GYÖKÖK LINEÁRIS KOMBINÁCIÓIRÓL

FRIED ERVIN

Érdekes probléma azt megvizsgálni, hogy a racionális számokból vont gyökök között milyen összefüggés állhat fenn. E kérdéssel már többen is foglalkoztak;[1] mi a következőkben egy ennél általánosabb problémát fogunk tekinteni, amennyiben nem korlátozzuk vizsgálatainkat a racionális számtestre, mindössze azt a megszorítást fogjuk tenni a szóbanforgó testekről, hogy ne tartalmazzanak más egységgyököt, mint ± 1-et (ilyen pl. minden formálisan valós test). Megjegyezzük, hogy az itteni bizonyítás nemcsak hogy nem egyszerűsödik, ha csupán a racionális számtestet tekintjük, hanem nem is vihető keresztül. Eredményünknek alkalmazását is adjuk egy *W. Sierpinski* által felvetett problémára.

1. Be fogjuk bizonyítani a következő tételt:

1. tétel. Legyen adva egy K test; tekintsük a

$$c_1\sqrt[n_1]{a_1}+\cdots+c_k\sqrt[n_k]{a_k}=\alpha\neq 0 \qquad (c_\nu, a_\nu\in K) \qquad (1)$$

kifejezést, amely α-nak legrövidebb előállítása abban az értelemben, hogy kevesebb $c_\nu\sqrt[n_\nu]{a_\nu}$ tag összege már nem lehet α. Amennyiben $K(\sqrt[n_1]{a_1},\ldots,\sqrt[n_k]{a_k})$ nem tartalmaz ± 1-től különböző egységgyököt, akkor $\sqrt[n_\nu]{a_\nu}\in K(\alpha)$, $(\nu=1,\ldots,k)$.

2. A tétel bizonyításához előrebocsátunk négy lemmát.

1. lemma. Legyen $a\in K$, és $K(\sqrt[n]{a})$ ne tartalmazzon ± 1-től különböző egységgyököt. Ha az x^n-a polinom reducibilis a K felett, akkor létezik n-nek oly $k>1$ osztója, hogy $\sqrt[k]{a}\in K$.

Ez esetben azt fogjuk mondani, hogy $\sqrt[n]{a}$ a K-ban *redukálható*.

Bizonyítás. A $\vartheta=\sqrt[n]{a}$ jelöléssel a reducibilitás alapján

$$x^n-a=\prod_{\nu=1}^{n}(x-\varepsilon^\nu\vartheta)=g(x)\cdot h(x),$$

[1] Ehhez vonatkozó irodalom megtalálható *Obláth Richárd* cikkében: Gyökmennyiségek aritmetikai sajátságairól, *Az Első Magyar Matemetikai Kongresszus Közleményei* (1952), 445—450.

ahol $g(x), h(x) \in K[x]$, $\operatorname{gr} g(x) \geqq 1$, $\operatorname{gr} h(x) \geqq 1$, $\varepsilon^n = 1$. Nyilván

$$g(x) = \Pi'(x - \varepsilon^r \vartheta), \quad h(x) = \Pi''(x - \varepsilon^r \vartheta),$$

ahol $\Pi'(x-\varepsilon^r\vartheta)\,\Pi''(x-\varepsilon^r\vartheta) = \prod_{r=1}^{n}(x-\varepsilon^r\vartheta)$. A konstans tagok egybevetéséből:

$$\varepsilon_1 \vartheta^u = g(0) = b \in K, \quad \varepsilon_2 \vartheta^v = h(0) = c \in K, \text{ ahol } \varepsilon_1^n = \varepsilon_2^n = 1 \text{ és } u + v = n.$$

Mivel $K(\vartheta)$ nem tartalmaz ± 1-től különböző egységgyököt, ezért $\varepsilon_1 = \dfrac{b}{\vartheta^u}$ és $\varepsilon_2 = \dfrac{c}{\vartheta^v}$ csak ± 1 lehet. Ha s és t olyan egészek, melyekre $(u, v) = us + vt = n'$, ahol $n' | n$ és $n' < n$, akkor $\vartheta^u = \pm b = b' \in K$, $\vartheta^v = \pm c = c' \in K$ alapján $d = b'^s \cdot c'^t \in K$. Azonban $kn' = n$, ahol $k | n$, $k > 1$, és így $d = \vartheta^{n'} = \sqrt[k]{a} \in K$.

2. lemma. Ha $L = K(\sqrt[n]{a})$ nem tartalmaz ± 1-től különböző egységgyököt és $x^n - a$ irreducibilis K felett, akkor minden Δ test, melyre $K \subseteq \Delta \subseteq L$, $\Delta = K(\sqrt[k]{a})$ alakú, ahol $k | n$.

Bizonyítás. Legyen $\vartheta = \sqrt[n]{a}$, és s az a legkisebb természetes szám, melyre $\vartheta^s \in \Delta$. Nyilván ekkor $K(\vartheta^s) \subseteq \Delta$ is fennáll. $\Delta = K(\vartheta^s)$-re igaz, hogy[2] $[L : \Delta] = s$, hiszen $[\Delta : K] = \dfrac{n}{s}$. Az $x^s - \vartheta^s$ egyenlet irreducibilis kell hogy legyen Δ felett, mert, ha reducibilis lenne, akkor az 1. lemma alapján lenne oly $k > 1$ szám, melyre $k | s$ és $\vartheta^{\frac{s}{k}} \in \Delta$, ami ellentmond s minimális voltának. Így azonban $[L : \Delta] = s = [L : \Delta]$, és $\Delta \subseteq \Delta$ miatt $\Delta = \Delta$, amivel állításunkat igazoltuk.

3. lemma. Legyen $\sqrt[n]{a} \in K(\sqrt[m]{b})$, és $K(\sqrt[m]{b})$ ne tartalmazzon ± 1-től különböző egységgyököt. Amennyiben $x^n - a$ és $x^m - b$ egyike sem reducibilis K felett, akkor $\sqrt[n]{a} \in K(\sqrt[n]{b})$.

Bizonyítás. A 2. lemma alapján $K(\sqrt[n]{a}) = K(\sqrt[n']{b})$ $(n' | m)$; és a testfok egyértelműsége folytán — mivel $x^n - a$ és $x^m - b$ irreducibilis a K felett — $n' = n$. Vagyis $\sqrt[n]{a} \in K(\sqrt[n]{b})$.

4. lemma. A 3. lemma feltételei mellett $\sqrt[n]{a} = c(\sqrt[m]{b})^l$, ahol $c \in K$ és $0 < l < m$.

[2] $[L : K]$ az L testnek a K testre vonatkozó fokát jelenti.

Bizonyítás. A 3. lemma alapján $\sqrt[n]{a} \in K(\sqrt[n]{b})$. Ha erre az esetre ki tudjuk mutatni, hogy $\sqrt[n]{a} = c(\sqrt[n]{b})^l$ $(c \in K,\ 0 < l < n)$, akkor a 4. lemma esetével is kész leszünk, mert $\sqrt[n]{a} = c(\sqrt[m]{b})^{l\frac{m}{n}}$, ahol $c \in K$ és $0 < l\frac{m}{n} < m$. Itt $\frac{m}{n}$ egész, mivel az elem foka osztója a test fokának (ez egyébként a 3. lemma bizonyításából is kiderül).

Mindenekelőtt arra az esetre bizonyítjuk lemmánkat, mikor $n = p$ prímszám. Most $\sqrt[p]{a} \in K(\sqrt[p]{b})$ miatt

$$\sqrt[p]{a} = f(\sqrt[p]{b}), \qquad \text{ahol } f(x) \in K[x],\ \operatorname{gr} f(x) < p.$$

Ha $f(x) = cx^l$ $(c \in K, 0 < l < p)$, készen vagyunk. Kimutatjuk, hogy $f(x) \neq cx^l$ nem állhat fenn. Ugyanis $\sqrt[p]{b}$ gyöke az $[f(x)]^p - a$ polinomnak, és így

$$[f(x)]^p - a = (x^p - b)\, g(x), \qquad (g(x) \in K[x]).$$

Ha x helyébe εx-et teszünk $(\varepsilon^p = 1)$:

$$[f(\varepsilon x)]^p - a = (x^p - b)\, g(\varepsilon x),$$

amiből

$$[f(\varepsilon \sqrt[p]{b})]^p - a = 0, \text{ ill. } [f(\sqrt[p]{b})]^p = [f(\varepsilon \sqrt[p]{b})]^p,$$

mivel $[f(\sqrt[p]{b})]^p = a$. Ennélfogva

$$\varepsilon^l f(\sqrt[p]{b}) = f(\varepsilon \sqrt[p]{b}).$$

Mármost, ha $f(x) \neq cx^l$, akkor $h(x) = \varepsilon^l f(x) - f(\varepsilon x) \neq 0$, ahol $h(x) \in K(\varepsilon)[x]$, $\operatorname{gr} h(x) < p$ és $h(\sqrt[p]{b}) = 0$. Ez pedig azt jelenti, hogy az $x^p - b$ polinom a $K(\varepsilon)$ test felett reducibilis. Azonban $K(\varepsilon)$ a K-nak Galois-bővítése, és így $x^p - b$ csupa azonos fokú faktorra esik szét $K(\varepsilon)$-ban. Tekintettel arra, hogy p prímszám, a faktorok csak lineárisak lehetnek, amiből következik, hogy $\sqrt[p]{b} \in K(\varepsilon)$. Ez azonban lehetetlen, hisz $\operatorname{gr} \sqrt[p]{b} = p$ és $[K(\varepsilon) : K] < p$. Így $n =$ prímszám esetére a lemma bizonyítva van.

Legyen most n összetett szám, és tegyük fel, hogy n valódi osztóira az állítást már bizonyítottuk. n ilyen alakban írható: $n = pv$, ahol $p < n, v < n$ és p prímszám.

$\sqrt[n]{a} \in K(\sqrt[n]{b})$ miatt $\sqrt[v]{a} \in K(\sqrt[n]{b})$ is igaz. De akkor a 3. lemma alapján kapjuk:

$$\sqrt[v]{a} \in K(\sqrt[v]{b}),$$

ahonnan n valódi osztóira vonatkozó feltételünk alapján arra jutunk, hogy

$$\sqrt[n]{a} = d(\sqrt[v]{b})^s, \qquad \text{ahol } d \in K \text{ és } 0 < s < v.$$

Mindkét oldalból p-ik gyököt vonva:

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[p]{d}\,(\sqrt[n]{b})^s,$$

ahol $\sqrt[p]{d}$ értéke a lehetséges p számú érték közül egyértelműen meg van határozva, mert

$$\sqrt[p]{d} = \frac{\sqrt[n]{a}}{(\sqrt[n]{b})^s} \in K(\sqrt[n]{b})$$

és ez utóbbi test nem tartalmaz ± 1-től különböző egységgyököt. Innen a 3. lemma alapján $\sqrt[p]{d} \in K(\sqrt[p]{b})$ adódik. Ha $\sqrt[p]{d} \in K$, készen vagyunk. Ha nem, akkor $x^p - d$ szintén irreducibilis K felett, és így a primszám esetére bizonyítottak alapján:

$$\sqrt[p]{d} = c(\sqrt[p]{b})^t, \qquad \text{ahol } c \in K,\ 0 < t < p.$$

Ekkor azonban

$$\sqrt[n]{a} = c(\sqrt[p]{b})^t \cdot (\sqrt[n]{b})^s = c(\sqrt[n]{b})^{vt+s},$$

ahol $0 < t \leqq p-1$ miatt $0 < vt \leqq vp - v$, és így $0 < s < v$ alapján $0 < vt + s < pv$, vagyis:

$$\sqrt[n]{a} = c(\sqrt[n]{b})^l, \qquad \text{ahol } c \in K,\ 0 < l < n.$$

Ezzel a 4. lemmát is bebizonyítottuk.

3. Ezekután a tételt k-ra, vagyis a gyökök számára vonatkozó teljes indukcióval fogjuk bizonyítani.

$k = 1$-re az állítás helyessége nyilvánvaló.

Tegyük fel, hogy k tagra igaz az állítás, $(k+1)$-re nem $(k \geqq 1)$. Ez esetben (1) így alakul:

$$c_1 \sqrt[n_1]{a_1} + \cdots + c_{k+1} \sqrt[n_{k+1}]{a_{k+1}} = \alpha \neq 0 \qquad (c_\nu, a_\nu \in K). \quad (2)$$

Feltehetjük, hogy a gyökök $K' = K(\alpha)$-ban már nem redukálhatók. Ekkor (2) így írható:

$$c_2 \sqrt[n_2]{a_2} + \cdots + c_{k+1} \sqrt[n_{k+1}]{a_{k+1}} = \alpha - c_1 \sqrt[n_1]{a_1} \qquad (c_\nu, a_\nu \in K').$$

A tétel feltételei nyilván a jelen esetben is érvényben maradnak.

Ekkor azonban a teljes indukciós feltétel alapján:

$$\sqrt[n_i]{a_i} \in K'(\sqrt[n_1]{a_1}) \qquad (i = 2, \ldots, k+1).$$

Mivel feltettük, hogy K'-ben már egyik gyök sem redukálható, így a 4. lemma alapján:

$$\sqrt[n_i]{a_i} = c_i'(\sqrt[n_1]{a_1})^{l_i}, \qquad \text{ahol } c_i' \in K' \text{ és } 0 \leqq l_i < n_1.$$

A $c_1'' = c_1$ és $l_1 = 1$ jelölés mellett (2) ekkor a következő alakban írható:

$$\sum_{i=1}^{k+1} c_i'' (\sqrt[n_1]{a_1})^{l_i} - \alpha = 0, \qquad \text{ahol } c_i'' = c_i c_i' \in K' \text{ és } 0 \leqq l_i < n_1.$$

Tekintsük ezek után a $\varphi(x) = \sum_{i=1}^{k+1} c_i'' x^{l_i} - \alpha$ polinomot. Nyilván $\varphi(x) \in K'[x]$, $\varphi(\sqrt[n_1]{a_1}) = 0$ és $\operatorname{gr} \varphi(x) < n_1$. Ezenkívül, mivel $\varphi(x)$-ben elsőfokú tag szerepel ($i = 1$ esetén) és ennek együtthatója nem lehet 0 (hiszen feltettük, hogy az (1) előállítás a legrövidebb), ezért $\varphi(x) \not\equiv 0$ is igaz. Ezekből azonban következik, hogy $x^{n_1} - a_1$ reducibilis K' felett, ami az 1. lemma alapján ellentmond a (2) utáni feltevésnek.[3,4] Q. e. d.

4. Most pedig megoldjuk az említett feladatot, melyet *W. Sierpinski* vetett fel.

A feladat a következő: Meghatározandó az $\alpha = 1 + \sqrt[2]{2} + \sqrt[3]{3} + \cdots + \sqrt[n]{n}$ algebrai számnak a racionális számtest feletti foka. (Itt $\sqrt[i]{i}$ mindig az $x^i - i = 0$ egyenlet pozitív valós gyökét jelöli.) Be fogjuk bizonyítani:

2. tétel. Az $\alpha = 1 + \sqrt[2]{2} + \cdots + \sqrt[n]{n}$ *algebrai szám foka:*

$$\operatorname{gr} \alpha = \prod_{\substack{p < n \\ p = \text{prim}}} p^{\mu(p)},$$

ahol $\mu(p) = \sum_{k=1}^{\infty} \pi\left(\frac{n}{p^k}\right) + \delta_p$, $\pi(x)$ *az x-nél nem nagyobb primszámok száma;* $\delta_p = 0$, *ha* $p \left| \left[\frac{\log n}{\log p}\right]\right.$ *és* $\delta_p = 1$ *máskor.*

5. Először is kimutatjuk, hogy α benne van abban a testben, melyet úgy kapunk, hogy a racionális számtesthez a következő algebrai számokat adjun-

[3] Az $\alpha = 0$ esetben egészen kis változtatással kapjuk, hogy $\sqrt[n_i]{a_i} = d_i \sqrt[n_1]{a_1}$, ahol $\sum_{i=1}^{k} c_i d_i = 0$, vagyis, hogy bármely két gyök lineárisan összefügg.

[4] Tekintettel arra, hogy a tétel feltételei igazak maradnak, ha a szereplő testek formálisan valósak, így minden formálisan valós testre igaz a tétel. Igaz viszont az $R(\sqrt[2^n]{-2})$ testre is, hol R a racionális számtest, bár e test nem formálisan valós, mint ezt $(\sqrt[2^n]{-2})^2 + 1^2 = -1$ mutatja.

Megemlítjük az első tételnek azt a következményét is, hogy a tétel állításaiból könnyen leolvasható feltétel mellett (pl. a valós számok körében maradva) lineárisan független gyökök adjunkciója helyettesíthető tetszőleges lineáris kombinációjuk adjungálásával.

gáljuk (p, q primek):

$$\begin{cases} \sqrt[p^k]{q}, \text{ ahol } qp^k \leqq n < qp^{k+1} \text{ és } p \neq q; \\ \sqrt[q^{k+1}]{q}, \text{ ahol } q^{k+1} \leqq n < q^{k+2} \text{ és } q \nmid k+1; \\ \sqrt[q^k]{q}, \text{ ahol}^5\ q^{k+1} \leqq n < q^{k+2} \text{ és } q \mid k+1. \end{cases} \tag{3}$$

Nyilván elegendő bizonyítani, hogy ekkor $\sqrt[i]{i}$ is adjungálódik ($i = 1, 2, \ldots, n$). Legyen $p_1^{s_1} \cdots p_r^{s_r}$ az i kanonikus előállítása. Ekkor elegendő annak a bizonyítása, hogy a (3) alatti számok adjungálásával $\sqrt[i]{p_j^{s_j}}$ $(j = 1, \ldots, r)$ is adjungálódik, hisz ekkor ezek szorzata: $\sqrt[i]{i}$ is adjungálódni fog.

Legyenek $c_1, \ldots, c_r$ olyan racionális egészek, melyekre [$(c_l, p_l = 1)$ és] $\frac{1}{p_1^{s_1} \cdots p_r^{s_r}} = \frac{c_1}{p_1^{s_1}} + \cdots + \frac{c_r}{p_r^{s_r}}$. Ebből könnyen látható, hogy a $p_j^{\frac{s_j c_l}{p_l^{s_l}}}$ $(j, l = 1, 2, \ldots, r)$ algebrai számok adjungálásával keletkező test tartalmazza $\sqrt[i]{i}$-t. Ezek a számok pedig benne vannak a (3) alatti számokat tartalmazó testben. Ugyanis, ha $j \neq l$, tekintsük az adjungált $\sqrt[p_l^{k_l}]{p_j}$-t, ahol $p_l^{k_l} \cdot p_j \leqq n < p_l^{k_l+1} p_j$. Tekintettel arra, hogy $p_j p_l^{s_l} \mid i$ és $i \leqq n$, így $p_j p_l^{s_l} \leqq p_j p_l^{k_l}$, vagyis $s_l \leqq k_l$, továbbá $p_j^{\frac{s_j c_l}{p_l^{s_l}}}$ a $\sqrt[p_l^{k_l}]{p_j}$-nek hatványa, ezért $p_j^{\frac{s_j c_l}{p_l^{s_l}}}$ valóban adjungálódott.

Vizsgáljuk most azt az esetet, amikor $l = j$. Ha p_j olyan primszám, melyre $p_j^{k_j+1} \leqq n < p_j^{k_j+2}$ és $p_j \nmid k_j + 1$, akkor $\sqrt[p_j^{k_j+1}]{p_j}$-t adjungáltuk. Mivel $p_j^{s_j} \mid i$ és $i \leqq n$, így $p_j^{s_j} \leqq n$, amiből $s_j \leqq k_j + 1$ következik. Ez esetben azonban $p_j^{\frac{s_j c_j}{p_j^{s_j}}}$ ismét $\sqrt[p_j^{k_j+1}]{p_j}$-nek hatványa, tehát eleme a szóbanforgó testnek.

Marad végül az az eset, mikor $l = j$, de p_j olyan primszám, melyre $p_j^{k_j+1} \leqq n < p_j^{k_j+2}$ és $p_j \mid k_j + 1$. Ekkor ismét igaz, hogy $p_j^{s_j} \leqq n$. Amennyiben $s_j < k_j + 1$, az okoskodás ugyanúgy történik, mint az előbb. Ha pedig $s_j = k_j + 1$, akkor $p_j^{\frac{s_j c_j}{p_j^{s_j}}}$-nél a kitevőben p_j-vel egyszerűsíthetünk. Ezáltal visszajutottunk arra az esetre, mikor $s_j < k_j + 1$. Tehát evvel állításunkat maradéktalanul bebizonyítottuk.

[5] Ez az egyenlőtlenség a $q \cdot q^k \leqq n < q q^{k+1}$ alakban is írható.

6. Most bebizonyítjuk, hogy ha a racionális számtesthez adjungáljuk α-t, akkor az így kapott testben a (3) alatt említett gyökök mindegyike szerepelni fog.

A gyökök pozitivitása alapján könnyen meggyőződhetünk arról, hogy α előállítására érvényesek az első tétel feltételei. Ekkor az 1. tételt (ha $c_i = 1$, $a_i = n_i = i$) alkalmazva, kapjuk, hogy $\sqrt[i]{i} \in R(\alpha)$ $(i \leqq n)$.

Válasszuk i-t p^k-nak, ekkor $\sqrt[p^k]{p^k} \in R(\alpha)$ $(p^k \leqq n)$. Legyen most $i = qp^k \leqq n < qp^{k+1}$ $(p \neq q)$. Ekkor $\sqrt[qp^k]{qp^k} \in R(\alpha)$ és annál inkább $\sqrt[p^k]{qp^k} \in R(\alpha)$. De $p^k \leqq n$ miatt $\sqrt[p^k]{p^k} \in R(\alpha)$, így a kettő hányadosa $\sqrt[p^k]{q} \in R(\alpha)$, ahol $qp^k \leqq n < qp^{k+1}$.

Ha a $p^k \leqq n < p^{k+1}$ által definiált k-ra $(k, p) = 1$, akkor $\sqrt[p^k]{p^k} \in R(\alpha)$ alapján t-edik hatványra emelve következik, hogy $\sqrt[p^k]{p} \in R(\alpha)$, ahol t a $kx \equiv 1 \pmod{p^k}$ kongruencia gyöke. Amennyiben $(k, p) = p$, akkor $(k-1, p) = 1$ és $\sqrt[p^{k-1}]{p^{k-1}} \in R(\alpha)$ is fennáll, ebből pedig analóg módon $\sqrt[p^{k-1}]{p} \in R(\alpha)$ adódik.

Így tehát kimutattuk, hogy α adjunkciója helyettesíthető a (3) alatti kifejezések adjungálásával.

7. Most bebizonyítjuk, hogy ezen gyökök adjunkciójánál a fokszámok összeszorzódnak. Először azt igazoljuk, hogy azonos alapú gyökök adjunkciója ugyanazt eredményezi, mintha azt a gyököt adjungáljuk, melynek alapja a szóbanforgó alap, és gyökkitevője a szereplő gyökkitevők szorzata:

$$K(\sqrt[r_1]{p}, \ldots, \sqrt[r_s]{p}) = K(\sqrt[r_1 \cdots r_s]{p}) \qquad (K \text{ tetszőleges test}).$$

Ez rögtön következik abból, hogy a szereplő gyökkitevők páronként relatív primek. Tehát $\sqrt[m_j]{p_j}$ alakú gyököket kell adjungálni, ahol p_j $(j = 1, 2, \ldots)$ végigfut az n-ig terjedő összes primszámokon.

Tegyük fel, hogy $R_{j-1} = R(\sqrt[m_1]{p_1}, \ldots, \sqrt[m_{j-1}]{p_{j-1}})$ és $[R_{j-1} : R] = m_1 \cdots m_{j-1}$, de $R_j = R_{j-1}(\sqrt[m_j]{p_j})$-re $[R_j : R_{j-1}] < m_j$. Ekkor az $x^{m_j} - p_j$ polinom reducibilis az R_{j-1} test felett, és így az 1. lemma szerint létezik olyan m egész, melyre $m \mid m_j$, $m > 1$ és $\sqrt[m]{p_j} \in R_{j-1}$. Mivel R_{j-1}-nek egy bázisa az $\sqrt[m_l]{p_l}$ számok $(l \leqq j-1)$ hatványszorzataiból áll, ezért $\sqrt[m]{p_j} = c_0 + \sum_{\nu} c_\nu \sqrt[n_\nu]{a_\nu}$ alakban írható, ahol az a_ν egészek primtényezői $p_1, p_2, \ldots, p_{j-1}$ közül valók és c_ν-k racionális számok.

Feltehetjük, hogy ez $\sqrt[m]{p_j}$-nek a „legrövidebb" ilyen előállítása, és ekkor (feltehetjük, hogy $\sqrt[n_\nu]{a_\nu}$ nem redukálható a racionális számtestben) az 1.

tételt alkalmazva kapjuk, hogy $\sqrt[n_r]{a_r} \in R(\sqrt[m]{p_j})$. Ennélfogva a 4. lemma alapján

$$\sqrt[n_r]{a_r} = c(\sqrt[m]{p_j})^l, \qquad \text{ahol } c \in R \text{ és } 0 < l < m.$$

Emeljük mindkét oldalt $n_r m$-ik hatványra, majd távolítsuk el a törteket. Vizsgáljuk meg most p_j kitevőjét mindkét oldalon. Közvetlenül belátható, hogy p_j kitevője a baloldalon $\equiv 0 \pmod{n_r m}$ (a_r nem tartalmazza p_j-t!), a jobboldalon $\equiv n_r l \pmod{n_r m}$, ami $0 < l < m$ miatt lehetetlen.

8. Megállapítottuk tehát, hogy α foka egyenlő a (3) alatti gyökkitevők szorzatával.

Vizsgáljuk meg most, hogy egy a gyökkitevőben szereplő p primszám milyen hatványon fordul elő.

Legalább az első hatványon annyiszor fog szerepelni, ahány q primszámra igaz, hogy $pq \leqq n$, vagyis ahány primszám $\frac{n}{p}$-ig található: $\tau\left(\frac{n}{p}\right)$-szer. Legalább a második hatványon $\tau\left(\frac{n}{p^2}\right)$-szer, s. i. t.

Az [5] lábjegyzet alapján ezen q primszámok közé a $p \mid k+1$ esetben maga a p primszám is beszámítható, míg, ha $p \nmid k+1$, a p kitevője egy esetben még 1-gyel nagyobb lesz. Így egy fix p primszám kitevője $\mu(p) = \sum_{k=1}^{\infty} \tau\left(\frac{n}{p^k}\right) + \delta_p$, ahol $\delta_p = 0$, ha $p \left| \left\lfloor \frac{\log n}{\log p} \right\rfloor \right.$, és $\delta_p = 1$ máskor, mint azt állítottuk.[6,7]

[6] Ha $p^{k+1} \leqq n < p^{k+2}$, akkor $k+1 = \left\lfloor \frac{\log n}{\log p} \right\rfloor$.

[7] Megemlítjük, hogy érdekes a hasonlatosság ezen α szám foka, és $n!$ Legendre-féle alakja között. Az utóbbiban ugyanis az x-nél nem nagyobb primszámok száma: $\pi(x)$ helyébe az x-nél nem nagyobb számok száma: $[x]$ lép (a δ_p-től eltekintve).