KONTRAKCIÓK ÉS POZITÍV DEFINIT OPERÁTORFÜGGVÉNYEK A HILBERT-TÉRBEN*

SZŐKEFALVI-NAGY BÉLA lev. tag

Előadta az 1953. október 5-én tartott felolvasó ülésen

1. Bevezetés. Tételek a kontrakciókról

A H Hilbert-tér *kontrakció*ján a H olyan T lineáris transzformációját értjük, amely az elemek normáját nem növeli, azaz amelyre

$$\|Tf\| \leqq \|f\|,$$

bármely elemét jelentse is f a H térnek, vagyis amelyre

$$\|T\| \leqq 1.$$

Speciális kontrakciók az izometrikus transzformációk (amelyekre $\|Tf\| = \|f\|$) és még speciálisabbak az unitér transzformációk, azaz az olyan izometrikus transzformációk, amelyek a H teret a maga teljes egészére képezik le.[1]

Az unitér transzformációk aránylag egyszerű szerkezetűek, amit legjobban az bizonyít, hogy (komplex tér esetében) érvényes rájuk a spektrálfelbontás tétele. Ennek következtében az unitér transzformációkra aránylag egyszerű módon számos tulajdonságot lehetett kimutatni.

A későbbi vizsgálatok során, eléggé meglepetésszerűen, kitünt, hogy az unitér transzformációk egyik-másik olyan tulajdonsága, amely addig az unitér transzformációk sajátosságának látszott, érvényes tetszőleges T kontrakcióra is. Említsünk meg ezek közül néhányat:

a) *Invariáns elemek*[2]. Ha a T transzformáció a H tér egy f elemét önmagába viszi át, akkor f-et a T^* adjungált transzformáció is önmagába viszi át.

b) *Ergodikus tétel*[2]. A H tér bármely f elemére létezik az

$$f^* = \lim_{\substack{n > m \geqq 0 \\ n-m \to \infty}} \frac{1}{n-m} \sum_{m}^{n-1} T^k f$$

határérték.

---

* E dolgozat eredményeit a szerző két francia nyelvű cikkben is közölte: „Sur les contractions de l'espace de Hilbert", *Acta Sci. Math. Szeged,* **15** (1953), 87—92, és „Transformations de l'espace de Hilbert, fonctions de type positif sur un groupe", *u. ott,* 104—114.

[1] *Unitér* transzformációról rendszerint csak *komplex* Hilbert-tér esetében szokás beszélni, míg *valós* Hilbert-tér esetében ehelyett *ortogonális* transzformációt mondanak. Az egyöntetűség kedvéért mi a valós esetben is *unitért* fogunk mondani.

[2] F. Riesz—B. Sz.-Nagy, Über Kontraktionen des Hilbertschen Raumes, *Acta Sci. Math. Szeged,* **10** (1943), 202—205.

c) *Neumann tétele*[3]. Legyen $u(z)$ a z komplex változónak olyan függvénye, amely a komplex síknak a $|z| \leqq 1$ egységkörlemezt magában foglaló valamely tartományán holomorf; az $u(z)$ hatványsora legyen

$$u(z) = c_0 + c_1 z + \cdots + c_n z^n + \cdots.$$

Legyen

$$u(T) = c_0 I + c_1 T + \cdots + c_n T^n + \cdots.^4$$

Ha a $|z| \leqq 1$ egységkörlemezen $|u(z)| \leqq 1$, akkor $\|u(T)\| \leqq 1$, azaz ekkor $u(T)$ szintén kontrakció.

d) *Heinz tétele*[5]. Az $u(z)$ függvény legyen olyan, mint előbb, azzal a különbséggel, hogy a $|z| \leqq 1$ egységkörlemezen az $|u(z)| \leqq 1$ feltétel helyett a $\operatorname{Re} u(z) \geqq 0$ feltételt kötjük ki. Ekkor $\operatorname{Re} u(T) \geqq O$.[6]

A következőkben bebizonyítjuk, hogy az általános típusú kontrakciók és az unitér transzformációk közt szoros kapcsolat áll fenn; e kapcsolat alapján a fent felsorolt tények könnyen folynak az unitér transzformációkra vonatkozó megfelelő tényekből. E kapcsolatot a következő tétel fejezi ki:

I. TÉTEL. *Legyen T a H Hilbert-tér egy kontrakciója. Létezik ekkor egy, H-t altereként tartalmazó $\mathbf{H}$ Hilbert-tér és ennek egy $\mathbf{U}$ unitér transzformációja úgy, hogy ha $\mathbf{P}$-vel jelöljük a H-ra való merőleges vetítést, akkor álljanak a következő egyenlőségek:*

$$(1) \qquad T^k = \mathbf{P}\mathbf{U}^k, \quad (T^*)^k = \mathbf{P}\mathbf{U}^{-k} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)^{7\,8}$$

Mutassuk meg, hogyan következnek e tétel segítségével a kontrakciókra fent felsorolt tények.

a) Ha $Tf = f$, akkor $\mathbf{P}\mathbf{U}f = f$, és minthogy $\|\mathbf{U}f\| = \|f\|$, $\mathbf{P}f = f$ (hiszen $f \in H$), azért

---

[3] J. VON NEUMANN, Eine Spektraltheorie für allgemeine Operatoren eines unitären Raumes, *Math. Nachrichten*, 4 (1951), 258—281. — Ez és a következő tétel természetesen csak komplex Hilbert térben érvényes (hiszen a c_k együtthatók általában komplex számok).

[4] Minthogy $|c_n| \leq M/r^n$, ahol $r > 1$, azért ez a transzformációsor normában konvergens.

[5] E. HEINZ, Ein v. Neumannscher Satz über beschränkte Operatoren im Hilbertschen Raum, *Nachrichten Akad. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Klasse*, Abt. IIa, 1952, 5—6.

[6] Bármely A lineáris transzformációra $\operatorname{Re} A = \frac{1}{2}(A + A^*)$, ahol A^* az A adjungáltja. A H tér minden f elemére

$$((\operatorname{Re} A)f, f) = \frac{1}{2}[(Af, f) + (A^*f, f)] = \frac{1}{2}[(Af, f) + (f, Af)] = \operatorname{Re}(Af, f).$$

[7] Az (1) alatti egyenlőségeket és a következőkben előforduló hasonló alakú egyenlőségeket is úgy kell érteni, hogy a két oldalt szereplő transzformációk akkor egyenlők, ha az eredeti H tér elemeire alkalmazzuk őket.

[8] A $T = PU$ előállítás lehetősége már előbb ismeretes volt, lásd P. R. HALMOS, Normal dilations and extensions of operators, *Summa Brasiliensis Math.*, 2 (1950), 125—134. Az U unitér transzformáció azonban, amelyet HALMOS megszerkeszt, nem tesz eleget az (1) egyenlőségeknek a $k \geqq 2$ esetben.

$$\|Uf-f\|^2=\|Uf\|^2-2\,\mathrm{Re}\,(Uf,f)+\|f\|^2=2[\|f\|^2-\mathrm{Re}\,(Uf,Pf)]=$$
$$=2[\|f\|^2-\mathrm{Re}\,(PUf,f)]=2[\|f\|^2-\mathrm{Re}\,(f,f)]=0,$$

tehát $Uf=f$. De akkor $f=U^{-1}f$ és így $T^*f=PU^{-1}f=Pf=f$.

b) Minthogy

$$\sum_m^{n-1} T^k f=P\sum_m^{n-1} U^k f,$$

azért a T kontrakcióra az ergodikus tétel következik az U unitér transzformációra vonatkozó ergodikus tételből.

c)—d) Az (1) egyenlőségekből nyilván következik, hogy

$$u(T)=Pu(U).$$

Ha

$$U=\int_0^{2\pi} e^{i\lambda}dE_\lambda$$

az U unitér transzformáció spektrálelőállítása, akkor a H tér minden f elemére érvényesek a következő összefüggések:

$$\|u(T)f\|^2=\|Pu(U)f\|^2\leqq\|u(U)f\|^2=\int_0^{2\pi}|u(e^{i\lambda})|^2 dE_\lambda f,f),$$

$$(u(T)f,f)=(Pu(U)f,f)=(u(U)f,f)=\int_0^{2\pi}u(e^{i\lambda})d(E_\lambda f,f),$$

és ezekből a c) és d) tételek közvetlenül adódnak.

Az I. tételnek „folytonos" analogonjaként be fogjuk bizonyítani a következő tételt is:

II. TÉTEL. *Legyen T_t $(0\leqq t<\infty)$ a H Hilbert-térnek a t paramétertől függő kontrakciója, és tegyük fel, hogy*

$$T_0=I,\quad T_sT_t=T_{s+t}\qquad (s,t\geqq 0),$$

továbbá, hogy (T_tf,g) a H tér bármely két f,g elemére a t paraméter folytonos függvénye. Röviden: legyen $\{T_t\}$ kontrakciókból álló, egy-paraméteres, „gyengén" folytonos félcsoport. Létezik ekkor egy, a H teret altereként tartalmazó $\mathbf{H}$ Hilbert-tér, és ennek egy unitér transzformációkból álló, egy-paraméteres, „erősen" folytonos[9] $\{U_t\}$ csoportja $(-\infty<t<\infty)$ úgy, hogy

(2) $$T_t=PU_t,\quad T_t^*=PU_{-t}\qquad (0\leqq t<\infty),$$

ahol P ismét a H-ra való merőleges vetítést jelenti.

E tételből azonnal következik, hogy a $\{T_t\}$ félcsoport erősen is folytonos. Következik továbbá az, hogy $f\in H$ esetén

$$\frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2}T_tf\,dt=P\left(\frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2}U_tf\,dt\right)$$

[9] Azaz a $\mathbf{H}$ bármely f elemére U_sf erősen tart U_tf-hez, ha $s\to t$.

(az integrálokat Riemann-összegek határértékeiként értelmezzük), és így az ergodikus tétel „folytonos" változatának unitér félcsoportokra való érvényességéből folyik e tétel érvényessége tetszőleges kontrakciókból álló félcsoportokra is.

A II. tétel alapján NEUMANN és HEINZ tételeinek bizonyos analogonjait is nyerhetjük:

e) Ha a $p(\theta)=\sum_{k=1}^{n} a_k e^{it_k\theta}$ (általánosított) trigonometrikus polinom (ahol a t_k számok tetszőleges valós számok) eleget tesz a $|p(\theta)|\leqq 1$ egyenlőtlenségnek ($-\infty<\theta<\infty$), akkor

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} a_k T_{t_k}\right\|\leqq 1,$$

feltéve, hogy negatív t esetén T_t-n T^*_{-t}-ot értjük.

f) Ha $\operatorname{Re} p(\theta)\geqq 0$, akkor

$$\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{n} a_k T_{t_k}\geqq O.$$

A II. tétel alapján ugyanis

$$\Sigma a_k T_{t_k}=\boldsymbol{P}\Sigma a_k \boldsymbol{U}_{t_k},$$

és minthogy Stone tétele szerint

$$\boldsymbol{U}_t=\int_{-\infty}^{\infty} e^{it\theta}\, d\boldsymbol{E}_\theta,$$

azért

$$\Sigma a_k T_{t_k}=\boldsymbol{P}\int_{-\infty}^{\infty} p(\theta)\, d\boldsymbol{E}_\theta.$$

Ebből az összefüggésből c) és f) ugyanúgy következnek, mint ahogy fentebb c)-t és d)-t nyertük.

Véges (általánosított) trigonometrikus polinomokról — bizonyos konvergenciakikötésekkel — végtelen (általánosított) trigonometrikus sorokra, sőt trigonometrikus integrálokra is átvihetők az e)—f) tételek.

Az I. és II. tételben szereplő bővített $\boldsymbol{H}$ terek természetesen nincsenek egyértelműen meghatározva. Az I. tételben szereplő $\boldsymbol{H}$ térnek mindenesetre tartalmaznia kell az összes $\boldsymbol{U}^k f$ alakú elemeket, ahol $f\in H$ és $k=0, \pm 1, \pm 2,\ldots$, a II. tételben szereplő $\boldsymbol{H}$ térnek pedig tartalmaznia kell az összes $\boldsymbol{U}_t f$ alakú elemeket, ahol $f\in H$ és $-\infty<t<\infty$. A $\boldsymbol{H}$ teret *minimális*nak fogjuk nevezni, ha az $\boldsymbol{U}^k f$, ill. az $\boldsymbol{U}_t f$ alakú elemek kifeszítik $\boldsymbol{H}$-t. Be fogjuk bizonyítani, hogy a $\boldsymbol{H}$ tér mindig választható minimálisnak, és ebben az esetben $\boldsymbol{H}$ és $\boldsymbol{U}$, ill. $\boldsymbol{H}$ és $\boldsymbol{U}_t$, *izomorfia* erejéig egyértelműen meg vannak határozva.

Tekintsük speciálisan azt az esetet, amikor a T transzformáció izometrikus (de nem unitér, azaz a H teret egy valódi alterére képezi le). Ekkor a H

minden f elemére

$$\|f\| = \|Tf\| = \|PUf\|$$

és, minthogy $\|Uf\| = \|f\|$, azért szükségképpen $PUf = Uf$, azaz $Uf \in H$. Ha tehát T izometrikus, akkor H minden f elemére

$$T^k f = U^k f \qquad (k = 0, 1, \ldots).$$

Hasonló a helyzet izometrikus transzformációk T_t félcsoportjára: ekkor a H tér minden f elemére

$$T_t f = U_t f \qquad (t \geqq 0).$$ [10]

2. Két lemma

A következő két lemmára az I. és II. tétel bizonyításában lesz szükségünk.

1. LEMMA. *Legyen T a H (valós, vagy komplex) Hilbert-tér kontrakciója. Alkossuk meg a két irányban végtelen*

$$\ldots, T_{-n}, \ldots, T_{-2}, T_{-1}, T_0, T_1, T_2, \ldots, T_n, \ldots$$

sorozatot a következőképpen:

$$T_n = T^n, \quad T_{-n} = T^{*n} \qquad (n = 0, 1, \ldots).$$

Ekkor $T_0 = I$, $T_{-n} = T_n^*$ és

$$\sum_{m,\, n=-\infty}^{\infty} (T_{n-m} g_n, g_m) \geqq 0 \tag{3}$$

minden olyan H-ból vett $\{g_n\}_{-\infty}^{\infty}$ elemsorozatra, amelynek legfeljebb véges sok tag kivételével mindegyik tagja 0-val egyenlő.

Bizonyítás. Tekintsük először *komplex* H tér esetét. Értelmezzük a $T(r, \theta)$ transzformációt ($0 \leqq r < 1$, $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$) a következőképpen:

$$T(r, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in\theta} T_n;$$

minthogy T-vel együtt nyilván mindegyik T_n is kontrakció, azaz $\|T_n\| \leqq 1$, azért ez a sor konvergál (mégpedig a legerősebb módon: normában). A $z = re^{i\theta}$ jelölést használva a következő összefüggésre jutunk:

$$T(r, \theta) = \left(\frac{1}{2} I + \sum_{n=1}^{\infty} z^n T^n\right) + \left(\frac{1}{2} I + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{z}^n T^{*n}\right) =$$

$$= 2 \operatorname{Re}\left(\frac{1}{2} I + \sum_{n=1}^{\infty} z^n T^n\right) = \operatorname{Re}\,(I + zT)(I - zT)^{-1}.$$

[10] Erre a speciális esetre a tételt már előzőleg, egészen más eszközökkel, J. L. B. COOPER is bebizonyította: One-parameter semigroups of isometric operators in Hilbert space, *Annals of Math.*, 48 (1947), 827—842.

Ennélfogva, ha

$$g=(I-zT)^{-1}f \qquad (f\in H),$$

akkor

$$\begin{aligned}(T(r,\theta)f,f)&=\mathrm{Re}((I+zT)(I-zT)^{-1}f,f)=\mathrm{Re}\,((I+zT)g,(I-zT)g)=\\&=\mathrm{Re}[(g,g)+z(Tg,g)-\bar z(g,Tg)-z\bar z(Tg,Tg)]=\\&=\|g\|^2-|z|^2\|Tg\|^2\geqq 0,\end{aligned}$$

hiszen $|z|<1$ és $\|T\|\leqq 1$. Minthogy ez a H tér minden f elemére érvényes, azért igaz speciálisan a következő egyenlőtlenség:

$$p(r,\theta)=(T(r,\theta)g(\theta),g(\theta))\geqq 0,$$

ahol

$$g(\theta)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{-in\theta}g_n$$

($\{g_n\}$ a tételben szereplő tetszőleges sorozat, $g_n\in H$). Beírva $T(r,\theta)$ és $g(\theta)$ sorfejtéseit, azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}p(r,\theta)&=\sum_{k,m,n=-\infty}^{\infty}r^{|k|}e^{i(k+m-n)\theta}(T_k g_n,g_m)=\\&=\sum_{l=-\infty}^{\infty}e^{il\theta}\sum_{m,n=-\infty}^{\infty}r^{|l+n-m|}(T_{l+n-m}g_n,g_m)\geqq 0,\end{aligned}$$

és ebből

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}p(r,\theta)\,d\theta=\sum_{m,n=-\infty}^{\infty}r^{|n-m|}(T_{n-m}g_n,g_m)\geqq 0.$$

Ha r-et 1-hez tartatjuk, ennek az egyenlőtlenségnek határeseteül a bizonyítandó (3) egyenlőtlenséghez jutunk.

Ezzel a lemmát komplex tér esetében bebizonyítottuk.

Valós H tér esetében a bizonyítást a komplex tér esetére való visszavezetéssel fogjuk elvégezni. Evégből vezessük be a H_c teret, amelynek elemei a H tér elemeiből alkotott $\{g,h\}$ párok, és amelyben az összeadást, komplex $a+ib$ számmal való szorzást, a belső szorzatot és a normát a következőképpen értelmezzük:

$$\begin{aligned}&\{g,h\}+\{g',h'\}=\{g+g',h+h'\},\\&(a+ib)\{g,h\}=\{ag-bh,bg+ah\}\quad (a \text{ és } b \text{ valós számok}),\\&(\{g,h\},\{g',h'\})=(g,g')+(h,h')+i(h,g')-i(g,h'),\\&\|\{g,h\}\|^2=(\{g,h\},\{g,h\})=\|g\|^2+\|h\|^2;\end{aligned}$$

könnyen ellenőrízhető, hogy ezen értelmezések mellett H_c komplex Hilbert-tér. A

$$\bar T\{g,h\}=\{Tg,Th\}$$

transzformáció ekkor a H_c tér kontrakciója, hiszen egyrészt $\bar T$ lineáris:

$$\overline{T}\{g+g', h+h'\} = \{T(g+g'), T(h+h')\} = \{Tg, Th\} + \{Tg', Th'\} = \\ = \overline{T}\{g, h\} + \overline{T}\{g', h'\},$$

$$\overline{T}(a+ib)\{g, h\} = \overline{T}\{ag-bh, bg+ah\} = \{aTg-bTh, bTg+aTh\} = \\ = (a+ib)\{Tg, Th\} = (a+ib)\overline{T}\{g, h\},$$

másrészt

$$\|\overline{T}\{g, h\}\|^2 = \|\{Tg, Th\}\|^2 = \|Tg\|^2 + \|Th\|^2 \leqq \|g\|^2 + \|h\|^2 = \|\{g, h\}\|^2.$$

Könnyű látni továbbá, hogy $\overline{T}^*\{g, h\} = \{T^*g, T^*h\}$, és így

$$\overline{T}^n\{g, h\} = \{T^n g, T^n h\}, \quad \overline{T}^{*n}\{g, h\} = \{T^{*n}g, T^{*n}h\} \qquad (n = 0, 1, \dots),$$

következésképpen

$$\overline{T}_n\{g, h\} = \{T_n g, T_n h\} \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Minthogy a (3) egyenlőtlenséget komplex tér esetében már bebizonyítottuk, azért igaz, hogy

$$(4) \qquad \sum_{m,\, n=-\infty}^{\infty} (\overline{T}_{n-m}\varphi_n, \varphi_m) \geqq 0),$$

ha $\varphi_n = \{g_n, h_n\} \in H_c$ (ahol legfeljebb véges sok n kivételével minden n-re $g_n = 0, h_n = 0$). Ha éppen $h_n = 0$ minden n-re, akkor

$$(\overline{T}_{n-m}\varphi_n, \varphi_m) = (T_{n-m}g_n, g_m),$$

és így ekkor a (4) egyenlőtlenség a bizonyítandó (3) egyenlőtlenségre redukálódik.

Ezzel a lemmát valós Hilbert-tér esetére is bebizonyítottuk.

2. LEMMA. *Legyen $\{T_t\}$ $(0 \leqq t < \infty)$ a (valós, vagy komplex) H Hilbert-tér kontrakcióinak egy-paraméteres, gyengén folytonos félcsoportja, azaz legyen $T_0 = I$, $T_s T_t = T_{s+t}$ $(s, t \geqq 0)$ és $(T_t f, g)$ legyen a t folytonos függvénye, bármely f, g elempárra H-ból. Értelmezzük T_t-t negatív t-kre is a következőképpen:*

$$T_{-t} = T_t^*.$$

Ekkor T_t a t paraméternek az egész $-\infty < t < \infty$ egyenesen gyengén folytonos függvénye, és fennáll a

$$(5) \qquad \sum_{s,\, t=-\infty}^{\infty} (T_{t-s}g_t, g_s) \geqq 0$$

egyenlőtlenség, ahol g_t a H térnek tetszőleges olyan t-től függő eleme, amely t-nek csak legfeljebb véges sok értékére különbözik 0-tól; az (5) baloldalán álló összegeknek így szintén csak véges sok 0-tól különböző tagja van.

Bizonyítás. T_t gyenge folytonossága nyilvánvaló negatív t-re is, hiszen $(T_t f, g) = (f, T_t^* g) = (f, T_{-t}g)$.

Legyenek $t_1, \dots, t_r$ azok a t-értékek, amelyre $g_t \neq 0$. Válasszuk a

$$t_{n\nu} \qquad (n = 1, \dots, r;\ \nu = 1, 2, \dots)$$

racionális számokat úgy, hogy

$$\lim_{\nu\to\infty} t_{n\nu} = t_n \qquad (n = 1, \ldots, r)$$

legyen. Minthogy T_t gyengén folytonos függvénye t-nek, azért (az

$$f_n = g_{t_n} \qquad (n = 1, \ldots, r)$$

jelöléssel)

$$(6) \qquad \sum_{s,\, t=-\infty}^{\infty} (T_{t-s} g_t, g_s) = \sum_{m,\, n=1}^{r} (T_{t_n - t_m} f_n, f_m) = \lim_{\nu\to\infty} \sum_{m,\, n=1}^{r} (T_{t_{n\nu} - t_{m\nu}} f_n, f_m).$$

Rögzített ν mellett a $t_{n\nu}$ $(n = 1, \ldots, r)$ racionális számok összemérhetők, azaz felírhatók a

$$t_{n\nu} = \tau_{n\nu} d_\nu$$

alakban, ahol $d_\nu > 0$ és a $\tau_{n\nu}$-k egész számok. De akkor

$$T_{t_{n\nu} - t_{m\nu}} = T_{(\tau_{n\nu} - \tau_{m\nu}) d_\nu} = \begin{cases} (T_{d_\nu})^{\tau_{n\nu} - \tau_{m\nu}} & \text{ha } \tau_{n\nu} \geqq \tau_{m\nu}, \\ (T_{d_\nu}^*)^{\tau_{m\nu} - \tau_{n\nu}} & \text{ha } \tau_{n\nu} \leqq \tau_{m\nu}. \end{cases}$$

Tehát, a $T^\nu = T_{d_\nu}$ jelölést bevezetve,

$$(7) \qquad \sum_{m,\, n=-\infty}^{\infty} (T_{t_{n\nu} - t_{m\nu}} f_n, f_m) = \sum_{m,\, n=-\infty}^{\infty} (T^{(\nu)}_{\tau_{n\nu} - \tau_{m\nu}} f_n, f_m).$$

Ha most az 1. lemmát a $T^{(\nu)}$ kontrakcióra alkalmazzuk, azt kapjuk, hogy a (7) jobboldala $\geqq 0$, és (6) alapján akkor (5) is áll.

Ezzel a 2. lemmát is bebizonyítottuk.

3. Pozitív definit operátorfüggvények

A lemmákban bebizonyított (3), (5) egyenlőtlenségek emlékeztetnek a pozitív definit függvények definíciójára. Mint ismeretes, a valamely Γ csoporton értelmezett komplex számértékű $p(\gamma)$ $(\gamma \in \Gamma)$ függvényt akkor mondjuk pozitív definitnek, ha

$$\sum_{\delta,\, \gamma \in \Gamma} p(\delta^{-1}\gamma) x(\gamma) \overline{x(\delta)} \geqq 0$$

bármely olyan, Γ-n értelmezett, komplexértékű $x(\gamma)$ függvényre, amelynek az értéke véges sok γ kivételével mindenütt 0; az összegezést természetesen csak erre a véges sok csoportelemre kell kiterjeszteni. A definícióból könnyen következik, hogy pozitív definit függvényre $p(\gamma^{-1}) = \overline{p(\gamma)}$.

Valós értékű $p(\gamma)$ függvény esetében elég a fenti egyenlőtlenséget a valós értékű $x(\gamma)$ függvényekre megkövetelni, feltéve, hogy külön feltesszük még, hogy $p(\gamma^{-1}) = p(\gamma)$.

Természetesen kinálkozik a pozitív definit függvények fogalmának a következő kiterjesztése:

Értelmezés. Legyen T_γ a H (valós vagy komplex) Hilbert-tér korlátos lineáris transzformációja, amely a Γ csoport változó γ elemének függvénye.

Akkor mondjuk, hogy T_γ, mint γ függvénye, *pozitív definit* Γ-n, ha

$$T_{\gamma^{-1}} = T_\gamma^* \tag{8}$$

minden $\gamma \in \Gamma$ elemre,[11] és ha

$$\sum_{\delta, \gamma \in \Gamma} (T_{\delta^{-1}\gamma} g_\gamma, g_\delta) \geqq 0, \tag{9}$$

ahol g_γ a H-nak tetszőleges olyan, γ-tól függő eleme, amely legfeljebb véges sok γ-ra különbözik 0-tól (a (9) összeg ennélfogva csak véges sok 0-tól különböző tagot tartalmaz).

Az 1. lemmában a Γ csoport az egész számok additív csoportja, a 2. lemmában pedig Γ az összes valós számok additív csoportja.

Be fogjuk a következő tételt bizonyítani.

III. TÉTEL. *Legyen T_γ a H (valós, vagy komplex) Hilbert-tér korlátos transzformációja, amely a Γ topologikus csoport változó γ elemének pozitív definit függvénye; tegyük fel továbbá, hogy T_γ γ-nak gyengén folytonos függvénye, azaz hogy $(T_\gamma f, g)$ a H bármely f, g elempárjára γ-nak folytonos függvénye; legyen végül*

$$T_\varepsilon = I \qquad (\varepsilon \text{ a } \Gamma \text{ csoport egységeleme}).$$

Létezik ekkor egy olyan, H-t altereként tartalmazó $\boldsymbol{H}$ Hilbert-tér, és ebben a Γ csoportnak unitér $\boldsymbol{U}_\gamma$ transzformációkkal való olyan (erősen) folytonos előállítása, hogy a

$$T_\gamma = \boldsymbol{P}\boldsymbol{U}_\gamma \qquad (\gamma \in \Gamma) \tag{10}$$

összefüggés érvényes; $\boldsymbol{P}$ itt a H-ra való merőleges vetítést jelenti. Megkövetelhető, hogy $\boldsymbol{H}$ minimális legyen, azaz hogy az $\boldsymbol{U}_\gamma f$ $(f \in H, \gamma \in \Gamma)$ alakú elemek kifeszítsék; ebben az esetben $\boldsymbol{H}$ és $\{\boldsymbol{U}_\gamma\}$ izomorfia erejéig meg vannak határozva.

Az I. és II. tétel a két lemma felhasználásával nyilván következményei a III. tételnek. (Az egész számok additív csoportját az ú. n. diszkrét topologiával[12], a valós számok additív csoportját pedig természetes topologiájával kell ellátnunk.)

A III. tételt GELFAND és RAJKOV nevezetes tétele általánosításának tekinthetjük[13]. E tétel szerint a Γ topologikus csoporton értelmezett minden pozitív definit, folytonos, komplexszám-értékű $p(\gamma)$ függvény előállítható a

$$p(\gamma) = (U_\gamma f_0, f_0)$$

---

[11] Komplex H tér esetében (8) következménye (9)-nek.

[12] Azaz amelynél a csoport egy γ elemének „környezeteit" Γ mindazon részhalmaza alkotják, amelyeknek γ elemük.

[13] J. GELFAND—D. RAIKOV, Irreducible unitary representations of arbitrary locally bicompact groups, *Recueil math. Moscou (Mat. Sbornik)*, N. S. **13** (1943), 301—316. Lásd még: R. GODEMENT, Les fonctions de type positif et la théorie des groupes, *Transactions Amer. Math. Soc.*, **63** (1948), 1—84, különösen 21—22.

alakban, ahol $\{U_\gamma\}$ a Γ csoportnak valamely H Hilbert-tér unitér transzformációval való folytonos előállítása, és f_0 a H egy rögzített eleme; megkövetelhető, hogy H-t az $U_\gamma f_0$ $(\gamma \in \Gamma)$ alakú elemek kifeszítsék, H és U_γ ekkor izomorfia erejéig meg vannak határozva.

4. A III. tétel bizonyítása

A Γ csoport minden γ eleméhez rendeljük hozzá a H tér valamely f_γ elemét. Az összes ilyen módon kapható

$$\mathfrak{f} = \{f_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$$

„elem-családok" összességét jelöljük $\boldsymbol{F}$-fel. f_γ-t az $\mathfrak{f}$ γ-indexű „összetevőjének" nevezzük és ezt a következő jelöléssel fejezzük ki:

$$f_\gamma = (\mathfrak{f})_\gamma.$$

$\boldsymbol{F}$-ben értelmezzük az összeadást és a számmal való szorzást (valós, ill. komplex számmal, aszerint, hogy a H tér valós, ill. komplex) a következőképpen:

$$\{f_\gamma\} + \{f'_\gamma\} = \{f_\gamma + f'_\gamma\}, \quad c\{f_\gamma\} = \{cf_\gamma\}.$$

Ha még $\boldsymbol{F}$-ben nullaelemet is értelmezünk: $\mathfrak{f} = 0$ ha $\mathfrak{f}$ minden összetevője 0, akkor $\boldsymbol{F}$ (valós, ill. komplex) *lineáris* térré lesz.

Tekintsük $\boldsymbol{F}$-nek azt a nyilván szintén lineáris $\boldsymbol{H}_0$ részhalmazát, amely azokból az $\mathfrak{f} = \{f_\gamma\}$ elemekből áll, amelyekhez található olyan, *legfeljebb véges sok 0-tól különböző összetevővel bíró* $\mathfrak{g} = \{g_\gamma\} \in \boldsymbol{F}$, hogy minden γ-ra $(\in \Gamma)$ álljon:

$$f_\gamma = \sum_{\delta \in \Gamma} T_{\gamma^{-1}\delta} g_\delta;$$

az $\mathfrak{f}$ és $\mathfrak{g}$ közt fennálló ezt a kapcsolatot jelben röviden így fejezzük ki:

$$\mathfrak{f} = \hat{\mathfrak{g}}.$$

$\boldsymbol{H}_0$-ban egy kétváltozós $(\mathfrak{f}, \mathfrak{f}')$ függvényt fogunk értelmezni, amelyről azután megmutatjuk, hogy a belső szorzat szokásos tulajdonságaival rendelkezik. Ha $\mathfrak{f} = \hat{\mathfrak{g}}, \mathfrak{f}' = \hat{\mathfrak{g}}'$, legyen

$$(11) \qquad (\mathfrak{f}, \mathfrak{f}') = \sum_\gamma (f_\gamma, g'_\gamma) = \sum_{\gamma, \delta} (T_{\gamma^{-1}\delta} g_\delta, g'_\gamma) =$$

$$(12) \qquad = \sum_{\gamma, \delta} (g_\delta, T_{\delta^{-1}\gamma} g'_\gamma) = \sum_\delta (g_\delta, f'_\delta)$$

(itt felhasználtuk azt, hogy $T_{\alpha^{-1}} = T^*_\alpha$). (11)-ből látható, hogy $(\mathfrak{f}, \mathfrak{f}')$ nem függ attól, hogy az $\mathfrak{f} = \hat{\mathfrak{g}}$ előállításában $\mathfrak{g}$-t milyen speciális módon választjuk, (12)-ből pedig látható, hogy $(\mathfrak{f}, \mathfrak{f}')$ nem függ az $\mathfrak{f}'$-t előállító $\mathfrak{g}'$ speciális választásától sem. Így hát $\mathfrak{f}$ és $\mathfrak{f}'$ egyértelműen meghatározzák $(\mathfrak{f}, \mathfrak{f}')$-t. Az is látható továbbá az értelmezésből, hogy $(\mathfrak{f}, \mathfrak{f}')$ a valós esetben szimmetrikus bilineáris függvény, a komplex esetben pedig az első változóban lineáris, a a másodikban pedig konjugált-lineáris és Hermite-féle: $(\mathfrak{f}', \mathfrak{f}) = \overline{(\mathfrak{f}, \mathfrak{f}')}$. A T_γ

pozitív definitásából következik továbbá, hogy

$$(\mathfrak{f}, \mathfrak{f}) \geqq 0.$$

Nem maradt más hátra, mint azt megmutatnunk, hogy itt egyenlőség csak az $\mathfrak{f}=0$ esetben lehetséges. A már eddig beigazolt tulajdonságokból következik a Schwartz-féle egyenlőtlenség:

$$|(\mathfrak{f}, \mathfrak{f}')|^2 \leqq (\mathfrak{f}, \mathfrak{f})(\mathfrak{f}', \mathfrak{f}').$$

Ennek alapján az $(\mathfrak{f}, \mathfrak{f})=0$ egyenlőség maga után vonja az $(\mathfrak{f}, \mathfrak{f}')=0$ egyenlőséget bármely $\mathfrak{f}' \in \boldsymbol{H}_0$ esetében. Legyen speciálisan $\mathfrak{f}'=\hat{\mathfrak{g}}'$, ahol $\mathfrak{g}'$-nek minden összetevője, az α-adik kivételével, 0-val egyenlő. Ekkor

$$(\mathfrak{f}, \mathfrak{f}')=(f_\alpha, g)=0,$$

ahol $f_\alpha=(\mathfrak{f})_\alpha$ és ahol $g=(\mathfrak{g}')_\alpha$ a H tér tetszőleges eleme lehet. Ez csak úgy lehetséges, ha $f_\alpha=0$; és minthogy ez minden α-ra áll, azért valóban $\mathfrak{f}=0$.

$(\mathfrak{f}, \mathfrak{f}')$ tehát a belső szorzat minden tulajdonságával rendelkezik. Ha tehát $\boldsymbol{H}_0$-ban a belső szorzatot e forma segítségével értelmezzük, akkor $\boldsymbol{H}_0$ Hilbert-térré válik, amely azonban általában még nem *teljes*. Legyen $\boldsymbol{H}$ a $\boldsymbol{H}_0$-ból az ismert lezáró eljárással nyert *teljes* Hilbert-tér.

Az eredeti H tér a $\boldsymbol{H}$, sőt a $\boldsymbol{H}_0$ zárt alterének fogható fel, ha a H tér f elemét azonosítjuk a $\boldsymbol{H}_0$ tér azon $\mathfrak{f}=\hat{\mathfrak{g}}$ elemével, amelyre $(\mathfrak{g})_\varepsilon=f$ és $(\mathfrak{g})_\gamma=0$ $(\gamma \neq \varepsilon)$, azaz ha azonosítjuk az

$$f \in H \quad \text{és az} \quad \mathfrak{f}=\{T_{\gamma^{-1}} f\} \in \boldsymbol{H}_0$$

elemeket. Ezt az azonosítást az teszi jogossá, hogy, mint könnyen látható, H bármely két f, f' elemének belső szorzata egyenlő a $\boldsymbol{H}_0$-ból nekik megfeleltetett $\mathfrak{f}, \mathfrak{f}'$ elemek belső szorzatával:

$$(\mathfrak{f}, \mathfrak{f}')=(f, f').$$

Számítsuk ki egy $\mathfrak{f} \in \boldsymbol{H}_0$ elemnek a H altérre való merőleges vetületét, $\boldsymbol{P}\mathfrak{f}$-et. A

$$(\boldsymbol{P}\mathfrak{f}, h)=(\mathfrak{f}, h)$$

egyenletnek minden H-ba tartozó h-ra állnia kell. Tehát

$$(\boldsymbol{P}\mathfrak{f}, h)=((\mathfrak{f})_\varepsilon, h)$$

a H minden h elemére, következésképpen

$$\boldsymbol{P}\mathfrak{f}=(\mathfrak{f})_\varepsilon. \tag{13}$$

A Γ csoport tetszőleges α elemére legyen

$$\boldsymbol{U}_\alpha\{f_\gamma\}=\{f_{\alpha^{-1}\gamma}\};$$

ezzel $\boldsymbol{H}_0$-nak önmagára való transzformációját értelmeztük, hiszen ha $\mathfrak{f}=\hat{\mathfrak{g}}$, akkor

$$f_{\alpha^{-1}\gamma}=\sum_\delta T_{\gamma^{-1}\alpha\delta} g_\delta=\sum_\eta T_{\gamma^{-1}\eta} g_{\alpha^{-1}\eta},$$

tehát $\boldsymbol{U}_\alpha \mathfrak{f}=\widehat{\mathfrak{g}^\alpha}$, ahol $\mathfrak{g}^\alpha=\{g_{\alpha^{-1}\gamma}\}$. $\boldsymbol{U}_\alpha$ a $\boldsymbol{H}_0$-at a teljes $\boldsymbol{H}_0$-ra képezi le, mégpedig nyilván lineáris és kölcsönösen egyértelmű módon. $\boldsymbol{U}_\alpha$ továbbá *izomet-*

rikus: ha $\mathfrak{f}=\hat{\mathfrak{g}}$, $\mathfrak{f}'=\hat{\mathfrak{g}}'$, akkor

$$(\boldsymbol{U}_\alpha \mathfrak{f}, \boldsymbol{U}_\alpha \mathfrak{f}') = \sum_\gamma (f_{\alpha^{-1}\gamma}, g'_{\alpha^{-1}\gamma}) = \sum_\eta (f_\eta, g'_\eta) = (\mathfrak{f}, \mathfrak{f}').$$

$\boldsymbol{U}_\alpha$ értelmezését folytonos folytatással $\boldsymbol{H}_0$-ról egész $\boldsymbol{H}$-ra kiterjeszthetjük, és így $\boldsymbol{H}$-nak a teljes $\boldsymbol{H}$-ra való izometrikus, tehát unitér transzformációját nyerjük.

Az

$$\boldsymbol{U}_\varepsilon = \boldsymbol{I}, \quad \boldsymbol{U}_\alpha \boldsymbol{U}_\beta = \boldsymbol{U}_{\alpha\beta}$$

összefüggések nyilvánvalóan érvényesek $\boldsymbol{H}_0$-ban, és akkor folytonossági okokból érvényesek egész $\boldsymbol{H}$-ban is. Tehát az $\boldsymbol{U}_\alpha$ unitér transzformációk a $\boldsymbol{\Gamma}$ csoportnak egy előállítását szolgáltatják. Ez az előállítás gyengén folytonos, azaz

$$(\boldsymbol{U}_\alpha \mathfrak{f}, \mathfrak{f}')$$

a $\boldsymbol{H}$ bármely rögzített $\mathfrak{f}, \mathfrak{f}'$ elempárjára α-nak folytonos függvénye. Ez közvetlenül látható, ha $\mathfrak{f}, \mathfrak{f}' \in \boldsymbol{H}_0$: ha ugyanis $\mathfrak{f}=\hat{\mathfrak{g}}$, $\mathfrak{f}'=\hat{\mathfrak{g}}'$, akkor

$$(\boldsymbol{U}_\alpha \mathfrak{f}, \mathfrak{f}') = \sum_{\delta, \gamma} (T_{\gamma^{-1}\alpha\delta} g_\delta, f'_\gamma),$$

és a jobboldalt álló összeg 0-tól különböző mindegyik tagja (ilyen véges sok van) α-nak folytonos függvénye, mert feltevés szerint T_γ a γ-nak gyengén folytonos függvénye. $\boldsymbol{H}$ bármely két, $\mathfrak{f}, \mathfrak{f}'$ elemére azután az állítást úgy bizonyíthatjuk be, hogy választunk $\boldsymbol{H}_0$-ból egy $\mathfrak{f}_n$ és egy $\mathfrak{f}'_n$ elemsorozatot úgy, hogy $\mathfrak{f}_n \to \mathfrak{f}$, $\mathfrak{f}'_n \to \mathfrak{f}'$ és észrevesszük, hogy ekkor $(\boldsymbol{U}_\alpha \mathfrak{f}_n, \mathfrak{f}'_n)$ mint az α függvénye $\boldsymbol{\Gamma}$-n *egyenletesen* tart $(\boldsymbol{U}_\alpha \mathfrak{f}, \mathfrak{f}')$-höz.

Minthogy unitér transzformációkról van szó, a gyenge folytonosságból következik az *erős* folytonosság is, azaz $\boldsymbol{H}$ bármely $\mathfrak{f}$ elemére $\|\boldsymbol{U}_t \mathfrak{f} - \boldsymbol{U}_s \mathfrak{f}\| \to 0$, ha $t \to s$. Valóban, a gyenge folytonosság miatt $t \to s$ esetében $(\boldsymbol{U}_t \mathfrak{f}, \boldsymbol{U}_s \mathfrak{f}) \to (\boldsymbol{U}_s \mathfrak{f}, \boldsymbol{U}_s \mathfrak{f}) = (\mathfrak{f}, \mathfrak{f}) = \|\mathfrak{f}\|^2$, és így

$$\|\boldsymbol{U}_t \mathfrak{f} - \boldsymbol{U}_s \mathfrak{f}\|^2 = \|\boldsymbol{U}_t \mathfrak{f}\|^2 + \|\boldsymbol{U}_s \mathfrak{f}\|^2 - 2\,\mathrm{Re}(\boldsymbol{U}_t \mathfrak{f}, \boldsymbol{U}_s \mathfrak{f}) = \|\mathfrak{f}\|^2 + \|\mathfrak{f}\|^2 - 2\,\mathrm{Re}(\boldsymbol{U}_t \mathfrak{f}, \boldsymbol{U}_s \mathfrak{f}) \to 0.$$

Ha $\mathfrak{f} \in \boldsymbol{H}_0$, akkor (13) szerint

$$\boldsymbol{P}\boldsymbol{U}_\alpha \mathfrak{f} = (\boldsymbol{U}_\alpha \mathfrak{f})_\varepsilon = (\mathfrak{f})_{\alpha^{-1}}.$$

Speciálisan, ha $\mathfrak{f} = f \in H$, azaz ha $\mathfrak{f} = \{T_{\gamma^{-1}} f\}$, akkor tehát

$$\boldsymbol{P}\boldsymbol{U}_\alpha f = T_\alpha f.$$

Ezzel bebizonyítottuk a tételben állított (10) alakú előállítás lehetőségét.

Mutassuk most meg, hogy az általunk megszerkesztett $\boldsymbol{H}$ tér *minimális*, azaz hogy az $\boldsymbol{U}_\alpha g$ alakú elemek $(g \in H, \alpha \in \Gamma)$ kifeszítik. Ehhez először is vegyük észre, hogy ha $g \in H$, akkor

$$\boldsymbol{U}_\alpha g = \boldsymbol{U}_\alpha \{T_{\gamma^{-1}} g\} = \{T_{\gamma^{-1}\alpha} g\},$$

és így, ha $\mathfrak{f} = \hat{\mathfrak{g}}$, $\mathfrak{g} = \{g_\gamma\}$, akkor

$$(\mathfrak{f})_\gamma = \sum_\delta T_{\gamma^{-1}\delta} g_\delta = \sum_\delta (\boldsymbol{U}_\delta g_\delta)_\gamma = (\sum_\delta \boldsymbol{U}_\delta g_\delta)_\gamma,$$

tehát

$$\mathfrak{f} = \sum_\delta \boldsymbol{U}_\delta g_\delta.$$

Eszerint a H_0 minden eleme előállítható $U_\alpha g$ alakú elemek összegeként ($g \in H$, $\alpha \in \Gamma$), ebből pedig már következik, hogy az ilyen alakú elemek kifeszítik $\boldsymbol{H}$-t.

Hátra van még azt megvizsgálnunk, hogy a $\boldsymbol{H}$ tér és benne az $\{\boldsymbol{U}_\gamma\}$ unitér csoportelőállítás mennyire vannak meghatározva. Tekintsük evégből Γ-nak két unitér csoportelőállítását, $\{\boldsymbol{U}'_\gamma\}$-t a $\boldsymbol{H}'$ térben és $\{\boldsymbol{U}''_\gamma\}$-t a $\boldsymbol{H}''$ térben; tegyük fel, hogy $\boldsymbol{H}'$ és $\boldsymbol{H}''$ a H-t alterükként tartalmazzák és hogy H-ban

$$T_\gamma = \boldsymbol{P}'\boldsymbol{U}'_\gamma, \quad T_\gamma = \boldsymbol{P}''\boldsymbol{U}''_\gamma;\text{[14]}$$

tegyük továbbá fel, hogy $\boldsymbol{H}'$ és $\boldsymbol{H}''$ minimálisak abban az értelemben, hogy $\boldsymbol{H}'$-t az $\boldsymbol{U}'_\gamma f$, $\boldsymbol{H}''$-t pedig az $\boldsymbol{U}''_\gamma f$ alakú elemek kifeszítik (ahol $f \in H$, $\gamma \in \Gamma$).

Legyen $\Phi' = \sum_\gamma \boldsymbol{U}'_\gamma f_\gamma$ és $\Psi' = \sum_\gamma \boldsymbol{U}'_\gamma g_\gamma$ ($f_\gamma, g_\gamma \in H$). Ekkor

$$(\Phi', \Psi') = \sum_{\gamma,\delta} (\boldsymbol{U}'_\gamma f_\gamma, \boldsymbol{U}'_\delta g_\delta) = \sum_{\gamma,\delta} (\boldsymbol{U}'_{\delta^{-1}} \boldsymbol{U}'_\gamma f_\gamma, \boldsymbol{P}' g_\delta) = \sum_{\gamma,\delta} (\boldsymbol{P}' \boldsymbol{U}'_{\delta^{-1}\gamma} f_\gamma, g_\delta) =$$
$$= \sum_{\gamma,\delta} (T_{\delta^{-1}\gamma} f_\gamma, g_\delta).$$

Ebből látszik, hogy (Φ', Ψ') csak H-beli adatoktól függ. Ennélfogva a

$$\Phi' = \sum_\gamma \boldsymbol{U}'_\gamma f_\gamma \longleftrightarrow \sum_\gamma \boldsymbol{U}''_\gamma f_\gamma = \Phi''$$

megfelelkezés lineáris és izometrikus, és így folytonosan folytatható a $\boldsymbol{H}'$ és $\boldsymbol{H}''$ terek közti lineáris, izometrikus megfelelkezéssé. Minthogy

$$\boldsymbol{U}'_\alpha \Phi' = \sum_\gamma \boldsymbol{U}'_{\alpha\gamma} f_\gamma = \sum_\eta \boldsymbol{U}'_\eta f_{\alpha^{-1}\eta} \longleftrightarrow \sum_\eta \boldsymbol{U}''_\eta f_{\alpha^{-1}\eta} = \sum_\gamma \boldsymbol{U}''_{\alpha\gamma} f_\gamma = \boldsymbol{U}''_\alpha \Phi'',$$

ez a megfelelkezés a $\{\boldsymbol{H}', \boldsymbol{U}'_\gamma\}$ és $\{\boldsymbol{H}'', \boldsymbol{U}''_\gamma\}$ „struktúrák" közötti *izomorfizmust* létesít.

Ezzel a III. tételt bebizonyítottuk.

5. Najmark tétele

A III. tételből levezethető NAJMARK egy fontos tétele. E tétel így szól:[15]

Legyen $\{F_\lambda\}$ $(-\infty < \lambda < \infty)$ a H (komplex) Hilbert-térben egy ú. n. általánosított spektrálsereg, azaz F_λ legyen korlátos önadjungált transzformáció a következő tulajdonságokkal:

$$F_\lambda \leqq F_\mu \text{ ha } \lambda < \mu, \quad F_{\lambda+0} = F_\lambda, \quad F_\lambda \to O \text{ ha } \lambda \to \infty, \quad F_\lambda \to I \text{ ha } \lambda \to \infty.$$

Van ekkor egy olyan, a H teret altereként tartalmazó $\boldsymbol{H}$ Hilbert-tér, és ebben

[14] $\boldsymbol{P}'$ jelenti $\boldsymbol{H}'$-ben a H altérre való merőleges vetítést; $\boldsymbol{P}''$ jelentése ugyanez $\boldsymbol{H}''$-ben.

[15] М. А. Наймарк, Спектральные функции симметрического оператора, Известия Акад. Наук СССР, сер. матем., 4 (1940), 227—309; Об одном представлении аддитивных операторных функций множеств, Доклады Акад. Наук СССР, 41 (1943), 373—375.

egy közönséges (merőleges vetítésekből álló) $\{\boldsymbol{E}_\lambda\}$ *spektrálsereg úgy, hogy az*

$$F_\lambda = \boldsymbol{P}\boldsymbol{E}_\lambda$$

összefüggés érvényes, ahol $\boldsymbol{P}$ *a H-ra való merőleges vetítést jelenti.*

Bizonyítás. Tekintsük a

$$T_t = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} dF_\lambda$$

transzformációt, erről könnyen látható, hogy a valós t paraméternek gyengén folytonos függvénye. Igaz továbbá, hogy $T_{-t} = T_t^*$ és

$$\sum_{m,n=1}^{r} (T_{t_n - t_m} g_n, g_m) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{m,n=1}^{r} \exp[i(t_n - t_m)\lambda] d(F_\lambda g_n, g_m) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (F(d\lambda) g(\lambda), g(\lambda)) \geqq 0,$$

ahol

$$g(\lambda) = \sum_{n=1}^{r} \exp(it_n\lambda)\, g_n.$$

T_t tehát a valós t paraméter pozitív definit függvénye. A III. tétel szerint T_t-t előállíthatjuk a

$$T_t = \boldsymbol{P}\boldsymbol{U}_t$$

alakban, ahol $\{\boldsymbol{U}_t\}$ a valós számok additív csoportjának egy $\boldsymbol{H} \supseteqq H$ térben való folytonos, unitér előállítása. STONE tétele szerint létezik $\boldsymbol{H}$-ban egy $\{\boldsymbol{E}_\lambda\}$ spektrálsereg úgy, hogy

$$\boldsymbol{U}_t = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} d\boldsymbol{E}_\lambda .$$

De akkor

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} dF_\lambda f = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} d\boldsymbol{P}\boldsymbol{E}_\lambda f \quad (f \in H),$$

ahonnan következik, hogy $F_\lambda f = \boldsymbol{P}\boldsymbol{E}_\lambda f$, amivel a bizonyítást befejeztük.

Ha $\{F_\lambda\}$ lényegében a $(0, 2\pi)$ intervallumra van szorítva, azaz ha a $\lambda \leqq 0$ értékekre $F_\lambda = O$ és a $\lambda \geqq 2\pi$ értékekre $F_\lambda = I$, akkor a pozitív definit T_t függvény helyett a

$$T_n = \int_0^{2\pi} e^{in\lambda} dF_\lambda \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

pozitív definit „sorozat"-tal is okoskodhatunk; ebben az esetben Stone tétele helyett ennek egyszerűbb, „diszkrét" analogonjára kell hivatkoznunk, amely szerint

$$\boldsymbol{U}^n = \int_0^{2\pi} e^{in\lambda} d\boldsymbol{E}_\lambda \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Egyébként az általános eset mindig visszavezethető erre a speciális esetre azáltal, hogy a λ paramétert egy olyan $\mu = \varphi(\lambda)$ paraméterrel helyettesítjük, amely λ-nak folytonos és szigorú értelemben növekvő függvénye, és amely értékkészlete a $(0, 2\pi)$ intervallumba esik.

6. Tetszőleges Banach-tér kontrakciói

Az I. és II. tétel részben átvihetők tetszőleges Banach-tér kontrakcióinak esetére is. Az alábbiakban az I. tétel egy ilyen részbeni kiterjesztését közöljük:

IV. TÉTEL. *Legyen T a (valós vagy komplex) B Banach-tér kontrakciója. Létezik ekkor a B teret altereként tartalmazó olyan $\boldsymbol{B}$ Banach-tér, és $\boldsymbol{B}$-nek önmagára való olyan izometrikus $\boldsymbol{U}$ leképezése, hogy B-nek minden f elemére érvényes a*

$$T^n f = \boldsymbol{P}\boldsymbol{U}^n f \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

előállítás; $\boldsymbol{P}$ itt $\boldsymbol{B}$-nek a B altérre való olyan párhuzamos vetítése, amelynek normája 1.

Bizonyítás. Legyen $\boldsymbol{B}$ a B elemeiből alkotott mindazon

$$\mathfrak{f} = \{f_n\}_{-\infty}^{\infty}$$

sorozatok halmaza, amelyekre

$$|\mathfrak{f}| = \sum_{-\infty}^{\infty} \|f_n\| < \infty.$$

Ha $\boldsymbol{B}$-ben az összeadást és a skalárisokkal való szorzást a természetes módon értelmezzük:

$$\{f_n\} + \{f_n'\} = \{f_n + f_n'\}, \quad c\{f_n\} = \{cf_n\},$$

az előbb értelmezett $|\mathfrak{f}|$ mennyiséget pedig $\mathfrak{f}$ normájának tekintjük, akkor ezzel $\boldsymbol{B}$ maga is Banach-térré válik. Az $f \in B$ elemet azonosítjuk azzal az $\mathfrak{f} = \{f_n\} \in \boldsymbol{B}$ elemmel, amelyre $f_0 = f$ és $f_n = 0$ $(n \neq 0)$; ezzel B-t beágyazzuk $\boldsymbol{B}$-be, mint ennek alterét.

Ha $\mathfrak{f} = \{f_n\} \in B$, legyen

$$\boldsymbol{P}\mathfrak{f} = \sum_{0}^{\infty} T^n f_n;$$

minthogy $\|T^n f_n\| \leqq \|f_n\|$, ez a sor konvergens és

$$\|\boldsymbol{P}\mathfrak{f}\| \leqq \sum_{0}^{\infty} \|f_n\| \leqq |\mathfrak{f}|.$$

Így $\boldsymbol{B}$-nek egy B-be való olyan $\boldsymbol{P}$ lineáris transzformációját értelmeztük, amelynek normája 1-gyel egyenlő.

Értelmezzük a következő transzformációt:

$$\boldsymbol{U}\{f_n\} = \{f_{n-1}\},$$

U a $\boldsymbol{B}$ térnek az egész $\boldsymbol{B}$ térre való izometrikus leképezése. Érvényesek ekkor a

$$\boldsymbol{P}\boldsymbol{U}^m\{f_n\} = \boldsymbol{P}\{f_{n-m}\} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n f_{n-m} \qquad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

összefüggések. Speciálisan, ha $\{f_n\} = f \in \boldsymbol{B}$, azaz ha $f_0 = f$ és $f_n = 0$ $(n \neq 0)$, akkor

$$\boldsymbol{P}\boldsymbol{U}^m f = T^m f \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots),$$

amivel a tételt bebizonyítottuk. (Az m negatív egész értékeire $\boldsymbol{P}\boldsymbol{U}^m f = 0$.)