MOMENTUMPROBLÉMA ÖNADJUNGÁLT OPERÁTOROKRA*

SZŐKEFALVI-NAGY BÉLA lev. tag

Előadta az 1953. január 27-én tartott felolvasó ülésen

1. Bevezetés

R. V. KADISON nemrég egy, általa „általánosított Schwarz-féle egyenlőtlenség"-nek nevezett tételt bizonyított be [1]. Ez a tétel egy egyszerűbb, de ekvivalens alakjában a következőképpen szól:

Legyen X a valós számegyenes pontjainak kompakt részhalmaza és legyen $C(X)$ az X-en értelmezett $f(x)$ (valós értékű) folytonos függvények tere. Legyen adva $C(X)$-nek a H Hilbert-tér korlátos önadjungált operátoraira való $f(x) \to B_f$ leképezése, amely lineáris, nagyságrend-tartó és 1-nél nem nagyobb normájú, azaz amelyre

a) $B_{c_1 f_1 + c_2 f_2} = c_1 B_{f_1} + c_2 B_{f_2}$,

b) *ha* $f_1(x) \geqq f_2(x)$ *az* X *minden* x *pontjában, akkor* $B_{f_1} \geqq B_{f_2}$,**

c) $\|B_f\| \leqq \|f\|$.***

Ekkor az x és x^2 függvényeknek megfelelő operátorok eleget tesznek a következő egyenlőtlenségnek:

(1) $$B_x^2 \leqq B_{x^2}.$$

Minthogy az állítás csak az x és x^2 függvényekre vonatkozik, természetesebb csak azt feltételezni, hogy a leképezés eleve csak az x^n függvényekre és valós együtthatós lineáris kapcsolataikra, azaz az x változó valós polinomjaira van megadva. Minthogy ezek a $p(x)$ polinomok a $C(X)$ térben mindenütt sűrűn feküsznek, és minthogy a $\|p_n - p_m\| < \varepsilon$ egyenlőtlenség az a) és c) feltételek következtében maga után vonja a $\|B_{p_n} - B_{p_m}\| < \varepsilon$ egyenlőtlen-

* Angolnyelvű változata "A moment problem for self-adjoint operators" címmel megjelent: *Acta Math. Hung.* 3 (1952), 285—292.

** Két korlátos önadjungált operátorra, A-ra és B-re, $A \geqq B$ azt jelenti, hogy $(Au, u) \geqq (Bu, u)$ a H tér minden u elemére.

*** Önadjungált B operátorra

$$\|B\| = \sup_{\|u\|=1} \|Bu\| = \sup_{\|u\|=1,\, \|v\|=1} |(Bu, v)| = \sup_{\|u\|=1} |(Bu, u)|;$$

a $C(X)$ függvénytér $f(x)$ elemére pedig

$$\|f\| = \max_{x \in X} |f(x)|,$$

ez a maximum eléretik, mert az X halmaz kompakt, az $f(x)$ függvény pedig folytonos.

séget, könnyű megmutatni, hogy a leképezés kiterjeszthető a polinomokról az egész $C(X)$ térre úgy, hogy az a)—c) feltételek továbbra is kielégüljenek.

Vegyük észre, hogy a c) feltételt elég az $f(x)\equiv 1$ függvényre megkövetelni, azaz elég azt feltenni, hogy

c′) $\|B_1\| \leqq 1.$

Valóban, tetszés szerinti $f(x)$ esetében a $\pm f(x) \leqq \|f\|$ egyenlőtlenségekből következik az a) és b) feltételek alapján, hogy

$$\pm B_f \leqq \|f\| B_1,$$

ebből pedig c′) alapján következik, hogy

$$\|B_f\| \leqq \|f\|\, \|B_1\| \leqq \|f\|.$$

Mindezek alapján, B_{x^k} helyett A_k-t írva, *Kadison* tételét a következő általánosabb alakban is kimutathatjuk:

1. tétel. *Legyen X a valós számegyenes pontjainak kompakt részhalmaza, és legyen $A_0, A_1, A_2, \ldots$ a H Hilbert-tér korlátos önadjungált operátorainak olyan sorozata, amely eleget tesz a következő feltételeknek:*

$$(\alpha_X)\ \begin{cases} \text{ha } c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots+c_nx^n \geqq 0 \text{ az } X \text{ halmazon,} \\ \text{akkor } c_0A_0+c_1A_1+c_2A_2+\cdots+c_nA_n \geqq O, \end{cases}$$

(β) $\|A_0\| \leqq 1.$

Ekkor fennáll a

$$A_1^2 \leqq A_2 \tag{2}$$

egyenlőtlenség.

Ebben a dolgozatban ezt a tételt egy olyan, a *Kadison*étól egészen különböző módszerrel fogjuk bebizonyítani, amely nemcsak a (2) egyenlőtlenség bebizonyítását teszi lehetővé, hanem egyben lehetővé teszi az összes olyan $\{A_k\}$ sorozatok meghatározását, amelyek a fenti feltételeknek eleget tesznek. E feltételek közül egyébként (β) csak normalizálást jelent; ha az $\{A_k\}$ sorozat csak az (α_X) feltételnek van alávetve és $A_0 \neq O$, akkor az $\left\{\frac{1}{\|A_0\|} A_k\right\}$ sorozat mindkét feltételnek eleget tesz. Tehát, ha a (β) feltételt elejtjük, akkor (2) helyett a

$$A_1^2 \leqq \|A_0\| A_2 \tag{3}$$

egyenlőtlenségre jutunk, legalább is akkor, ha $A_0 \neq O$. Minthogy azonban (α_X) alapján a $\pm x \leqq \|x\|$ egyenlőtlenségekből következnek a $\pm A_1 \leqq \|x\| A_0$ egyenlőtlenségek, azért, ha $A_0 = O$, akkor egyben $A_1 = O$, tehát a (3) egyenlőtlenség az $A_0 = O$ esetben is érvényes.

2. Az egyenlőtlenség bizonyítása

Először is azt vegyük észre, hogy (β) alapján

(4) $$A_0 \leqq I.$$

Válasszunk most egy tetszőleges u elemet a H Hilbert-térből és tekintsük az

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^k \, dm(x) = \mu_k \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

momentumproblémát, ahol a μ_k mennyiségek a következőképpen vannak megadva:

$$\mu_k = (A_k u, u).$$

Minthogy (α_X) szerint

$$c_0\mu_0 + c_1\mu_1 + \cdots + c_n\mu_n = ((c_0A_0 + c_1A_1 + \cdots + c_nA_n)u, u) \geqq 0,$$

ha

$$c_0 + c_1x + \cdots + c_nx^n \geqq 0 \text{ az } X \text{ halmazon},$$

azért ennek a momentumproblémának van egy $m(x)$ megoldása; ez egy olyan sehol sem fogyó függvény, amelynek a növekedési helyei az X halmazba esnek, tehát amely az X halmaz kiegészítő intervallumai mindegyikében állandó. Ha $[a, b]$ a legkisebb azok közül a zárt intervallumok közül, amelyek az X halmazt tartalmazzák, akkor tehát $m(x)$ többek között állandó az egész $-\infty < x < a$ félegyenesen és az egész $b < x < \infty$ félegyenesen is. Ez a megoldás egyértelműen van meghatározva, ha kikötjük még, hogy az $x < a$ pontokban $m(x) = 0$ legyen, és hogy $m(x)$ mindenütt jobbról folytonos legyen. Az ilyen módon normalizált megoldást, feltüntetve az u elemtől való függését is, jelöljük $m(u; x)$-szel.

A H tér minden u, v elempárjához rendeljük most hozzá az x következő függvényét:

$$m(u, v; x) = \frac{1}{4}[m(u+v; x) - m(u-v; x) + im(u+iv; x) - im(u-iv; x)].$$

Minthogy az $(A_k u, v)$ bilineáris alak és az $(A_k u, u)$ kvadratikus alak között hasonló összefüggés érvényes, azért tehát

(5) $$\int_{-\infty}^{\infty} x^k \, dm(u, v; x) = (A_k u, v) \qquad (k = 0, 1, \ldots).$$

Az $m(u, v; x)$ függvények hasonló módon vannak normálva, mint az $m(u; x)$ függvények (t. i. 0-val egyenlők, ha $x < a$, és jobbról folytonosak) és ennélfogva az u, v elemek által egyértelműen meg vannak határozva; speciálisan $m(u, u; x) = m(u; x)$. Az (5) egyenlet jobboldalán (a k minden rögzített értéke mellett) az u-ban és v-ben (Hermite-féle) szimmetrikus bilineáris alak állván, az $m(u, v; x)$ függvény egyértelmű meghatározottságából következik, hogy az x minden rögzített értéke mellett $m(u, v; x)$ az u-ban és v-ben szintén szimmetrikus bilineáris alak. Minthogy továbbá az $m(u;x)$ függvény nem csökkenő, azért a (4) alapján

$$0 \leqq m(u;x) \leqq m(u;\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} dm(u;x) = (A_0 u, u) \leqq (u,u),$$

tehát az $m(u, v; x)$ bilineáris alakhoz tartozó kvadratikus alaknak az $\|u\| = 1$ egységgömbön a 0 alsó és az 1 felső korlátja.

Mindezek alapján következik, hogy x minden értékéhez tartozik egy $F(x)$ korlátos önadjungált operátor H-ban úgy, hogy

$$m(u, v; x) = (F(x)u, v) \qquad (u, v \in H),$$

$$F(x) \leqq F(x') \text{ ha } x < x', \ F(x+0) = F(x), \ F(-\infty) = 0, \ F(\infty) = A_0.$$

Az (5) összefüggések szimbolikusan a következő alakban írhatók:

$$(6) \qquad A_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k \, dF(x) \qquad (k = 0, 1, \ldots).$$

Legyen

$$\bar{F}(x) = \begin{cases} F(x), & \text{ha } x < 0, \\ F(x) + I - A_0, & \text{ha } x \geqq 0. \end{cases}$$

Minthogy $I - A \geqq 0$ (lásd (4)), azért

$$(7) \quad \bar{F}(x) \leqq \bar{F}(x') \text{ ha } x < x', \ \bar{F}(x+0) = \bar{F}(x), \ \bar{F}(-\infty) = O, \ \bar{F}(\infty) = I,$$

azaz az $\bar{F}(x)$ operátorok serege hasonló tulajdonságokkal rendelkezik, mint a spektrálseregek (másszóval: egységfelbontások), azzal a különbséggel, hogy az $\bar{F}(x)$ operátorok nem vetítések (vetítésen mindig merőleges vetítést értve); $\bar{F}(x)$-ről mindössze azt tudjuk, hogy az x minden értékére a H tér önadjungált operátora. Minthogy az $\bar{F}(x) - F(x)$ különbség az $x < 0$ és az $x \geqq 0$ félegyeneseken állandó, és minthogy a $k \geqq 1$ esetben az x^k függvény az $x = 0$ pontban 0-val egyenlő, azért a (6) egyenletek a $k \geqq 1$ esetben érvényesek maradnak akkor is, ha $F(x)$-et $\bar{F}(x)$-szel helyettesítjük:

$$(8) \qquad A_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k \, d\bar{F}(x) \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

Most M. A. NAJMARK egy tételére hivatkozunk [2], amely szerint önadjungált operátoroknak minden olyan $\{F(x)\}$ serege, amely eleget tesz a (7) alatti feltételeknek, előállítható a következő alakban:

$$(9) \qquad \bar{F}(x) = \boldsymbol{P}\boldsymbol{E}(x),$$

ahol $\boldsymbol{E}(x)$ egy, az eredeti H Hilbert-teret altereként tartalmazó, alkalmasan megszerkesztett $\boldsymbol{H}$ Hilbert-térben értelmezett közönséges (tehát merőleges vetítésekből álló) spektrálsereg, $\boldsymbol{P}$ pedig $\boldsymbol{H}$-ban a H altérre való merőleges vetítés operátora.* Feltehető, hogy $\boldsymbol{E}(x)$-nek mint x függvényének ugyanazok a növekedési pontjai, mint az $\bar{F}(x)$ függvénynek.

* A (9) és az összes többi hasonló típusú egyenlőség a következőkben úgy értendő, hogy a két oldalt álló operátorok egyenlők, ha az eredeti H tér elemeire alkalmazzuk őket.

Egy ilyen előállítást felhasználva, (8)-ból adódik, hogy

(10) $$A_k = \boldsymbol{P}\int_{-\infty}^{\infty} x^k\, d\boldsymbol{E}(x) \qquad (k=1,2,\ldots),$$

vagy,

$$\boldsymbol{A} = \int_{-\infty}^{\infty} x\, d\boldsymbol{E}(x)$$

téve,

(11) $$A_k = \boldsymbol{P}\boldsymbol{A}^k \qquad (k=1,2,\ldots).$$

$\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{H}$ tér egy önadjungált operátora; spektruma, $\sigma(\boldsymbol{A})$, az $\bar{F}(x)$ függvény növekedési pontjaiból áll, azaz az $F(x)$ függvény növekedési pontjaiból és, ha $A_0 \neq I$, akkor még az $x=0$ pontból. Ennélfogva

$$\sigma(\boldsymbol{A}) \subseteqq X, \text{ ha } A_0 = I, \qquad \sigma(\boldsymbol{A}) \subseteq X + \{0\}, \text{ ha } A_0 \neq I.$$

Az $\boldsymbol{A}$ spektrumára vonatkozó megjegyzéseink egyébként csak a következő pontban tárgyalt probléma szempontjából bírnak jelentőséggel, jelenlegi feladatunk, azaz az „általánosított Schwarz-féle egyenlőtlenség" bizonyítása szempontjából ezekre nincs szükségünk.

Valóban, a (2) egyenlőtlenség közvetlenül folyik a (11) előállításából, hiszen ha $u \in H$, akkor

$$(A_2u, u) = (\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}^2u, u) = (\boldsymbol{A}^2u, u) = \|\boldsymbol{A}u\|^2 \geqq$$
$$\geqq \|\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}u\|^2 = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}u, u) = (\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}u, u) = (A_1^2u, u).$$

Sőt azt is látjuk, hogy csakis akkor lesz $(A_2u, u) = (A_1^2u, u)$, ha $\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}u = \boldsymbol{A}u$, azaz ha $\boldsymbol{A}u \in H$. Ebből következik, hogy csakis akkor lesz $A_2 = A_1^2$, ha $\boldsymbol{A}$ H-t önmagában képezi le. (11) szerint ebben az esetben $A_1 = \boldsymbol{A}$ (H-ban), következésképpen $A_k = A_1^k$ $(k=1,2,\ldots)$.

Ezzel bebizonyítottuk a (2) egyenlőtlenséget és egyben az 1. tétel következő kiegészítését nyertük:

Az 1. tétel feltevései mellett akkor és csak akkor lesz

$$A_1^2 = A_2,$$

ha

$$A_k = A_1^k \qquad (k=1,2,\ldots).$$

3. Az összes $\{A_k\}$ sorozatok megszerkesztése

Ha $A_0 = I$, akkor a (11) előállítás a $k=0$ esetben is érvényes, és ekkor $\sigma(\boldsymbol{A}) \subseteq X$.

Fordítva, ha a H Hilbert-tér operátorainak valamely $\{A_k\}$ sorozata előállítható a (11) képlet szerint valamely $\boldsymbol{H} \supset H$ Hilbert-tér valamely olyan $\boldsymbol{A}$ önadjungált operátora által, amelyre $\sigma(\boldsymbol{A}) \subseteq X$, akkor ez a sorozat kielégíti az 1. tétel feltételeit. Ekkor ugyanis $A_0 = I$ és, ha $p(x) = c_0 + c_1x + \cdots + c_nx^n$

tetszésszerinti olyan polinom, amely $\geqq 0$ az X-en és ennélfogva $\sigma(\boldsymbol{A})$-n, akkor

$$((c_0 A_0 + \cdots + c_n A_n) u, u) = (\boldsymbol{P} p(\boldsymbol{A}) u, u) = (p(\boldsymbol{A}) u, u) =$$
$$= \int_X p(x)\, d(\boldsymbol{E}(x) u, u) \geqq 0.$$

Így egy „parametrikus előállítását" nyertük önadjungált operátorok összes olyan $\{A_k\}$ sorozatainak, amelyek kielégítik az (α_X) feltételt és amelyekre $A_0 = I$.

Most térjünk át az *összes* olyan $\{A_k\}$ sorozatok megszerkesztésének a problémájára, amelyek kielégítik az (α_X) feltételt; az A_0-ról semmit nem tételezünk fel külön (a (β)-t sem). Az mindenesetre következik (α_X)-ből, hogy

$$A_0 \geqq O.$$

Tételezzük egyelőre fel azt, hogy A_0 definit pozitív, azaz hogy $A_0 u \neq 0$, ha $u \neq 0$. Jelöljük az A_0 pozitív négyzetgyökét, $A_0^{\frac{1}{2}}$-t, röviden R-rel. Minthogy

$$\|Ru\|^2 = (R^2 u, u) = (A_0 u, u) > 0,$$

ha $u \neq 0$, azért R^{-1} létezik; ez önadjungált, de nem szükségképpen korlátos operátor, értelmezési tartományát jelöljük D-vel (D a H-ban sűrű lineáris sokaság).

Legyen $M_k = \|x^k\| = \max_{x \in X} |x^k|$; minthogy $\pm x^k \leqq M_k$ az X halmazon, azért az (α_X) feltétel következtében $\pm A_k \leqq M_k A_0$, azaz

$$|(A_k u, u)| \leqq M_k (A_0 u, u) \tag{12}$$

a H minden u elemére. Ebből:

$$|(A_k R^{-1} v, R^{-1} v)| \leqq M_k (A_0 R^{-1} v, R^{-1} v) = M_k (R^2 R^{-1} v, R^{-1} v) = M_k (v, v) \tag{13}$$

a D minden v elemére. Tekintsük a

$$(v|w)_k = (A_k R^{-1} v, R^{-1} w)$$

szimmetrikus bilineáris alakot ($v, w \in D$). Szimmetrikus bilineáris alakok ismeretes tulajdonsága következtében a $(v|w)_k$ és a $(v|v)_k$ bilineáris, ill. négyzetes alakok abszolút értékeinek a $\|v\| = 1$, $\|w\| = 1$ feltételek mellett ugyanazok a pontos felső korlátjaik. Minthogy (13) szerint a $\|v\| = 1$ feltétel mellett $|(v|v)_k| \leqq M_k$, azért a $\|v\| = 1$, $\|w\| = 1$ feltételek mellett $|(v|w)_k| \leqq M_k$. Következésképpen a D minden v, w elemére

$$|(v|w)_k| \leqq M_k \|v\| \, \|w\|.$$

Rögzített v mellett $(v|w)_k$ tehát a D-n értelmezett korlátos konjugált-lineáris alak. Minthogy R^{-1} önadjungált, azért ebből az következik, hogy $A_k R^{-1} v$ az R^{-1} értelmezési tartományában van; (13) következtében továbbá

$$|(R^{-1} A_k R^{-1} v, v)| \leqq M_k (v, v).$$

Eszerint a

$$B_k = R^{-1} A_k R^{-1} \qquad (k = 0, 1, \ldots)$$

szimmetrikus operátorok mindegyikének az értelmezési tartománya D, és a D-n mindegyikük korlátos. De akkor mindegyik B_k értelmezése folytonos folytatással kiterjeszthető az egész H térre; B_0 folytatása nyilván az I operátor lesz. A kiterjesztés után a B_k operátorok kielégítik az (α_X) feltételt: ha $c_0+c_1x+\cdots+c_nx^n \geqq 0$ az X-en, akkor

$$((c_0B_0+c_1B_1+\cdots+c_nB_n)v, v)=((c_0A_0+c_1A_1+\cdots+c_nA_n)R^{-1}v, R^{-1}v)\geqq 0$$

a D minden v elemére, és így folytonossági okokból $c_0B_0+c_1B_1+\cdots+c_nB_n\geqq O$ egész H-n. Alkalmazva fenti eredményeinket a $\{B_k\}$ sorozatra, azt kapjuk, hogy

$$B_k=\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}^k \qquad (k=0, 1, \ldots),$$

ahol $\boldsymbol{A}$ egy bizonyos $\boldsymbol{H}\supseteq H$ Hilbert-tér önadjungált operátora, $\sigma(\boldsymbol{A})\subseteq X$.

Minthogy a H tetszőleges u elemére $Ru\in D$, azért ebből

$$R^{-1}A_ku=R^{-1}A_kR^{-1}Ru=B_kRu=\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}^kRu,$$

tehát

$$(14) \qquad A_k=A_0^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}^kA_0^{\frac{1}{2}} \qquad (k=0, 1, \ldots).$$

Könnyű látni, hogy fordítva, minden olyan $\{A_k\}$ sorozat, amely az adott A_0-ból és egy tetszés szerint választott önadjungált $\boldsymbol{A}$-ból ilyen módon nyerhető, kielégíti az (α_X) feltételt, hacsak $\sigma(\boldsymbol{A})\subseteq X$.

Végül szabadítsuk meg magunkat attól a kikötéstől is, hogy A_0 definit pozitív. Legyen $\mathfrak{M}$ a H-nak azon u elemeiből álló altere, amelyre $A_0u=0$, és legyen $\mathfrak{N}$ az $\mathfrak{M}$ ortogonális kiegészítője.

Ha valamely u-ra $A_0u=0$, akkor (12) szerint $(A_ku, u)=0$ és így $((M_kA_0-A_k)u, u)=0$; minthogy $M_kA_0-A_k\geqq O$, azért ekkor szükségképpen $(M_kA_0-A_k)u=0$, tehát $A_ku=0$. Eszerint az $\mathfrak{M}$ alteret az A_k operátorok mindegyike a 0 elembe viszi át.

Ha $v\in\mathfrak{N}$, akkor az $\mathfrak{M}$ minden u elemére

$$(A_kv, u)=(v, A_ku)=(v, 0)=0,$$

tehát $A_kv\in\mathfrak{N}$. Eszerint az $\mathfrak{N}$ alteret is mindegyik A_k operátor önmagába képezi le.

Összegezve: az $\mathfrak{M}$ és $\mathfrak{N}$ alterek mindegyik A_k operátort redukálják, és $A_kM=(0)$ $(k=0, 1, \ldots)$.

Az $\mathfrak{N}$ altérben tekintve, A_0 definit pozitív, és így $\mathfrak{N}$-ben érvényes egy (14) típusú előállítás; $\boldsymbol{A}$ valamely $\boldsymbol{H}\supseteq\mathfrak{N}$ Hilbert-tér önadjungált operátora, $\sigma(\boldsymbol{A})\subseteq X$. Feltételezhetjük azt is, hogy $\boldsymbol{H}\supseteq H$. Ellenkező esetben ugyanis mindössze $\boldsymbol{H}$-t $\boldsymbol{H}'=\boldsymbol{H}\oplus\mathfrak{M}$-mel kellene helyettesítenünk, $\boldsymbol{A}$-t pedig $\boldsymbol{A}'=\boldsymbol{A}\oplus C$-vel, ahol C az $\mathfrak{M}$ tér tetszésszerint választott önadjungált operátora, $\sigma(C)\subseteq X$; valóban, ha $\boldsymbol{P}$, ill. $\boldsymbol{P}'$ a $\boldsymbol{H}$, ill. $\boldsymbol{H}'$ terekben az $\mathfrak{N}$ altérre való vetítés operátora, akkor az $\mathfrak{N}$ minden v elemére $\boldsymbol{P}'\boldsymbol{A}'^kv=\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}^kv$.

Ezek után már csak azt kell észrevennünk, hogy a kapott (14) előállítás nem csak az $\mathfrak{N}$ altérben, hanem az $\mathfrak{M}$ altérben is érvényes, és így érvényes az egész H térben is. Valóban, ha $u \in \mathfrak{M}$, akkor egyrészt $A_k u = 0$, másrészt $\|A_0^{\frac{1}{2}} u\|^2 = (A_0 u, u) = 0$, $\|A_0^{\frac{1}{2}} u\| = 0$, tehát

$$A_0^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{P} \boldsymbol{A}^k A_0^{\frac{1}{2}} u = 0 \qquad (k = 0, 1, \ldots).$$

Fordítva, könnyű belátni, hogy a H operátorainak minden olyan $\{A_k\}$ sorozata, amely a (14) alakban előállítható valamely $\boldsymbol{H} \supset H$ Hilbert-tér valamely $\boldsymbol{A}$ önadjungált operátorának segítségével, korlátos operátorokból áll és eleget tesz az (α_X) feltételeknek, hacsak $\sigma(\boldsymbol{A}) \subseteq X$.

Összefoglalva eredményeinket, kimondhatjuk a következő tételt:

2. tétel. *A H Hilbert-tér korlátos önadjungált operátorainak azok és csakis azok az $\{A_k\}$ sorozatai elégítik ki az (α_X) feltételeit, amelyek a következőképpen állíthatók elő. Választunk H-ban egy tetszésszerinti korlátos önadjungált A_0 operátort, $A_0 \geqq O$, és egy tetszésszerinti, a H-t altereként tartalmazó $\boldsymbol{H}$ Hilbert-térben választunk tetszésszerint egy olyan $\boldsymbol{A}$ önadjungált operátort, amelynek a spektruma az X halmazba esik. $\boldsymbol{P}$-vel jelölve a H altérre való vetítés operátorát, az $\{A_k\}$ sorozat így áll elő:*

$$A_k = A_0^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{P} \boldsymbol{A}^k A_0^{\frac{1}{2}} \qquad (k = 1, 2, \ldots); \tag{15}$$

ez a képlet érvényes nyilván a $k = 0$ esetben is.

Tekintsük azt a különös esetet, amikor $X = [0, 1]$. S. BERSTEJN egy ismert tétele szerint [3] minden olyan polinom, amely a $[0, 1]$ szakaszon > 0, előállítható a

$$p_{m,n}(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} x^{m+k} \equiv x^m (1-x)^n \qquad (m, n = 0, 1, \ldots)$$

polinomok valós, nem-negatív együtthatós lineáris kapcsolataiként; e polinomok a $[0, 1]$ szakaszon nyilvánvalóan nem-negatívok. Ha tehát az (α_X) feltételt csupán e $p_{m,n}(x)$ polinomokra nézve kötjük ki, következik a feltétel teljesülése minden olyan $p(x)$ polinomra, amely a $[0, 1]$ szakaszon > 0. De akkor teljesül e feltétel minden olyan $p(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n$ polinomra is, amely a $[0, 1]$-en nem-negatív. Ha ugyanis ε tetszésszerinti kis pozitív szám, akkor $p(x) + \varepsilon > 0$ a $[0, 1]$-en, és így $c_0 A_0 + c_1 A_1 + \cdots + c_n A_n + \varepsilon A_0 \geqq O$; az ε-t 0-hoz tartatva következik abból, hogy $c_0 A_0 + c_1 A_1 + \cdots + c_n A_n \geqq O$. Ezzel beláttuk a következőt:

A H Hilbert-tér korlátos önadjungált operátorainak $\{A_k\}$ sorozata akkor és csak akkor totálisan monoton, azaz akkor és csak akkor tesz eleget az

$$A_m - \binom{n}{1} A_{m+1} + \binom{n}{2} A_{m+2} - \cdots + (-1)^n A_{m+n} \geqq O \qquad (m, n = 0, 1, \ldots)$$

feltételeknek, ha ez a sorozat a (15) *alakban állítható elő valamely olyan önadjungált A operátor segítségével, amelynek a spektruma* $[0, 1]$ *szakaszba esik.*

IRODALOM

[1] R. V. Kadison, A generalized Schwarz inequality and algebraic invariants for operator algebras, *Annals of Math.*, **56** (1952), 494—503.

[2] M. A. НАЙМАРК, Спектральные функции симметрического оператора, Известия Акад. Наук СССР, сер. матем., **4** (1940), 277—309 (angol kivonat: 309—318); Об одном представлении аддитивных операторних функций множеств, Доклады Акad. Наук СССР, **41** (1943), 373—375.

[3] С. Н. БЕРНШТЕЙН, О наилучшем приближении пепрерывных функций посредством многочленов данной степени, Сообщ. Харьковского Матем. Общества, сер. 2, **13** (1912), 49—194, különösen a 97. § [= Собраные сочинении. I (1952), 81—83]. Lásd még F. Hausdorff Summationsmethoden und Momentfolgen. I, *Math. Zeitschrift*, **2** (1921), 74—109.