ERDŐS PÁL ÉS TURÁN PÁL EGY TÉTELÉRŐL

FREUD GÉZA

Bemutatta Turán Pál r. tag az 1953. június 8-án tartott felolvasó ülésen

Bevezetés

Legyen $\{P_n(x)\}$ a nemnegatív $w(x)\in L$ súlyfüggvényre a $(-1, +1)$ intervallumban ortogonális polinomok sorozata, $P_n(x)$-ben x^n együtthatója legyen pozitív. A $P_n(x)$ polinom gyökei legyenek $x_{1n}, x_{2n}, \ldots, x_{nn}$. ERDŐS és TURÁN egy tétele szerint, ha a $(-1, +1)$ ortogonális intervallum egy (a, b) belső részintervallumában

$$0 < m \leqq w(x) \leqq M \qquad (a \leqq x \leqq b) \tag{1}$$

akkor rögzített ε mellett a $P_n(x)$ polinom két $(a+\varepsilon, b-\varepsilon)$-ba eső szomszédos x_{kn} és $x_{k+1,n}$ gyökére

$$\frac{c_1}{n} \leqq x_{k+1,n} - x_{kn} \leqq \frac{c_2}{n}, \tag{2}$$

ahol c_1, c_2 (és a továbbiakban $c_3, c_4 \ldots$) csak a-tól, b-től, m és M-től és ε-tól függ, de k-tól és n-től független. (ERDŐS és TURÁN [1], VIII. tétel 538.) Ugyanott ERDŐS és TURÁN megjegyzik, hogy ha azt az erősebb kikötést tesszük, hogy

$$\frac{m}{\sqrt{1-x^2}} \leqq w(x) \leqq \frac{M}{\sqrt{1-x^2}} \tag{3}$$

akkor az összes szomszédos $\vartheta_{kn} = \arccos x_{kn}$ értékekre érvényes egy (2) alakú egyenlőtlenség.

Az alábbiakban megmutatjuk, hogy a (2) egyenlőtlenség nemcsak a $P_n(x)$ gyökeire, hanem a

$$Q_n(x) = P_n(x) + AP_{n-1}(x) + BP_{n-2}(x),\ B \leqq 0 \tag{4}$$

polinom $(-1, +1)$-be eső gyökeire is teljesül, feltéve, *ha $Q_n(x)$ összes gyökei valósak és egymástól különbözőek.* Ez utóbbi feltétel biztos kielégül, ha $B=0$. $Q_n(x)$-nek legalább $n-2$ gyöke a $(-1, +1)$ ortogonalitási intervallumba esik, mert $Q_n(x)$ minden $n-3$-ad fokú polinomra ortogonális. (Szegő [2], 3. 3. 4. tétel, 45.)

A (4) polinom gyökeit, mint mechanikus kvadratúra alappontokat, FEJÉR [3], majd ERDŐS és TURÁN [4] vizsgálták. Néhány figyelemreméltó speciális esetet jelen dolgozat végén részletesen fogunk tárgyalni. Bizonyításomban én is a (4) gyökeihez tartozó mechanikus kvadratúra eljárás sajátosságait használom fel; az több helyen eltér ERDŐS és TURÁN bizonyításától az $A=B=0$ esetre is.

Bizonyításom lényegét $A=B=0$ esetén röviden vázolni szeretném. CSEBISEV, MARKOV és STIELTJES klasszikus szeparációs tétele szerint

$$\sum_{i=1}^{k-1}\lambda_{in} < \int_a^{x_{kn}} w(x)\,dx < \sum_{i=1}^{k}\lambda_{in}$$

ahol λ_{in} az x_{in} alapponthoz tartozó Cotes-féle szám; ebből leolvasható, hogy

$$\int_{x_{kn}}^{x_{k+1,n}} w(x)\,dx < \lambda_{kn}+\lambda_{k+1,n}. \tag{5}$$

Mármost ERDŐS és TURÁN egy nevezetes segédtétele szerint $\lambda_{kn}=O\left(\frac{1}{n}\right)$, tehát

$$x_{k+1,n}-x_{kn} < \frac{1}{m}\int_{x_{kn}}^{x_{k+1,n}} w(x)\,dx = O\left(\frac{1}{n}\right). \tag{5a}$$

A (2) egyenlőtlenség baloldala ugyanazzal a gondolatmenettel bizonyítható, mint ERDŐS és TURÁN bizonyítása az $A=B=0$ esetében. A továbbiakban (3) feltétel mellett becsléseinket úgy egészítjük ki, hogy a szomszédos gyökök távolságának becslésében numerikus állandókat tudunk megadni.

Az alábbiakban bebizonyítjuk, hogy az (5) egyenlőtlenség a $Q_n(x)$ gyökeihez tartozó mechanikus kvadratúra Cotes-számaira is teljesül. Ilyen módon a szomszédos gyökök távolságára a numerikus állandót tekintve is igen jó felső becsléshez jutunk. Ennek alkalmazásaként becsléseket vezetünk le olyan ortogonális polinomok gyökeinek eloszlására, melyek súlyfüggvénye vagy a (33), vagy a (35), vagy a (37) egyenlőtlenségnek tesz eleget.

Ha nem vagyunk tekintettel a numerikus korlát pontosabb értékére, akkor a felső becslés bizonyítása nagymértékben lerövidíthető. Három szomszédos ortogonális polinom közt

$$P_n(x)=(A_n x+B_n)P_{n-1}(x)-C_n P_{n-2}(x)$$

alakú összefüggés áll fenn, ahol $C_n>0$. Vagyis $B\leqq 0$ esetén $Q_n(x)$ a $P_{n-1}(x)$ polinom gyökhelyein ugyanolyan előjelű, mint $P_n(x)$. A $P_n(x)$ polinom viszont ismert tétel szerint jelet vált $P_{n-1}(x)$-nek két szomszédos $x_{k,n-1}$ és $x_{k+1,n-1}$ gyökhelye között. Tehát $Q_n(x)$-nek legalább egy gyöke esik minden $(x_{k,n-1}, x_{k+1,n-1})$ intervallumba. Ilyen módon $Q_n(x)$-nek a két $x_{k,n-1}$-gyel szomszédos gyöke nincs messzebb egymástól, mint $x_{k+1,n-1}-x_{k-1,n-1}$, ami (12) szerint $O\left(\frac{1}{n}\right)$. Ez utóbbi bizonyítás gondolatmenete SZŰSZ PÉTER kartársamtól származik.

Segédtételek.

Legyenek $Q_n(x)$ gyökei, amelyekről feltételeztük, hogy valósak és különbözőek

$$\xi_{1n} < \xi_{2n} < \cdots < \xi_{nn}.$$

Legyen $l_{kn}(x)$ a $\{\xi_{in}\}$ alappontsorozat ξ_{kn} alappontjához tartozó Lagrange-féle interpolációs alapfüggvény, vagyis az a legfeljebb $n-1$-edfokú polinom, melyre

$$l_{kn}(\xi_{in}) = \delta_{ik} \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Akkor a $\{\xi_{kn}\}$ alappontokhoz tartozó $w(x)$-el súlyozott mechanikus kvadratúra Cotes-féle számai

$$\lambda_{kn} = \int_{-1}^{+1} l_{kn}(x)\, w(x)\, dx. \tag{6}$$

I. Segédtétel: Tetszőleges $2n-3$-ad fokú $\pi_{2n-3}(x)$ polinomra,

$$\int_{-1}^{+1} \pi_{2n-3}(x)\, w(x)\, dx = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{kn}\, \pi_{2n-3}(\xi_{kn}). \tag{7}$$

Ennek bizonyítása Jacobi [6] egy nevezetes gondolatára van alapítva:

$$\varrho_{n-1}(x) = \sum_{k=1}^{n} \pi_{2n-3}(\xi_{kn})\, l_{kn}(x) \tag{8}$$

az a legfeljebb $n-1$-edfokú polinom, amely a $\{\xi_{kn}\}$ alappontok helyén ugyanazokat az értékeket veszi fel mint $\pi_{2n-1}(x)$. Akkor nyilván

$$\pi_{2n-3}(x) - \varrho_{n-1}(x) = [P_n(x) + A P_{n-1}(x) + B P_{n-2}(x)]\, \pi^*_{n-3}(x), \tag{9}$$

ahol $\pi^*_{n-3}(x)$ legfeljebb $n-3$-adfokú polinom. (9)-ből a $\{P_n(x)\}$ polinomok ortogonalitása következtében

$$\int_{-1}^{+1} [\pi_{2n-3}(x) - \varrho_{n-1}(x)]\, w(x)\, dx = 0 \tag{10}$$

és így (10), (8), (6) felhasználásával

$$\begin{aligned} &\int_{-1}^{+1} \pi_{2n-3}(x)\, w(x)\, dx = \int_{-1}^{+1} \varrho_{n-1}(x)\, w(x)\, dx = \\ &= \sum_{k=1}^{n} \pi_{2n-3}(\xi_{kn}) \int_{-1}^{+1} l_{kn}(x)\, w(x)\, dx = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{kn}\, \pi_{2n-3}(\xi_{kn}). \end{aligned} \tag{11}$$

Q. e. d.

II. Segédtétel: Ha az összes ξ_{kn} számok $(k = 1, 2, \ldots, n)$ valósak, akkor

$$\lambda_{kn} \geqq \int_{-1}^{+1} [l_{kn}(x)]^2\, w(x)\, dx > 0 \qquad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{12}$$

Ez a tétel Fejér-től származik [3] (v. ö. Erdős-Turán [4], 149.) Bizonyítása ugyanúgy történik, mint az alábbiakban a (16) egyenlőtlenségé.

III. SEGÉDTÉTEL: ξ_{kn} és $\xi_{k+1,n}$ legyen $Q_n(x)$-nek két szomszédos, a $(-1, +1)$ ortogonalitási intervallumba eső gyöke. Akkor

$$\int_{\xi_{kn}}^{\xi_{k+1,n}} w(x)\,dx < \lambda_{kn} + \lambda_{k+1,n}. \tag{13}$$

Bizonyítás: ERDŐS és TURÁN egy lemmája szerint ([5], IV. Lemma, 529.)

$$l_{kn}(x) + l_{k+1,n}(x) \geqq 1, \quad \text{ha} \quad \xi_{kn} \leqq x \leqq \xi_{k+1,n}. \tag{14}$$

(14)-hez felhasználtuk, hogy az összes $\{\xi_{in}\}$ alappontok valósok. Most a II. segédtétel FEJÉR-től [3] származó bizonyításának egy változatát használjuk fel: Az

$$\{l_{kn}(x) + l_{k+1,n}(x)\}^2 - l_{kn}(x) - l_{k+1,n}(x)$$

legfeljebb $2n-2$-edfokú polinom az összes ξ_{in} alappontokon $i = 1, 2, \ldots, n$ eltűnik, tehát ez a polinom osztható $Q_n(x) = P_n(x) + AP_{n-1}(x) + BP_{n-2}(x)$-vel:

$$\begin{aligned} &\{l_{kn}(x) + l_{k+1,n}(x)\}^2 - l_{kn}(x) - l_{k+1,n}(x) = \\ &= [P_n(x) + AP_{n-1}(x) + BP_{n-2}(x)][\alpha_{n-2}P_{n-2}(x) + \pi_{n-3}(x)], \end{aligned} \tag{15}$$

ahol $\pi_{n-3}(x)$ legfeljebb $n-3$-adfokú polinom, tehát $P_n(x)$, $P_{n-1}(x)$ és $P_{n-2}(x)$-re ortogonális. (15)-ben x^{2n-2} együtthatóját összehasonlítva, miután $P_n(x)$-ben és $P_{n-2}(x)$-ben a legmagasabb fokú tag együtthatója pozitív, a baloldalon pedig a négyzetreemelés következtében x^{2n-2} együtthatója pozitív, kapjuk, hogy $\alpha_{n-2} > 0$, tehát $B\alpha_{n-2} \leqq 0$. Ennek következtében (15)-ből

$$\begin{aligned} &\int_{-1}^{+1} \{l_{kn}(x) + l_{k+1,n}(x)\}^2 w(x)\,dx = \int_{-1}^{+1} l_{kn}(x) w(x)\,dx + \int_{-1}^{+1} l_{k+1,n}(x) w(x)\,dx + \\ &\qquad + B\alpha_{n-2} \int_{-1}^{+1} [P_{n-2}(x)]^2 w(x)\,dx \leqq \lambda_{kn} + \lambda_{k+1,n} \end{aligned} \tag{16}$$

(14) és (16)-ból

$$\int_{\xi_{kn}}^{\xi_{k+1,n}} w(x)\,dx < \int_{-1}^{+1} \{l_{kn}(x) + l_{k+1,n}(x)\}^2 w(x)\,dx \leqq \lambda_{kn} + \lambda_{k+1,n}.$$

Q. e. d.

IV. SEGÉDTÉTEL: Az egész $(-1, +1)$ intervallumban legyen $w(x) \leqq \leqq M(1-x^2)^{-1/2}$. Akkor minden $(-1, +1)$-be eső alapponthoz tartozó λ_{kn} Cotes-féle számra

$$\lambda_{kn} \leqq \frac{2\pi M}{2n-3-\sin^{-1}\dfrac{\pi}{2n-3}} \tag{17}$$

és ha $\xi_{kn} = \cos\theta_{kn}$, $\dfrac{\pi}{2} - \alpha \leqq \theta_{kn} \leqq \dfrac{\pi}{2} + \alpha$, akkor

$$\lambda_{kn} \leqq \frac{2\pi M}{2n-3-\cos^{-1}\alpha}. \tag{18}$$

Bizonyítás: Ismeretes, hogy ha $\pi_{n-2}(x)$ végigfut az összes olyan legfeljebb $n-2$-edfokú polinomon, melyekre $\pi_{n-2}(\xi_{kn})=1$, akkor

$$\text{(19)}\qquad \operatorname*{Min}_{\pi_{n-2}(\xi_{kn})=1} \int_{-1}^{+1} \frac{[\pi_{n-2}(x)]^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{2\pi}{2n-3+\dfrac{\sin(2n-3)\theta_{kn}}{\sin\theta_{kn}}}$$

és ezt a minimumot a baloldali integrál $\pi_{n-2}(x)$ megfelelő választásával fel is veszi. (Lásd ERDŐS és TURÁN [5], 539.) Legyen az alábbiakban $\pi_{n-2}(x)$ éppen az az $n-2$-edfokú polinom, amelyre a (18) integrál a minimumát felveszi. Akkor tekintettel (7), (12), és (19)-re

$$\text{(20)}\qquad \begin{aligned} \lambda_{kn} &\leqq \sum_{i=1}^{n} \lambda_{in}[\pi_{n-2}(x)]^2 = \int_{-1}^{+1} [\pi_{n-2}(x)]^2 w(x)\,dx \leqq \\ &\leqq M \int_{-1}^{+1} \frac{[\pi_{n-2}(x)]^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{2\pi M}{2n-3+\dfrac{\sin(2n-3)\theta_{kn}}{\sin\theta_{kn}}} \end{aligned}$$

(20)-ból (18) azonnal leolvasható. Hogy (17)-et bebizonyítsuk, ki kell mutatnunk, hogy

$$\text{(21)}\qquad \frac{\sin(2n-3)\varphi}{\sin\varphi} \geqq -\frac{1}{\sin\dfrac{\pi}{2n-3}} \qquad 0 \leqq \varphi \leqq \pi.$$

Ez az egyenlőtlenség $0 \leqq \varphi \leqq \dfrac{\pi}{2n-3}$-ra triviális, mert a baloldal pozitív; $\dfrac{\pi}{2n-3} \leqq \varphi \leqq \dfrac{\pi}{2}$ esetén $|\sin(2n-3)\varphi| \leqq 1$ és

$$\sin\varphi > \sin\frac{\pi}{2n-3}$$

miatt teljesül; miután (21) baloldala a φ és $\pi-\varphi$ helyeken ugyanazt az értéket veszi fel, ezzel (21)-et bebizonyítottuk, amivel a IV. segédtétel bizonyítását befejeztük.

Becslés $x_{k+1,n}-x_{kn}$-re

I. TÉTEL: A $w(x)$ súlyfüggvény az egész $(-1, +1)$ ortogonalitási intervallumon tegyen eleget a (3) egyenlőtlenségnek. Ha most $\xi_{kn}=\cos\theta_{kn}$ és $\xi_{k+1,n}=\cos\theta_{k+1,n}$ a (4) polinom két szomszédos $(-1, +1)$-be eső gyöke, akkor

$$\text{(22)}\qquad \theta_{kn}-\theta_{k+1,n} \leqq \frac{M}{m}\,\frac{4\pi}{2n-3-\sin^{-1}\dfrac{\pi}{2n-3}}$$

és ha $\dfrac{\pi}{2}-\alpha \leqq \theta_{k+1,n} < \theta_{kn} \leqq \dfrac{\pi}{2}+\alpha$, ahol $\alpha < \dfrac{\pi}{2}$, akkor

$$(23)\qquad \theta_{kn}-\theta_{k+1,n}\leqq\frac{M}{m}\frac{4\pi}{2n-3-\cos^{-1}\alpha}.$$

Bizonyítás: tekintettel (3) és (13)-ra

$$(24)\qquad \theta_{kn}-\theta_{k+1,n}=\int\limits_{\xi_{kn}}^{\xi_{k+1,n}}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\leqq\frac{1}{m}\int\limits_{\xi_{kn}}^{\xi_{k+1,n}}w(x)dx\leqq\frac{1}{m}(\lambda_{kn}+\lambda_{k+1,n})$$

(17) és (24), ill. (18) és (24)-ből következik (22), ill. (23), Q. e. d.

II. TÉTEL: A $w(x)$ súlyfüggvényre teljesüljön a (3) egyenlőtlenség. Ha $\xi_{kn}=\cos\theta_{kn}$ és $\xi_{k+1,n}=\cos\theta_{k+1,n}$ a (4) polinom két szomszédos $(-1,+1)$-be eső gyöke, akkor

$$(25)\qquad \theta_{kn}-\theta_{k+1,n}\geqq\frac{1}{40}\frac{m}{M}\frac{1}{n}.$$

Bizonyítás: Tekintettel arra, hogy

$$\lambda_{kn}=\int\limits_0^\pi[l_{kn}(\cos\theta)]^2 w(\cos\theta)\sin\theta d\theta$$

és (3) következtében

$$m\leqq w(\cos\theta)\sin\theta\leqq M$$

és így

$$\frac{1}{M}\lambda_{kn}\leqq\int\limits_0^\pi[l_{kn}(\cos\theta)]^2d\theta=\Lambda_{kn}\leqq\frac{1}{m}\lambda_{kn},$$

amiből

$$-\frac{1}{m}\lambda_{kn}\leqq-\frac{1}{\pi m}\lambda_{kn}+\frac{1}{M}\lambda_{kn}\leqq\int\limits_0^{\vartheta}\left\{[l_{kn}(\cos\theta)]^2-\frac{1}{\pi}\Lambda_{kn}\right\}d\theta=F(\vartheta)\leqq\frac{1}{m}\lambda_{kn}.$$

Miután $F(\vartheta)$ $2n$-nél alacsonyabbfokú trigonometrikus polinom, BERNSTEJN tételének kétszeri alkalmazásával, tekintettel (17)-re:

$$(26)\qquad \left|\frac{d}{d\theta}[l_{kn}(\cos\theta)]^2\right|\leqq\frac{(2n)^2}{m}\lambda_{kn}\leqq\frac{4n^2}{m}\frac{2\pi M}{2n-3-\sin^{-1}\frac{\pi}{2n-3}}.$$

Már most Lagrange-féle középértéktétel szerint

$$\begin{aligned}1&=[l_{kn}(\cos\theta_{kn})]^2-[l_{kn}(\cos\theta_{k+1,n})]^2\leqq\\ &\leqq(\theta_{kn}-\theta_{k+1,n})\max_{\theta_{k+1,n}\leqq\theta\leqq\theta_{kn}}\left|\frac{d}{d\theta}[l_{kn}(\cos\theta)]^2\right|\leqq\\ &\leqq(\theta_{kn}-\theta_{k+1,n})\frac{4n^2}{m}\frac{2\pi M}{2n-3-\sin^{-1}\frac{\pi}{2n-3}}\leqq\\ &\leqq(\theta_{kn}-\theta_{k+1,n})40\frac{M}{m}n,\end{aligned}$$

amiből (25) leolvasható.

III. TÉTEL: A $w(x)$ súlyfüggvény tegyen eleget a (3) egyenlőtlenségnek; $\xi^* = \cos\theta^*$, ill. $\xi^{**} = \cos\theta^{**}$ legyen a (4) polinomnak legnagyobb, ill. legkisebb $(-1, +1)$ belsejébe eső gyöke, akkor $n > 2$ esetén

$$(27)\quad \theta^* \leqq \frac{M}{m}\,\frac{4\pi}{2n-3-\sin^{-1}\dfrac{\pi}{2n-3}} \quad\text{és}\quad \pi-\theta^{**} \leqq \frac{M}{m}\,\frac{4\pi}{2n-3-\sin^{-1}\dfrac{\pi}{2n-3}}.$$

Bizonyítás: Nyilván elegendő (27)-ből a baloldali egyenlőtlenséget bizonyítani. Tekintsük először azt az esetet, amikor $Q_n(x)$-nek a nyilt $(-1, +1)$ intervallumon kívül sincs ξ^*-nál nagyobb gyöke, azaz $\xi^* = \xi_{nn}$. Tekintsük az $l_{nn}(x)$ alapfüggvényt. Ez olyan $n-1$-edfokú polinom, amelynek $n-1$ darab ξ_{nn}-től balra eső gyöke van, tehát differenciálhányadosa $\frac{dl_{nn}}{dx}$ jelet vált az (ξ_{1n}, ξ_{2n}), $(\xi_{2n}, \xi_{3n}), \ldots, (\xi_{n-2,n}, \xi_{n-1,n})$ intervallumokban és tekintettel a fokszámára, több jelváltása nem is lehet.

Miután $l_{nn}(\xi_{n-1,n}) = 0$ és $l_{nn}(\xi_{nn}) = 1$, $l_{nn}(x)$ $x > \xi_{n-1,n}$-től kezdve monoton növekvő és így

$$(28)\qquad l_{nn}(x) \geqq 1, \quad\text{ha}\quad x \geqq \xi_{nn}.$$

Ennek következtében (3), (12) és (17) alapján

$$(29)\qquad \begin{aligned} \theta^* = \theta_{nn} &< \frac{1}{m}\int_0^{\theta_{nn}} [l_{nn}(\cos\vartheta)]^2 w(\cos\vartheta)\sin\vartheta\, d\vartheta < \\ &< \frac{1}{m}\int_0^{\pi} [l_{nn}(\cos\vartheta)]^2 w(\cos\vartheta)\sin\vartheta\, d\vartheta \leqq \frac{1}{m}\lambda_{nn} \leqq \frac{M}{m}\,\frac{2\pi}{2n-3-\sin^{-1}\dfrac{\pi}{2n-3}}. \end{aligned}$$

Másodszor, tekintsük azt az esetet, amikor $Q_n(x)$-nek van ξ^*-nál nagyobb gyöke; a legkisebb ilyen gyök legyen ξ^{***}. A ξ^*, ill. ξ^{***} alapponthoz tartozó Lagrange-féle interpolációs alapfüggvény legyen l_n^*, ill. l_n^{***}, az ezekhez tartozó Cotes-féle számok legyenek λ_n^* és λ_n^{***}. Tekintettel (14) és (16)-ra, (17) felhasználásával

$$(30)\qquad \begin{aligned} \theta^* &\leqq \frac{1}{m}\int_0^{\theta^*} [l_n^*(\cos\theta) + l_n^{***}(\cos\theta)]^2 w(\cos\theta)\sin\theta\, d\theta = \\ &= \frac{1}{m}\int_{-1}^{+1} [l_n^*(x) + l_n^{***}(x)]^2 w(x)\, dx \leqq \frac{1}{m}(\lambda_n^* + \lambda_n^{***}) \leqq \\ &\leqq \frac{M}{m}\,\frac{2\pi}{2n-3-\sin^{-1}\dfrac{\pi}{2n-3}} + \frac{1}{m}\lambda^{***}. \end{aligned}$$

λ_n^{***} becslése céljából tekintsük a $\psi_{n-2}(x) = \frac{1}{n-1} U_{n-2}(x)$ polinomot, ahol

$U_{n-2}(x)$ az $n-2$-edfokú másodfajú Csebisev-polinom. $\psi_{n-2}(1)=1$ és így $\xi^{***}\geqq 1$ következtében

$$\psi_{n-2}(\xi^{***})\geqq 1. \tag{31}$$

Ilyen módon, tekintettel (12)-re, hacsak $w(x)\leqq M(1-x^2)^{-1/2}$

$$\begin{aligned}\lambda_n^{***} &\leqq \sum_{k=1}^{n}\lambda_{kn}[\psi_{n-2}(\xi_{kn})]^2=\int_{-1}^{+1}[\psi_{n-2}(x)]^2 w(x)\,dx\leqq \\ &\leqq \frac{M}{(n-1)^2}\int_{-1}^{+1}[U_{n-2}(x)]^2\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{M\pi}{n-1}\end{aligned} \tag{32}$$

(29), ill. (30) és (32) alapján következik (27)-ből az első egyenlőtlenség.

Alkalmazások

IV. TÉTEL: Legyen $p_n(x)$ a $w(x)$ súlyfüggvényhez tartozó n-edfokú ortogonális polinom, és

$$m\sqrt{1-x^2}\leqq w(x)\leqq M\sqrt{1-x^2}, \tag{33}$$

$p_n(x)$ gyökei legyenek $x_{1n}<x_{2n}<\cdots<x_{nn}$, végül $x_{0n}=-1$, $x_{n+1,n}=1$, akkor $x_{kn}=\cos\theta_{kn}$ jelöléssel

$$\frac{1}{40}\frac{m}{M}\frac{1}{n+2}\leqq\theta_{kn}-\theta_{k+1,n}\leqq\frac{M}{m}\frac{4\pi}{2n+1-\sin^{-1}\frac{\pi}{2n+1}} \tag{34}$$

és ha $\frac{\pi}{2}-\alpha\leqq\theta_{k+1,n}<\theta_{kn}<\frac{\pi}{2}+\alpha$; $\alpha<\frac{\pi}{2}$ akkor a nevező utolsó tagjában $\cos^{-1}\alpha$ írható.

BIZONYITÁS: A $W(x)=(1-x^2)^{-1}w(x)$ súlyfüggvényhez tartozó ortogonális polinomok sorozata legyen $\{P_n(x)\}$. Fejtsük ki $(x^2-1)p_n(x)$-et a $\{P_n(x)\}$ ortogonális rendszer szerint:

$$(x^2-1)p_n(x)=\sum_{k=0}^{n+2}c_kP_k(x),$$

ahol

$$c_k=\int_{-1}^{+1}(x^2-1)p_n(x)P_k(x)W(x)\,dx=-\int_{-1}^{+1}p_n(x)P_k(x)w(x)\,dx.$$

Ebből azonnal leolvasható, hogy $c_k=0$, ha $k<n$. Továbbá, ha $\varkappa_n$-nel jelöljük $p_n(x)$-ben x^n együtthatóját és hasonlóan k_n-nel jelöljük $P_n(x)$-ben x^n együtthatóját, akkor együttható összehasonlítással

$$c_{n+2}=\frac{\varkappa_n}{k_{n+2}}>0$$

és másrészt

$$c_n = -\int_{-1}^{+1} p_n(x) P_n(x) w(x) dx = -\int_{-1}^{+1} p_n(x) \left[\frac{k_n}{\varkappa_n} p_n(x) + \cdots \right] w(x) dx = -\frac{k_n}{\varkappa_n} < 0.$$

Mindezek alapján

$$(x^2-1) p_n(x) = \frac{\varkappa_n}{k_{n+2}} [P_{n+2}(x) + A P_{n+1}(x) + B P_n(x)], \quad \text{ahol} \quad B < 0.$$

Tekintettel arra, hogy $W(x) = (1-x^2)^{-1} w(x)$ (33) következtében kielégíti a (3) egyenlőtlenséget, tételünk az I. és II. tételekből következik, Q. e. d.

V. Tétel: Legyen $p_n(x)$ a $w(x)$ súlyfüggvényhez tartozó n-edfokú ortogonális polinom és

$$m \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \leqq w(x) \leqq M \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}, \tag{35}$$

$p_n(x)$ gyökei legyenek növekvő sorrendben $x_{kn} = \cos \theta_{kn}$ és $x_{n+1, n} = +1$; akkor fennáll a következő egyenlőtlenség

$$\frac{1}{40} \frac{m}{M} \frac{1}{n+1} \leqq \theta_{kn} - \theta_{k+1, n} \leqq \frac{M}{m} \frac{4\pi}{2n-1-\sin^{-1} \frac{\pi}{2n-1}}. \tag{36}$$

Analóg tétel érvényes, ha $w(x)$ súlyfüggvény az

$$m \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \leqq w(x) \leqq M \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \tag{37}$$

egyenlőtlenséget elégíti ki.

Bizonyítás: Legyen most $\{P_n(x)\}$ a $W(x) = (1-x)^{-1} w(x)$ súlyfüggvényhez tartozó ortogonális polinomok sorozata. Akkor a IV. tétel bizonyításához hasonlóan kapjuk, hogy

$$(1-x) p_n(x) = -\frac{\varkappa_n}{k_{n+1}} P_{n+1}(x) + \frac{k_n}{\varkappa_n} P_n(x)$$

ilyen módon a IV. tétel is az I. és II. tételre vezethető vissza.

Magyar Tudományos Akadémia
Alkalmazott Matematikai Intézete.

IRODALOM

[1] P. Erdős—P. Turán: On interpolation, III. *Annals of Math.* **41** (1940), 510—533.
[2] G. Szegő: Orthogonal polynomials, *Amer. Math. Soc. Coll. Publ.* XXIII. kötet (1939).
[3] L. Fejér: Mechanische Quadraturen mit positiven Cotesschen Zahlen.
[4] P. Erdős—P. Turán: On interpolation, I, *Annals of Math.* **38** (1937), 142—155.
[5] P. Erdős—P. Turán: On interpolation, III, *Annals of Math.* **41** (1940), 510—553.
[6] C. G. J. Jacobi: Ueber Gauss's neue Methode, die Werthe der Integrale näherungsweise zu finden. *Journal für die reine und angewandte Math.* **1** (1826), 301—308.