A VÉGES OSZTÁLYÚ CSOPORTOK ELMÉLETE

ERDŐS JENŐ

Bemutatta Rédei László lev. tag az 1954. február 8-án tartott felolvasó ülésen

1. §. Bevezetés

A végtelen csoportok szerkezetére vonatkozó kutatásokban a legmélyebb eredményeket eddig olyan csoportok többé-kevésbbé tág köreire sikerült nyerni, amelyek bizonyos jellegzetes tulajdonságaiknál fogva közel állanak vagy a véges csoportokhoz, vagy az (tetszőleges számosságú) Abel-féle csoportokhoz. A csoportoknak egy ilyen kategóriáját alkotják azok a csoportok, amelyekben bármely elemnek véges számú konjugáltja van, és amelyeket az alábbiakban röviden *véges osztályú* csoportoknak fogunk nevezni. Minthogy egyfelől minden véges csoport, másfelől minden Abel-féle csoport véges osztályú csoport, a véges osztályú csoportok közös általánosítását szolgáltatják a véges csoportoknak és az Abel-féle csoportoknak. Triviális példákat kapunk még véges osztályú csoportokra tetszőleges Abel-féle csoport és tetszőleges véges csoport direkt szorzatának képzése útján is. Látni fogjuk azonban (8. §), hogy már két elemmel generált véges osztályú csoport is van, amely nem állítható elő ilyen triviális konstrukcióval.

A véges osztályú csoportok részletes és egységes elméletét először *B. H. Neumann* [8] dolgozta ki, bár néhány, a jelen dolgozatban is szereplő eredmény már *Neumann* dolgozatát megelőzően is szerepelt az irodalomban e csoportokra vonatkozólag [2], [5]. *B. H. Neumann* dolgozata nemcsak a véges osztályú csoportok önmagában is fontos és érdekes elméletét tartalmazza és vizsgálja ki messzemenően, hanem számos alkalmazást is tárgyal, amelyek más irányú kutatásokban is nagy jelentőségűeknek bizonyultak. Így megemlíthetjük pl., hogy *Neumann* egyik eredménye a rendezett csoportok elméletében talált számottevő alkalmazásra [4], másfelől *R. Baer* egyik újabb tétele is [1], [3], amely sok fontos alkalmazása révén az utóbbi évek csoportelméleti kutatásaiban elért egyik legjelentősebb eredménynek bizonyult, *Neumann* elméletének keretében bizonyítható be legegyszerűbben. *Baer* eme tétele azt mondja ki, hogy ha egy tetszőleges csoportban a centrum indexe véges, akkor a csoport kommutátorcsoportja véges. Jelen dolgozatunk egyik főeredménye ennek a tételnek még a *Neumann*-félénél is egyszerűbb eszközöket igénylő bizonyítása lesz (6. §), továbbá e tétel alkalmazása *Ju. G. Fjodorov* egy egészen új eredményének igen egyszerű és rövid bizonyítására (7. §). *Fjodorov* tétele úgy szól, hogy ha egy végtelen csoport bármely egynél több elemű alcsoportja véges indexű, akkor a csoport ciklikus [7]. *Fjodorov* ezt a rendkívül szép tételt

O. Ju. Smidt egy igen mély tételének felhasználásával bizonyítja, úgyhogy a jelen dolgozatban adott bizonyítás *Fjodorov* tétele első elemi bizonyításának tekinthető. Egyébként *Fjodorov* tétele számos éven át mint *O. Ju. Smidt* által bizonyításra kitűzött sejtés szerepelt, és „duálisa“ még most sincsen bebizonyítva. Ez a sejtés úgy szól, hogy ha egy végtelen csoport bármely valódi alcsoportja véges, akkor a csoport $C(p^{\infty})$ típusú csoport, azaz izomorf az összes p^n-edik komplex egységgyökök multiplikatív csoportjával, ahol p rögzített törzsszám, míg n az összes pozitív egész szám értékét felveszi. Amenynyire nagy átütőerejűnek bizonyult a véges osztályú csoportok elmélete *Fjodorov* eredményével kapcsolatban, annyira sajnálatos az említett duális sejtés bizonyításához vezető megfelelő elmélet hiánya. A sejtés még Abel-féle csoportok esetében sem triviális. Erre az esetre *Szélpál István*nak sikerült bebizonyítania a sejtést [10].

A jelen dolgozat egyrészt tartalmazza a véges osztályú csoportok *B. H. Neumann*-féle elméletét nagymértékben egyszerűsített és elemivé tett formában, másrészt újabb eredményekkel is egészíti ki ezt az elméletet. Ami *Neumann* tárgyalásának egyszerűsítését, illetve elemivé tételét illeti, megemlítjük, hogy *Neumann* tárgyalása két ponton vesz igénybe nem elemi eszközöket. Egyik ilyen mozzanat *Neumann* tárgyalásában *Schreier* egy mély tételének alkalmazása, amely azt mondja ki, hogy végesen generált csoport centruma is végesen generált, amennyiben a centrum indexe véges. Mi a jelen dolgozatban el tudjuk kerülni e tétel alkalmazását, mert e tétel véges osztályú csoportokra vonatkozó speciális esetére igen egyszerű bizonyítást adunk (2. §). A másik nem elemi mozzanat *Neumann* bizonyításaiban az, hogy kénytelen kibővíteni az alapulvett csoportot, mégpedig „azonosított alcsoporttal bíró direkt szorzat“ konstrukciója útján. Ez egy nagyfontosságú csoportelméleti konstrukció, amely a legutóbbi évek irodalmában számos jelentős alkalmazásra talált, azonban nem mondható elemi jellegűnek, és csoportelméleti könyvekben eddig még nem hozzáférhető. A jelen dolgozatban egészen más úton tárgyaljuk az elméletnek ezt a részét, és sikerül elkerülnünk mind az alapulvett csoport kibővítését, mind általában a bonyolultabb csoportkonstrukciókat. Az említett egyszerűsítések *Neumann* tárgyalásának olyan nagymértékű átalakítását tették lehetővé, hogy a két tárgyalási mód között az egyetlen lényeges közös mozzanatot *I. Schur* egy klasszikus módszerének alkalmazása jelenti [9], amelyet mi a 3. §-beli 3. 3. segédtétel bizonyításánál alkalmazunk. Így a jelen dolgozat a csoportelmélet legegyszerűbb alapfogalmainak ismeretében teljesen megérthető.

Fjodorov tételének már említett bizonyítása mellett (7. §) új eredményeket tartalmaznak a jelen dolgozatban azok a vizsgálatok, amelyek tisztázzák a szereplő tételek megfordításának, illetve élesítésének lehetőségeit (8. §).

Annak, hogy egy csoport mennyire áll közel az Abel-féle csoportokhoz, bizonyos értelemben „mértéke“ a csoport centruma, illetve kommutátorcsoportja. Éspedig annál közelebb esik egy csoport az Abel-féle csoportokhoz, minél

„kisebb" a kommutátorcsoportja (magához a csoporthoz viszonyítva), illetőleg minél „nagyobb" a centruma, azaz minél kisebb a centrum indexe a csoportban. Ezért várható, hogy a véges osztályú csoportok bizonyos tulajdonságai tükröződnek a csoport centrumára, illetve kommutátorcsoportjára vonatkozó tételekben. Valóban, látni fogjuk, hogy egy csoport mindig véges osztályú, ha centrumának indexe véges, vagy ha kommutátorcsoportja véges (2. §, 6. §). A 8. §-ban azonban megmutatjuk, hogy e két elegendő feltétel egyike sem szükséges. Az említett állítások ugyanis csak végesen generált csoportok esetén fordíthatók meg. Másrészt az is kiadódik *Neumann* elméletéből, hogy véges osztályú csoport kommutátorcsoportjában minden elem véges rendű (3. §). A 8. §-ban megmutatjuk, hogy ez a szükséges feltétel általában nem elegendő ahhoz, hogy egy csoport véges osztályú csoport legyen. Ezek az eredmények kézenfekvővé teszik azt is, hogy milyen alapon lehetséges a véges osztályú csoportok elméletében annak a nagyfontosságú *Baer*-féle tételnek igazolása, mely szerint hogyha egy csoport centrumának indexe véges, akkor a csoport kommutátorcsoportja véges (6. §). A 8. §-ban azt is megmutatjuk, hogy *Baer* eme tétele nem fordítható meg; a tétel megfordítása csak végesen generált csoportokra bizonyítható (6. §).

A. G. Kuros nyomán *lokálisan végesnek* nevezünk minden olyan csoportot, amelynek véges számú eleme mindig benne van a csoport egy véges alcsoportjában [6]. Ez a fogalom rendkívül nagyfontosságú a végtelen csoportok modern struktúraelméletében, és ezzel kapcsolatban fennáll *Burnside* ama híres, mindmáig igazolatlan sejtése, hogy minden olyan csoport lokálisan véges, amely csak véges rendű elemeket tartalmaz. Azt, hogy a véges osztályú csoportok közel állanak az Abel-féle csoportokhoz, mutatja az a tétel is, mely szerint véges osztályú csoportban a véges rendű elemek mindig alcsoportot, mégpedig lokálisan véges alcsoportot alkotnak (4. §).

A véges osztályú csoportok elméletének fontos alkalmazásaként nyerjük majd az 5. §-ban *Dicman* következő tételét: Egy tetszőleges csoport elemeinek valamely véges részhalmaza akkor és csak akkor van benne a csoport egy véges normálosztójában, ha a részhalmaz csak véges rendű elemekből áll, és ezen elemek mindegyikének csak véges számú konjugáltja van a csoportban [5].

Most még röviden vázoljuk azt az utat, amelyen haladva a jelen dolgozatban felépítjük a véges osztályú csoportok elméletét (2—4. §). A mi tárgyalásunkban az elmélet középpontját az a tétel alkotja, mely szerint véges osztályú csoportban a kommutátorcsoport csak véges rendű elemeket tartalmaz (lásd a főtételt a 3. §-ban). Ehhez a főtételhez a következő úton jutunk. Először megmutatjuk, hogy a főtételt elegendő végesen generált csoportokra bebizonyítani. Egy végesen generált véges osztályú G csoport centrumában mindig van olyan csupa végtelen rendű elemekből álló A alcsoport, amelynek G-beli r indexe véges. Ekkor G bármely elemének r-edik hatványa A-ban van. A 3. §-ban (lásd 3. 3 segédtétel) bebizonyítjuk, hogy G-beli elemek tetszőleges szorzatát szabad úgy emelni r-edik hatványra, hogy a szorzat minden tényezőjét külön r-edik hatványra emeljük. Ez a leglényegesebb új mozzanat *Neumann* elméletének általunk adott felépítésében, és ebből már világos, hogy G kommutátorcsoportjában bármely elem r-edik hatványa egyenlő az egységelemmel, hiszen G bármely elemének r-edik hatványa már G centrumában van.

2. §. Előzmények

Ebben a §-ban összefoglaljuk azokat az alapvető tényeket, amelyekre a véges osztályú csoportok elméletét a 3. és 4. §-ban felépítjük. A bármely csoportelméleti könyvből ismert legegyszerűbb segédtételeket csupán megemlítjük, bizonyítás nélkül.

Mindenekelőtt a használt jelöléseket és elnevezéseket soroljuk fel. Csoportokat latin nagybetűkkel, csoportok elemeit pedig az $a, b, \ldots, g$ kisbetűkkel fogjuk jelölni; az utóbbiakat gyakran indexekkel ellátva is alkalmazzuk. A többi latin kisbetű racionális egész számot jelöl. Abel-féle csoporton kommutatív csoportot értünk. Egy csoportot akkor nevezünk *végesen generált*nak, ha megadható véges számú elem a csoportban úgy, hogy ezek egyidejűleg nincsenek benne a csoport egyetlen valódi alcsoportjában sem. A jelen §-ban alkalmazni fogjuk a végesen generált Abel-féle csoportok jólismert alaptételét, mely szerint egy ilyen csoport mindig előállítható véges számú ciklikus csoport direkt szorzataként. Ebből a tényből mi annyit használunk fel, hogy bármely végesen generált Abel-féle csoport egy véges csoport és egy torziómentes csoport direkt szorzata. *Torziómentes*nek az olyan csoportot nevezzük, amelyben nincsen az egységelemtől különböző véges rendű elem. Az olyan csoportot viszont, amelyben bármely elem véges rendű, *torziócsoport*nak hívjuk. *Vegyes csoport* az olyan csoport, amely nem torziócsoport, de nem is torziómentes csoport. Egy csoport mindazon elemei, amelyek egy adott elemmel felcserélhetők, alcsoportot alkotnak, s ezt az alcsoportot az adott elem *normalizátorá*nak nevezzük. Egy csoport *centruma* a csoportnak azokból az elemeiből áll, amelyek a csoport bármely elemével felcserélhetők. Ha a, b tetszőleges elemei a G csoportnak, akkor az

$$[a, b] = a^{-1} b^{-1} a b$$

elemet az a, b elemek *kommutátorá*nak nevezzük. A G csoport G'-vel jelölt *kommutátorcsoportja* az az alcsoport G-ben, amelyet G összes kommutátorai generálnak. Egy csoportban a centrum és a kommutátorcsoport mindig normálosztó. Az összes szereplő csoportok egységelemét (félreérthetőség veszélye nélkül) 1-gyel jelöljük.

Az elemekből ismeretes a következő

2. 1. segédtétel. *Egy csoport valamely eleme konjugáltjainak számosságát az elem normalizátorának indexe adja meg.*

Ebből következik, hogy a véges osztályú csoportok azzal a tulajdonsággal jellemezhetők, hogy bármely elemük normalizátora véges indexű a csoportban. Minthogy egy csoport centruma megegyezik az összes elemek normalizátorainak közös részével, nyilvánvaló a következő tétel helyessége, amely elegendő feltételt ad arra, hogy egy csoport véges osztályú csoport legyen:

2. 2. segédtétel. *Ha egy csoport centrumának indexe véges, akkor a csoport véges osztályú csoport.*

Ez az elegendő feltétel azonban általában nem szükséges, amint a 8. §-ban látni fogjuk. A 2. 2. segédtétel állítását csupán végesen generált csoportok esetén tudjuk megfordítani:

2. 3. segédtétel. *Végesen generált véges osztályú csoport centruma véges indexű.*

Bizonyítás. Legyen G végesen generált véges osztályú csoport, és tekintsük G egy véges generátorrendszerét. Világos, hogy G centruma a tekintett generátorrendszer elemeihez tartozó normalizátorok közös része. Minthogy G véges osztályú csoport, ezek a normalizátorok véges indexű alcsoportok G-ben. Másfelől véges számú véges indexű alcsoport közös része is véges indexű alcsoport, mivel a közös rész indexe nem lehet nagyobb a szereplő alcsoportok indexeinek szorzatánál. Ezért a 2. 3. segédtétel helyes.

2. 4. segédtétel. *Végesen generált véges osztályú csoport bármely véges indexű alcsoportja végesen generált csoport.*

Bizonyítás. Legyen G végesen generált véges osztályú csoport, és legyen H véges r indexű alcsoport G-ben. Ha G valamely rögzített véges generátorrendszeréhez hozzávesszük az abban szereplő elemek inverzeit, majd az így kibővített elemrendszerhez hozzávesszük még valamennyi abban szereplő elem összes konjugáltját is, akkor, minthogy G véges osztályú csoport, még mindig véges

$$g_1, g_2, \ldots, g_n \tag{1}$$

generátorrendszert kapunk, amely azonban már bármely elemével együtt annak inverzét és valamennyi konjugáltját is tartalmazza. Alkossuk meg az összes olyan legfeljebb r tényezős

$$a_1 a_2 \ldots a_k \qquad (a_i = g_j;\ k \leqq r) \tag{2}$$

szorzatokat, amelyeknek bármely a_i tényezője az (1) alatti elemek közül való. (Ugyanaz az elem többször is szerepelhet tényezőként, és a tényezők sorrendje lényeges.) Az így megalkotott (2) alatti szorzatok halmazát jelöljük K-val. K nyilván véges halmaz. A 2. 4. segédtételt úgy bizonyítjuk be, hogy megmutatjuk: *a K halmaz H-ba tartozó elemei generálják a H alcsoportot.*

Ennek igazolása céljából tekintsük a H alcsoport tetszőleges b elemét. Mivel ez eleme a G csoportnak, felírható olyan

$$b = b_1 b_2 \ldots b_s \qquad (b \in H) \tag{3}$$

szorzatként, amelynek valamennyi b_i tényezője az (1) alatti elemek közül való. Azt, hogy a (3) alatti b elem előállítható a K halmazból vett elemek szorzataként, s szerinti teljes indukcióval bizonyítjuk be, feltételezve tehát az előállíthatóságot olyan (3) alatti szorzatokra, amelyek s-nél kevesebb tényezőt tartalmaznak. Nyilván elegendő az $s > r$ esettel foglalkoznunk, hiszen $s \leqq r$ esetén a H-ba tartozó (3) alatti b elem már maga is a K halmaz egyik eleme. Minthogy $s > r$, az s számú

$$b_1, b_1 b_2, \ldots, b_1 b_2 \ldots b_s$$

elem között van két olyan, amely G-nek a H alcsoport szerinti kifejtésében ugyanabba a jobboldali mellékosztályba esik. Ennélfogva ha $b_1 b_2 \ldots b_u$ és $b_1 b_2 \ldots b_{u+v}$ ilyen elemek, akkor a

$$c = b_{u+1} \ldots b_{u+v} \in H \tag{4}$$

szorzat H-beli elem. A (3) alatti b elemet így is írhatjuk:

$$\begin{aligned} b &= b_1 \ldots b_u \cdot c \cdot b_{u+v+1} \ldots b_s = \\ &= c[(c^{-1} b_1 c) \ldots (c^{-1} b_u c) \cdot b_{u+v+1} \ldots b_s]. \end{aligned} \tag{5}$$

Minthogy b és c a H alcsoport elemei, a szögletes zárójelbe tett szorzat is H-ba tartozó elem. Másfelől e szorzat s-nél kevesebb (1) alatti tényező szorzata, hiszen nemcsak mindegyik b_i, hanem valamennyi $c^{-1} b_i c$ elem is előfordul az (1) alatti elemrendszerben. Ezért indukciós feltevésünk alapján a szögletes zárójelbe tett szorzat előállítható a K halmaz bizonyos elemeinek szorzataként. Ugyanez áll az s-nél szintén kevesebb tényezőt tartalmazó (4) alatti c elemre is, azaz egyszersmind (5) alapján a H-ból tetszőlegesen kiszemelt b elemre is. Ezzel a 2. 4. segédtétel bizonyítását befejeztük.

A 2.4. segédtételt végesen generált véges osztályú csoport centrumára alkalmazva nyerjük a következőt:

2. 5. segédtétel. *Bármely végesen generált véges osztályú G csoportnak van olyan véges indexű torziómentes A alcsoportja, amely G centrumába esik.*

Bizonyítás. Legyen G végesen generált véges osztályú csoport. A 2. 3. segédtétel szerint a G csoport Z centrumának G-beli r indexe véges. Ezért a 2. 4. segédtétel értelmében Z végesen generált Ábel-féle csoport. Mint ilyen, a végesen generált Abel-féle csoportok alaptétele szerint Z előállítható egy véges csoportnak és egy A torziómentes csoportnak direkt szorzataként. Ha az említett véges csoport rendje s, akkor a G csoport centrumában fekvő A torziómentes csoport G-beli indexe nyilván rs, azaz véges. Így a 2. 5. segédtételt bebizonyítottuk.

A 2. 5. segédtétel fontos lépést jelent a következő §-ban tárgyalandó főtétel bizonyításában. Az alábbi segédtétel más irányból készíti elő a véges osztályú csoportok elméletének felépítését.

2. 6. segédtétel. *Egy tetszőleges csoport kommutátorcsoportja akkor és csak akkor torziócsoport, ha a csoport bármely végesen generált alcsoportjának kommutátorcsoportja torziócsoport.*

Bizonyítás. Nyilván elegendő a segédtételnek azt az állítását igazolni, hogy amennyiben egy G csoport bármely végesen generált alcsoportjának kommutátorcsoportja torziócsoport, akkor G' is torziócsoport. Ez azonban nyilvánvaló, hiszen G' bármely eleme véges számú kommutátor szorzata, s így benne van G egyik végesen generált alcsoportjának kommutátorcsoportjában.

Az így igazolt segédtétel alapján a 3. §-ban tárgyalandó főtételt tetszőleges véges osztályú csoportok helyett elegendő lesz végesen generált véges osztályú csoportokra bizonyítanunk.

2. 7. segédtétel. *Ha egy G csoport kommutátorcsoportja torziócsoport, akkor G véges rendű elemei csoportot alkotnak.*

Bizonyítás. Legyen a G csoport G' kommutátorcsoportja torziócsoport, és tekintsük a G csoport két tetszőleges a és b véges rendű elemét. Elég azt megmutatnunk, hogy $a \cdot b$ véges rendű elem, mert az nyilvánvaló, hogy véges rendű elem inverze is véges rendű. Jelöljük m-mel az a és b elemek rendjének legkisebb közös többszörösét. Ekkor

$$(ab)^m = a^m b^m c = c,$$

ahol c a G' kommutátorcsoport eleme, minthogy az $(ab)^m$ szorzat tényezőinek az $a^m b^m$ alakhoz vezető átcsoportosításánál bármely két szomszédos elem felcserélésekor egy kommutátor-elem lép fel, amelyet a felcserélt elempár után írhatunk. Másfelől feltevésünk szerint G' torziócsoport, azaz van olyan n természetes szám, amelyre $c^n = 1$. Ennélfogva

$$(ab)^{mn} = c^n = 1,$$

s ezzel a 2. 7. segédtétel bizonyítását befejeztük.

Minden további nélkül világos, a következő segédtétel helyessége:

2. 8. segédtétel. *Ha egy G csoportban a véges rendű elemek a H alcsoportot alkotják, akkor H karakterisztikus alcsoportja G-nek, és a G/H faktorcsoport torziómentes.*

Könnyen bizonyítható a következő segédtétel is:

2. 9. segédtétel. *Egy csoport akkor és csak akkor véges osztályú csoport, ha van olyan generátorrendszere, amelynek bármely eleme véges számú konjugálttal bír a csoportban.*

Bizonyítás. Minthogy egy véges osztályú csoport összes elemei a csoportnak olyan generátorrendszerét alkotják, amely rendelkezik a segédtételben megfogalmazott tulajdonsággal, elegendő azt megmutatnunk, hogy egy ilyen tulajdonságú generátorrendszer létezése esetén a csoport véges osztályú csoport. Ez viszont nyilvánvaló abból, hogy a csoport tetszőleges eleme felírható olyan (véges számú tényezőt tartalmazó) szorzatként, amelyben mindegyik tényező a tekintett generátorrendszer eleme, vagy generátorelem inverze. Minthogy pedig szorzat konjugáltja megegyezik a tényezők megfelelő konjugáltjainak szorzatával, és a tényezők konjugáltjai föltevésünk szerint csak véges számban vannak, nyilvánvaló, hogy a kiszemelt elemnek is csak véges számú konjugáltja van a csoportban, azaz a csoport véges osztályú csoport.

3. §. A főtétel

Ebben a §-ban az eddigi segédtételekre támaszkodva az 1. § végén vázolt úton bebizonyítjuk azt a tételt, amely tárgyalásunkban főtétel jelentőségével bír, s amely azt mondja ki, hogy *véges osztályú csoport kommutátorcsoportja mindig torziócsoport.* (Lásd az alábbi 3. 5. tételt.) Ezt először arra az esetre igazoljuk, amikor a csoport végesen generált csoport. Ebből már könnyen adódik a tétel helyessége tetszőleges véges osztályú csoportokra.

Jelöljön G e § folyamán mindvégig tetszőleges végesen generált véges osztályú csoportot. A 2. 5. segédtétel alapján tudjuk, hogy van G-ben olyan véges m indexű A torziómentes alcsoport, amely G centrumába esik. Közvetlen célunk annak kimutatása, hogy G-beli elemek tetszőleges szorzatát szabad úgy emelni m-edik hatványra, hogy a szorzat mindegyik tényezőjét külön m-edik hatványra emeljük. Ezt az alábbi első három segédtételben bizonyítjuk be.

Minthogy az A alcsoport G centrumában van, A normálosztója G-nek. Az m elemű G/A faktorcsoport elemeit jelöljük görög kisbetűkkel. E faktorcsoport elemei G-nek A szerinti mellékosztályai, és ha G valamely g eleme a ϱ mellékosztályba esik, akkor az elemet jelölő g betűt a ϱ indexszel látjuk el. Legyenek g_ϱ és g_σ tetszőleges elemei G-nek. Mivel G bármely elemének m-edik hatványa A-ba tartozó elem, a

$$(g_\varrho g_\sigma)^m = a_{\varrho,\sigma} g_\varrho^m \cdot g_\sigma^m \tag{6}$$

egyenlettel definiált $a_{\varrho,\sigma}$ elem is eleme A-nak. Megmutatjuk, hogy ez az $a_{\varrho,\sigma}$ elem kizárólag a ϱ, σ mellékosztályoktól függ, s független attól, hogy e mellékosztályokból melyik g_ϱ, illetve g_σ elemet választottuk ki. Amennyiben ugyanis az említett mellékosztályokból g_ϱ és g_σ helyett a $g'_\varrho = a_1 g_\varrho$, ill. $g'_\sigma = a_2 g_\sigma$ elemeket választjuk ki (itt a_1 és a_2 az A alcsoport alkalmas elemei, azaz G centrumában vannak), akkor a

$$(g'_\varrho g'_\sigma)^m = a'_{\varrho,\sigma} g'^m_\varrho g'^m_\sigma$$

egyenletet kielégítő $a'_{\varrho,\sigma}$ elemre vonatkozólag azt találjuk, hogy

$$\begin{aligned} a'_{\varrho,\sigma} &= (g'_\varrho g'_\sigma)^m \cdot g'^{-m}_\sigma g'^{-m}_\varrho = (a_1 g_\varrho \cdot a_2 g_\sigma)^m \cdot (a_2 g_\sigma)^{-m} \cdot (a_1 g_\varrho)^{-m} = \\ &= a_1^m a_2^m (g_\varrho g_\sigma)^m \cdot a_2^{-m} \cdot g_\sigma^{-m} \cdot a_1^{-m} \cdot g_\varrho^{-m} = \\ &= a_1^m a_2^m a_2^{-m} a_1^{-m} \cdot (g_\varrho g_\sigma)^m \cdot g_\sigma^{-m} \cdot g_\varrho^{-m} = a_{\varrho,\sigma}, \end{aligned}$$

azaz $a_{\varrho,\sigma}$ valóban csupán ϱ-tól és σ-tól függ. A most következő három segédtétel az így értelmezett $a_{\varrho,\sigma}$ elemekből álló (nyilvánvalóan véges) „faktorrendszerre“ vonatkozik. Célunk annak igazolása, hogy valamennyi $a_{\varrho,\sigma}$ elem megegyezik a G csoport egységelemével. Ebből ugyanis (6) alapján már közvetlenül adódik a G-beli elemek szorzatának m-edik hatványra való emelésével kapcsolatos fentebb említett törvényszerűség. Az alábbi segédtételek bizonyításában igen lényeges lesz az a tény, hogy az előbb bevezetett *faktorrendszer* $a_{\varrho,\sigma}$ *elemei valamennyien az A alcsoportban vannak, s ebből következőleg egyfelől centrum-elemei G-nek, másfelől amennyiben valamelyikük nem egységelem, akkor végtelen rendű.*

3. 1. segédtétel. *A G/A faktorcsoport bármely ϱ, σ, τ elemeire érvényes az*

$$a_{\varrho,\sigma}\cdot a_{\varrho\sigma,\tau}=a_{\varrho,\sigma\tau}\cdot a_{\sigma,\tau} \tag{7}$$

összefüggés.

A bizonyítás közvetlenül adódik a

$$(g_\varrho g_\sigma g_\tau)^m=((g_\varrho g_\sigma)g_\tau)^m=a_{\varrho\sigma,\tau}\cdot(g_\varrho g_\sigma)^m\cdot g_\tau^m=$$
$$=a_{\varrho\sigma,\tau}\cdot a_{\varrho,\sigma}g_\varrho^m\cdot g_\sigma^m\cdot g_\tau^m$$

és

$$(g_\varrho g_\sigma g_\tau)^m=(g_\varrho(g_\sigma g_\tau))^m=a_{\varrho,\sigma\tau}\cdot g_\varrho^m\,(g_\sigma g_\tau)^m=$$
$$=a_{\varrho,\sigma\tau}\cdot g_\varrho^m\cdot a_{\sigma,\tau}\cdot g_\sigma^m\cdot g_\tau^m=a_{\varrho,\sigma\tau}\cdot a_{\sigma,\tau}\cdot g_\varrho^m\cdot g_\sigma^m\cdot g_\tau^m$$

egyenletek összehasonlításából.

3. 2. segédtétel. *Ha ϱ és σ felcserélhető elemei a G/A faktorcsoportnak, akkor* $a_{\varrho,\sigma}=1$.

Bizonyítás. A (6) alapján azt kell megmutatnunk, hogy $\varrho\sigma=\sigma\varrho$ esetén

$$g_\varrho g_\sigma=g_\sigma g_\varrho. \tag{8}$$

Minthogy $\varrho\sigma=\sigma\varrho$, van olyan A-beli a elem, amelyre

$$g_\varrho g_\sigma=a g_\sigma g_\varrho \tag{9}$$

teljesül. Ennélfogva

$$g_\varrho g_\sigma g_\varrho^{-1}=a g_\sigma,$$

azaz

$$(g_\varrho g_\sigma g_\varrho^{-1})^m=(a g_\sigma)^m,$$
$$g_\varrho g_\sigma^m g_\varrho^{-1}=a^m g_\sigma^m,$$
$$g_\sigma^m=a^m g_\sigma^m,$$
$$a^m=1,$$

mivel a és g_σ^m az A alcsoportba, s ezért G centrumába eső elemek. Az így nyert $a^m=1$ egyenletből $a=1$ következik, mivel A egyetlen véges rendű eleme az egységelem. Így (9)-ből (8) helyessége nyilvánvaló, ami egyszersmind a 3. 2. segédtétel bizonyítását jelenti.

3. 3. segédtétel. *Az összes $a_{\varrho,\sigma}$ elem megegyezik a csoport egységelemével.*

Bizonyítás. Legyen ϱ tetszőleges rögzített eleme a G/A faktorcsoportnak, τ pedig fussa be e faktorcsoport összes elemeit. Az így adódó m számú $a_{\varrho,\tau}$ elem szorzatát jelöljük $a(\varrho)$-val:

$$a(\varrho) = \prod_{\tau} a_{\varrho,\tau}. \tag{10}$$

(E szorzat tényezőinek sorrendje nem jön számításba, hiszen az összes tényezők G centrumának elemei.) Írjuk fel rögzített ϱ, σ elemek esetén a G/A faktorcsoport valamennyi τ elemére a (7) összefüggést. Ezek megfelelő oldalait összeszorozva és a (10) jelölést alkalmazva azt találjuk, hogy

$$a^m_{\varrho,\sigma} \cdot a(\varrho\sigma) = a(\varrho) \cdot a(\sigma), \tag{11}$$

minthogy τ-val együtt $\sigma\tau$ is befutja a G/A faktorcsoport összes elemeit, mindegyiknek értékét pontosan egyszer véve fel. A (11) összefüggésből a 3. 2. segédtétel felhasználásával azt a következtetést vonhatjuk le, hogy a G/A faktorcsoport felcserélhető ϱ, σ elemeire mindig

$$a(\varrho\sigma) = a(\varrho) \cdot a(\sigma).$$

Alkalmazzuk ezt rendre a $\sigma = \varrho$, $\sigma = \varrho^2, \ldots$ esetekben; azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} a(\varrho^2) &= a(\varrho)^2; \\ a(\varrho^3) &= a(\varrho \cdot \varrho^2) = a(\varrho) \cdot a(\varrho^2) = a(\varrho)^3; \\ &\vdots \\ a(\varrho^m) &= a(\varrho)^m. \end{aligned} \tag{12}$$

Mivel pedig $\varrho^m = 1$, és a 3. 2. segédtétel, valamint (10) figyelembevételével azt nyerjük, hogy a (1) megegyezik a G csoport egységelemével, a (12) egyenletből következőleg a G/A faktorcsoport bármely ϱ elemére $a(\varrho)^m = 1$. Ekkor viszont $a(\varrho) = 1$, minthogy $a(\varrho)$ az A alcsoport eleme, és ebben egyedül az egységelem véges rendű. Az így nyert eredményt a (11) összefüggésre alkalmazva

$$a^m_{\varrho,\sigma} = 1$$

adódik, amiből az következik, hogy $a_{\varrho,\sigma}$ megegyezik a G csoport egységelemével, mivel $a_{\varrho,\sigma}$ a torziómentes A csoport eleme. Ezzel a 3. 3. segédtétel bizonyítása befejezést nyert.

Az eddigiekből már könnyen adódik a

3. 4. segédtétel. *Végesen generált véges osztályú csoport kommutátorcsoportja torziócsoport.*

Bizonyítás. Tekintsük az előbbiekben már szereplő végesen generált véges osztályú G csoportot, és tartsuk meg a jelen § többi jelöléseit is. A 3. 3. segédtételből (6) figyelembevételével az következik, hogy a G csoport bármely g_ϱ, g_σ elemeire

$$(g_\varrho \cdot g_\sigma)^m = g^m_\varrho \cdot g^m_\sigma$$

áll. Ennek az összefüggésnek érvényessége a tényezők száma szerinti teljes indukcióval kiterjeszthető akárhány tényezőjű szorzatra is, úgyhogy igaz a következő állítás: *a G csoport tetszőleges elemeinek szorzatát szabad úgy emelni m-edik hatványra, hogy a szorzat tényezőit külön-külön m-edik hatványra emeljük.* Alkalmazzuk ezt a szabályt a G' kommutátorcsoport tetszőleges

$$c = [a_1, b_1] \ldots = a_1^{-1} b_1^{-1} a_1 b_1 \ldots$$

elemére. Azt találjuk, hogy ennek az elemnek m-edik hatványa, azaz

$$c^m = a_1^{-m} b_1^{-m} a_1^m b_1^m \ldots$$

egyenlő a G csoport egységelemével, minthogy a G centrumába eső $a_1^{-m}, b_1^{-m}, \ldots$ m-edik hatványok egymással felcserélhetők. Ennélfogva a G' csoportban bármely elem m-edik hatványa az egységelemmel egyenlő, s ezzel a 3. 4. segédtételt bebizonyítottuk.

3. 5. tétel. *Bármely véges osztályú csoport kommutátorcsoportja torziócsoport.*

Bizonyítás. Tekintsünk egy tetszőleges véges osztályú csoportot. Minthogy ennek bármely végesen generált alcsoportja szintén véges osztályú csoport, a tétel helyessége minden további nélkül következik a 3. 4. és 2. 6. segédtételekből.

4. §. A véges osztályú csoportok tulajdonságai

A jelen §-ban az előrebocsátott segédtételek alkalmazásával levezetjük a főtételből a véges osztályú csoportok legfontosabb tulajdonságait.

4. 1. tétel. *Bármely torziómentes véges osztályú csoport Abel-féle.*

A bizonyítás azonnal adódik a 3. 4. főtételből, minthogy annak következtében véges osztályú torziómentes csoport kommutátorcsoportja egyelemű.

4. 2. tétel. *Véges osztályú csoportban a véges rendű elemek egy karakterisztikus alcsoportot alkotnak, mely szerint képezett faktorcsoport torziómentes Abel-féle csoport.*

Bizonyítás. Legyen G tetszőleges véges osztályú csoport. A 3. 5. főtétel, továbbá a 2. 7. és 2. 8. segédtételek alapján nyilvánvaló, hogy G véges rendű elemei G-nek valamely H karakterisztikus alcsoportját alkotják, és a G H faktorcsoport torziómentes. Minthogy továbbá a 3. 5. főtétel szerint $G' \subseteq H$, világos, hogy G H Abel-féle csoport.

4. 3. tétel. *Véges rendű elemekkel generált véges osztályú csoport mindig torziócsoport.*

Bizonyítás. Tekintsünk egy véges rendű elemekkel generált véges osztályú csoportot. Ebben a véges rendű elemek a 4. 2. tétel szerint alcsoportot alkotnak, amely nem lehet valódi alcsoportja az egész csoportnak, minthogy az utóbbi generálva van az összes véges rendű elemekkel.

4. 4. tétel. *Végesen generált véges osztályú csoportban a véges rendű elemek véges alcsoportot alkotnak.*

Bizonyítás. Legyen G végesen generált, véges osztályú csoport. Elegendő azt megmutatnunk, hogy G-nek csak véges számú, véges rendű eleme van, az ugyanis, hogy ezek alcsoportot alkotnak, már következik a 4. 2. tételből. A 2. 5. segédtétel szerint van G-nek olyan véges indexű torziómentes A alcsoportja, amely G centrumába esik. Azt fogjuk megmutatni, hogy G-nek A szerinti bármely mellékosztályába legfeljebb egy véges rendű elem esik. E célból tegyük fel, hogy c és d olyan véges rendű elemei G-nek, amelyek ugyanabba az A szerinti mellékosztályba tartoznak. Ekkor $c = ad$, ahol a alkalmas A-beli elem. Ha az n természetes szám közös többszöröse c és d rendjének, akkor $c^n = d^n = 1$, s így a $c = ad$ egyenlet alapján azt kapjuk, hogy $c^n = a^n d^n$, azaz

$$a^n = 1, \qquad (13),$$

mivel a a G csoport centrumának eleme. Másfelől azonban A-ról azt is tudjuk, hogy torziómentes csoport, és így (13)-ból $a = 1$ következik. Ennélfogva azt nyertük, hogy $c = d$, s ezzel bebizonyítottuk, hogy G-nek A szerinti bármely mellékosztályába legfeljebb egy véges rendű elem esik. Minthogy pedig A indexe G-ben véges, így G csak véges számú véges rendű elemet tartalmazhat. Ezzel a 4. 4. tétel bizonyítását befejeztük.

4. 5. tétel. *Véges számú, véges rendű elemmel generált véges osztályú csoport mindig véges.*

A bizonyítás ugyanúgy történik, mint a 4. 3. tétel bizonyítása.

4. 6. tétel. *Véges osztályú csoportban a véges rendű elemek lokálisan véges alcsoportot alkotnak.*

Bizonyítás. Azt kell megmutatnunk, hogy véges osztályú csoportban véges számú, véges rendű elem mindig benne van egy véges alcsoportban. Ez azonban nyilvánvalóan következik a 4. 5. tételből, minthogy véges osztályú csoport bármely alcsoportja szintén véges osztályú csoport.

5. §. Csoportok véges normálosztói

Ebben a §-ban bebizonyítjuk *Dicman* említett tételét, s e tétel néhány alkalmazását. *Dicman* tétele a következő [5]:

5. 1. tétel. *Egy csoport elemeinek valamely véges részhalmaza akkor és csak akkor van benne a csoport egy véges normálosztójában, ha a részhalmaz csak véges rendű elemekből áll, és emez elemek mindegyikének csak véges számú konjugáltja van a csoportban.*

Bizonyítás. Minthogy az említett feltételek szükségessége nyilvánvaló, csupán ezek elegendőségét kell bizonyítanunk. E célból tekintsük egy G csoport elemeinek olyan V véges részhalmazát, amely csupa véges rendű elemből áll, és a részhalmaz mindegyik elemének csak véges számú konjugáltja van a csoportban. Ekkor a V halmazhoz hozzávéve elemeinek összes konjugáltjait, olyan V' véges elemhalmazt kapunk, amelyben bármely elem rendje véges. Ennélfogva a V' halmaz elemei a 4. 5. tétel szerint egy véges H alcsoportot generálnak a G csoportban, minthogy H a 2. 9. segédtétel alapján nyilván véges osztályú csoport. Másfelől az is világos, hogy H normálosztó G-ben. Ezzel *Dicman* tételét bebizonyítottuk.

5.2. tétel. *Egy G csoport bármely eleme akkor és csak akkor tartozik véges normálosztóhoz a csoportban, ha G véges osztályú torziócsoport.*

Bizonyítás. Az előző tételt egyelemű részhalmazra alkalmazva, azt nyerjük, hogy a G csoport bármely eleme akkor és csak akkor van benne G véges normálosztójában, ha G mindegyik eleme véges rendű, és mindegyik elemnek csak véges számú konjugáltja van G-ben, azaz ha G véges osztályú torziócsoport.

5. 3. tétel. *Legyen n rögzített természetes szám. Ha valamely G csoport véges számú n-edrendű elemet tartalmaz, akkor ezek G-nek egy véges karakterisztikus alcsoportját generálják.*

A bizonyítás közvetlenül adódik az 5. 1. tételből, minthogy egy csoport összes n-edrendű elemeinek halmaza nyilván tartalmazza bármely elemmel együtt annak valamennyi konjugáltját is. Hogy a csoport n-edrendű elemei által generált véges normálosztó karakterisztikus alcsoportja a csoportnak, abból következik, hogy n-edrendű elemet a csoport bármely automorfizmusa ismét n-edrendű elembe visz át.

Végül ugyancsak az 5. 1. tétel alkalmazásaként kapjuk a következőt:

5. 4. tétel. *Ha a G csoport véges számú véges rendű elemet tartalmaz, akkor ezek az elemek egy H karakterisztikus alcsoportot alkotnak G-ben, és a G/H faktorcsoport torziómentes.*

Bizonyítás. A G csoport összes véges rendű elemei olyan halmazt alkotnak, amely bármely elemével együtt annak összes konjugáltját is tartalmazza. Ha tehát ez a halmaz véges, akkor a halmaz által generált H alcsoport az 5. 1. tétel szerint véges, s így ez a H alcsoport szükségképpen egybeesik G összes véges rendű. elemeinek halmazával. — Nyilvánvaló, hogy H karakterisztikus alcsoportja G-nek, és G/H torziómentes.

6. §. Csoportok centrumának és kommutátorcsoportjának kapcsolata

E § főcélja *R. Baer* említett nagyfontosságú tételének bizonyítása. Előbb azonban igazoljuk a következő tételt, amely elegendő feltételt ad meg arra, hogy egy csoport véges osztályú csoport legyen.

6. 1. tétel. *Ha egy G csoport kommutátorcsoportja véges, akkor G véges osztályú csoport.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy a G csoport kommutátorcsoportja véges, és legyen a tetszőleges rögzített eleme a G csoportnak. Megmutatjuk, hogy a-nak csak véges számú konjugáltja van G-ben. Az a elem bármely konjugáltja

$$g^{-1}ag = a(a^{-1}g^{-1}ag) = a[a, g]$$

alakban írható, ahol g végigfut G összes elemein. Minthogy azonban az $[a, g]$ kommutátor-elem feltevésünk szerint csak véges számú elemen fut át, világos, hogy a kiszemelt a elemnek csak véges számú konjugáltja van.

Végesen generált csoportokra a 6. 1. tétel állítása megfordítható, azaz a benne szereplő feltétel szükségesnek is bizonyul ahhoz, hogy egy csoport véges osztályú legyen:

6. 2. tétel. *Végesen generált véges osztályú csoport kommutátorcsoportja véges.*

A bizonyítás közvetlenül adódik a 3. 5. és 4. 4. tételből.

Most bebizonyítjuk *Baer* tételét [1], [3]:

6. 3. tétel. *Ha egy csoportban a centrum indexe véges, akkor a csoport kommutátorcsoportja véges.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy a G csoport centruma véges indexű. Ekkor a 2. 2. segédtétel szerint G véges osztályú csoport. Így a 3. 5. tételt alkalmazva, azt nyerjük, hogy a G' kommutátorcsoport torziócsoport, s minthogy G' alcsoportja a véges osztályú G csoportnak, G' maga is véges osztályú csoport. Ennélfogva csak azt kell még megmutatnunk, hogy G' végesen generált csoport, mert akkor a 4. 5. tételből közvetlenül következik G' végessége. Azt viszont, hogy a G' kommutátorcsoportot véges számú elem generálja, könnyen beláthatjuk. Ha ugyanis G centrumának indexe r, és $g_1, g_2, \ldots, g_r$ egy teljes reprezentánsrendszere G-nek a centrum szerint, akkor nyilván legfeljebb r^2 számú különböző $[g_i, g_k]$ kommutátor alkotható e rendszer elemeiből. De ezek már kimerítik G összes lehetséges kommutátorelemeit, mert a $[g_i, g_k]$ kommutátor nyilván nem változik meg, ha a g_i vagy a g_k elemet kicseréljük olyan elemmel, amely az illető elemmel megegyező mellékosztályba tartozik a centrum szerint. Ezzel *Baer* tételének bizonyítását befejeztük.

Baer tétele is megfordítható végesen generált csoportokra:

6. 4. tétel. *Ha a végesen generált G csoport G' kommutátorcsoportja véges, akkor G centrumának indexe G-ben véges.*

Bizonyítás. Legyen a végesen generált G csoport kommutátorcsoportja véges. Ekkor a 6. 1. tétel szerint G véges osztályú csoport. Így az igazolandó állítás helyessége közvetlenül következik a 2. 3. segédtételből.

7. §. Fjodorov tétele

E § egyetlen célja *Ju. G. Fjodorov* következő tételének [7] bizonyítása:

7. 1. tétel. *Ha egy végtelen G csoport bármely egynél többelemű alcsoportja véges indexű, akkor G ciklikus csoport.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy G olyan végtelen csoport, amelyben bármely egynél többelemű alcsoport véges indexű. Ekkor bármely elem normalizátora véges indexű G-ben, úgyhogy a 2. 1. segédtétel szerint G véges osztályú csoport. Másfelől G torziómentes csoport, mert az egységelemtől különböző bármely eleme végtelen rendű, hiszen ellenkező esetben az illető elem által generált ciklikus csoport nem lehetne véges indexű a végtelen G csoportban. Ennélfogva G torziómentes véges osztályú csoport, s így a 4. 1. tétel szerint Abel-féle. Minden további nélkül világos az is, hogy G végesen generált csoport, hiszen bármely, az egységelemtől különböző eleme véges indexű ciklikus alcsoportját generálja. Így a jólismert alaptétel szerint a végesen generált torziómentes Abel-féle G csoport véges számú végtelen ciklikus csoport direkt szorzata. De csak egyetlen végtelen ciklikus csoportból állhat G emez előállítása, mert ha egynél több végtelen ciklikus csoport direkt szorzata volna G, akkor tartalmazna végtelen idexű végtelen alcsoportot. Ezzel *Fjodorov* tételének bizonyítását befejeztük.

8. §. Az eredmények élessége

Ebben a §-ban megmutatjuk, hogy a megelőző §-ok eredményei nem élesíthetők. Legelőször azonban példát konstruálunk olyan véges osztályú csoportra, amely nem állítható elő Abel-féle csoport és véges csoport direkt szorzataként. Tekintsük az a és b elemekkel generált $G = \{a, b\}$ csoportot, amely az

$$a^{-1}b^{-1}ab = c, \quad c^2 = 1, \quad ac = ca, \quad bc = cb \tag{14}$$

definiáló relációk alapján van meghatározva. Ebben a G csoportban a véges rendű elemek a kételemű $\{c\}$ ciklikus csoportot alkotják. Nyilvánvaló, hogy $\{c\}$ egyszersmind a G csoport kommutátorcsoportja is. Minthogy (14) szerint

$$b^{-1}ab = ac,$$

azaz

$$b^{-1}a^2b = (b^{-1}ab)^2 = (ac)^2 = a^2c^2 = a^2,$$

azt találtuk, hogy a^2 a G csoport centrumában van. Ugyanígy láthatjuk be, hogy b^2 is G centrumához tartozó elem. Ebből következik, hogy a G csoport centruma két végtelen ciklikus csoport direkt szorzata, t. i. az

$$\{a^2\} \times \{b^2\}$$

direkt szorzat, s így a centrum indexe G-ben 4. Eszerint G véges osztályú csoport. G azonban nem állítható elő véges csoport és Abel-féle csoport direkt szorzataként, mert ez annyit jelentene, hogy G maga is Abel-féle csoport, hiszen G véges rendű elemei egyik előbbi megjegyzésünk szerint Abel-féle csoportot alkotnak.

E példával kapcsolatban természetszerűen felmerül az a probléma, hogy milyen módon lehetne bizonyos fokú áttekintést szereznünk az összes végesen generált véges osztályú csoport szerkezetéről. Eredményeink a végesen generált véges osztályú csoportok kétféle leírását teszik lehetővé, a Schreier-féle csoportbővítés fogalmának segítségével, s ezek mindegyike elég mély bepillantást nyújt e csoportok szerkezetébe. Mivel a 2. 5. segédtételben szereplő A csoport végesen generált torziómentes Abel-féle csoport, azaz véges számú végtelen ciklikus csoport direkt szorzata, vagy — mint mondani szokás — véges rangú szabad Abel-féle csoport, e segédtétel szerint a végesen generált véges osztályú csoportok leírhatók a következőképpen: *Bármely végesen generált véges osztályú csoport egy véges rangú szabad Abel-féle csoport centrális Schreier-féle bővítése egy véges csoporttal.* A 4. 2. és 4. 4. tételekből viszont az következik, hogy *bármely végesen generált véges osztályú csoport egy véges csoport Schreier-féle bővítése egy véges rangú szabad Abel-féle csoporttal.* [Az, hogy egy végesen generált véges osztályú csoportnak a csoport véges rendű elemeiből álló karakterisztikus alcsoport szerinti faktorcsoportja véges rangú szabad Abel-féle csoport, onnan következik, hogy ez a torziómentes Abel-féle faktorcsoport (lásd a 4. 2. tételt) végesen generált csoport homomorf képe, azaz maga is végesen generált.]

Mint láttuk, ahhoz, hogy egy csoport véges osztályú csoport legyen, elegendő, ha centruma véges indexű, vagy ha kommutátorcsoportja véges (2. 2. segédtétel, 6. 1. tétel). Láttuk azt is, hogy ezek bármelyike szükséges feltétel is, ha végesen generált csoportokra szorítkozunk (2. 3. segédtétel, 6. 2. tétel). Most ellenpélda segítségével megmutatjuk, hogy az említett feltételek *csak végesen generált csoportok esetén szükségesek* ahhoz, hogy a tekintett csoport véges osztályú legyen, *általában nem.* Tekintsük e célból nem-Abel-féle véges egyszerű csoportok szigorúan növekvő rendű

$$G_1, G_2, G_3, \ldots$$

végtelen sorozatát (pl. az n-edfokú A_n alternáló csoportokat $n = 5, 6, 7, \ldots$ esetén). E végtelen sok csoport D direkt szorzatának centruma egyelemű, kommutátorcsoportja viszont egybeesik az egész csoporttal, minthogy ugyanezek a megállapítások érvényesek a G_k direkt faktorokra. A D csoport centruma tehát nem véges indexű, s a D' kommutátorcsoport nem véges, sőt tartalmaz tetszőlegesen előírt természetes számnál nagyobb rendű elemeket. D azonban véges osztályú csoport. Ez abból következik, hogy D bármely eleme benne van már véges számú G_k direkt faktor direkt szorzatában, s így a tekintett elem normalizátora tartalmazza a „többi" G_m direkt szorzatát, azaz véges indexű.

Végül megmutatjuk, hogy a *Baer*től származó 6. 3. tétel is csak végesen generált csoportokra fordítható meg (6. 4. tétel). E célból olyan végtelen G

csoportot konstruálunk, amelyben a centrum indexe nem véges, a G' kommutátorcsoport viszont véges. Sőt példánk olyan lesz, hogy a G csoport centruma és kommutátorcsoportja ugyanaz a véges alcsoport. Legyen p rögzített törzsszám, és tekintsük a végtelen sok $b, a_1, a_2, a_3, \ldots$ elem által generált csoportot a következő definiáló relációkkal:

$$b^p = a_1^p = a_2^p = \cdots = a_n^p = \cdots = 1;$$

$$a_i b = b a_i; \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots);$$

$$a_{i+k} a_i = b a_i a_{i+k}; \qquad (i, k = 1, 2, 3, \ldots).$$

Minden további nélkül világos, hogy e G csoport kommutátorcsoportja a p elemű $\{b\}$ ciklikus csoport. De könnyen beláthatjuk azt is, hogy G centruma is $\{b\}$, mert G bármely $\{b\}$-n kívüleső eleméhez található vele fel nem cserélhető elem G-ben.

Debreceni Tudományegyetem
Matematikai Intézete.

IRODALOM

[1] *R. Baer,* Representations of groups as quotient groups. II. Minimal central chains of a group. Trans. Amer. Math. Soc. *58* (1945), 348—389.

[2] *R. Baer,* Finiteness properties of groups. Duke, Math. J. *15* (1948), 1021—1032.

[3] *R. Baer,* Endlichkeitskriterien für Kommutatorgruppen. Math. Ann. *124* (1952), 161—177.

[4] *J. L. Britton—J. A. H. Shepperd,* Almost ordered groups. Proc. London Math. Soc. *1* (3. Ser.), (1951), 188—199.

[5] А. П. Дицман, О p-группах. Докл. Акад. наук. СССР, *15* (1937), 71—76.

[6] А. Г. Курош, Теория групп. (Москва, 1953.)

[7] Ю. Г. Федоров, О бесконечных группах, все нетривиальные подгруппы которых имеют конечный индекс. Успехи мат. наук, *6 : 1* (1951), 187—189.

[8] *B. H. Neumann,* Groups with finite classes of conjugate elements. Proc. London Math. Soc. *1* (3. Ser.), (1951), 178—187.

[9] I. *Schur,* Über die Darstellung der endlichen Gruppen durch gebrochene lineare Substitutionen. J. reine angew. Math. *127* (1904), 20—50.

[10] *I. Szélpál,* Die unendlichen Abelschen Gruppen mit lauter endlichen echten Untergruppen. Publ. Math. (Debrecen) *1* (1949), 63—64.