

A CSOPORT HOLOMORFJÁNAK ÉS A GYŰRŰ HOLOMORFJAINAK ÚJABB DEFINÍCIÓJA*

SZENDREI JÁNOS

A csoport- és gyűrűelméleti analóg problémák tárgyalása nagy mértékben járult hozzá a két elmélet közös vonásainak feltárásához, ugyanakkor azonban mindinkább kidomborodott a két struktúra erősen különböző volta. Legújabban RÉDEI LÁSZLÓ professzor bevezette a csoportelméletben olyan fontos karakterisztikus részcsoporthoz, valamint az ehhez szorosan kapcsolódó csoport-holomorfhoz megfelelő gyűrűelméleti fogalmakat, továbbá megvizsgálta a csoport holomorfjával kapcsolatos alapvető tételek gyűrűelméleti analógjait [4]^{1,2}. Ezzel megvetette a gyűrűkre vonatkozó holomorfelmélet alapjait. A két holomorfelmélet között sarkalatos különbség, hogy a csoport holomorfjával ellentétben a gyűrűnek általában egynél több holomorfja van.

Ebben a dolgozatban ki fogjuk mutatni, hogy megadható a csoport holomorfjának és a gyűrű holomorfjainak egy-egy új, fogalmilag egyszerű definíciója, amely definíciók egyszersmind egy újabb szempontból világítják meg ezeknek a fogalmaknak analóg voltát. Az itt adott definíciók kevésbé explicitek, azonban a már ismert explicit definíciókkal való ekvivalenciájuk — mint látni fogjuk — könnyen kimutatható.

1.

Mint ismeretes, a csoport holomorfja többek között a következőképpen is definiálható (W. H. MILLS [1], RÉDEI L. [4]):

A_0 DEFINÍCIÓ. A Γ csoport holomorfján értjük a Γ -nak a teljes A^* automorfizmuscsoportjához tartozó $A^* \circ \Gamma$ széteső Schreier-féle bővítését.³

RÉDEI említett dolgozatában a gyűrű holomorfjait így definiálja:

B_0 DEFINÍCIÓ. A P gyűrű holomorfjain értjük a P -nak a maximális D^* barátságos duplahomotetizmusgyűrűihez tartozó $D^* \circ P$ széteső Schreier-féle bővítéseit.

* Ezen dolgozat *Eine neue Definition des Holomorphen der Gruppe und der Holomorphe des Ringes* címmel az *Acta Math. Academiae Scientiarum Hungaricae* folyóiratban jelenik meg.

¹ A szögletes zárójelbe tett számok a dolgozat végén található irodalmi jegyzékre utalnak.

² Ebben a dolgozatban használt fogalmak részletes tárgyalása és további analógiák RÉDEI [4] dolgozatában találhatók.

³ Lásd RÉDEI [4].

2.

Legyen A egy egységelemes multiplikatív struktúra (azaz olyan halmaz, amelyben nem szükségképpen asszociatív szorzás van értelmezve). Γ pedig legyen egy tetszőszerinti csoport. Latin és görög kisbetűk jelölik az A , illetve a Γ elemeket, e és ε pedig azok egységelemeit. Tekintsük az (a, α) ($a \in A, \alpha \in \Gamma$) elempárok halmazát, amelyben az $(a, \alpha), (a', \alpha')$ elemek egyenlőségét az $a = a', \alpha = \alpha'$ egyenlőségekkel definiáljuk. Ebben a halmazban értelmezzük az

$$(1) \quad (a, \alpha)(b, \beta) = (ab, \alpha^b \beta)$$

szorzást, ahol α^b az $\alpha (\in \Gamma), b (\in A)$ elemeknek egy Γ -beli függvényét jelöli, amely teljesíti az

$$(2) \quad \alpha^e = \alpha \quad (\alpha \in \Gamma)$$

„kezdőfeltételt“. Az így nyert multiplikatív struktúrát így jelöljük: $A \circ \Gamma$.

Bebizonyítjuk a következő segédtelet:

A. SEGÉDTÉTEL. Az $A \circ \Gamma$ multiplikatív struktúra akkor és csakis akkor csoport, ha A csoport és

$$(3) \quad \alpha^{bc} = (\alpha^b)^c,$$

$$(4) \quad (\alpha\beta)^c = \alpha^c \beta^c$$

érvényes minden $b, c (\in A), \alpha, \beta (\in \Gamma)$ elemre. Ezek a csoportok a Γ csoportnak az A csoporttal való összes faktormentes (tehát széteső) Schreier-féle bővítései.

A (1) szorzás nyilván akkor és csakis akkor asszociatív, ha A asszociatív és

$$(\alpha^b \beta)^c = \alpha^{bc} \beta^c$$

teljesül. Ez az utóbbi feltétel ekvivalens az (1) és (2) feltételekkel. (4)-ből speciális esetként

$$(5) \quad \varepsilon^a = \varepsilon$$

is következik minden $a (\in A)$ elemre. (2) és (5) figyelembevételével látható, hogy (e, ε) az $A \circ \Gamma$ struktúrának egységeleme. Továbbá könnyen belátható, hogy az $(a, \alpha) (\in A \circ \Gamma)$ elem baloldali inverzének létezése az $a (\in A)$ elem baloldali inverzének létezésével ekvivalens. Az A. segédtelet utolsó állítása a [3] dolgozatban szereplő 1. tétel 1. korolláriumának következménye.

Jelöljön D egy kétműveletes struktúrát (azaz olyan halmazt, amelyben összeadás és szorzás van értelmezve), amelynek van zéruseleme s ezt 0 -sal jelöljük. P legyen egy tetszőszerinti gyűrű. D és P elemeit $0, a, b, \dots$, illetve $0, \alpha, \beta, \dots$ jelölik. Az (a, α) ($a \in D, \alpha \in P$) elempárok halmazában az $(a, \alpha), (a', \alpha')$ elemeket akkor és csakis akkor tekintjük egyenlőnek, ha $a = a', \alpha = \alpha'$. Az (a, α) elempároknak ebben a halmazában így definiáljuk az összeadást és a szorzást:

$$(6) \quad (a, \alpha) + (b, \beta) = (a + b, \alpha + \beta),$$

$$(7) \quad (a, \alpha)(b, \beta) = (ab, \alpha b + a\beta + \alpha\beta),$$

ahol az $\alpha b, a\beta (a, b \in D; \alpha, \beta \in P)$ P -beli függvények kielégítik a

$$(8) \quad \underline{0}\alpha = \alpha\underline{0} = 0 \quad (\alpha \in P)$$

„kezdőfeltételeket“. (D a P gyűrű kétoldali operátortartományaként fogható fel.) Az így kapott struktúrát $D \circ P$ jelöli.

Érvényes a következő, lényegében RÉDEI-től [2], [3] származó

B. SEGÉDTÉTEL. *A $D \circ P$ kétműveletes struktúra akkor és csak akkor gyűrű, ha D gyűrű és*

$$(9) \quad (a+b)\gamma = a\gamma + b\gamma, \quad \alpha(b+c) = \alpha b + \alpha c,$$

$$(10) \quad a b \gamma = a(b\gamma), \quad \alpha(bc) = (\alpha b)c,$$

$$(11) \quad a(\beta + \gamma) = a\beta + a\gamma, \quad (\alpha + \beta)c = \alpha c + \beta c,$$

$$(12) \quad a\beta\gamma = a(\beta\gamma), \quad \alpha\beta c = \alpha(\beta c),$$

$$(13) \quad (\alpha\beta)c = \alpha(\beta c),$$

$$(14) \quad (\alpha b)\gamma = \alpha(b\gamma)$$

teljesül minden $a, b, c (\in D)$ és $\alpha, \beta, \gamma (\in P)$ elemre. Ezek a gyűrűk a P gyűrűnek a D gyűrűvel való összes faktormentes (tehát széteső) Schreier-féle bővítései.

A B. segédtétel bizonyítása RÉDEI [2] és [3] dolgozatában szereplő 2. tételnek, illetve 4. tétel 1. korolláriumának bizonyításából egyszerű módosítással nyerhető.

3.

Jelölje most az előbbi paragrafusban szereplő A a Γ csoportnak összes önmagába való leképezéseinek a halmazát. Az $\alpha (\in \Gamma)$ elem képét az $a (\in A)$ leképezésnél így jelöljük: a^α . A Γ csoport önmagába való leképezéseinek A halmaza a szokásos (azaz a (3) alatti) szorzás értelmezése szerint egységelemes félcsoportot alkot és (1) a definíció szerint teljesül. Az (a, α) ($a \in A, \alpha \in \Gamma$) elempárok halmazában értelmezzük a szorzást (1) szerint, az így kapott multiplikatív struktúrát jelöljük most is $A \circ \Gamma$ -val.

Ezekután értelmezzük a Γ csoport holomorfját.

A_1 DEFINÍCIÓ. *A Γ csoport holomorfján értjük az $A \circ \Gamma$ multiplikatív struktúra Γ -t tartalmazó maximális részcsoportját.*

Az $A \circ \Gamma$ multiplikatív struktúra Γ -t tartalmazó bármely részcsoportja az A. segédtétel szerint a Γ -nak egy alkalmas automorfizmuscsoporttal való faktormentes Schreier-féle bővítése. Ezért nyilvánvaló, hogy az $A \circ \Gamma$ multiplikatív struktúrának van Γ -t tartalmazó maximális részcsoportja, mégpedig ez a maximális részcsoport a Γ -nak az A^* teljes automorfizmuscsoportjához tartozó faktormentes (tehát széteső) Schreier-féle bővítése. Ezért érvényes a következő

A. TÉTEL. *Az A_1 definíció ekvivalens az A_0 definícióval.*

A P gyűrű önmagába való duplaleképezéseinek értjük RÉDEI [4] szerint a P gyűrűnek önmagába való $\alpha \rightarrow a\alpha, \alpha \rightarrow \alpha a$ ($\alpha \in P$) (rendezett) leképezéspárjait,

ahol $\alpha\alpha$ és $\alpha\alpha$ az α képeit jelölik. Jelölje most D a P gyűrű összes önmagába való duplaleképezéseinek a halmazát, amelyben az összeadást és a szorzást (9), illetve (10) szerint értelmezzük. A P gyűrű triviális önmagába való duplaleképezését 0 -sal jelöljük, ez azt a duplaleképezést jelenti, amely a P minden elemét a 0 -ra képezi le, (8) tehát a definíció szerint teljesül. Az (α, α) ($\alpha \in D$, $\alpha \in (P$ elempárok halmazában értelmezzük az összeadást és a szorzást (6), illetve (7) szerint, az így kapott kétműveletes struktúrát jelölje $D \circ P$.

A P gyűrű holomorfjai a következőképpen definiálhatók:

B_1 DEFINÍCIÓ. A P gyűrű holomorfjain értjük a $D \circ P$ kétműveletes struktúra P -t tartalmazó maximális részgyűrűit.

A B. segédétel szerint a $D \circ P$ struktúra P -t tartalmazó bármely részgyűrűje P -nak egy alkalmas barátságos duplahomotetizmusgyűrűvel való faktormentes Schreier-féle bővítése. RÉDEI [4] szerint minden barátságos duplahomotetizmusgyűrű része legalább egy ugyanilyen maximális D^* gyűrűnek, ezért következik, hogy létezik a $D \circ P$ struktúrának maximális P -t tartalmazó részgyűrűje. Ezek a P -t tartalmazó maximális részgyűrűk nyilván a P gyűrűnek a maximális D^* barátságos duplahomotetizmusgyűrűihez tartozó faktormentes (tehát széteső) Schreier-féle bővítések. Érvényes tehát a következő

B. TÉTEL. A B_1 definíció ekvivalens a B_0 definícióval.

Szegedi Tudományegyetem
Bolyai Intézete

IRODALOM

- [1] W. H. MILLS, On the non-isomorphism of certain holomorphs, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **74** (1953), 428—443.
- [2] L. RÉDEI, Über gewisse Ringkonstruktionen durch schiefes Produkt, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **2** (1951) 185—188.
- [3] L. RÉDEI, Die Verallgemeinerung der Schreierschen Erweiterungstheorie, *Acta Sci. Math.*, **14** (1952) 252—273.
- [4] RÉDEI LÁSZLÓ, Csoportok és gyűrűk holomorfelmélete, *A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai és Fizikai Osztályának Közleményei*, **4** (1954), 25—48.