AZ ASSZOCIATIVITÁSFELTÉTELEK FÜGGETLENSÉGÉNEK KÉRDÉSE KOMMUTATÍV SZORZÁS ESETÉN

SZÁSZ GÁBOR

1. §. Bevezetés

Egy előző dolgozatomban* általános multiplikatív struktúrákra** vonatkozóan meghatároztam az asszociativitásfeltételek független teljes részrendszereit. Ebben a dolgozatban a hasonló problémát fogjuk megtárgyalni arra az esetre nézve, amikor kizárólag kommutatív struktúrákra szorítkozunk. Problémánk pontos megfogalmazásához néhány definíciót és jelölést előre kell bocsátanunk.

Legyen S_ν adott ν-elemű halmaz (ν lehet véges vagy végtelen). Ha az S_ν-ben definiálva van egy szorzás, akkor azt mondjuk, hogy S_ν erre a szorzásra nézve egy $S_\nu^\times$ *multiplikatív struktúrát* alkot. Egy S_ν-ben természetesen többféle szorzás is definiálható; ha különlegesen a szorzás kommutatív, akkor $S_\nu^\times$-et *kommutatív multiplikatív struktúrának* nevezzük.

Tekintsük az S_ν halmaz elemeiből képezett valamely (x, y, z) elemhármast. Ha erre az elemhármasra valamely $S_\nu^\times$-ben $(xy)z = x(yz)$ áll fenn, akkor azt mondjuk, hogy *az* (x, y, z) *elemhármas asszociatív* $S_\nu^\times$*-ben;* ha pedig $(xy)z \neq x(yz)$, akkor (x, y, z) *nemasszociatív* $S_\nu^\times$*-ben.*

Az összes

$$(xy)z = x(yz) \qquad (x, y, z \in S_\nu) \tag{1}$$

egyenleteket *az* S_ν *halmaz asszociativitásfeltételeinek*, különlegesen az $(xy)z = x(yz)$ egyenletét *az* (x, y, z) *elemhármashoz tartozó asszociativitásfeltételnek* nevezzük. Ha valamely $S_\nu^\times$-re az (1) összes egyenletei teljesülnek, akkor $S_\nu^\times$-et *félcsoportnak* nevezzük.

Az asszociativitásfeltételek rendszere az általános multiplikatív struktúrákra vonatkozóan az asszociativitás axiómarendszerét képezi. Magától értetődik tehát, hogy mint minden axiómarendszer esetén, úgy az asszociativitásfeltételekre nézve is fontos kérdés a rendszer függetlenségének kérdése.

Fentebb idézett dolgozatomban kimutattam, hogy $\nu \geqq 4$ esetén az S_ν halmaz asszociativitásfeltételei függetlenek; vagyis, $\nu \geqq 4$ esetén az asszociativitásfeltételek halmazának nincs olyan valódi részhalmaza, amely azzal a tulajdon-

* *Szász Gábor:* Az asszociativitásfeltételek függetlensége, A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai és Fizikai Osztályának Közleményei, III. kötet *4* (1953)

** Az idézett dolgozatban használt definíciókat alább megismételjük.

sággal bírna, hogy a részhalmaz elemeinek asszociativitásából bármely $S_\nu^\times$ esetén a többi asszociativitásfeltételek teljesülése is következzék. Gyakorlatilag ez azt jelenti, hogy ha egy legalább négy elemű multiplikatív struktúra asszociativitását ki akarjuk mutatni, akkor általában minden egyes elemhármas asszociativitásáról külön meg kell győződni. A $\nu \leqq 3$ esetekben az asszociativitásfeltételek nem függetlenek; ezekben az esetekben megadtam az asszociativitásfeltételek összes független teljes részrendszereit*.

Máskép alakul a helyzet, ha csak az S_ν halmazból képezhető kommutatív $S_\nu^\times$-eket tekintjük. Ebben az esetben az asszociativitásfeltételek egyetlen ν esetén sem függetlenek egymástól. A kommutativitás miatt ugyanis az

$$(xy)z = x(yz) \tag{2. 1}$$

és

$$(zy)x = z(yx) \tag{2. 2}$$

egyenletek egyidejűleg teljesülnek, illetve nem teljesülnek. Vizsgálataink célja eszerint az lesz, hogy minden ν-re meghatározzuk a ν-elemű kommutatív multiplikatív struktúrákra vonatkozóan az asszociativitásfeltételek összes független teljes részrendszereit. Részletesen megfogalmazva, minden S_ν-re meg fogjuk határozni az asszociativitásfeltételek összes olyan részrendszereit, amelyek a következő két tulajdonsággal bírnak:

1. A részrendszerhez tartozó asszociativitásfeltételek teljesüléséből már bármely kommutatív $S_\nu^\times$ esetén következik a többi asszociativitásfeltételek teljesülése is (teljesség);

2. A részrendszerhez tartozó bármely asszociativitásfeltételt kiszemelve, található olyan $S_\nu^\times$ kommutatív struktúra, amelyben a kiszemelt asszociativitásfeltétel nem teljesül, a részrendszer többi asszociativitásfeltételei azonban mind teljesülnek (függetlenség).

Tárgyalásunk során külön foglalkozunk a $\nu \geqq 4$, a $\nu = 2$ és $\nu = 3$ esettel. A $\nu \geqq 4$ esetre a következő eredményt fogjuk kapni:

1. tétel. *Az $S_\nu (\nu \geqq 4)$ halmazból képezhető kommutatív multiplikatív struktúrákra vonatkozóan az asszociativitásfeltételek összes független teljes részrendszereit a következő eljárással kapjuk:*

1°. *Az $S_\nu (\nu \geqq 4)$ halmaz elemeiből álló valamennyi*

$$(a, a, b), (b, a, a) \qquad (a, b \in S_\nu;\ a \neq b)$$

elemhármaspárból tetszésszerinti módon kiválasztjuk az egyik elemhármast.

2°. *Továbbá, tekintjük az S_ν elemeinek összes*

$$a, b, c \qquad (a, b, c \in S_\nu \text{ és mind különbözők})$$

* Egy axiómarendszer valamely részrendszerét *független teljes részrendszer*nek nevezzük, ha a részrendszer rendelkezik a következő két tulajdonsággal: 1. A részrendszer axiómáinak egyike sem következik a részrendszer többi axiómáiból (függetlenség); 2. A részrendszer axiómáinak teljesülése esetén az axiómarendszer többi axiómái is teljesülnek (teljesség).

ismétlés nélküli kombinációit, s minden egyes esetben az a, b, c elemek permutációjával előálló hat elemhármast. Ezek közül bármelyik kettőt kiválasztjuk, csupán azzal a megszorítással, hogy a kiválasztott két elemhármasban az elemek sorrendje nem lehet éppen fordított.*

*Alkossuk meg ezután az asszociativitásfeltételeknek összes olyan részrendszereit, amelyek az 1° és 2° szerint kiválasztott elemhármasokhoz tartozó asszociativitásfeltételekből állnak. Az asszociativitásfeltételek így kapott részrendszerei adják az asszociativitásfeltételek összes független teljes részrendszereit az $S_\nu (\nu \geqq 4)$ halmazból képezhető kommutatív multiplikatív struktúrákra nézve**.*

A $\nu = 2$ esetben igen egyszerűen fog adódni, hogy

2. tétel. *Az $S_2 = \{a, b\}$ halmazból képezhető kommutatív multiplikatív struktúrákra vonatkozóan az asszociativitásfeltételek bármely független teljes részrendszere az*

$$(a, a, b),\ (a, b, b),\ (b, a, a),\ (b, b, a)$$

elemhármasok valamelyikéhez tartozó egyetlen asszociativitásfeltételből áll.

Végül, az előbbieknél lényegesen hosszadalmasabban fogjuk kapni a $\nu = 3$ esetre vonatkozó eredményünket:

3. tétel. *Az S_3 halmazból képezhető kommutatív multiplikatív struktúrákra vonatkozóan az asszociativitásfeltételek összes független teljes részrendszereit a következőképpen kapjuk:*

1°. *Az S_3 halmaz elemeiből álló valamennyi*

$$(a, a, b),\ (b, a, a) \qquad (a, b \in S_3,\ a \neq b)$$

elemhármaspárból tetszésszerinti módon kiválasztjuk az egyik elemhármast.

2°. *Továbbá, tekintjük azt az S_3 halmazból képezhető hat elemhármast, amelynek elemei mind különbözők, s közülük tetszésszerinti módon pontosan egyet kiválasztunk.*

*Alkossuk meg ezután az asszociativitásfeltételeknek összes olyan részrendszereit, amelyek az 1° és 2° szerint kiválasztott elemhármasokhoz tartozó asszociativitásfeltételekből állnak. Az így kapott részrendszerek adják az asszociativitásfeltételek összes független teljes részrendszereit az S_3 halmazból képezhető kommutatív multiplikatív struktúrákra nézve***.*

* Azaz, pl. az (a, b, c) elemhármas mellé nem választhatjuk a (c, b, a) elemhármast.

** Könnyű látni, hogy véges $\nu (\geqq 4)$ esetén az 1° szerint kiválasztott elemhármasok száma $\nu(\nu-1)$, a 2° szerint kiválasztottaké pedig $2\binom{\nu}{3} = 2.\frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)}{1.2.3}$. Egy független teljes részrendszer tehát véges $\nu \geqq 4$ esetén összesen $\frac{\nu^3-\nu}{3}$ egyenletből áll.

*** Ebben az esetben tehát bármely független teljes részrendszer 7 asszociativitásfeltételből áll.

A felsorolt tételek bizonyításának megkezdése előtt a felvetett problémát redukáljuk: megvizsgáljuk, melyek azok az asszociativitásfeltételek, amelyek a kommutativitás miatt figyelmen kívül hagyhatók. A további viszgálatokat ezután a megmaradt részrendszerrel folytatjuk.

2. §. A probléma redukálása

A továbbiakban „szorzás"-on mindig kommutatív szorzást, s ennek megfelelően „struktúrá"-n mindig kommutatív multiplikatív struktúrát értünk. Ennek megfelelően „az asszociativitásfeltételek független teljes részrendszere" kifejezéshez is mindig hozzáértjük, hogy „a kommutatív multiplikatív struktúrákra vonatkozólag". Megállapodunk továbbá abban, hogy az adott S_ν halmaz tetszésszerinti (tehát nem feltétlenül különböző) elemeit x, y, z betűkkel, az S_ν tetszésszerinti, de különböző elemeit pedig a, b, c, d betűkkel fogjuk jelölni (mint az eddigiekben is).

A bevezetésben említettük már, hogy bármely $x, y, z(\in S)$ esetén az

$$(xy)z = x(yz) \tag{2. 1}$$

és

$$(zy)x = z(yx) \tag{2. 2}$$

egyenletek egyidejűleg teljesülnek, illetve nem teljesülnek. Ennek megfelelően két (2. 1), (2. 2) alakú asszociativitásfeltételt (a kommutatív struktúrákra vonatkozóan) *ekvivalensnek* nevezhetünk. Bármely asszociativitásfeltételt önmagával is ekvivalensnek mondunk, és bevezetjük a következő definíciót:

Definíció. *Az asszociativitásfeltételek két részrendszerét a kommutatív struktúrákra vonatkozóan ekvivalensnek mondjuk, ha a bennük szereplő asszociativitásfeltételek páronként ekvivalensek.*

Nyilvánvaló, hogy az asszociativitásfeltételek egy olyan rendszere, amely valamely független teljes részrendszerrel ekvivalens, szintén független teljes részrendszert alkot. Ennek megfelelően elegendő az összes nem-ekvivalens független teljes részrendszereket meghatározni.

A könnyebb kifejezésmód kedvéért jelöljük az S_ν halmaz elemeiből képezhető összes elemhármasok halmazát $S_\nu^{(3)}$-mal. Az S_ν halmazból képezett két (x, y, z), (x', y', z') elemhármast *azonos típusúnak* fogunk mondani, ha egymásból az S_ν elemeinek valamely permutációjával állnak elő. Az azonos típusú elemhármasokat egy osztályba sorozva, az $S_\nu^{(3)}$-nak egy osztályozását nyerjük. Ebben az osztályozásban az $S_\nu^{(3)}$ elemei (a $\nu \leq 2$ esettől eltekintve) öt osztályt képeznek, mégpedig az egyes osztályok elemei rendre az összes

$$(a, a, a),\ (a, b, a),\ (a, a, b),\ (b, a, a),\ (a, b, c)$$

típusú elemhármasok. Az öt típus közül az utolsó természetesen a $\nu = 2$ esetben nem fordul elő. Ezt az osztályozást átvisszük az asszociativitásfeltételekre is: egy asszociativitásfeltételt olyan típusúnak mondunk, mint amilyen a benne szereplő elemhármas.

Foglalkozzunk külön-külön az egyes típusokkal. Az (a, a, a)-típus és (a, b, a)-típus elemhármasaira a kommutativitás folytán

$$(aa)a = a(aa)$$

és

$$(ab)a = a(ba)$$

korlátlanul érvényes, tehát ennek a két típusnak minden elemhármasa bármely struktúrában asszociatív.

Továbbá, az

$$(aa)b = a(ab)$$

és

$$(ba)a = b(aa)$$

asszociativitásfeltételek ekvivalenciája miatt bármely (b, a, a)-típusú asszociativitásfeltétel ekvivalens egy (a, a, b)-típusúval, s így — mivel csak az összes nemekvivalens független teljes részrendszereket keressük — pl. a (b, a, a)-típusú asszociativitásfeltételekkel nem kell törődnünk.

Vizsgáljuk meg végül az (a, b, c)-típusú asszociativitásfeltételeket. A (2. 1), (2. 2) egyenletek ekvivalenciája folytán ezek páronként ekvivalensek, s így ezeknek is fele elhagyható. A megtartandók pontos meghatározása végett egy további osztályozást fogunk végezni az (a, b, c)-típusú elemhármasok halmazában.

Tekintsük az S_ν halmaz elemeiből képezhető összes ismétlés nélküli kombinációkat. Ezután az (a, b, c)-típusnak azt a hat elemhármasát, amelyek éppen az a, b, c elemekből állnak, soroljuk egy osztályba. Az így kapott osztályt jelöljük $C[a, b, c]$-vel. Nyilvánvaló, hogy miközben a, b, c befutják az S_ν összes elemeit (úgy hogy közben a, b, c különbözők), az előálló $C[a, b, c]$ osztályok éppen az (a, b, c)-típus osztályozását adják. Különlegesen, egy $C[a, b, c]$ osztály elemei az

$$(a, b, c),\ (b, c, a),\ (c, a, b) \tag{3. 1}$$

és

$$(c, b, a),\ (a, c, b),\ (b, a, c) \tag{3. 2}$$

elemhármasok.

Látjuk, hogy a (3. 2) bármely elemhármasához tartozó asszociativitásfeltétel ekvivalens a felette lévő (3. 1)-beli elemhármashoz tartozóval. Eszerint az összes nemekvivalens független teljes részrendszerek meghatározásához minden egyes $C[a, b, c]$ osztályból (ahol az a, b, c elemeket tetszés szerint rendezhetjük el) elegendő pl. a (3. 1)-ben felsorolt elemhármasokat tekinteni.

Jelöljük a továbbiakban $S_{\nu k}^{(3)}$-mal az $S_\nu^{(3)}$-nak azt a részhalmazát, amely az összes (a, a, b)-típusú elemhármasokból és az (a, b, c) típus minden egyes

$C[a, b, c]$ osztályának (3. 1) alakú elemhármasaiból áll. A fentiek szerint világos, hogy az asszociativitásfeltételek összes olyan független teljes részrendszerei, amelyek kizárólag az $S_{\nu k}^{(3)}$ elemeihez tartozó asszociativitásfeltételekből állnak, *ekvivalenciától eltekintve* máris az *összes* független teljes részrendszereket adják.

3. §. Egy segédtétel

Az 1. és 3. tételek 1° állításának bizonyításához kimutatjuk a következő segédtételt:

S e g é d t é t e l. *Az $S_\nu (\nu \geqq 3)$ halmaz asszociativitásfeltételeinek a kommutatív multiplikatív struktúrákra vonatkozó minden olyan független teljes részrendszere, amely kizárólag az $S_{\nu k}^{(3)}$ elemhármasaihoz tartozó asszociativitásfeltételekből áll, tartalmazza az összes (a, a, b)-típusú asszociativitásfeltételeket.*

B i z o n y í t á s. Tekintsük az $S_\nu^{(3)}$ $(\nu \geqq 3)$ valamely tetszésszerinti (a, b, c) elemhármasát. A segédtétel bizonyítására meg fogunk adni egy olyan $S_\nu^\times$ kommutatív multiplikatív struktúrát, amelyben az $S_{\nu k}^{(3)}$ elemhármasai közül egyedül (a, a, b) nemasszociatív. Ezzel ki lesz mutatva, hogy az (a, a, b) elemhármas asszociativitása nem következik az $S_{\nu k}^{(3)}$ összes többi elemhármasainak asszociativitásából.

Ebből a célból tekintsük azt az $S_\nu^\times$-et, amelyben a szorzás az

$$\begin{cases} ab(=ba) = bb = b, \\ xy = c \text{ minden más esetben} \end{cases}$$

egyenletekkel van definiálva (ahol c az S_ν-nek valamelyik tetszésszerinti további eleme).

Könnyű látni, hogy azokra az (x, y, z) elemhármasokra, amelyekben x, y, z egyike sem a vagy b, korlátlanul $(xy)z = x(yz) = c$ érvényes, tehát az ilyen (x, y, z) elemhármasok mind asszociatívok. Elegendő tehát azokat az $S_{\nu k}^{(3)}$-hoz tartozó (x, y, z) elemhármasokat vizsgálni, amelyekben x, y, z mindegyike az a, b közül valók, vagyis az (a, a, b) és (b, b, a) elemeket. Azonban

$$(aa)b = cb = c, \quad a(ab) = ab = b;$$
$$(bb)a = ba = b, \quad b(ba) = bb = b.$$

Vagyis (a, a, b) nemasszociatív, (b, b, a) pedig asszociatív. Ezzel a segédtételt bebizonyítottuk.

4. §. Az 1. tétel bizonyítása ($\nu \geqq 4$ eset)

A 2. §-ban mondottak szerint az 1. tétel bizonyításához elegendő kimutatni a következő állítás helyességét:

Az $S_\nu (\nu \geqq 4)$ halmazból képezhető kommutatív multiplikatív struktúrákra vonatkozóan az asszociativitásfeltételek összes olyan részrendszereit, amelyek *kizárólag az* $S_{\nu k}^{(3)}$ *elemhármasaihoz tartozó asszociativitásfeltételekből állnak, a következő módon kaphatjuk:*

1°. *Kiválasztjuk az* $S_\nu (\nu \geqq 4)$ *halmaz összes* (a, a, b)*-típusú asszociativitásfeltételeit;*

2°. *Az így kapott részrendszerhez hozzávesszünk még az* (a, b, c)*-típus minden egyes* $C[a, b, c]$ *osztályának* (3. 1)*-alakú elemhármasaihoz tartozó asszociativitásfeltételek közül kettőt-kettőt, tetszésszerinti módon*.*

Látjuk, hogy ezek közül az 1° állítás benne foglaltatik a 3. §-ban bebizonyított segédtételben, s így a továbbiakban már csak a 2° állítással kell foglalkoznunk.

A 2° állítás a következő két részletállításból adódik:

2. 1°. Bármely $C[a, b, c]$ osztály esetén az $S_{\nu k}^{(3)}$-ba tartozó (azaz (3. 1) alakú) elemhármasok közül kettőnek az asszociativitásából a harmadiké is következik;

2. 2°. Bármely $C[a, b, c]$ osztály esetén az illető osztály egy (3. 1) alakú elemhármasának és az $S_{\nu k}^{(3)}$ nem $C[a, b, c]$ osztálybeli összes elemhármasainak (beleértve az (a, b, c)-típusúakat is) asszociativitásából nem következik a $C[a, b, c]$ osztály másik két (3. 1) alakú elemhármasának asszociativitása.

A 2. 1° állítás igazolására tegyük fel például, hogy a $C[a, b, c]$ osztály (a, b, c) és (b, c, a) elemhármasai asszociatívok, azaz, hogy

$$(ab)c = a(bc) \tag{4}$$

és

$$(bc)a = b(ca). \tag{5}$$

Ezekből a kommutativitás felhasználásával

$$c(ab) = (ab)c = a(bc) = (bc)a = b(ca) = (ca)b,$$

azaz

$$(ca)b = c(ab) \tag{6}$$

következik, ami éppen (c, a, b) asszociativitását jelenti. Hasonlóan látható be, hogy (5)-ből és (6)-ból következik (4), valamint (6)-ból és (4)-ből következik (5).

A 2. 2° állítás bizonyítására megmutatjuk, hogy az S_ν elemeinek bármely a, b, c kombinációjához megadható olyan $S_\nu^\times$, amelyben a $C[a, b, c]$ osztály három (3. 1) alakú elemhármasa közül tetszésszerint kiválasztott kettő nemasszociatív, bár az $S_{\nu k}^{(3)}$ minden más eleme asszociatív. Tekintsük ehhez azt a kommutatív $S_\nu^\times (\nu \geqq 4)$ struktúrát, amelyben a szorzás az

$$\left.\begin{array}{l} ac = bb = b \\ xy = d \text{ minden más esetben} \end{array}\right\} \tag{7}$$

* A tétel 2° állításának végén szereplő megszorítás ebben a fogalmazásban önmagától elesik, mert a (3. 1) alakú elemhármasok között nincs két olyan, amelyben az elemek sorrendje éppen fordított lenne.

egyenletekkel van definiálva (ahol d az S_ν valamely tetszésszerinti további eleme).

Mivel az adott $S_\nu^\times$-ben (7) szerint két elem szorzata sem a, sem c nem lehet, ezért $(xy)z = b$ akkor és csak akkor, ha $xy = b$, $z = b$, azaz ha az

$$x = a,\ y = c,\ z = b \tag{8. 1}$$

$$x = c,\ y = a,\ z = b \tag{8. 2}$$

$$x = b,\ y = b,\ z = b \tag{8. 3}$$

esetek egyike áll fenn; különben $(xy)z = d$. A (8. 1)-ben szereplő (a, c, b) elemhármas azonban a $C[a, b, c]$ osztálynak (3. 2) alakú eleme, a (8. 3) elemhármasa pedig (a, a, a)-típusú. Ezek tehát nem tartoznak az $S_{\nu k}^{(3)\prime}$ elemei közé, s így kívül esnek vizsgálatunk körén. A (8. 2)-ben fellépő (c, a, b) viszont $S_{\nu k}^{(3)}$-beli elem. Ezek szerint az $S_{\nu k}^{(3)}$ elemeire

$$\left.\begin{aligned} &(ca)b = b, \quad \text{de} \\ &(xy)z = d \quad \text{minden más} \quad (x, y, z) \in S_{\nu k}^{(3)}\text{-ra.} \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Ezzel szemben, $x(yz) = b$ akkor és csak akkor, ha $x = b$, $yz = b$, azaz ha az

$$x = b,\ y = a,\ z = c \tag{10. 1}$$

$$x = b,\ y = c,\ z = a \tag{10. 2}$$

$$x = b,\ y = b,\ z = b \tag{10. 3}$$

esetek egyike áll fenn; különben $x(yz) = d$. A (10. 1), (10. 3)-ban fellépő elemhármasok most sem elemei $S_{\nu k}^{(3)}$-nak (előbbi (3. 2) alakú, utóbbi (a, a, a) típusú), a (10. 2)-beli (b, c, a) ellenben $S_{\nu k}^{(3)}$-beli elem. Az $S_{\nu k}^{(3)}$ elemeire tehát

$$\left.\begin{aligned} &b(ca) = b, \quad \text{de} \\ &x(yz) = d \quad \text{minden más} \quad (x, y, z) \in S_{\nu k}^{(3)}\text{-ra.} \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

A (9) és (11) összehasonlításával adódik, hogy a (7) által definiált $S_\nu^\times$-ben az $S_{\nu k}^{(3)}$ elemei közül (b, c, a) és (c, a, b) nemasszociatív, minden más elem viszont asszociatív, amivel a 2° állítás, s vele az 1. tétel bizonyítását befejeztük.

5. §. A 2. és 3. tételek bizonyítása ($\nu \leqq 3$ eset)

Tekintsük először a $\nu = 1$ esetet. Mivel az egyetlen $S_1^\times$ triviálisan asszociatív, ezért a „független teljes rendszer" üres (sőt már $S_{1k}^{(3)}$ is).

Legyen ezután $\nu = 2$. Az olvasó igen könnyen meggyőződhetik arról, hogy a nyolc kommutatív $S_2^\times$ közül csupán az

$$\begin{array}{c|cc} & a & b \\ \hline a & b & a \\ b & a & a \end{array} \qquad \text{és} \qquad \begin{array}{c|cc} & a & b \\ \hline a & b & b \\ b & b & a \end{array}$$

Cayley-táblákkal megadott két struktúra nem félcsoport. Ezekben az $S_2^{\times}$-ekben pedig az

$$(a, a, b),\ (a, b, b),\ (b, a, a),\ (b, b, a) \tag{12}$$

egyike sem asszociatív. Vagyis, ha egy (kommutatív) $S_2^{\times}$-ben a (12) egyik elemhármasa asszociatív, akkor az összes többi is; ez pedig éppen a 2. tétel helyességét jelenti.

Végül rátérünk a $\nu = 3$ eset tárgyalására, azaz a 3. tétel bizonyítására. A tétel 1° állítása ugyanazt mondja ki $\nu = 3$ esetre, amit az 1. tétel 1° állítása $\nu \geqq 4$ esetre. Mivel a 3. § segédtétele $\nu = 3$ esetre is szól, ezért a 3. tétel 1° állítása ugyanúgy következik belőle, mint az 1. tétel 1° állítása.

Marad tehát a 3. tétel 2° állításának igazolása. Ez az állítás, hasonlóan az 1. tétel 2° állításához, két részre bontható:

2. 1°. Az asszociativitásfeltételek minden független teljes részrendszerének ($\nu = 3$ esetén is) tartalmaznia kell (a, b, c)-típusú asszociativitásfeltételt, mert csupán az összes (a, a, b)-típusú elemek asszociativitásából még nem következik az (a, b, c)-tipusúak egyetlen elemének asszociativitása sem.

2. 2°. Az asszociativitásfeltételek bármely független teljes részrendszere $\nu = 3$ esetén csak egy (a, b, c)-típusú asszociativitásfeltételt tartalmaz, mert az összes (a, a, b)-típusú elemek és egyetlen (a, b, c)-típusú elem, pl. (c, a, b) asszociativitásából már következik $S_{3k}^{(3)}$ (s vele együtt $S_3^{(3)}$) összes többi elemének asszociativitása is.

A 2. 1° kimutatásához tekintsük az

$$\begin{array}{c|ccc} & a & b & c \\ \hline a & a & a & c \\ b & a & b & b \\ c & c & b & c \end{array} \tag{13}$$

Cayley-táblával megadott struktúrát. Ebben az a, b, c elemek közül bármelyik kettő egy-egy kételemű részstruktúrát alkot, mégpedig ezek a részstruktúrák nyilvánvalóan asszociatívok. Ez azt jelenti, hogy ebben a struktúrában minden olyan elemhármas asszociatív, amely S_3-nak legfeljebb két különböző eleméből áll. Ezzel szemben az $S_{3k}^{(3)}$ három (a, b, c)-típusú elemére (13) szerint

$$\begin{aligned} (ab)c &= ac = c & a(bc) &= ab = a \\ (bc)a &= ba = a & b(ca) &= bc = b \\ (ca)b &= cb = b & c(ab) &= ca = c \end{aligned}$$

áll fenn, amivel a 2. 1°-ben foglalt állítást kimutattuk.

A 2. 2° állítás igazolása indirekt úton fog történni. Legyenek az $S_3 = \{a, b, c\}$ halmazból képezett valamely kommutatív $S_3^{\times}$-ben az $S_{3k}^{(3)}$ összes (a, a, b)-típusú elemei és (c, a, b) asszociatív, és tegyük fel, hogy (a, b, c),

(b, c, a) mégsem asszociatívok, azaz

$$(ab)c \neq a(bc), \tag{14}$$

$$(bc)a \neq b(ca). \tag{15}$$

Az $(ab)c, a(bc), (bc)a, b(ca)$ szorzatok értékének különböző megválasztása révén eseteket fogunk megkülönböztetni. A kommutativitás és $(ca)b = c(ab)$ miatt azonban a négy szorzat értékét nem választhatjuk akárhogyan. Mert, már a kommutativitás miatt

$$a(bc) = (bc)a; \tag{16}$$

továbbá, a $(ca)b = c(ab)$ egyenletet is figyelembe véve

$$b(ca) = (ca)b = c(ab) = (ab)c. \tag{17}$$

A (14)—(17) szerint az alábbi hat esetet kell megkülönböztetnünk:

	1.	2.	3.	4.	5.	6.
$(ab)c =$	a	b	b	c	c	a
$a(bc) = (bc)a =$	b	a	c	b	a	c
$b(ca) =$	a	b	b	c	c	a

Látjuk, hogy a b és c szerepének felcserélésével az 1 és 6, 2 és 5, 3 és 4 esetek feltételi egyenletei egymásba mennek át. Eszerint elegendő ellentmondást megállapítani az 1, 2 és 3 esetekben.

1. eset. Ebben az esetben

$$(ab)c = a, \tag{18. 1}$$

$$a(bc) = b, \tag{18. 2}$$

$$b(ca) = a. \tag{18. 3}$$

Aleseteket különböztetünk meg aszerint, hogy $ab = a$, $ab = b$ vagy $ab = c$.

1. 1. Ha $ab = a$, akkor (18. 1)-ből $ac = a$ következik, s így (18. 2) folytán bc értéke sem b, sem c nem lehet. Tehát $bc = a$, amiből ismét (18. 2) miatt $aa = b$. De akkor

$$(aa)c = bc = a, \quad a(ac) = aa = b,$$

tehát (a, a, c) nemasszociatív. Ez pedig ellentmondás a feltevéseinkkel.

1. 2. Ha $ab = b$, akkor (18. 1)-ből

$$bc = a, \tag{19}$$

ebből pedig (18. 2) szerint $aa = b$ következik. Ezekből az (a, a, b) típus asszociatívitása folytán

$$bb = (aa)b = a(ab) = ab = b$$

adódik. Utóbbiból a (19) figyelembevételével

$$(bb)c = bc = a, \quad b(bc) = ba = ab = b,$$

vagyis (b, b, c) nemasszociativitása adódik, ami ismét ellentmondás.

1.3. Ha végül $ab = c$, akkor (18. 1)-ből

$$cc = a, \tag{20}$$

(18. 2)-ből

$$bc \neq b \tag{21}$$

(18. 3)-ból pedig

$$ca = ac \neq a \tag{22}$$

adódik. De a (c, c, b) asszociativitása miatt (20)-ból

$$c(cb) = (cc)b = ab = c, \tag{23}$$

ebből pedig (20) miatt $cb (= bc) \neq c$ adódik. Ez (21)-gyel együtt azt jelenti, hogy

$$bc = a.$$

Ezért a (18. 2) figyelembevételével

$$aa = b. \tag{24}$$

Fentiek szerint

$$b(ba) = bc = a.$$

Kimutatjuk, hogy ezzel szemben

$$(bb)a \neq a.$$

Ugyanis:

Ha $bb = a$, akkor (24) szerint $(bb)a = aa = b$.
Ha $bb = b$, akkor az $ab = c$ feltevés miatt $(bb)a = ba = c$.
Ha $bb = c$, akkor (22) szerint $(bb)a = ca \neq a$.

Mindhárom esetben (b, b, c) nemasszociatív, azaz megint ellentmondásra jutottunk.

2. eset. Most

$$(ab)c = b, \tag{25. 1}$$

$$a(bc) = a, \tag{25. 2}$$

$$b(ca) = b. \tag{25. 3}$$

Ismét három alesetet különböztetünk meg az ab értéke szerint.

2. 1. Ha $ab = a$, akkor (25. 1)-ből

$$ac = b. \tag{26}$$

Ebből (25, 2) miatt

$$bc \neq c$$

következik. Eszerint bc értéke a vagy b.

2. 1. 1. Ha most $bc = a$, akkor (25. 2) szerint $aa = a$, s így (26) figyelembevételével

$$(aa)c = ac = b, \quad a(ac) = ab = a,$$

ami ellentmondás.

2. 1. 2. Tekintsük tehát azt az esetet, amikor $bc = b$. Az (a, a, c) asszociativitása és (26) miatt

$$(aa)c = a(ac) = ab = a. \tag{27}$$

Vizsgáljuk az aa szorzat értékét. Az előzők szerint ez sem a, sem b nem lehet. Mert $aa = a$ esetén (27)-ből $ac = a$ következnék, ellentétben (26)-tal; $aa = b$ esetén pedig (27)-ből $bc = a$ következnék, ellentétben a 2. 1. 2-re vonatkozó $bc = b$ feltevéssel. Tehát

$$aa = c.$$

Fentiek szerint azonban

$$(aa)b = cb = b, \quad a(ab) = aa = c,$$

ami megint ellentmondás.

2. 2. Ha $ab = b$, akkor (25. 1)-ből $bc = b$, ebből pedig (25. 2) szerint $ab = a$ következik, ami ellentmondásban van az $ab = b$ kiindulási feltétellel.

2. 3. Ha végül $ab = c$, akkor (25. 2)-ből

$$bc \neq b, \tag{28}$$

(25. 3)-ból pedig

$$ac = ca \neq a$$

következik. A (25. 3) és (28) folytán továbbá

$$ac \neq c.$$

Következőleg

$$ac = b.$$

Ebből (25. 3) szerint

$$bb = b, \tag{29}$$

(25. 2) szerint pedig

$$bc \neq c$$

következik. Utóbbi eredményünket (28)-cal összevetve kapjuk, hogy

$$bc = a. \tag{30}$$

A (29), (30) és az $ab = c$ feltevés miatt azonban

$$(bb)c = bc = a, \quad b(bc) = ba = c,$$

s így újból ellentmondásra jutottunk.

3. eset. Ebben az esetben

$$(ab)c = b, \tag{31. 1}$$

$$a(bc) = c, \tag{31. 2}$$

$$b(ca) = b. \tag{31. 3}$$

Ismét három alesetet különböztetünk meg az ab értéke szerint.

3. 1. Ha $ab = a$, akkor (31. 1)-ből $ac = b$ adódik. A kettőből együtt (31. 2) folytán következik, hogy bc értéke sem b, sem c nem lehet, tehát $bc = a$. Ebből ismét (31. 2) szerint $aa = c$. De akkor

$$(aa)b = cb = a, \quad a(ab) = aa = c,$$

vagyis (a, a, b) nemasszociatív, a feltevéseinkkel ellentétben.

3. 2. Ha $ab = b$, akkor (31. 1)-ből $bc = b$, ebből pedig (31. 2) folytán $ab = c$ következnék, ellentétben az $ab = b$ feltevéssel.

3. 3. Ha végül $ab = c$, akkor (31. 1) szerint

$$cc = b, \tag{32}$$

(31. 3) szerint pedig

$$ac = ca \neq a. \tag{33}$$

Ezért az ac értéke b vagy c.

3. 3. 1. Ha $ac = c$, akkor (32) és a $ba = c$ feltevés figyelembevételével

$$(cc)a = ba = c, \quad c(ca) = cc = b$$

következik, ellentmondásban (c, c, a) asszociativitásával.

3. 3. 2. Ha viszont $ac = b$, akkor (31. 3) szerint

$$bb = b,$$

(31. 2) szerint pedig

$$bc \neq c.$$

Ezekből és az $ab (= ba) = c$ feltevésből azonban

$$(bb)a = ba = c, \quad b(ba) = bc \neq c,$$

tehát (b, b, a) nemasszociatív.

A kapott ellentmondásokkal a 2. 2° állítás igazolását, s vele együtt a 3. tétel bizonyítását befejeztük.

Szegedi Tudományegyetem
Bolyai Intézete.