AZ ALGEBRAI EGYENLETEK ELMÉLETÉBEN FELLÉPŐ KÉT FAKTORSOROZATRÓL

L. CSAKALOV (Szófia)

Előadta az 1954. június 18-án tartott nyilvános osztályülésen

A középértéktételeknek valós együtthatójú racionális polinomokra vonatkozó élesítésével kapcsolatban *J. Favard* a következő problémát vetette fel és oldotta meg:

Mi a szükséges és elégséges feltétele annak, hogy a valós számokból álló

$$c_0, c_1, c_2, \ldots \tag{I}$$

végtelen sorozat a következő tulajdonsággal rendelkezzék: ha

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

valós polinom, melynek együtthatói a

$$c_0 a_0 + c_1 a_1 + \cdots + c_n a_n = 0 \tag{II}$$

feltételnek tesznek eleget, akkor $f(x)$-nek van legalább egy valós gyöke. E feladat megoldását *Favard* a Hamburger-féle momentum-problémára vezette vissza; megmutatta ugyanis, hogy az (I) számsorozatnak akkor és csak akkor van meg az említett tulajdonsága, ha létezik olyan, a $-\infty < x < +\infty$ intervallumban értelmezett, növekvő és végtelen sok növekvési hellyel rendelkező $\psi(x)$ függvény, melyre a következő végtelen sok egyenletből álló egyenletrendszer ki van elégítve:

$$c_n = \int_{-\infty}^{\infty} x^n d\psi(x), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

A jelen közleményben a valós számokból álló véges

$$c_0, c_1, \ldots, c_n \qquad (n \geqq 1) \tag{III}$$

számsorozatokra vonatkozó analóg problémát oldjuk meg, éspedig tisztán algebrai segédeszközökkel, vagyis a momentumproblémával kapcsolatos eredmények felhasználása nélkül. Megvizsgáljuk ezenkívül olyan csak a (III) sorozattól függő véges intervallum létezésének és meghatározásának kérdését, amelyben minden a (II) feltételnek eleget tevő $f(x)$ polinomnak legalább egy valós jelváltási helye (azaz páratlan multiplicitású gyöke) van.

1. Elsőfajú faktorsorozatok

A valós együtthatójú

(1) $$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

racionális polinomról azt mondjuk, hogy *jelet vált*, ha egyes valós x helyeken pozitív, másokon negatív értéket vesz fel, vagyis ha legalább egy páratlan multiplicitású valós gyöke van. Egy valós számokból álló

(2) $$c_0, c_1, \ldots, c_n \qquad (n \geqq 1)$$

számsorozatot *elsőfajú faktorsorozat*nak nevezünk, ha teljesíti a következő feltételt: ha a legfeljebb n-edfokú, nem azonosan eltűnő valós (1) polinom együtthatói eleget tesznek a

(3) $$c_0 a_0 + c_1 a_1 + \cdots + c_n a_n = 0$$

egyenletnek, akkor (1) jelet vált. Elsőfajú faktorsorozatra egyszerű példát szolgáltatnak az $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n+1}$ számok, ami könnyen belátható, ha figyelembe vesszük, hogy ebben az esetben a (3) feltétel az

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 0$$

alakban írható.

A fenti definíciókból könnyen folynak az elsőfajú faktorsorozatok következő tulajdonságai.

1. A (2) sorozat c_r számai nem tünhetnek el mind.

2: Ha egy elsőfajú faktorsorozat tagjait egy zérustól különböző λ állandóval megszorozzuk, ismét elsőfajú faktorsorozatot nyerünk. Ennek következtében a továbbiakban olyan elsőfajú faktorsorozatok vizsgálatára szorítkozhatunk, amelyeknek első el nem tűnő tagja pozitív; ezt ezentúl mindig feltesszük. Az ilyen sorozatot *normált*nak nevezzük.

3. Ha a (2) faktorsorozat normált, akkor c_0 pozitív. Ha ugyanis $c_0 = 0$ volna, akkor a (3) feltétel teljesülne az $f(x) \equiv 1$ polinomra, amely pedig nem vált jelet. Ugyanez áll egyébként az összes páros indexű c_r számokra. Valóban, ha páros $r > 0$ esetén $c_r \leqq 0$ volna, akkor az $f(x) = c_0 x^r - c_r$ polinomnak jelet kellene váltania, hiszen együtthatói a (3) feltételnek eleget tesznek; ez azonban nem áll, mert bármely valós x mellett $c_0 x^r - c_r \geqq 0$.

4. Ha (2) elsőfajú faktorsorozat és $n > 1$, akkor a $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$ sorozat is elsőfajú faktorsorozat. Ugyanez érvényes általánosabban az összes $c_0, c_1, \ldots, c_r$ alakú sorozatokra ($r = 1, 2, \ldots, n-1$).

5. Ha n páratlan, akkor a (2) elsőfajú faktorsorozatból ugyanilyen sorozatot nyerünk, ha utolsó c_n tagját tetszőleges valós c_n' számmal helyettesítjük.

Mindezek a tulajdonságok csak szükséges feltételek arra nézve, hogy a (2) sorozat elsőfajú faktorsorozat legyen. A következő tétel ugyanerre szükséges és elégséges feltételt szolgáltat.

I. TÉTEL. *A valós $c_0, c_1, \ldots, c_n$ számsorozat akkor és csak akkor normált elsőfajú faktorsorozat, ha az*

$$(4) \qquad F(u_0, u_1, \ldots, u_k) = \sum_{p,\, q=0}^{k} c_{p+q} u_p u_q \qquad \left(k = \left[\frac{n}{2}\right]\right)$$

kvadratikus alak pozitív definit.

BIZONYÍTÁS. *a)* Legyen (2) elsőfajú normált faktorsorozat s legyen (4) a megfelelő kvadratikus alak. Ha ez nem volna pozitív definit, akkor lehetne találni $k+1$ nem mind eltűnő valós $u_0, u_1, \ldots, u_k$ számot úgy, hogy a (4) kvadratikus alak megfelelő értéke zérus legyen. Akkor az

$$f(x) = (u_0 + u_1 x + \cdots + u_k x^k)^2 = \sum_{p,\, q=0}^{k} u_p u_q x^{p+q} = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{2k} x^{2k}$$

polinom nem tűnik el azonosan, s ugyanakkor

$$c_0 a_0 + c_1 a_1 + \cdots + c_{2k} a_{2k} = \sum_{p,\, q=0}^{k} c_{p+q} u_p u_q = 0,$$

tehát $f(x)$ jelet vált, ami nyilván lehetetlen.

b) Tegyük fel most, hogy a (4) kvadratikus alak pozitív definit és legyen

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

legfeljebb n-edfokú, nem azonosan eltűnő valós polinom, melynek a_r együtthatói a (3) egyenletet kielégítik. Tegyük fel továbbá, hogy az állítással ellentétben $f(x)$ nem vált jelet, hanem pl. $f(x) \geqq 0$ minden valós x-re. Ekkor az $f(x)$ polinom

$$f(x) = (\alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_k x^k)^2 + (\beta_0 + \beta_1 x + \cdots + \beta_k x^k)^2$$

alakban állítható elő, ahol $k = \left[\frac{n}{2}\right]$ és a valós α_r, β_r együtthatók nem tűnnek el mind; írható tehát

$$f(x) = \sum_{p,\, q=0}^{k} (\alpha_p \alpha_q + \beta_p \beta_q)\, x^{p+q},$$

úgyhogy a (3) feltétel a következő alakot nyeri:

$$\sum_{p,\, q=0}^{k} c_{p+q} \alpha_p \alpha_q + \sum_{p,\, q=0}^{k} c_{p+q} \beta_p \beta_q = 0.$$

Ez azonban lehetetlen, ami rögtön belátható, ha figyelembe vesszük, hogy a baloldali összegek mindketten nemnegatívok és legalább az egyik pozitív. Feltevésünk tehát helytelen volt, vagyis az $f(x)$ polinom jelet vált, amit bizonyítanunk kellett.

KÖVETKEZMÉNY. Az I. tétel bizonyításából következik, hogy a $\sum_{0}^{n} c_r a_r$ összeg pozitív, ha $c_0, c_1, \ldots, c_n$ normált elsőfajú faktorsorozat, az $f(x)$ polinom pedig a valós tengelyen nemnegatív, de nem azonosan zérus.

1. megjegyzés. A (4) kvadratikus alak nem függ c_n-től, ha n páratlan. Ez ismét igazolja az elsőfokú faktorsorozatok fenti 5. tulajdonságát.

2. megjegyzés. Ismeretes, hogy a (4) kvadratikus alak akkor és csak akkor pozitív definit, ha a

$$D_0, D_1, D_2, \ldots, D_k \qquad \left(k=\left[\frac{n}{2}\right]\right) \tag{5}$$

determinánsok valamennyien pozitívok, ahol

$$D_r = \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \ldots & c_r \\ c_1 & c_2 & \ldots & c_{r+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_r & c_{r+1} & \ldots & c_{2r} \end{vmatrix}.$$

Ennélfogva az I. tételt a következőképp is megfogalmazhatjuk: ahhoz, hogy a (2) sorozat normált elsőfajú faktorsorozat legyen, szükséges és elégséges, hogy az (5) determinánsok valamennyien pozitívok legyenek.

2. Másodfajú faktorsorozatok

*Másodfajú faktorsorozat*on a következő tulajdonsággal rendelkező valós számokból álló véges

$$c_0, c_1, \ldots, c_n \qquad (n \geqq 1) \tag{2'}$$

számsorozatot értünk: ha a valós és nem azonosan eltűnő

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

polinom együtthatói kielégítik a

$$c_0 a_0 + c_1 a_1 + \cdots + c_n a_n = 0$$

feltételt, akkor $f(x)$ jelet vált a $0 < x < +\infty$ intervallumban, vagyis van legalább egy páratlan multiplicitású *pozitív* gyöke. Ebből a definícióból rögtön következik, hogy valamely másodfajú faktorsorozat egyúttal elsőfajú faktorsorozat is. Ennek megfordítása természetesen nem igaz, amint azt a $c_r = \frac{(-1)^r}{r+1}$ $(r = 0, 1, \ldots, n)$ sorozat példája mutatja. A másodfajú faktorsorozatokra vonatkozóan érvényes a

II. TÉTEL. *A (2') sorozat akkor és csak akkor másodfajú faktorsorozat, ha a*

$$c_0, 0, c_1, 0, c_2, 0, \ldots, c_{n-1}, 0, c_n \tag{6}$$

sorozat elsőfajú faktorsorozat.

BIZONYÍTÁS. *a)* Legyen (2') másodfajú faktorsorozat,

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{2n} x^{2n}$$

pedig nem azonosan eltűnő valós polinom, melynek a_r együtthatói a

$$c_0 a_0 + 0 \cdot a_1 + c_1 a_2 + 0 \cdot a_3 + \cdots + 0 \cdot a \quad + c_n a_{2n} = 0 \tag{7}$$

egyenletnek tesznek eleget. Minthogy (2′) másodfajú faktorsorozat, azért a (7) egyenlőség következtében az

$$\frac{1}{2}\{f(x)+f(-x)\}=a_0+a_2x^2+\cdots+a_{2n}x^{2n}$$

polinom jelet vált a $0<x<+\infty$ intervallumban, hacsak nem tűnik el azonosan; ekkor azonban $f(x)$-nek is jelet kell váltania, hiszen ha pl. minden x helyen $f(x)\geqq 0$ volna, akkor egyúttal $\frac{1}{2}\{f(x)+f(-x)\}\geqq 0$ is fennállna minden valós x-re. Ha viszont $f(x)+f(-x)$ azonosan eltűnik, akkor $f(x)$ csak x-nek páratlan kitevőjű hatványait tartalmazhatja, s így az $x=0$ helyen vált előjelet. Ezáltal bebizonyítottuk, hogy a (6) sorozat elsőfajú faktorsorozat.

b) Tegyük fel most megfordítva, hogy (6) elsőfajú faktorsorozat és tekintsünk egy nem azonosan eltűnő

$$f(x)=b_0+b_1x+\cdots+b_nx^n$$

polinomot, melynek együtthatói a

$$c_0b_0+c_1b_1+\cdots+c_nb_n=0 \tag{8}$$

egyenletnek tesznek eleget. Ekkor $f(x)$-nek jelet kell váltania a $0<x<+\infty$ intervallumban; ellenkező esetben az

$$f(x^2)=b_0+b_1x^2+\cdots+b_nx^{2n}=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{2n}x^{2n}$$

polinom (ahol $a_{2r-1}=0, a_{2r}=b_r$) sem válthatna jelet a $-\infty<x<+\infty$ intervallumban, hiszen a (8) egyenlet azonos a

$$c_0a_0+0\cdot a_1+c_1a_2+0\cdot a_3+\cdots+0\cdot a_{2n-1}+c_na_{2n}=0$$

egyenlettel. Ezért a (2′) sorozatnak másodfajú faktorsorozatnak kell lennie. Így a II. tételt teljesen bebizonyítottuk.

Ha

$$c_r=\gamma_{2r},\quad r=0,1,\ldots,n \quad \text{és} \quad \gamma_{2r-1}=0,\quad r=1,2,\ldots,n,$$

akkor a (6) sorozat megegyezik a

$$\gamma_0,\gamma_1,\ldots,\gamma_{2n}$$

sorozattal. Az I. és a II. tétel értelmében tehát ahhoz, hogy (2′) normált másodfajú faktorsorozat legyen, szükséges és elégséges, hogy az

$$F=\sum_{p,q=0}^{n}\gamma_{p+q}u_pu_q \tag{9}$$

kvadratikus alak pozitív definit legyen. Minthogy a páratlan indexű γ_{p+q} együtthatók mind zérussal egyenlők, azért az összegezést (9) jobb oldalán elég azon p, q értékpárokra kiterjeszteni, melyekre $p+q$ páros, tehát p és q vagy mindketten párosak, vagy mindketten páratlanok. A (9) kvadratikus alak ennélfogva így is írható:

$$F=\sum_{r,s=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}c_{r+s}u_{2r}u_{2s}+\sum_{r,s=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}c_{r+s+1}u_{2r+1}u_{2s+1}.$$

Ily módon a (9) alak két kvadratikus alak összegeként áll elő, melyek közül az első csak páros indexű u_r változókat, a második csak páratlan indexű u_r változókat tartalmaz. Ennélfogva a (9) alak akkor és csak akkor pozitív definit, ha az

$$F_1 = \sum_{r,\,s=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} c_{r+s} v_r v_s, \quad F_2 = \sum_{r,\,s=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} c_{r+s+1} w_r w_s$$

kvadratikus alakok mind a ketten pozitív definit alakok. Kimondhatjuk tehát a következő tételt:

III. TÉTEL. *A $c_0, c_1, \ldots, c_n$ sorozat akkor és csak akkor normált másodfajú faktorsorozat, ha a*

$$D_r, \quad r = 0, 1, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right] \quad \text{és} \quad D'_r, \quad r = 1, 2, \ldots, \left[\frac{n-1}{2}\right]$$

determinánsok mind pozitívok, ahol

$$D_r = \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \cdots & c_r \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_{r+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_r & c_{r+1} & \cdots & c_{2r} \end{vmatrix}, \quad D'_r = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_r \\ c_2 & c_3 & \cdots & c_{r+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_r & c_{r+1} & \cdots & c_{2r-1} \end{vmatrix}.$$

3. Minimális intervallumok

Legyen megadva egy elsőfajú faktorsorozat:

(2) $$c_0, c_1, \ldots, c_n \qquad (n \geqq 1).$$

A következőkben azt fogjuk megvizsgálni, hogy lehetséges-e olyan véges (α, β) intervallum megadása, amelyben minden a

$$c_0 a_0 + c_1 a_1 + \cdots + c_n a_n = 0$$

feltételnek eleget tevő és nem azonosan eltűnő valós

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

polinomnak legalább egy páratlan multiplicitású gyöke van. Emellett az (α, β) intervallumot azon feltételnek vetjük alá, hogy egyetlen valódi részintervallumának se legyen meg az említett tulajdonsága. E feladat megoldásában fontos szerepet játszanak azok a racionális polinomok, melyeknek sorozata a

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = \begin{vmatrix} c_0 & c_1 \\ 1 & x \end{vmatrix}, \quad P_2(x) = \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & c_2 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ 1 & x & x^2 \end{vmatrix}, \quad \ldots$$

polinomokkal kezdődik és a

$$P_k(x)=\begin{vmatrix} c_0 & c_1 \cdots & c_k \\ c_1 & c_2 \cdots & c_{k+1} \\ . & . & . \\ c_{k-1} & c_k \cdots & c_{2k-1} \\ 1 & x \cdots & x^k \end{vmatrix}$$

polinommal végződik, ahol $k=\left[\frac{n}{2}\right]$. Mindenekelőtt e polinomoknak néhány tulajdonságát soroljuk fel.

1. Világos, hogy

$$P_r(x)=\begin{vmatrix} c_0 & c_1 \cdots & c_r \\ c_1 & c_2 \cdots & c_{r+1} \\ . & . & . \\ c_{r-1} & c_r \cdots & c_{2r-1} \\ 1 & x \cdots & x^r \end{vmatrix}$$

r-edfokú polinom és legmagasabb fokú tagjának D_{r-1} együtthatója pozitív.

2. Ha $\varphi(x)=p_0+p_1x+\cdots+p_sx^s$ tetszőleges $s<r$-edfokú polinom és

$$\varphi(x)P_r(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_{r+s}x^{r+s},$$

akkor

$$c_0a_0+c_1a_1+\cdots+c_{r+s}a_{r+s}=0.$$

Valóban, rendezzük $P_r(x)$-et x növekvő hatványai szerint:

$$P_r(x)=b_0+b_1x+\cdots+b_rx^r;$$

ekkor

$$a_0+a_1x+\cdots+a_{r+s}x^{r+s}=\varphi(x)P_r(x)=\sum_{m=0}^{s}p_m(b_0x^m+b_1x^{m+1}+\cdots+b_rx^{m+r}),$$

úgyhogy a

$$c_0a_0+c_1a_1+\cdots+c_{r+s}a_{r+s}$$

lineáris kifejezés a

$$\sum_{m=0}^{s}p_m(b_0c_m+b_1c_{m+1}+\cdots+b_rc_{m+r})$$

alakban írható. A $b_0c_m+b_1c_{m+1}+\cdots+b_rc_{m+r}$ kifejezés azonban $m<r$ esetén eltűnik, mert a D_r determináns $(m+1)$-edik sorának az utolsó sorhoz tartozó előjeles aldeterminánsokkal való kompozíciója útján keletkezik. Ennélfogva

$$c_0a_0+c_1a_1+\cdots+c_{r+s}a_{r+s}=0.$$

3. $r\geqq 1$ esetén $P_r(x)$-nek minden gyöke valós és egyszeres. Ennek igazolására jelöljük $x_1, x_2, \ldots, x_s$-sel a $P_r(x)$ polinom különböző páratlan multiplicitású *valós* gyökeit, $\varphi(x)$-szel pedig a megfelelő gyöktényezők

$$\varphi(x)=(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_s)$$

szorzatát ($s=0$ esetén természetesen $\varphi(x)=1$ értendő).

Ha a fentihez hasonlóan

$$\varphi(x)P_r(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_{r+s}x^{r+s},$$

akkor 2. szerint az $s < r$ feltevésből

$$c_0 a_0 + c_1 a_1 + \cdots + c_{r+s} a_{r+s} = 0$$

következnék, úgyhogy a $\varphi(x) P_r(x)$ polinomnak legalább egy páratlan multiplicitású valós gyöke volna, ami azonban nem igaz. Így tehát szükségképpen $s = r$; ez azonban csak úgy lehetséges, ha $P_r(x)$-nek csupa valós és egyszeres gyöke van, amit bizonyítanunk kellett.

4. $P_{r-1}(x)$ gyökei szétválasztják $P_r(x)$ gyökeit.

Ennek bizonyítása a

$$P_0(x) = 1, P_1(x), P_2(x), \ldots$$

polinomsorozat három egymás után következő tagjára vonatkozó

$$(10) \qquad D_{r-1}^2 P_{r+1}(x) = (x D_r D_{r-1} - \bar{D}_r D_{r-1} + D_r \bar{D}_{r-1}) P_r(x) - D_r^2 P_{r-1}(x)$$

rekurziós képleten alapszik; itt D_r a már korábban (v. ö. 2. §) bevezetett $(r+1)$-edrendű determinánst jelenti, $\bar{D}_r$ pedig azt a determinánst, amely D_r-ből azáltal keletkezik, hogy az utolsó sor elemeinek indexeit eggyel megnöveljük. A (10) azonosságból mindenekelőtt könnyen adódik, hogy állításunk $r = 1$ esetén helyes. Valóban, ha x_1 a $P_1(x)$ polinomnak (egyetlen) gyöke, akkor (10)-ből azonnal látszik, hogy $P_2(x_1)$ negatív; viszont $P_2(x)$ pozitív $|x|$-nek elég nagy értékeire, úgyhogy x_1 csakugyan $P_2(x)$ két gyöke között fekszik. Jelöljük most általában $P_r(x)$ gyökeit növekvő sorrendben $x_1, x_2, \ldots, x_r$-rel s tegyük fel, hogy $P_r(x)$ két szomszédos gyöke között $P_{r-1}(x)$-nek pontosan egy gyöke van, úgyhogy

$$\operatorname{sgn} P_{r-1}(x_l) = (-1)^{r-l} \qquad (l = 1, 2, \ldots, r).$$

(10)-ből látható, hogy

$$\operatorname{sgn} P_{r+1}(x_l) = (-1)^{r-l+1},$$

ami a $\operatorname{sgn} P_{r+1}(+\infty) = 1$ relációval egybevetve mutatja, hogy $P_r(x)$ gyökei is szétválasztják $P_{r+1}(x)$ gyökeit. Ezzel állításunk be van bizonyítva.

A következőkben

$$c_0, c_1, \ldots, c_n \qquad (c_0 > 0)$$

rögzített elsőfajú faktorsorozatot jelent. Legyen K_n azon legfeljebb n-edfokú, nem azonosan eltűnő, valós

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

polinomok osztálya, amelyeknek a_r együtthatói a

$$c_0 a_0 + c_1 a_1 + \cdots + c_n a_n = 0$$

egyenletet kielégítik. Valamely (α, β) nyílt intervallumot nevezzünk *minimális intervallum*nak a K_n osztályra nézve, ha a következő két tulajdonsággal rendelkezik: 1. minden K_n osztálybeli polinom jelet vált (α, β)-ban; 2. az (α, β) intervallum egyetlen valódi részintervallumának sincs meg az 1. tulajdonsága.

IV. TÉTEL. *Legyen $n = 2k - 1$ 1-nél nagyobb páratlan szám. Ha α, β $(\alpha < \beta)$ $P_k(x)$-nek két szélső gyöke, akkor (α, β) minimális intervallum a K_n osztályra nézve.*

BIZONYÍTÁS. Tekintsük az

$$f(x)=(x-\xi)\left\{\frac{P_k^2(x)}{(x-\alpha)^2}+\varepsilon\right\}=\sum_0^{2k-1} a_\nu x^\nu \tag{11}$$

polinomot, ahol ε pozitív szám s az $f(x)$ polinom valós ξ gyökét úgy választjuk meg, hogy $f(x)$ a K_n osztályhoz tartozzék. E célból adjuk az $f(x)$ polinomnak a következő alakot:

$$f(x)=\frac{P_k^2(x)}{x-\alpha}+(\alpha-\xi)\frac{P_k^2(x)}{(x-\alpha)^2}+\varepsilon(x-\xi)$$

és rendezzük a $\frac{P_k^2(x)}{(x-\alpha)^2}$ és $\frac{P_k^2(x)}{x-\alpha}$ polinomokat x növekvő hatványai szerint:

$$\frac{P_k^2(x)}{(x-\alpha)^2}=p_0+p_1x+\cdots+p_{n-1}x^{n-1},\qquad \frac{P_k^2(x)}{x-\alpha}=b_0+b_1x+\cdots+b_nx^n.$$

Minthogy $P_k^2(x)/(x-\alpha)=P_k(x)\varphi(x)$ a $P_k(x)$ polinomnak egy alacsonyabb fokú polinommal való szorzata, azért ez a szorzat a K_n osztályhoz tartozik, következésképp

$$c_0b_0+c_1b_1+\cdots+c_nb_n=0.$$

Másrészt

$$M=c_0p_0+c_1p_1+\cdots+c_{n-1}p_{n-1}+c_n\cdot 0$$

zérustól különböző (mégpedig pozitív), hiszen $P_k^2(x)/(x-\alpha)^2$ nem vált jelet és a (2) faktorsorozat normált (v. ö. az I. tétel utáni következménnyel). Annak feltételét tehát, hogy az

$$f(x)=\sum_0^n b_\nu x^\nu+(\alpha-\xi)\sum_0^{n-1}p_\nu x^\nu+\varepsilon x-\varepsilon\xi$$

polinom a K_n osztályhoz tartozzék, az

$$(\alpha-\xi)M+c_1\varepsilon-c_0\varepsilon\xi=0$$

egyenlet fejezi ki, amely még így is írható:

$$(\xi-\alpha)M=c_0\varepsilon(x'-\xi),$$

ha x'-vel a $P_1(x)$ polinom c_1/c_0 gyökét jelöljük. $\varepsilon>0$, $M>0$ és (4. alapján) $\alpha<x'<\beta$ miatt az utóbbi egyenlet azt mutatja, hogy ξ α-tól x'-ig növekszik, miközben ε 0-tól $+\infty$-ig növekszik. Ezzel bebizonyítottuk, hogy $\alpha<\alpha'<x'$ esetén létezik a K_n osztályba tartozó (11) polinom, amely csak az $x=\alpha'$ helyen tűnik el, egyébként az egész valós tengelyen zérustól különbözik. Hasonló okoskodás mutatja, hogy létezik a K_n osztályba tartozó olyan

$$f_1(x)=(x-\xi)\left\{\frac{P_k^2(x)}{(x-\beta)^2}+\varepsilon\right\}\qquad(\varepsilon>0) \tag{12}$$

polinom, amelynek egyetlen, az (x',β) intervallumba eső és $\varepsilon\to 0$ esetén β-hoz tartó valós ξ gyöke van. Ha még figyelembe vesszük, hogy $P_1(x)=c_0x-c_1$ is a K_n osztályba tartozik és egyetlen gyöke $x=x'$, akkor a fenti meggondolásokból adódik, hogy bármely az (α, β) intervallumba eső ξ számhoz található a K_n osztályban olyan $f(x)$ polinom, melynek egyetlen valós gyöke ξ. Ebből következik azonban a definíció alapján, hogy a $P_k(x)$ $\left(k=\frac{n+1}{2}\right)$ polinom szélső gyökei által határolt (α, β) intervallum az egyetlen minimális intervallum a K_n osztályra nézve.

V. TÉTEL. *Legyen $n=2k-2$ 2-nél nagyobb páros szám. Ha α, β $(\alpha<\beta)$ a $P(x)=P_k(x)+cP_{k-1}(x)$ polinom szélső gyökei, ahol c tetszőleges valós állandó, akkor (α, β) minimális intervallum a K_n osztályra nézve.*

Ennek a tételnek a bizonyítása a IV. tételéhez hasonlóan végezhető, azzal a különbséggel, hogy most (11) és (12) helyett

$$f(x)=(x-\xi)(x-\xi')\left\{\frac{P^2(x)}{(x-\alpha)^2(x-\beta)^2}+\varepsilon\right\} \qquad (\varepsilon>0)$$

alakú polinomokat tekintünk.

Az $n=1$ és $n=2$ eset teljesen elemien elintézhető.

IRODALOM

1. *J. Favard,* Sur les zéros réels des polynomes. Bulletin de la Société Mathématique de France, **59** (1931), 229.

2. *J. Favard,* Les théorèmes de la moyenne pour les polynomes. Actualités scientifiques et industrielles, No **302**, Paris 1936.

3. *L. Tchakaloff,* Sur la structure des ensembles linéaires, définis par une certaine propriété minimale. Acta Mathematica, **63** (1934), 77—97.

4. А. К. Харадзе, Теоремы о среднем значении в применении к полиномам. Тбилиси, 1947.