baloldali ideáljainak emez elméletéből a fentiekhez hasonló úton következik, hogy Δ_n minimumkövetelménynek tesz eleget baloldali ideálokra nézve is, sőt: Δ_n baloldali ideáljainak szigorúan fogyó lánca legfeljebb $n+1$ tagot tartalmazhat.

4. §. Egyszerű és féligegyszerű gyűrűk

V-vel ebben a §-ban is mindig olyan n dimenziós vektorteret jelölünk, amelynek skaláris tartománya a Δ ferdetest, és Δ_n-nel továbbra is e vektortér összes lineáris transzformációinak gyűrűjét jelöljük. E gyűrűre a teljes mátrixgyűrű elnevezést is fogjuk használni. Ha egyszerre több $\Delta_{n_1}^{(1)}, \ldots, \Delta_{n_k}^{(k)}$ teljes mátrixgyűrű szerepel, akkor ezek közül bármelyik $\Delta_{n_i}^{(i)}$ egy $\Delta^{(i)}$ ferdetesttel mint skaláris tartománnyal ellátott n_i dimenziójú vektortér összes lineáris transzformációiból álló gyűrűt, vagy (ami lényegében ugyanaz) a $\Delta^{(i)}$ ferdetest elemeiből felépíthető n_i-szer n_i-s mátrixok teljes gyűrűjét jelöli. Az $i=1, \ldots, k$ esetekben mind a $\Delta^{(i)}$ ferdetestek, mind az n_i rangszámok különbözők lehetnek. (Az értelmezésből következik, hogy $n_i=1$ esetén $\Delta_{n_i}^{(i)}=\Delta^{(i)}$.)

Mielőtt továbbmennénk, mindenekelőtt egy gyűrű direkt összegként való előállításának fogalmát kell bevezetnünk. Ez speciális esetként benne van abban az általánosabb fogalomban, amelyet a 2. §-ban értelmeztünk (lásd a (9) és (10) egyenleteket), s amely az operátormodulus direkt összegre való felbontását illeti. A számunkra most szükséges fogalom úgy jön létre az ottaniból, hogy a tetszőleges R gyűrűt önmagával mint baloldali és jobboldali operátortartománnyal egyaránt ellátott operátormodulusnak tekintjük. Ennélfogva *az R gyűrű akkor és csak akkor bontható fel*

$$R=P_1+\ldots+P_k \tag{46}$$

alakban direkt összegre, ha R mint modulus (azaz additív Abel-féle csoport) *felbontható $P_1, \ldots, P_k$ additív alcsoportjainak direkt összegére, s az itt szereplő P_i additív alcsoportok* valamennyien megengedhető részmodulusok a baloldali R operátortartományra és a jobboldali R operátortartományra nézve egyaránt, azaz: *valamennyien kétoldali ideálok R-ben.* Közvetlenül belátható, hogy mindez ekvivalens az alábbi követelménnyel: *Az R gyűrű akkor és csak akkor bontható fel a* (46) *alatti direkt összegre, ha az R gyűrű $P_1, \ldots, P_k$ részhalmazai olyan tulajdonságúak, hogy R bármely r eleme előállítható, mégpedig pontosan egyféleképpen*

$$r = r_1 + \ldots + r_k \qquad (r_i \in P_i) \tag{47}$$

alakban, és emez előállítás mellett a gyűrűelemek összeadása és szorzása „komponensenként" végezhető, azaz ha

$$r' = r_1' + \ldots + r_k' \qquad (r_i' \in P_i)$$

ugyancsak tetszőleges elem R-ben, akkor $r + r'$ illetve rr' egyértelmű felbontása a (46)*-nak megfelelő komponensekre*

$$r + r' = (r_1 + r_1') + \ldots + (r_k + r_k') \qquad (r_i + r_i' \in P_i)$$

illetve

$$rr' = r_1 r_1' + \ldots + r_k r_k' \qquad (r_i r_i' \in P_i)$$

alakban adható meg. Közvetlenül látható, hogy az utóbbi követelmény maga után vonja azt, hogy a (46)-ban szereplő P_i részhalmazok additív alcsoportok, sőt kétoldali ideálok legyenek R-ben, s a (47) alatti előállítás akkor és csak akkor egyértelmű, ha az R gyűrű zéruseleme csak $0 = 0 + \ldots + 0$ alakban állítható elő a (47) szerint előírt módon. Ennek a követelménynek ismét van egy ekvivalens formája: *bármelyik P_i részmodulusnak a többi által generált $\{P_1, \ldots, P_{i-1}, P_{i+1}, \ldots, P_k\}$ részmodulussal közös eleme csak a zérus legyen.* (A $P_1, \ldots, P_s$ részmodulusok által generált részmodulus az összes $r_1 + \ldots + r_s$ elemek halmaza, ahol $r_i \in P_i$.)

Könnyen beláthatjuk azt is, hogy ha $P_1', \ldots, P_k'$ tetszőleges gyűrűk, akkor mindig konstruálható olyan R gyűrű, amely tartalmaz mindegyik P_i'-höz egy azzal izomorf P_i gyűrűt kétoldali ideálként, éspedig oly módon, hogy R (46) szerint felbontható e $P_1, \ldots, P_k$ ideálok direkt összegére. Az igy konstruált R gyűrűről azt mondjuk, hogy *a tetszőlegesen megadott $P_1', \ldots, P_k'$ gyűrűk direkt összegeként* állítottuk elő. — Hogy mindig van ilyen R gyűrű, azt így mutathatjuk meg. Adva vannak a tetszőleges $P_1', \ldots, P_k'$ gyűrűk, s definiáljuk R-et az összes $(x_1, \ldots, x_k)$ alakú rendszerek halmazaként, ahol $x_i \in P_i'$ $(i = 1, \ldots, k)$. Az összes így képezhető rendszereket tekintve az R halmaz elemeinek, R-ben egyenlőséget, összeadást és szorzást definiálhatunk a következőképpen:

$$(x_1, \ldots, x_k) = (y_1, \ldots, y_k) \qquad (x_i, y_i \in P_i')$$

akkor és csak akkor álljon, ha $x_i = y_i$ $(i = 1, \ldots, k)$. Legyen továbbá

$$(x_1, \ldots, x_k) + (y_1, \ldots, y_k) = (x_1 + y_1, \ldots, x_k + y_k),$$
$$(x_1, \ldots, x_k)(y_1, \ldots, y_k) = (x_1 y_1, \ldots, x_k y_k).$$

Ilyen módon gyűrűvé lett az R halmaz, s világos, hogy R mindama

$$(0, \ldots, 0, x_i, 0, \ldots, 0) \qquad (x_i \in P_i') \tag{48}$$

elemei, amelyek i-edik komponense P_i' tetszőleges eleme, az összes többi komponense viszont zérus, a P_i' gyűrűvel izomorf P_i (kétoldali) ideált alkotnak R-ben. Az így értelmezett P_i $(i = 1, \ldots, k)$ kétoldali ideáloknak mármost nyilvánvalóan direkt összege az R gyűrű, a (46) összefüggéssel kapcsolatban megadott értelmezés szerint. Ezzel befejeztük legutóbbi állításunk bizonyítását. — Megemlítjük még, hogy a (48) alatti elemet természetesnek látszik azonosítani az x_i elemmel, amivel azt érjük el, hogy maguk az egymástól függetlenül megadott $P_1', \ldots, P_k'$ gyűrűk is beágyazást nyernek az előbb konstruált R gyűrűbe, mint R részgyűrűi (sőt ideáljai). Ennélfogva (P_i' helyett a vele azonosított P_i gyűrűt írva) megállapodhatunk abban, hogy az egymástól függetlenül, teljesen tetszőlegesen (tehát pl. nem okvetlenül egy közös, tartalmazó gyűrű részgyűrűiként) megadott $P_1, \ldots, P_k$ gyűrűknek az előbb leírt módon „külsőleg“ konstruált direkt összege már részgyűrűiként (sőt ideáljaiként) tartalmazza e $P_1, \ldots, P_k$ gyűrűket, és így egyszersmind megegyezik e részgyűrűk (46) alatti értelemben definiált „belső“ direkt összegével.

Ez a konstrukció számunkra abban az esetben szükséges, amikor

$$R = \Delta_{n_1}^{(1)} + \cdots + \Delta_{n_k}^{(k)}, \tag{49}$$

azaz, ha az R gyűrű k számú teljes mátrixgyűrű direkt összege. Következik a fentiekből, hogy k számú $\Delta^{(1)}, \ldots, \Delta^{(k)}$ ferdetest, illetve $n_1, \ldots, n_k$ pozitív egész szám tetszésszerinti előírása esetén mindig van olyan R gyűrű, amely előállítható (49) alakban, azaz amely a $\Delta_{n_1}^{(1)}, \ldots, \Delta_{n_k}^{(k)}$ teljes mátrixgyűrűk direkt összege. Most megmutatjuk, hogy ez *az R gyűrű minimumkövetelménynek tesz eleget jobboldali ideálokra nézve,* közben csak azt használva fel, hogy mindegyik $\Delta_{n_i}^{(i)}$ direkt komponens egységelemes gyűrű és kielégíti a minimumkövetelményt (amit már tudunk az előző §-ból).

Állításunk igazolása céljából tekintsük a (49) alatti R gyűrű jobboldali ideáljainak valamely

$$J_1 \supset J_2 \supset \cdots \supset J_s \supset \cdots \tag{50}$$

szigorúan fogyó láncát. Megmutatjuk, hogy e lánc bármely J_s tagja (mint gyűrű) előállítható olyan

$$J_s = J_s^{(1)} + \cdots + J_s^{(k)} \tag{51}$$

direkt összeg alakjában, ahol $J_s^{(i)}$ a $\Delta_{n_i}^{(i)}$ gyűrűnek jobboldali ideálja $(i = 1, \ldots, k)$. Ebből már nyilvánvalóan következik, hogy az (50) alatti lánc csak véges számú, sőt legfeljebb

$$(n_1 + 1)(n_2 + 1) \cdots (n_k + 1)$$

számú tagból állhat, hiszen $J_{s-1} \supset J_s$ miatt az (51) alatti direkt komponensek egyike, pl. $J_s^{(i)}$, valódi része a J_{s-1} jobboldali ideál megfelelő $J_{s-1}^{(i)}$ direkt komponensének, és ez a „fogyás" az i index esetében legfeljebb n_i+1 számú alkalommal következhetik be, minthogy $J_{s-1}^{(i)}$ is, $J_s^{(i)}$ is jobboldali ideálok a $\Delta_{n_i}^{(i)}$ teljes mátrixgyűrűben, amelyről már tudjuk az előző § alapján, hogy jobboldali ideáljainak bármely szigorúan fogyó lánca legfeljebb n_i+1 tagú lehet. — Végül azt, hogy *a* (49) *alatti R gyűrű bármely J_s jobboldali ideálja előállítható az* (51) *direkt összeg alakjában,* így láthatjuk be. A J_s jobboldali ideál része az R gyűrűnek, tehát bizonyos

$$x = x_1 + \cdots + x_k \qquad (x_i \in \Delta_{n_i}^{(i)}) \tag{52}$$

elemek halmaza. Világos, hogy J_s összes x elemeinek (52) alatti alakjában szereplő x_i (i-edik) komponensei a $\Delta_{n_i}^{(i)}$ gyűrű egy $J_s^{(i)}$ jobboldali ideálját alkotják. Azt kell belátnunk, hogy $x_i \in J_s$, mert ebből

$$J_s^{(i)} \subseteq J_s,$$

és így (51) helyessége következik. De ha a $\Delta_{n_i}^{(i)}$ gyűrű egységelemét e_i-vel jelöljük, akkor ennek (mint R elemének) a (49) alatti direkt felbontás szerinti előállítása

$$e_i = 0 + \cdots + 0 + e_i + 0 \cdots + 0, \tag{53}$$

és így a direkt összeg egyik tulajdonsága következtében az (52) és (53) alatti elemek szorzata

$$xe_i = x_1 \cdot 0 + \cdots + x_i e_i + \cdots + x_k \cdot 0 = x_i e_i = x_i.$$

Ám $x \in J_s$, és J_s jobboldali ideálja az R gyűrűnek. Ennélfogva $xe_i \in J_s$, azaz $x_i \in J_s$. Ezzel a bizonyítást befejeztük.

Most még egy másik fontos tulajdonságát igazoljuk a (49) alatti R gyűrűnek. Ennek értelmezéséhez azonban szükséges előbb az ideálok szorzatát definiálnunk. Ha H és J tetszőleges jobboldali ideálok valamely R gyűrűben, akkor ezek $H \cdot J$-vel jelölt *szorzatán* az összes (véges tagszámú)

$$h_1 j_1 + \cdots + h_r j_r$$

alakú összegek halmazát értjük, ahol $h_1, \ldots, h_r$ a H jobboldali ideál, $j_1, \ldots, j_r$ pedig a J jobboldali ideál tetszőleges elemei. Nyilvánvaló, hogy *ha H és J jobboldali ideálok R-ben, akkor $H \cdot J$ is jobboldali ideálja R-nek; ha viszont H baloldali, J pedig jobboldali ideál, akkor a fenti módon értelmezett $H \cdot J$ szorzat kétoldali ideál az R gyűrűben.* Ebből speciális esetként következik, hogy kétoldali ideálok szorzata is kétoldali ideál. — Az adott értelmezésből minden további nélkül következik, hogy kettőnél több (féloldali vagy kétoldali) ideál szorzata is meg van határozva a sorrend szerint megadott ideálokkal, mert az ideálok szorzása asszociatív művelet. Több ideál szorzatának speciális esete az *ideál hatványa.* Az R gyűrű valamely J jobboldali ideálját akkor nevezzük *nilpotens*nek, ha J-nek van olyan hatványa, amely (az egyetlen elemből) álló zérusideál, azaz ha van olyan m természetes szám, amelyre $J^m = (0)$.

Mármost bebizonyítjuk, hogy *a (49) alatti R gyűrűben nincsen (0)-tól különböző nilpotens jobboldali ideál.* Ennek igazolása céljából legyen J tetszőleges olyan jobboldali ideál az R gyűrűben, amely nem a zérusideál. Megmutatjuk, hogy ekkor

$$J^m \neq (0) \tag{54}$$

teljesül bármely m természetes számra. Láttuk az előbb, hogy J előállítható ((51)-nek megfelelően) olyan

$$J = J^{(1)} + \cdots + J^{(k)} \tag{55}$$

direkt összegként, amelynek $J^{(i)}$ komponense a $\Delta_{n_i}^{(i)}$ gyűrű valamely jobboldali ideálja ($i = 1, \ldots, k$). Mivel $J \neq (0)$, van olyan i, amelyre az (55) jobboldalán szereplő $J^{(i)}$ komponens nem a zérusideál:

$$J^{(i)} \neq (0). \tag{56}$$

Elég azt megmutatnunk, hogy bármely m-re

$$J^{(i)^m} \neq (0) \tag{57}$$

teljesül, mert ebből nyilvánvalóan következik (54) helyessége, minthogy $J^{(i)^m}$ része J^m-nek ((55) és az ideálok szorzatára előbb adott definíció értelmében). Mármost mivel $J^{(i)}$ jobboldali ideál a $\Delta_{n_i}^{(i)}$ gyűrűben, az előbbiek szerint *a $\Delta_{n_i}^{(i)} J^{(i)}$ szorzat kétoldali ideálja ugyanennek a gyűrűnek.* Világos az is, hogy (56) miatt $\Delta_{n_i}^{(i)} J^{(i)} \neq (0)$, mert $\Delta_{n_i}^{(i)}$ egységelemes gyűrű, és így a $\Delta_{n_i}^{(i)} J^{(i)}$ kétoldali ideálban szerepelnek elemekként $J^{(i)}$ elemei. Ezért szükségképpen

$$\Delta_{n_i}^{(i)} J^{(i)} = \Delta_{n_i}^{(i)}$$

teljesül, mivel megmutattuk az előző §-ban, hogy $\Delta_{n_i}^{(i)}$ egyszerű gyűrű, azaz (0)-tól különböző kétoldali ideálja csak egy van: önmaga. Legutóbbi egyenlőségünk mindkét oldalát ismételten szorozva $J^{(i)}$-vel, és ismételten alkalmazva is azt,

$$\Delta_{n_i}^{(i)} J^{(i)^2} = \Delta_{n_i}^{(i)} J^{(i)} = \Delta_{n_i}^{(i)}, \quad \Delta_{n_i}^{(i)} J^{(i)^3} = \Delta_{n_i}^{(i)} J^{(i)} = \Delta_{n_i}^{(i)}; \ldots$$

azaz általában

$$\Delta_{n_i}^{(i)} J^{(i)^m} = \Delta_{n_i}^{(i)}$$

adódik bármely m-re. Ebből pedig (57) helyessége nyilvánvaló.

Az eddigiek alapján már meg tudjuk fogalmazni az első *Wedderburn—Artin*-féle struktúratételt, amely azt mondja ki, hogy a (49) alatti R gyűrű imént igazolt két tulajdonsága jellemző a (49) alatti alakban előállítható gyűrűkre. A tétel könnyebben fogalmazható meg, ha bevezetjük a következő értelmezést: az olyan gyűrűt, amely teljesíti a jobboldali minimumkövetelményt, és nem tartalmaz 0-tól különböző nilpotens jobboldali ideált, *féligegyszerűnek* nevezzük. (Ezt az elnevezést éppen az alábbi tétel indokolja, amely szerint az említett tulajdonságokkal rendelkező gyűrűk közel állanak az egyszerű gyűrűkhöz, amennyiben véges számú egyszerű gyűrű direkt összegére bonthatók.) E fogalmat felhasználva, így mondható ki az

Első Wedderburn—Artin-féle struktúratétel: *Egy gyűrű akkor és csak akkor féligegyszerű, ha véges számú teljes mátrixgyűrű direkt összege.*

Mivel az előbb már megmutattuk, hogy a (49) alatti R gyűrű féligegyszerű, az alábbiakban a tétel „csak akkor" állítását kell már csupán igazolnunk. Ezen van a tétel igazi súlya, s ezt az 5. és 6. §-ban bizonyítjuk be.

Az előbb megfogalmazott tételnek speciális esete a

Második Wedderburn—Artin-féle struktúratétel: *Jobboldali ideálokra vonatkozó minimumkövetelménynek eleget tevő gyűrű akkor és csak akkor egyszerű, ha izomorf egy teljes mátrixgyűrűvel, vagy egy prímszám rendű zérógyűrűvel.*

Itt meg kell jegyeznünk, hogy e helyen gyűrű rendjén a gyűrű elemeinek számosságát értjük, *zérógyűrűnek* pedig az olyan gyűrűt nevezzük, amelyben bármely két elem szorzata zérus. Nyilvánvaló, hogy prímszámrendű zérógyűrű mindig egyszerű. Az előző §-ban azt is láttuk, hogy a teljes mátrixgyűrű egyszerű. Ennélfogva az utóbbi tétel esetében is elegendő a továbbiakban a tétel „csak akkor" állítását igazolnunk, amely könnyen fog következni az első struktúratételből.

Végül megemlítjük, hogy ha a jobboldali ideálokra kimondott követelményeket következetesen baloldali ideálokra fogalmazzuk át (azaz ha pl. féligegyszerűnek a baloldali ideálokra nézve minimumkövetelményt kielégítő és nilpotens baloldali ideál nélküli gyűrűt nevezzük), a fenti két struktúratétel akkor is szóról-szóra érvényes, és a bizonyítás is lényegében hasonló módon végezhető. Mégis valamivel egyszerűbb technikailag a jobboldali ideálokkal dolgozni, mert akkor közvetlenül azt kapjuk, hogy egy féligegyszerű gyűrű teljes mátrixgyűrűk direkt összegével izomorf. Viszont baloldali ideálokra megfogalmazott követelmények esetén izomorfizmus helyett antiizomorfizmus jön ki, s az ebből eredő csekély nehézséget még külön kell leküzdeni. Ezért fogalmaztuk mi e dolgozatban az említett követelményeket jobboldali ideálokra.

5. §. Jacobson tétele

Ebben a §-ban *Jacobson* ama nevezetes tételét bizonyítjuk be, amely rendkívül nagy mértékben megkönnyíti a *Wedderburn—Artin*-féle struktúratételek bizonyítását a régebbi bizonyításokhoz képest, s egyúttal geometriai szemléletessége által a legmélyebb betekintést is adja a tárgyalt problémák lényegébe. *Jacobson* eredeti bizonyítása megtalálható [9]-ben és [11]-ben. Mi az alábbiakban az *Artin* és *Tate* által egyszerűsített bizonyítást tárgyaljuk (lásd [4]), néhány technikai részlet tekintetében még tovább egyszerűsítve ezt a bizonyítást.

A tétel megfogalmazása előtt felhívjuk a figyelmet azokra az alapfogalmakra, amelyeket az operátormodulusokkal kapcsolatban a 2. §-ban részletesen megbeszéltünk. A tételben egy tetszőleges V modulus (additív Abel-féle csoport) szerepel, amelynek egy R gyűrű jobboldali operátortartománya. Nem kívánjuk meg, hogy R egységelemes gyűrű legyen, csak annyit kötünk ki, hogy $VR \neq 0$ teljesüljön, azaz hogy R „ne triviálisan operáljon" a V moduluson. Ez azt jelenti, hogy van olyan $v \in V$ és $a \in R$, amelyekre $va \neq 0$. Megkívánjuk továbbá, hogy a V modulus irreducibilis legyen az R operátortartományra nézve, ami — mint tudjuk — azt jelenti, hogy V-nek nincsen más megengedhető részmodulusa (azaz R-részmodulusa), mint V és 0.

Szerepelnek az alábbiakban a V modulusnak azok az endomorfizmusai is, amelyeket az R operátorgyűrű elemei indukálnak. Azt az endomorfizmust, amelyet az $a \in R$ elem indukál, a megfelelő latin nagybetűvel jelöljük, azaz a szóbanforgó endomorfizmus esetében így:

$$x \to xA = xa \qquad (x \in V;\ a \in R). \tag{58}$$

Újból hangsúlyozzuk azonban, hogy az R operátorgyűrű a elemét nem azonosíthatjuk az általa indukált A endomorfizmussal, mert R különböző elemei is indukálhatják ugyanazt az endomorfizmust. Ezért *az* (58) *szerinti*

$$a \to A \qquad (a \in R) \tag{59}$$

leképezés általában nem izomorfizmus, hanem csak *homomorfizmus az R operátorgyűrű és az R elemei által indukált endomorfizmusok gyűrűje között.*

A tétel kimondása előtt még egy fontos fogalmat kell bevezetnünk. A tétel egyik állítása szerint a V modulus egyszersmind vektortérnek is tekinthető egy jól meghatározott Δ ferdetestre mint skaláris tartományra nézve. (A V tér dimenziószáma nem szükségképpen véges.) Legyen n tetszőleges természetes szám, s tekintsünk n számú

$$x_1, \ldots, x_n \tag{60}$$

lineárisan független vektort, továbbá ugyancsak n számú teljesen tetszésszerinti

$$y_1, \ldots, y_n \tag{61}$$

vektort a V vektortérben. Mármost a V vektortér lineáris transzformációinak bizonyos rendszerét *n-szeresen tranzitív*nak nevezzük, ha V bármely (61) alatti vektoraihoz és bármely (60) alatti lineárisan független vektoraihoz van olyan A lineáris transzformáció a tekintett rendszerben, amelyre

$$x_1 A = y_1, \ldots, x_n A = y_n. \tag{62}$$

Ha pedig egy lineáris transzformáció-rendszer n-szeresen tranzitív a $n = 1, 2, 3, \ldots$ értékek mindegyikére, akkor e rendszert *sűrű*nek nevezzük. Világos, hogy véges dimenziójú vektortér lineáris transzformációinak valamely rendszere akkor és csak akkor sűrű, ha a rendszer a vektortér bármely lineáris transzformációját tartalmazza. (Ha a vektortér m dimenziós, akkor összes lineáris transzformációinak rendszere a fenti definíció szerint $n > m$ esetén is n-szeresen tranzitív, hiszen ekkor nincsen n számú lineárisan független vektor, úgyhogy a teljesítendő követelmény „üres".) Viszont olyan vektortérben, amelyben van végtelen sok lineárisan független vektor, lineáris transzformációknak nem teljes rendszere is lehet sűrű.

Az alábbiakban félreérthetőség elkerülése céljából a V modulus elemeit mindig (esetleg indexelt) x, y betükkel, az R gyűrű elemeit pedig az a, b, c betűkkel jelöljük. — Ezek előrebocsátása után a következőképpen szól

Jacobson tétele: *Legyen V irreducibilis R-modulus az R gyűrűre mint jobboldali operátortartományra nézve, és legyen $VR \neq 0$. Ekkor:*

1. *a V modulus összes R-endomorfizmusai egy Δ ferdetestet alkotnak, amely operátortartománya V-nek;*

2. *a V modulus e Δ ferdetestre mint skaláris tartományra nézve vektortér, és az R operátorgyűrű elemei által indukált* (58) *alatti endomorfizmusok e V vektortér lineáris transzformációinak sűrű rendszerét alkotják.*

3. *Ha R kielégíti a minimumkövetelményt a jobboldali ideálokra nézve, akkor V véges dimenziójú vektortér.*

Bizonyítás. A tétel 1. állítása tulajdonképpen *Schur* lemmájának tartalma, és így ennek bizonyításánál nincsen szükségünk a $VR \neq 0$ kikötésre, csak arra, hogy V irreducibilis modulus R-re nézve. Mint a 2. §-ból tudjuk, a V modulus összes R-endomorfizmusai egységelemes Δ gyűrűt alkotnak. Így csupán azt kell bebizonyítanunk, hogy e Δ gyűrű bármely zérustól különböző elemének van reciproka, vagyis másszóval azt, hogy ha $x \to xD$ a V modulusnak 0-tól különböző R-endomorfizmusa, akkor ez az $x \to xD$ endomorfizmus automorfizmus. Ehhez két dolgot kell belátnunk. Egyik az, hogy a D endomorfizmusnál a VD képmodulus a teljes V modulus; másik az, hogy a D endomorfizmus magva (azaz az $xD = 0$ követelményt kielégítő $x \in V$ elemek halmaza) a 0 modulus. Ami az előbbit illeti, világos, hogy a VD képtér megengedhető részmodulus az R operátorgyűrűre nézve, mert abból, hogy $x \to xD$ R-endomorfizmus (azaz az R operátortartomány elemeivel felcserélhető endomorfizmus),

$$(VD)a = (Va)D \subseteq VD$$

következik bármely $a \in R$ elemre. Minthogy pedig V irreducibilis R-modulus, $VD = V$, hiszen VD nem lehet egyenlő a másik megengedhető részmodulusával V-nek (t. i. 0-val), mert ezt a lehetőséget kizártuk azzal a kikötéssel, hogy $x \to xD$ nem a zérusendomorfizmus. — Ami viszont a tekintett endomorfizmus magvát illeti, ugyancsak világos, hogy ez is megengedhető részmodulus, mivel $xD = 0$ esetén $0 = xDa = (xa)D$ is teljesül bármely $a \in R$ elemre, úgyhogy a mag valamely x elemével együtt xa is mindig benne van a magban. A mag azonban nem lehet a teljes V modulus, mert ez az eset csak a zérusendomorfizmusnál következhetik be, úgyhogy a mag csak a 0 modulus lehet. Ezzel befejeztük annak bizonyítását, hogy a V modulus összes R-endomorfizmusai egy Δ ferdetestet alkotnak.

Mármost az így nyert Δ ferdetest természetesen adódó módon operátortartománya a V modulusnak (hiszen az xD szorzat bármely $x \in V$ és $D \in \Delta$ esetén eleve definiálva van, minthogy D endomorfizmusa V-nek). Ezért V a továbbiakban nemcsak R-modulusnak tekinthető, hanem vektortérnek is, mégpedig olyan vektortérnek, amelynek skaláris tartománya az imént nyert Δ ferdetest. Egyszerűbb áttekinthetőség és a 2. §-ban már megszokott jelölésmód kedvéért célszerű lesz a továbbiakban a Δ ferdetest elemeit, mint skalárisokat görög kisbetűkkel jelölni, s *Δ-t baloldali operátortartományként* írni. (Pontosan meggondolva a dolgot, ez tulajdonképpen azt is maga után vonja, hogy az eredeti Δ ferdetest helyett egy vele antiizomorf ferdetestre térünk át, mert ezzel a módosítással együttjár az, hogy két Δ-beli elem szorzataként mindig az ellenkező sorrendben vett tényezők szorzata lép fel. Ez azonban nem okoz semmi bajt, mert ferdetestnek antiizomorf képe is ferdetest, és mi a továbbiakban azt a ferdetestet jelöljük Δ-val, amely a fentebb nyert ferdetestnek antiizomorf képe.)

Eddigi eredményeinket abban foglalhatjuk össze, hogy a V modulust a továbbiakban nem csak jobboldali R-modulusnak, hanem egyszersmind baloldali Δ-modulusnak is tekinthetjük egy jól meghatározott Δ ferdetestre nézve. Δ elemei a V modulus R-endomorfizmusai, azaz az R-beli operátorokkal felcserélhető endomorfizmusai. Minthogy megállapodásunk szerint Δ elemeit baloldali operátorokként írjuk és görög kisbetűkkel jelöljük, bármely $\alpha \in \Delta$, $x \in V$, $a \in R$ elemekre évényes az

$$(\alpha x)a = \alpha(xa)$$

összefüggés, vagy az R-beli a operátorok helyett az általuk indukált A endomorfizmusokat szerepeltetve (lásd (58)):

$$(\alpha x)A = \alpha(xA). \tag{63}$$

Ebből következik, hogy az R gyűrű elemei által indukált (58) alatti endomorfizmusok *lineáris transzformációi* V-nek, mint a Δ skaláris tartománnyal ellátott vektortérnek. — Hangsúlyozzuk másfelől, hogy *a V modulus bármely olyan endomorfizmusa, amely az R elemei által indukált* (58) *alatti lineáris transzformációk mindegyikével felcserélhető, egy Δ-beli α elemmel létesített*

$$x \to \alpha x \qquad (x \in V) \tag{64}$$

leképezés. Ez Δ definíciójából következik.

Most rátérünk a *Jacobson* tételében kimondott 2. és 3. állítás bizonyítására. Ezeket a következő segédtétel alapján igazolhatjuk legegyszerűbben:

Segédtétel. *Ha $x_1, \ldots, x_n$ lineárisan független vektorok a Δ skaláris tartománnyal ellátott V vektortérben, akkor van olyan $a \in R$, amelyre*

$$x_1 a = \cdots = x_{n-1} a = 0, \tag{65}$$

de

$$x_n a \neq 0. \tag{66}$$

E segédtétel bizonyítása előtt megmutatjuk, hogy egyszerűen következik ebből *Jacobson* tételének 2. és 3. állítása.

R mindamaz elemei, amelyekre (65) teljesül, nyilván egy J jobboldali ideált akotnak az R gyűrűben, és a segédtétel szerint van olyan $a \in R$ elem, amelyre (66) érvényes. De akkor $x_n J \neq 0$ ($x_n J$-vel jelölve az $x_n a$ elemek halmazát, ha a befutja J összes elemeit). Másfelől $x_n J$ nyilván megengedhető részmodulusa V-nek R-re nézve (hiszen ha $a \in J$, akkor $x_n a$-val együtt $x_n ab$ is eleme $x_n J$-nek tetszőleges $b \in R$ esetén, minthogy J jobboldali ideál R-ben), s így V irreducibilis R-modulus volta miatt $x_n J = V$. Ennélfogva tetszőlegesen előírt $y_n \in V$ elemhez van olyan $a_n \in J$, amelyre

$$x_n a_n = y_n \quad \text{és} \quad x_1 a_n = \cdots = x_{n-1} a_n = 0$$

teljesül. Hasonlóan következik a segédtételből (az n index helyett i-t véve) olyan $a_i \in R$ elem létezése, amelyre

$$x_i a_i = y_i, \quad x_1 a_i = \cdots = x_{i-1} a_i = x_{i+1} a_i = \cdots = x_n a_i = 0, \tag{67}$$

$(i = 1, 2, \ldots, n)$. Az így kapott $a_1, \ldots, a_n$ elemek

$$a = a_1 + \cdots + a_n$$

összege által indukált (58) alatti lineáris transzformációja a V vektortérnek (67) szerint kielégíti (62)-t. Ezzel *Jacobson* tételének 2. állítása bizonyítást nyert.

A 3. állítás bizonyítása céljából azt mutatjuk meg, hogy ha a V vektortér nem véges dimenziójú, akkor az R operátorgyűrű nem elégíti ki a jobboldali minimumkövetelményt. Tegyük fel tehát, hogy V nem véges dimenziójú vektortér. Ekkor megadható benne végtelen sok

$$x_1, x_2, x_3 \ldots, x_n, \ldots$$

lineárisan független vektor. Jelöljük J_{n-1}-gyel az R gyűrű összes olyan a elemeinek halmazát, amelyre (65) teljesül ($n = 2, 3, 4, \ldots$). J_{n-1} nyilván jobboldali ideál R-ben, és (66) miatt J_n valódi része J_{n-1}-nek (hiszen a (65)-öt és (66)-ot kielégítő a elemre $a \in J_{n-1}$, de $a \notin J_n$). Ennélfogva a

$$J_1 \supset J_2 \supset J_3 \supset \cdots \supset J_n \supset \cdots$$

szigorúan fogyó jobboldali ideál-lánc végtelen sok tagú, tehát R valóban nem teljesíti a jobboldali minimumkövetelményt.

Így már csak az előrebocsátott segédtételt kell igazolnunk, s ezt n szerinti teljes indukcióval végezhetjük. Legyen először $n = 1$. Ekkor $x_1 \neq 0$ (hiszen egyetlen vektort tartalmazó rendszer akkor és csak akkor lineárisan független, ha a vektor $\neq 0$). Ebben az egyszerű esetben a (65) alatti állítás „üres", és így csupán (66)-ot kell igazolnunk (alkalmas $a \in R$ elemre). (66) helyessége következik abból, hogy $x_1 R \neq 0$. Ez viszont azért igaz, mert $x_1 R = 0$ esetén az összes ilyen tulajdonságú x_1 vektorok halmaza a V modulusnak R-re nézve megengedhető részmodulusát alkotnák, amely $= V$, minthogy tartalmazna zérustól különböző elemet; ez azonban azt jelentené, hogy $VR = 0$, ami ellentmondást jelent *Jacobson* tételének azzal a kikötésével, hogy $VR \neq 0$.

Legyen a továbbiakban $n > 1$, és tegyük fel, hogy a segédtétel állítása n helyén $(n-1)$-re már igazolást nyert. Tekintsük az összes olyan $a \in R$ elemek J halmazát, amelyekre

$$x_1 a = \cdots = x_{n-2} a = 0 \tag{68}$$

érvényes. (Ha $n = 2$, akkor a (68) kikötés semmitmondó, és $J = R$ veendő.) Nyilvánvaló, hogy J jobboldali ideál az R gyűrűben. Ezért $x_{n-1}J$ megengedhető részmodulusa V-nek R-re nézve. Minthogy indukciós feltevésünk szerint van olyan $a \in R$ elem, amelyre (68) teljesül, azaz $a \in J$, de $x_{n-1} a \neq 0$, az $x_{n-1}J$ megengedhető részmodulus $\neq 0$, és így V irreducibilis volta miatt

$$x_{n-1} J = V. \tag{69}$$

Mármost J definíciója értelmében (lásd (68)) célunkat elértük, ha megmutatjuk, hogy *van olyan $a \in J$ elem, amelyre*

$$x_{n-1} a = 0, \qquad x_n a \neq 0 \tag{70}$$

teljesül.

Tegyük fel, hogy ez nem igaz. Ekkor azt az ellentmondást fogjuk nyerni, hogy a segédtételben szereplő $x_1, \ldots, x_n$ vektorok nem lineárisan függetlenek (noha így választottuk ezeket). Ez az ellentmondás a bizonyítás befejezését fogja jelenteni. — Amennyiben előbbi állításunk nem igaz, akkor ez annyit jelent, hogy *bármely olyan a elemre, amelyre*

$$a \in J \quad \text{és} \quad x_{n-1} a = 0 \tag{71}$$

érvényes, szükségképpen

$$x_n a = 0 \tag{72}$$

is teljesül. De ekkor, mint azonnal belátjuk, az

$$x = x_{n-1} a \to x_n a \qquad (a \in J,\ x \in V) \tag{73}$$

alakban megadható leképezés a V modulusnak R-endomorfizmusa. Valóban, (69) miatt V bármely x eleme előállítható $x_{n-1}a$ alakban (alkalmas $a \in J$ elemmel), úgyhogy a (73) alatti leképezés a teljes V modulust képezi le önmagába. Most megmutatjuk, hogy a leképezés egyértelmű, azaz V bármely eleméhez pontosan egy elemet rendel hozzá. Ha ugyanis különböző $a_1, a_2 (a_1, a_2 \in J)$ elemekre teljesül $x = x_{n-1} a_1 = x_{n-1} a_2$, akkor $x_{n-1}(a_1 - a_2) = 0$, s minthogy a fentiek szerint (71) szükségképpen maga után vonja (72) fennállását, egyszersmind $x_n(a_1 - a_2) = 0$, azaz

$$x \to x_n a_1 = x_n a_2.$$

Ezzel megmutattuk a (73) leképezés egyértelműségét. A leképezés homomorf tulajdonsága egészen nyilvánvaló: ha $x' = x_{n-1} a'$, $x'' = x_{n-1} a''$, akkor

$$x' + x'' = x_{n-1}(a' + a''),$$

és így a (73) szerint $(x' + x'')$-höz hozzárendelt elem

$$x_n(a' + a'') = x_n a' + x_n a'',$$

azaz az x'-höz és x''-höz hozzárendelt képelemek összege. Végül ha b tetszőleges eleme az R gyűrűnek, akkor (73)-ból

$$xb = x_{n-1}ab \rightarrow x_n ab \qquad (ab \in J)$$

adódik, ami mutatja, hogy xb képe x képének (jobboldali) b-szerese. Mindezzel megmutattuk, hogy a (73) alatti leképezés a V modulus egyik R-endomorfizmusa. Minthogy azonban V-nek bármely R-endomorfizmusa (Δ definíciójából következőleg) egy (64) alatti leképezés, azt találtuk, hogy van olyan $\alpha \in \Delta$ elem, amelyre a (73) alatti leképezés megegyezik a (64) alattival, azaz amelyre

$$x_n a = \alpha(x_{n-1}a),$$

$$(x_n - \alpha x_{n-1}) a = 0 \qquad (74)$$

teljesül bármely $a \in J$ elem esetén. Ekkor azonban az $n-1$ számú

$$x_1, \ldots, x_{n-2}, x_n - \alpha x_{n-1} \qquad (75)$$

vektor nem lehet lineárisan független a V vektortérben. Ha ugyanis ezek a vektorok lineárisan függetlenek volnának, az indukciós feltevésünk szerint $n-1$ vektor esetére már igaznak talált segédtétel értelmében volna olyan $a \in R$ elem, amelyre (68) érvényes, azaz $a \in J$, de (74) nem teljesül. Ennélfogva (74) következtében a (75) alatti vektorok nem lineárisan függetlenek, azaz fennáll egy

$$\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_{n-2} x_{n-2} + \alpha_{n-1}(x_n - \alpha x_{n-1}) = 0$$

alakú reláció, nem csupa zérus értékű $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ Δ-beli skalárissal. Ez viszont azt jelenti, hogy az $x_1, \ldots, x_n$ vektorok nem lineárisan függetlenek, azaz a fentebb előre jelzett ellentmondáshoz jutottunk, s így a bizonyítás befejeződött.

6. §. A Wedderburn—Artin-féle struktúratételek bizonyítása

Előbb az *első Wedderburn—Artin*-féle struktúratételt bizonyítjuk be. Mint a 4. §-ban már megjegyeztük, elegendő azt megmutatnunk, hogy bármely R féligegyszerű gyűrű előállítható (49) alakban, véges számú mátrixgyűrű direkt összegeként. Ezt *Jacobson* tétele alapján igazoljuk.

Legyen R tetszőleges féligegyszerű gyűrű. Ekkor van R-ben minimális jobboldali ideál, azaz olyan, (0)-tól különböző jobboldali ideál, amely már nem tartalmazza valódi részeként R-nek egyetlen (0)-tól különböző jobboldali ideálját sem. Ez a jobboldali minimumkövetelményből következik, mert ha R nem tartalmazna minimális jobboldali ideált, akkor megadható volna R jobboldali ideáljainak végtelen sok tagú, szigorúan fogyó lánca. Legyen V *minimális jobboldali ideál* R-ben. Ekkor V nyilvánvalóan irreducibilis jobboldali R-modulus. Világos az is, hogy $VR \neq 0$, mert $VR = 0$-ból $V \cdot V = V^2 = 0$ következnék, amit kizár az a föltevésünk, hogy R féligegyszerű gyűrű. Ennélfogva a tekintett V irreducibilis R-modulusra teljesülnek *Jacobson* tételének feltételei, s minthogy R kielégíti a jobboldali minimumkövetelményt, *Jacobson* tételéből közvetlenül nyerjük a következő eredményt:

A V modulus egy jól meghatározott Δ ferdetestre, mint skaláris tartományra nézve véges m dimenziójú vektortér, és az R gyűrű elemei által indukált (58) *alatti endomorfizmusok e V vektortér összes lehetséges lineáris transzformációit kimerítik.*

Mivel a V vektortér összes lineáris transzformációi a Δ_m teljes mátrixgyűrűvel izomorf gyűrűt alkotnak, eredményünk az (58), (59) alatt már megállapított homomorfizmus figyelembevétele alapján azt jelenti, hogy az R gyűrűnek homoform képe Δ_m, azaz

$$R/K \sim \Delta_m. \tag{76}$$

Itt K a homomorfizmus magva, vagyis az a kétoldali ideál R-ben, amelyet az (59) szerint 0-ra leképezett elemek alkotnak; másszóval: *K a V modulus összes jobboldali annihilátorainak halmaza* (V jobboldali annihilátorán olyan $a \in R$ elemeit értve, amelyre $Va = 0$).

Mármost megmutatjuk, hogy az R gyűrű előállítható a K ideálnak és egy másik (alkalmasan választott) R_1 ideáljának direkt összegeként:

$$R = R_1 + K. \tag{77}$$

Ezzel egyszersmind készen is leszünk. (77) és (76) alapján ugyanis (lásd a (11)-gyel kapcsolatban tett megállapítást) azt nyerjük, hogy $R_1 \cong R/K \cong \Delta_m$, és így (77) azt mondja, hogy R előállítható egy teljes mátrixgyűrű és egy másik K gyűrű direkt összegeként. Minthogy R-el együtt a (77)-ben fellépő K direkt komponens is nyilvánvalóan féligegyszerű gyűrű, amennyiben $K \neq 0$, hasonló úton K-t is felbonthatjuk egy teljes mátrixgyűrű és egy másik gyűrű direkt összegére, s. í. t. Ez az eljárás azonban véges számú lépés után megszakad, és így a kívánt (49) előállításhoz vezet, mert ellenkező esetben R nem teljesítené a jobboldali minimumkövetelményt.

A már egyedül hátralevő (77) összefüggés helyességét az $R_1 = RV$ gyűrűre mutatjuk meg, amely nyilván kétoldali ideál R-ben. Az mindenekelőtt világos, hogy RV és K közös része $S = 0$, úgyhogy RV és K az

$$RV + K \tag{78}$$

direkt összegként állítja elő R-nek általuk generált részgyűrűjét. Az S közös rész ugyanis kétoldali ideál R-ben, amelyre

$$S^2 = S \cdot S \subseteq (RV) \cdot K = R(VK) = R \cdot (0) = (0)$$

adódik (K definíciója szerint ugyanis $VK = (0)$), s így S, mint nilpotens jobboldali ideálja a féligegyszerű R gyűrűnek, csak 0 lehet. Így most már csak azt kell belátnunk, hogy (78) nem lehet valódi része R-nek. Mivel azonban (78) ideál R-ben, az $(RV+K)/K$ maradékosztálygyűrű is ideál R/K-ban. De R/K (76) szerint izomorf egy teljes mátrixgyűrűvel, tehát R/K egyszerű gyűrű. Ennélfogva összes ideáljai: zérus és önmaga. $(RV+K)/K$ azonban nem lehet a zérusideál R/K-ban, mert az azt jelentené, hogy $RV \subseteq K$; ebből pedig (minthogy RV és K közös része az előbbiek szerint 0) $RV = (0)$, azaz $V^2 \subseteq RV = (0)$ következnék, ami R féligegyszerű volta miatt lehetetlen. Így csak az a lehetőség áll fenn, hogy $(RV + K)/K = R/K$, ami viszont azt jelenti, hogy a (78) alatti gyűrű éppen R, s ezzel bebizonyítottuk (77) teljesülését $R_1 = RV$-re.

Az ilyen módon igazolt első *Wedderburn—Artin*-féle struktúratételből könnyen levezethetjük a másodikat. Azt kell megmutatnunk, hogy ha az R gyűrű egyszerű és eleget tesz a minimumkövetelménynek jobboldali ideálokra, akkor R izomorf egy teljes mátrixgyűrűvel, vagy egy p elemű zérógyűrűvel, ahol p tetszőleges prímszám.

Mindenekelőtt könnyen beláthatjuk a következőt: *Bármely egyszerű gyűrű vagy zérógyűrű, vagy nem tartalmaz* (0)*-tól különböző nilpotens jobboldali ideált.* Legyen ugyanis S olyan egyszerű gyűrű, amely nem zérógyűrű, és legyen $J \neq (0)$ tetszőleges jobboldali ideál S-ben. Mivel SJ kétoldali ideálja S-nek, vagy $SJ = (0)$, vagy $SJ = S$. Az első lehetőség azonban ki van zárva, mert az azt jelentené, hogy az S gyűrűnek vannak (0)-tól különböző jobboldali annihilátorai (pl. J összes elemei), s egy gyűrű jobboldali annihilátorai nyilvánvalóan kétoldali ideált alkotnak a gyűrűben. Ez az ideál most (S egyszerű volta miatt) egybeesik S-sel, s így azt kapnánk, hogy S valamennyi eleme jobboldali annihilátora S-nek. De ez azt jelentené, hogy S zérógyűrű, amit kizártunk. — Ennélfogva $SJ = S$, $SJ^2 = SJ = S, \ldots$, s általában $SJ^m = S$ bármely m kitevőre. Ezzel megmutattuk, hogy a J jobboldali ideál nem nilpotens, és így előbbi megjegyzésünket igazoltuk.

Legyen mármost R olyan egyszerű gyűrű, amely eleget tesz a minimumkövetelménynek jobboldali ideálokra. Ha R nem zérógyűrű, akkor előbbi megjegyzésünk szerint R nem tartalmaz (0)-tól különböző nilpotens jobboldali ideált. Ekkor tehát R féligegyszerű gyűrű, és így az első struktúratétel szerint izomorf véges számú teljes mátrixgyűrű direkt összegével. Minthogy azonban R egyszerű gyűrű, ez azt jelenti, hogy R izomorf egyetlen teljes mátrixgyűrűvel. — Ha viszont R zérógyűrű, akkor bármely additív alcsoportja egyszersmind ideálja a gyűrűnek. Ebben az esetben tehát R p elemű zérógyűrű, ahol p prímszám, mert csak a p elemű csoportnak van meg az a tulajdonsága, hogy bármely alcsoportja vagy önmaga, vagy az egyelemű csoport.

Így a második *Wedderburn—Artin*-féle struktúratétel bizonyítását is befejeztük.

IRODALOM

[1] *E. Artin,* Zur Theorie der hyperkomplexen Zahlen. *Abh. Hamburg 5* (1927), 251—260.

[2] *E. Artin* and *G. Whaples,* The theory of simple rings. *Amer. J. Math. 65* (1943), 87—107.

[3] *E. Artin, C. J. Nesbitt* and *R. M. Thrall,* Rings with minimum condition. (Ann. Arbor, Mich., 1948.)

[4] *E. Artin,* The influence of J. H. M. Wedderburn on the development of modern algebra. *Bull. Amer. Math. Soc. 56* (1950), 65—72.

[5] *R. Baer,* Linear algebra and projective geometry. (New York, N. Y., 1952.)

[6] *M. Deuring,* Algebren. *Ergebnisse der Math. u. ihrer Grenzgebiete,* IV., 1. (Berlin, 1935.)

[7] *J. Dieudonné,* Sur le socle d'un anneau et les anneaus simples infinis. *Bull. Soc. Math. de France 70* (1942), 46—75.

[8] *N. Jacobson,* The theory of rings. *Math. Surveys,* 2. (New York, N. Y., 1943.)

[9] *N. Jacobson,* Structure theory of simple rings without finiteness assumptions. *Trans. Amer. Math. Soc. 57* (1945), 228—245.

[10] *N. Jacobson,* The radical and semi-simplicity for arbitrary rings. *Amer. J. Math. 67* (1945), 300—320.

[11] *N. Jacobson,* Lectures in abstract algebra. II. Linear algebra. (New York, N. Y., 1953.)

[12] *E. Noether,* Hyperkomplexe Grössen und Darstellungstheorie. *Math. Z. 30* (1929), 641—692.

[13] *B. L. van der Waerden,* Moderne Algebra. II. (Berlin, 1940.)

[14] *J. H. M. Wedderburn,* On hypercomplex numbers. *Proc. London Math. Soc.* (2) *6* (1908), 77—118.