POISSON FOLYAMAT ÁLTAL SZÁRMAZTATOTT MÁSODLAGOS FOLYAMATOKRÓL ÉS AZOK FIZIKAI ALKALMAZÁSAIRÓL

TAKÁCS LAJOS

Bemutatta Rényi Alfréd lev. tag az 1952. december 1-én tartott felolvasó ülésen

1. §. A probléma kitűzése

Tekintsünk egy Poisson-féle sztochasztikus folyamatot. Legyen az események előfordulásának sürüsége $\lambda(u)$, ahol $\lambda(u)$ az u időparaméter nem negatív, folytonos és korlátos függvénye. Poisson folyamat esetén feltételezzük, hogy közös pont nélküli időintervallumokban előforduló események számai egymástól függetlenek, továbbá, hogy annak a valószínűsége, hogy u és $u+\Delta u$ időpontok között *egy esemény előfordul:** $\lambda(u)\Delta u+o(\Delta u)$ és hogy *több mint egy esemény fordul elő: $o(\Delta u)$.*

Ezen feltevések mellett mint ismeretes a $(0, t)$ időközben előforduló események várható száma:

$$\Lambda(t)=\int_0^t \lambda(u)\,du \tag{1}$$

és annak a valószínűsége, hogy $(0,t)$ időközben pontosan k számú esemény fordul elő

$$P(t,k)=e^{-\Lambda(t)}\frac{[\Lambda(t)]^k}{k!}. \tag{2}$$

Jelen dolgozatunkban a következő problémával fogunk foglalkozni: Feltesszük, hogy az alapul vett Poisson folyamatban minden esemény, bekövetkezésének időpontjában egy véletlen jelet indít el. Az egyes jelek amplitudóját a jel kezdetétől számított u időtartam elteltével írja le az $f(u,\chi)$ függvény, ahol a χ paraméter valószínűségi változó. Az egyes jelekhez tartozó χ paraméterekről feltesszük, hogy egyforma eloszlású, független pozitív valószínűségi változók közös $P(\chi\leqq x)=H(x)$ eloszlásfüggvénnyel. Feltesszük továbbá, hogy az egyes jelek összeadódnak és a jelek összege által leírt másodlagos folyamatot fogjuk vizsgálat tárgyává tenni.

A következő eseteket fogjuk megkülönböztetni:

1. Tekintsük a Poisson folyamatot $0\leqq u<\infty$ időközben és jelöljük a Poisson folyamat eseményeinek előfordulási időpontjait: $u_1, u_2, \ldots, u_k, \ldots$

* $o(\Delta u)$ olyan függvényt jelöl, amelyre $\lim\limits_{\Delta u\to 0}\dfrac{o(\Delta u)}{\Delta u}=0.$

-val. Legyenek a létrehozott jelekhez tartozó χ paraméter értékei rendre: $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_k, \ldots$ A $\{\chi_k\}$ paraméterek egyforma eloszlású, független, nem negatív valószínűségi változók. Legyen a jelek értékeinek összege u időpontban $\eta(u)$, azaz

$$\eta(u) = \sum_{0 \leqq u_k \leqq u} f(u - u_k, \chi_k). \tag{3}$$

$\eta(0) = 0$ és $\eta(u)$ értelmezve van $u \geqq 0$ értékekre. Jelöljük $\eta(u)$ valószínűségi változó eloszlásfüggvényét $P(\eta(u) \leqq x) = G(u, x)$-szel.

2. Tekintsük azt az esetet, midőn $\lambda(u) \equiv \lambda$, azaz az alapul vett Poisson folyamat időben homogén és tegyük fel, hogy a Poisson folyamatban előforduló valamennyi esemény létrehoz egy jelet, és jelöljük $\eta^*(u)$-val a $(-\infty, u)$ időintervallumban előforduló események által létrehozott jelek összegét u időpontban, azaz legyen

$$\eta^*(u) = \sum_{-\infty < u_k \leqq u} f(u - u_k, \chi_k). \tag{4}$$

Ki fogjuk mutatni, hogy az $\eta^*(u)$ valószínűségi változó általános feltételek mellett létezik, és eloszlásfüggvénye független u-tól. Legyen ekkor $P(\eta^*(u) \leqq x) = G^*(x)$. Könnyen belátható, hogy ha 1. esetben az alapul vett Poisson folyamat időben homogén, azaz $\lambda(u) \equiv \lambda$ úgy $G^*(x) = \lim\limits_{u \to \infty} G(u, x)$.

Dolgozatunkban először azzal a speciális esettel fogunk foglalkozni, amidőn $f(u, \chi) = \chi e^{-\alpha u}$, ahol α pozitív állandó. Ezt azért tesszük így, mert elvi szempontból a tisztán diszkontinuus Markov-folyamatok érdekes alkalmazását teszi lehetővé, másrészt mert gyakorlati szempontból nagyon fontos eset és ezzel kapcsolatban egyéb kérdéseket is tárgyalunk. Így megállapítjuk, $\eta(u)$-nak, illetve $\eta^*(u)$-nak egy rögzített a küszöbértéken bizonyos idő alatt történő áthaladásainak várható számát.

Ezen problémák tárgyalása után a független valószínűségi változók összegére vonatkozó egy ismert tétel általánosítását adjuk és ennek felhasználásával az említett sztochasztikus folyamatokat tetszőleges $f(u, \chi)$ időbeli lefolyású jelek esetén vizsgáljuk. Ezután az $\eta^*(u)$ folyamat korrelációs függvényével és harmonikus analízisével fogunk foglalkozni. Végül néhány példát mutatunk be a részecskeszámlálások köréből.

A fenti sztochasztikus folyamatok speciális eseteivel az irodalomban sokat foglalkoztak. Anélkül, hogy teljességre törekednénk, megemlítjük N. CAMPBELL [1] és [2], E. N. ROWLAND [3], A. JA. HINCSIN [4] és S. O. RICE [5] munkáit. Ezek közül gyakorlati szempontból a legmesszebbmenő S. O. RICE [5] munkája, azonban RICE csak az időben homogén esetet és $f(u, \chi) = \chi f(u)$ alakú jelek esetét tárgyalja. Tárgyalásunkban a felsorolt szerzőktől eltérő módszert követünk és az eddigieknél egyszerűbb eljárással általánosabb eredményeket nyerünk.

Itt említjük meg RÉNYI A. [6] munkáját, amelyben Poisson folyamat által származtatott történések folyamatát vizsgálta és megállapította, hogy egy adott időpontban éppen folyamatban lévő történések száma Poisson eloszlást követ. Ez az eset dolgozatunkból úgy kapható meg, hogy $f(u, \chi)$-nek a következő függvényt választjuk: $f(u, \chi) = 1$, ha $0 \leqq u \leqq \chi$ és $f(u, \chi) = 0$ egyébként.

2. §. *Exponenciális lefolyású jelek esete*

Ebben és a következő két fejezetben azzal a speciális esettel fogunk foglalkozni, amidőn a jelek időbeli lefolyását

$$f(u, \chi) = \begin{cases} \chi e^{-\alpha u} & \text{ha} \quad u \geqq 0 \\ 0 & \text{ha} \quad u < 0. \end{cases} \tag{5}$$

függvény írja le. Megállapítjuk, hogy milyen feltételek mellett léteznek és hogyan határozhatók meg $G(u, x)$ és $G^*(x)$ eloszlásfüggvények. Továbbá a következő kérdésekkel fogunk foglalkozni:

Azt mondjuk, hogy u időpontban A állapotban van a folyamat, ha u időpontban a folyamathoz rendelt valószínűségi függvény értéke $< a$ ($\eta(u) < a$, illetve $\eta^*(u) < a$) és B állapotban van, ha ez az érték $> a$ ($\eta(u) > a$, illetve $\eta^*(u) > a$). Itt a egy rögzített küszöbszámot jelent.

Kérdés, hogy $(0, t)$ időközben mennyi lesz a B állapotban való tartózkodás várható időtartama. Jelöljük ezt 1. esetben $\tau(t, a)$-val és 2. esetben $\tau^*(t, a)$-val. Továbbá kérdés, hogy $(0, t)$ időközben mennyi lesz az $A \to B$ átmenetek várható száma. Jelöljük ezt 1. esetben $m(t, a)$-val és 2. esetben $m^*(t, a)$-val.

Nevezzük *valódi eseményeknek* a Poisson-folyamatban előforduló eseményeket és *látszólagos eseményeknek* az $A \to B$ átmeneteket. Kérdés, hogy legalább a 2. esetben miként lehet a látszólagos események sűrűségéből a valódi események sűrűségére következtetni.

Mindenekelőtt azonban felemlítünk egy, az elmondottakat illusztráló fontos alkalmazási területet a kísérleti fizikából.

Példa a kísérleti fizikából. Tárgyalásunk konkretizálására gondoljunk elektronsokszorozóval történő részecskeszámlálás példájára. Elektronsokszorozó katódjára beeső korpuszkulák vagy fotonok elektronokat váltanak ki. Egy elektróda soron az elektronok száma egymás után szekundér emisszióval sokszorozódik.

Ha $p_0(k)$ jelenti annak a valószínűségét, hogy egy beeső részecske a katódból k elektront vált ki és az elektronsokszorozó sokszorozó lemezeinek száma r, melyek mindegyikére $p(k)$ jelenti annak a valószínűségét, hogy egy beeső elektron k szekundér elektront vált ki, és feltesszük, hogy minden egyes elektron sokszorozódási processzusa független a többitől, úgy a multiplikatív processzusok elméletének segítségével könnyen meghatározható annak a valószínűsége, hogy egy, a katódra eső részecske által kiváltott elektronlavina az anódra érve k elektronból álljon. Ha $\{p_0(k)\}$ generátorfüggvényét $f_0(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_0(k) s^k$ jelöli és $p(k)$ generátorfüggvényét $f(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p(k) s^k$ jelöli, úgy az n-ik sokszorozó lemezen kiváltott elektronok számának generátorfüggvényét $g_n(s)$-sel jelölve fennáll: $g_0(s) = f_0(s)$ és $g_n(s) = f[g_{n-1}(s)]$ $(n = 1, 2, \ldots, r)$. Ezen rekurzív formula segítségével meghatározható $g_r(s)$ az anódra eső elektronok száma valószínűségének generátorfüggvénye. A generátorfüggvény ismeretében meghatározhatók maguk a valószínűségek is.

Ha az anódra k elektron esik, úgy ezek az elektronok feltöltik az anódkör C kapacitású kondenzátorát az elektronok számával arányos $x = ke/C$ feszültségre (e az elektron töltése). Míg k valószínűségi változó diszkrét $k = 0, 1, 2, \ldots$ értékeket vesz fel, addig x valószínűségi változó jó közelítéssel folytonosnak tekinthető. Ugyanis például $C = 1 pF$ esetén $\Delta x = \frac{\Delta k \cdot e}{C} = \frac{e}{C} = 1{,}6 \cdot 10^{-7}$ volt. Az x feszültségre feltöltött kondenzátor R ellenálláson keresztül kisül éspedig feszültsége időben exponenciális mértékben $xe^{-t/RC}$ függvény szerint csökken. Az RC időállandó reciprok értéke megegyezik az α állandóval, a feszültséglökés nagyságának eloszlásfüggvénye pedig $H(x)$.

A fentemlített sztochasztikus folyamatokkal leírható ez a jelenség. Sok esetben például radioaktív atomok bomlásánál, kozmikus sugárzásnál feltehető, hogy a katódra érkező korpuszkulák vagy fotonok időpontjai Poisson folyamatot alkotnak. Ekkor az események a katódra érkező részecskék. A katódból kiinduló elektronok sokszorozási processzusa egymástól független és egy lökés időtartama alatt érkező újabb részecskékre nézve az elektronsokszorozó hatásos marad. Az anódra érkező elektronlavina a külső körben egy exponenciális lefutású feszültséglökést okoz, melynek amplitudója valószínűségi változó. A különböző impulzusok lineárisan szuperponálódnak.

A jelenséget egy elektroncsöves koincidencia berendezéssel észleljük, amely egy számlálóval áll kapcsolatban. A számláló jelez, ha a jelek összegének értéke nagyobb lesz egy megadott a küszöbfeszültségnél és a jelfogó bekapcsolva marad mindaddig, amíg a jelek összegének értéke nagyobb a-nál.

Ekkor probléma, hogy mennyi lesz a jelfogó bekapcsolásainak várható száma és várható időtartama t időtartam alatt.

Megjegyezzük, hogy a jelfogó bekapcsolásainak várható számát nem érinti az a tény, hogy a jelfogó bekapcsolva maradjon mindaddig, amíg a B állapot tart. Ez csak a B állapotban való tartózkodás várható időtartamának illusztrálására szolgál; jóllehet ez a gyakorlatban nem megvalósíthatatlan eset.

Kétféle problémát különböztetünk meg:

Észlelések problémája: Egyetlen elektronsokszorozóval történő részecskeszámlálás esetén azt mondjuk, hogy adott időpontban észlelés kezdődik, ha a jelfogó bekapcsol. Az észlelések várható száma t időtartam alatt megegyezik a jelfogó bekapcsolásainak várható számával. Ekkor probléma, hogy különböző a értékek mellett, azaz különböző küszöbfeszültségek mellett a látszólagos eseménysűrűségből (észlelések sűrűsége) miként lehet visszakövetkeztetni a valódi eseménysűrűségre. Továbbá, érdekességgel bír a legkedvezőbb a érték megválasztásának kérdése.

Koincidenciák problémája. Egyidejűleg több elektronsokszorozót használva véletlen jelenségek észlelésére, kapjuk a koincidencia-problémát. Ekkor az összes elektronsokszorozó által szolgáltatott jeleket egyetlen koincidencia készülékkel vizsgáljuk. A számláló jelez, ha a jelek összege meghaladja a beállitott a küszöbfeszültséget. Ekkor probléma, hogy különböző a értékek mellett mennyi lesz t időtartam alatt a véletlen koincidenciák várható száma. Ennek ismerete akkor bír különös fontossággal, ha azt vizsgáljuk, hogy két vagy több folyamat között van-e korreláció. Ekkor érdekességgel bír az a kérdés, hogy milyen a érték mellett a legkedvezőbb a korreláció vizsgálatot végezni.

Ez a probléma visszavezethető az előzőre, ha feltesszük, hogy az egyes elektronsokszorozókkal történő számlálási processzusok egymástól függetlenek, és egy beeső részecske által létrehozott feszültséglökés nagysága mindegyik elektronsokszorozó anódján ugyanazon valószínűség eloszlást mutatja. Ebben az esetben, ha az egyes elektronsokszorozókhoz érkező részecskék sűrűsége $\lambda_1(u), \lambda_2(u), \ldots, \lambda_m(u)$, úgy az m elektronsokszorozó helyettesíthető egyetlen olyannal, melynél a részecskék érkezésének sűrűsége:

$$\lambda(u) = \lambda_1(u) + \lambda_2(u) + \cdots + \lambda_m(u).$$

Az erősítő körök méretezése szempontjából fontossággal bír sztochasztikus folyamatunk harmonikus analízisének elvégzése.

3. §. *Az eloszlásfüggvények meghatározása*

Jelen fejezet célja $P(\eta(u) \leq x) = G(u, x)$ és $P(\eta^*(u) \leq x) = G^*(x)$ eloszlásfüggvények meghatározása $f(u, \chi) = \chi e^{-\alpha u}$ időbeli lefolyású jelek esetén. Az $\eta(u)$ és $\eta^*(u)$ valószínűségi függvények Markov-folyamatot írnak le, ugyanis, ha egy adott u időpontban ismerjük $\eta(u)$, illetve $\eta^*(u)$ értékét, úgy ez egyértelműen meghatározza a folyamat jövő sztochasztikus viselkedését. Ha azonban az időtengelyt megfordítjuk és egy adott u időponttól visszafelé haladva a kevesebb mint z ideje tartó jeleket, azaz $(u-z, u)$ időközben kezdődő jeleket tekintjük, úgy az így nyert

$$\zeta(u, z) = \sum_{u-z \leq u_k \leq u} f(u - u_k, \chi_k) \tag{6}$$

függvénnyel leírt folyamat ugyancsak Markov-féle marad, de $\zeta(u, z)$ „jövő" sztochasztikus viselkedése nem függ $\zeta(u, z)$ aktuális értékétől, azaz ezzel az eljárással független növekményű Markov-folyamatot nyertünk, ami viszont az előbbinél egyszerűbben tárgyalható.

Itt u rögzített érték és a folyamatot $z \geqq 0$ időpontokban tekintjük. Ekkor célszerű az események sűrűségét $p(z) = \lambda(u-z)$-vel jelölni.

$\zeta(u,z)$ ismeretében $\eta(u)$ és $\eta^*(u)$ könnyen megkapható. Ugyanis $\eta(u) = \zeta(u,u)$ és $\eta^*(u) = \lim\limits_{z\to\infty} \zeta(u,z)$, ha $\lambda(u) \equiv \lambda$. Legyen $P(\zeta(u,z) \leqq x) = F(z,x)$, úgy $G(u,x) = F(u,x)$ és $G^*(x) = \lim\limits_{z\to\infty} F(z,x)$ feltéve, hogy $\lambda(u) \equiv \lambda$.

Eddig nem foglalkoztunk $\eta^*(u)$ létezésének kérdésével. Most kimutatjuk, hogy $\eta^*(u)$ létezik, ha $M(\chi_n) < \infty$. A fent elmondottak szerint ugyanis $\eta^*(u)$ előállítható független valószínűségi változók összegeként a következő alakban:

$$\eta^*(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \Delta\zeta(u, n\Delta z), \qquad \text{ahol} \qquad \Delta\zeta(u,n\Delta z) = \zeta(u,(n+1)\Delta z) - \zeta(u, n\Delta z),$$

$(n = 0, 1, 2, \ldots)$. Most pedig alkalmazható A. N. KOLMOGOROV ismert tétele (P. R. HALMOS: Measure Theory, 1950, 199 o.), amely szükséges és elegendő feltételt ad független valószínűségi változók végtelen sorának konvergenciájára vonatkozóan. Ha $M(\chi_n) < \infty$ úgy elegendő kis Δz és $c = 1$ választás mellett a feltételek könnyen beláthatóan teljesülnek és így $\eta^*(u) = \lim\limits_{z\to\infty} \zeta(u,z)$ határérték 1 valószínűséggel létezik. Innen már következik, hogy $G^*(x)$ létezik, ha $M(\chi_n) < \infty$, de erre külön bizonyítást is adunk.

A $\zeta(u,z)$ folyamat ún. diszkontinuus Markov-folyamat. A. N. KOLMOGOROV [7] munkájának a végén említette fel a tisztán diszkontinuus Markov-folyamatot, amelynél csupán ugrásszerű állapotváltozások lépnek fel, és felírta a folyamatot meghatározó integro-differenciálegyenletet. W. FELLER [8] és [9] munkáiban ezt a processzust beható vizsgálat tárgyává tette, megadta az exisztencia és egyértelműségi tételeket és megadta az integro-differenciálegyenlet általános megoldását egyenletesen konvergens végtelen sor alakjában.

A $\zeta(u,z)$ folyamat speciális esetét képezi W. FELLER által tárgyalt folyamatnak, amennyiben esetünkben a változás bekövetkezésének és nagyságának valószínűsége független $\zeta(u,z)$ aktuális értékétől és általánosítása A. JA. HINCSIN [10] által tárgyalt esetnek, amelynél a változás valószínűségei még az időtől is függetlenek. Folyamatunkra alkalmazhatnánk W. FELLER általános tárgyalását, azonban célszerűnek mutatkozik éppen speciálitásában rejtőző egyszerűsége miatt külön tárgyalást adni.

A következő tételt bizonyítjuk be:

1. TÉTEL. *A fent definiált $\zeta(u,z)$ valószínűségi függvényre vonatkozó $P(\zeta(u,z) \leqq x) = F(z,x)$ eloszlásfüggvény eleget tesz a következő integro-differenciálegyenletnek:*

$$\frac{\partial F(z,x)}{\partial z} = p(z)\left[\int_0^x H[(x-y)e^{\alpha z}]\, d_y F(z,y) - F(z,x)\right], \tag{7}$$

melynek egyetlen feltételeinknek eleget tevő $F(z,x)$ megoldása van. Legyen

$F(z, y)$ karakterisztikus függvénye

$$(8) \qquad \Phi(z, \omega) = \int_0^\infty e^{i\omega x} d_x F(z, x)$$

és legyen $H(x)$ karakterisztikus függvénye

$$(9) \qquad \varphi(\omega) = \int_0^\infty e^{i\omega x} d\, H(x).$$

Ekkor fennáll

$$(10) \qquad \log \Phi(z, \omega) = -\int_0^z p(v)\, [1 - \varphi(\omega e^{-\alpha v})]\, dv.$$

$\Phi(z, \omega)$ ismeretében $F(z, x)$ eloszlásfüggvény egyértelműen meghatározható.

BIZONYÍTÁS: Fennáll $\Delta z > 0$-ra

$$(11) \qquad F(z + \Delta z, x) =$$
$$= p(z)\, \Delta z \int_0^x H[(x-y)e^{\alpha z}]\, d_y F(z, y) + (1 - p(z) \Delta z)\, F(z, x) + o(\Delta z).$$

Ugyanis az az esemény, hogy $z + \Delta z$ időpontban $\zeta(u, z + \Delta z) \leqq x$ legyen, úgy jöhet létre, hogy $\zeta(u, z) = y$, ahol $0 \leqq y < x$ és $(z, z + \Delta z)$ időközben bekövetkezik egy esemény, aminek a valószínűsége $p(z) \Delta z + o(\Delta z)$ és annak a valószínűsége, hogy a változás: $\zeta(u, z + \Delta z) - \zeta(u, z) \leqq x - y$ egyenlő $H[(x-y)e^{\alpha z}]$-vel, vagy z időpontban $\zeta(u, z) \leqq x$ aminek a valószínűsége $F(z, x)$ és $(z, z + \Delta z)$ közben nem történik esemény, aminek a valószínűsége: $1 - p(z)\, \Delta z + o(\Delta z)$. Annak a valószínűsége, hogy $(z, z + \Delta z)$ időközben egynél több esemény fordul elő: $o(\Delta z)$. Könnyen belátható, hogy az a kérdés, hogy $(z, z + \Delta z)$ intervallumban pontosan hol fordul elő az esemény nem érinti tárgyalásunkat és így úgy vehetjük, mintha z pontban fordult volna elő.

(11)-ből

$$(12) \qquad \frac{F(z + \Delta z, x) - F(z, x)}{\Delta z} =$$
$$= p(z) \int_0^x H[(x-y)e^{\alpha z}]\, d_y F(z, y) - p(z)\, F(z, x) + \frac{o(\Delta z)}{\Delta z}$$

$\Delta z \to 0$ határmenetet elvégezve

$$(13) \qquad \frac{\partial F(z, x)}{\partial z} = p(z) \left[\int_0^x H[(x-y)e^{\alpha z}]\, d_y F(z, y) - F(z, x) \right]$$

egyenletre jutunk. A fenti számítással azt mutattuk ki, hogy $F(z, x)$ z szerinti jobboldali deriváltja létezik és egyenlő (13) jobboldalával. Hasonlóan megmutatható, hogy $F(z, x)$ baloldali deriváltja is létezik és az is egyenlő (13) jobboldalával, azaz $F(z, x)$ z szerinti deriváltja létezik és erre fennáll (7).

(9) következtében

$$\int_0^\infty e^{i\omega x}\, d\,H(xe^{\alpha z}) = \int_0^\infty e^{i\omega x e^{-\alpha z}}\, d\,H(x) = \varphi(\omega e^{-\alpha z}). \tag{14}$$

Így (7) egyenletből a karakterisztikus függvényekre áttérve, tekintetbe véve, hogy eloszlásfüggvények kompozícióinak karakterisztikus függvénye egyenlő a karakterisztikus függvények szorzatával, könnyen adódik, hogy

$$\frac{\partial\, \Phi(z,\omega)}{\partial z} = -p(z)\,[1-\varphi(\omega e^{-\alpha z})]\,\Phi(z,\omega). \tag{15}$$

$\lambda(u)$-ról feltettük, hogy folytonos és mint ismeretes, egy karakterisztikus függvény egyenletesen folytonos $-\infty<\omega<\infty$-ra, tehát $\varphi(\omega e^{-\alpha z})$ is folytonos. Ezen feltételek mellett, mint ismeretes, differenciálegyenletünknek egyetlen a kezdeti feltételnek elegettevő megoldása van. $F(0,x)$-re vonatkozó feltételt tekintetbe véve $\Phi(0,\omega)=1$ és ezen kezdeti feltétel mellett (15) lineáris differenciálegyenlet megoldása logaritmikus alakban felírva

$$\log \Phi(z,\omega) = -\int_0^z p(v)\,[1-\varphi(\omega e^{-\alpha v})]\,dv. \tag{16}$$

Az, hogy (7) integro-differenciálegyenletünknek egyetlen $F(z,x)$ megoldása van, amely kielégíti a kezdeti feltételt és x-ben eloszlásfüggvény, W. FELLER [8], [9] általános esetre vonatkozó tételéből következik. Mint ismeretes, $F(z,x)$ eloszlásfüggvény karakterisztikus függvényének $\Phi(z,\omega)$-nak ismeretében egyértelműen meghatározható. Lásd például H. CRAMÉR [11, 93. o.].

Tegyük fel most, hogy $p(z)\equiv\lambda$ állandó és vizsgáljuk meg, hogy mikor létezik $\lim_{z\to\infty} F(z,x)=F(x)$ határeloszlásfüggvény. Erre vonatkozóan a következő tételt bizonyítjuk be:

2. TÉTEL. *Abban az esetben, ha $H(x)$ eloszlásfüggvény átlaga*

$$M_1=\int_0^\infty x\,dH(x) \tag{17}$$

véges, a (7) *alatti integro-differenciálegyenletnek a kezdeti feltételünknek elegettevő $F(z,x)$ megoldása $z\to\infty$ esetén egy $F(x)$ határeloszlásfüggvényhez konvergál, amelynek karakterisztikus függvényére $\Phi(\omega)$-ra* fennáll, hogy

$$\log \Phi(\omega) = -\frac{\lambda}{\alpha}\int_0^1 \frac{1-\varphi(\omega v)}{v}\,dv. \tag{18}$$

$\Phi(\omega)$ ismeretében $F(x)$ egyértelműen meghatározható.

BIZONYÍTÁS: Hivatkozunk P. LÉVY és H. CRAMÉR tételére (lásd CRAMÉR könyvében [11, 96. o.]) mely szerint:

Ha adva van $\{F_n(x)\}$ valószínűség eloszlásfüggvények sorozata és $\{\Phi_n(\omega)\}$ a megfelelő karakterisztikus függvények sorozata, úgy annak a szükséges és elegendő feltétele, hogy $\{F_n(x)\}$ sorozat egy $F(x)$ eloszlásfüggvényhez konvergáljon, az, hogy minden ω-ra $\{\Phi_n(\omega)\}$ sorozat konvergáljon egy $\Phi(\omega)$ határfüggvényhez, mely $\omega=0$ értékre folytonos.

Ha ez a feltétel teljesül, úgy $\Phi(\omega)$ határfüggvény megegyezik az $F(x)$ határeloszlás karakterisztikus függvényével.

Esetünkben $\lim\limits_{z\to\infty} F(z,x)=F(x)$ határeloszlás a feltétel szerint akkor létezik, ha létezik

$$\lim_{z\to\infty}\int_0^z [1-\varphi(\omega e^{-\alpha v})]\,dv \tag{19}$$

határérték és ez folytonos az $\omega=0$ helyen. Ekkor $F(x)$ karakterisztikus függvényét $\Phi(\omega)$-val jelölve:

$$\Phi(\omega)=\int_0^\infty e^{i\omega x}\,dF(x) \tag{20}$$

és erre fennáll

$$\log\Phi(\omega)=-\lambda\int_0^\infty [1-\varphi(\omega e^{-\alpha v})]\,dv, \tag{21}$$

amely ekvivalens (18)-cal.

Feltettük, hogy

$$M_1=\int_0^\infty x\,dH(x) \tag{22}$$

véges és ekkor könnyen belátható, hogy

$$|1-\varphi(\omega)|=\left|\int_0^\infty (1-e^{i\omega x})\,dH(x)\right|\leqq M_1|\omega|. \tag{23}$$

Így

$$\left|\int_0^\infty [1-\varphi(\omega e^{-\alpha v})]\,dv\right|\leqq\frac{M_1|\omega|}{\alpha},$$

amiből következik, hogy (19) határérték minden véges ω esetén létezik és az $\omega=0$ helyen folytonos. Így alkalmazhatjuk LÉVY—CRAMÉR tételét, és ezzel állításunkat bebizonyítottuk.

Jelöljük most $G(u,x)$ karakterisztikus függvényét $\Psi(u,\omega)$-val, azaz

$$\Psi(u,\omega)=\int_0^\infty e^{i\omega x}\,d_x G(u,x) \tag{24}$$

és $G^*(x)$ karakterisztikus függvényét $\Psi^*(\omega)$-val, azaz

$$\Psi^*(\omega)=\int_0^\infty e^{i\omega x}\,dG^*(x), \tag{25}$$

úgy fennáll

$$\log\Psi(u,\omega)=-\int_0^u \lambda(u-v)[1-\varphi(\omega e^{-\alpha v})]\,dv \tag{26}$$

és $M_1 < \infty$ *esetén:*

(27) $$\log \Psi^*(\omega) = -\frac{\lambda}{\alpha}\int_0^1 \frac{1-\varphi(\omega v)}{v}\,dv.$$

MEGJEGYZÉS: Ha $H(x)$ eloszlásfüggvény m-edik momentuma létezik, úgy, mint ismeretes

(28) $$M_j = \int_0^\infty x^j\,dH(x), \quad (j=0,1,\ldots,m)$$

momentumok is léteznek és fennáll $H(x)$ karakterisztikus függvényére (9)-re, hogy

(29) $$\varphi(\omega) = \sum_{j=0}^{m} \frac{M_j}{j!}(i\omega)^j + o(\omega^m)$$

és így (27) felhasználásával:

(30) $$\log \Psi^*(\omega) = \frac{\lambda}{\alpha}\sum_{j=1}^{m} \frac{M_j}{j \cdot j!}(i\omega)^j + o(\omega^m),$$

azaz $G^*(x)$ eloszlásfüggvény félinvariánsai, melyeket jelöljünk Λ_j-vel, szintén léteznek az m-edikig bezárólag és ezek

(31) $$\Lambda_j = (-i)^j \left[\frac{d^j}{d\omega^j} \log \Psi^*(\omega)\right]_{\omega=0} = \frac{\lambda}{\alpha}\frac{M_j}{j}, \quad (j=1,2,\ldots,m).$$

A (31) összefüggés különösen alkalmas olyan gyakorlati feladatok megoldására, amelyeknél a $H(x)$ eloszlásfüggvény tapasztalatilag adott.

4. §. *A várható értékek meghatározása*

$\tau(t,a)$ és $\tau^*(t,a)$ meghatározása. u időpontban B állapotban van a rendszer, ha a jelek u időponthoz rendelt értékeinek összege nagyobb a-nál. Ennek a valószínűsége 1. esetben: $1-G(u,a)$ és 2. esetben: $1-G^*(a)$. Ekkor egyszerűen belátható, hogy $(0,t)$ időintervallumban a B állapotban való tartózkodás várható időtartama:

1. esetben:

(32) $$\tau(t,a) = \int_0^t [1-G(u,a)]\,du.$$

2. esetben:

(33) $$\tau^*(t,a) = [1-G^*(a)]\,t.$$

Az integrál létezése biztosítva van, mivel $G(u,x)$ u-nak nemcsak hogy folytonos, hanem differenciálható függvénye is.

$m(t,a)$ és $m^*(t,a)$ meghatározása. u és $u+\Delta u$ időpontok között $A \to B$ átmenet lép fel, ha u időpontban, a jelek értékeinek összege: $x<a$ és $(u, u+\Delta u)$ közben kezdődik egy jel, aminek a valószínűsége: $\lambda(u)\Delta u + o(\Delta u)$

és ennek amplitudója $(a-x)$-nél nagyobb, aminek a valószínűsége: $1-H(a-x)$. Annak a valószínűsége, hogy $(u, u+\Delta u)$ közben egynél több $A \to B$ átmenet jöjjön létre, mint könnyen belátható: $o(\Delta u)$.

Az elmondottak alapján könnyen adódik, hogy annak a valószínűsége, hogy $(u, u+\Delta u)$ közben $A \to B$ átmenet jöjjön létre:

1. esetben:

$$\lambda(u) K(u, a) \Delta u + o(\Delta u), \tag{34}$$

ahol $K(u, a)$-ra fennáll:

$$K(u, a) = \int_0^a [1-H(a-x)]\, dG(u, x). \tag{35}$$

2. esetben:

$$\lambda K^*(a) \Delta u + o(\Delta u), \tag{36}$$

ahol

$$K^*(a) = \int_0^a [1-H(a-x)]\, dG^*(x). \tag{37}$$

Mint könnyen belátható, az $(u, u+\Delta u)$ időközben előforduló $A \to B$ átmenetek várható számát 1. esetben (34), 2. esetben (36) szolgáltatja. A $(0, t)$ intervallumban előforduló $A \to B$ átmenetek várható számát úgy kapjuk meg, hogy a $(0, t)$ intervallumot n számú $\Delta u = t/n$ nagyságú szakaszra bontjuk, mindegyik szakaszban képezzük a várható értékeket, ezeket összegezzük és $n \to \infty$ határátmenetet végzünk. A $G(u, x)$ eloszlásfüggvény u-szerinti folytonosságából következik $K(u, a)$ u-szerinti folytonossága. Így biztosítva van, hogy a határátmenet elvégezhető, és eredményül azt kapjuk, hogy:

1. esetben:

$$m(t, a) = \int_0^t \lambda(u) K(u, a)\, du \tag{38}$$

és

2. esetben:

$$m^*(t, a) = \lambda K^*(a) t. \tag{39}$$

1. MEGJEGYZÉS. 2. esetben (37) szerint $K^*(a)$ előállítható, mint két eloszlásfüggvény különbsége és így létezik Fourier—Stieltjes transzformáltja. Jelöljük ezt

$$R(\omega) = \int_0^\infty e^{i\omega a}\, dK^*(a) \tag{40}$$

-val. (37) alapján erre fennáll

$$R(\omega) = [1-\varphi(\omega)]\, \Psi^*(\omega) \tag{41}$$

és innen $K^*(a)$ egyértelműen meghatározható.

Hasonlóan határozható meg $K(u, a)$ is.

2. MEGJEGYZÉS. A 2. esetben: t időtartam alatt B állapotban való tartózkodás várható időtartama: $\tau^*(t,a)=[1-G^*(a)]\,t$, és az $A\rightarrow B$ átmenetek várható száma: $m^*(t,a)=\lambda K^*(a)t$. Jelöljük az egymást követő $A\rightarrow B$ és $B\rightarrow A$ átmenetek között eltelt időtartam átlagos hosszát ϑ-val. Erre nézve fennáll, hogy

$$\vartheta=\lim_{t\to\infty}\frac{\tau^*(t,a)}{m^*(t,a)}=\frac{1-G^*(a)}{\lambda K^*(a)}. \tag{42}$$

Ez KOLMOGOROV és PROHOROV [12] tétele segítségével bizonyítható. Az idézett tétel a minket érdeklő speciális esetben azt mondja ki, hogy ha $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n,\ldots$ egyforma várható értékű valószínűségi változók és $\zeta_\nu=\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_\nu$ összeget tekintjük, ahol a tagok száma ν maga is valószínűségi változó, továbbá $n>m$-re ξ_n valószínűségi változók függetlenek $\nu=m$ eseménytől úgy $M(\nu)<\infty$ esetén fennáll $M(\zeta_\nu)=\vartheta M(\nu)$, ahol $\vartheta=M(\xi_n)$ $(n=1,2,\ldots)$.

Esetünkben jelölje $\xi_n(n=1,2,\ldots)$ $(0\leq t<\infty)$ időközben az egymást követő $A\rightarrow B$ és $B\rightarrow A$ átmenetek közötti időtartamokat és ν a $(0,t)$ időközben előforduló $A\rightarrow B$ átmenetek számát, úgy azt nyerjük, hogy $M(\zeta_\nu)=\vartheta m^*(t,a)$. Itt azonban könnyen beláthatóan fennáll $\lim_{t\to\infty} M(\zeta_\nu)\,\tau^*(t,a)=1$ határérték, ahonnan már (42) következik. A tétel alkalmazásához elegendő megmutatni, hogy a ξ_n-ek egyforma eloszlású független valószínűségi változók. Ez pedig onnan következik, hogy folyamatunk Markov-folyamat, amelynek valamely $B\rightarrow A$ átmenet pillanatától számított jövő sztochasztikus viselkedése nem függ a múlttól és ilyen időpontoktól számítva a folyamat sztochasztikusan megismétli önmagát.

3. MEGJEGYZÉS. A 2. esetben a *valódi eseménysűrűség:* λ és a *látszólagos eseménysűrűség* ($A\rightarrow B$ átmenetek sűrűsége):

$$\lambda'(a)=\lambda K^*(a). \tag{43}$$

5. §. *Tetszőleges időbeli lefolyású jelek esete*

Most általánosabban feltesszük, hogy egy jel időbeli lefolyását tetszőleges $f(u,\chi)$ függvény írja le, ahol u a jel kezdetétől számított időtartamot jelenti és az χ paraméter valószínűségi változó $H(x)$ eloszlásfüggvénnyel. Ha $f(u,\chi)$ a 2. §-ban tárgyalttól különbözik, úgy a megfelelő $\eta(u)$, illetve $\eta^*(u)$ valószínűségi függvények nem Markov-folyamatot írnak le. Ha azonban az időtengelyt megfordítjuk, azaz egy adott u időponttól visszafelé számítva z időtartamon belül, azaz $(u-z,u)$ időközben kezdődő jelek u időpontban felvett értékeinek összegét tekintjük, azaz

$$\zeta(u,z)=\sum_{u-z\leq u_k\leq u} f(u-u_k,\chi_k)$$

valószínűségi függvényt vezetjük be, úgy a $\zeta(u,z)$ függvény által leírt folyamat nemcsak Markov-féle lesz, hanem független növekményű Markov processzus lesz. $\zeta(u,z)$ segítségével $\eta(u)$ és $\eta^*(u)$ egyszerűen kifejezhető. Ugyanis fennáll $\eta(u)=\zeta(u,u)$ és $\eta^*(u)=\lim_{z\to\infty}\zeta(u,z)$ feltéve, hogy $\lambda(u)\equiv\lambda$ (állandó).

Most $\eta^*(u)=\lim_{z\to\infty}\zeta(u,z)$ határérték 1 valószínűséggel létezik, ha a (62) kifejezés véges. Ugyanis ekkor $\eta^*(u)$-ra a 3. §-ban mondottak szóról-szóra érvényesek maradnak és így A. N. KOLMOGOROV tétele alapján könnyen elvégezhető a bizonyítás, csupán $M(\chi_n)<\infty$ feltétel helyett (62) véges volta alkalmazandó. Ebben az esetben természetesen $G^*(x)$ is létezik, de erre külön bizonyítást is adunk.

Ennek az általánosított problémának is érdekes fizikai alkalmazását lehet adni éspedig elektroncsövek anódáram-ingadozásának tárgyalásánál. Mint ismeretes, elektroncsövek katódjából kilépő elektronok időpontjai Poisson-folyamatot követnek. Legyen egy $u=0$ időpontban kilépő elektron által influált áram időbeli lefolyása $f(u,\chi)$, ahol χ jelenti az elektron kezdősebességét, amely valószínűségi változó. A klasszikus statisztika szerint χ Maxwell eloszlást követ. Az egyes elektronok által influált áramok összegeződnek és összegük $\eta(u)$ adja az anódáram pillanatnyi értékét. Ezzel a problémával egy külön dolgozatban fogunk foglalkozni.

Az itt tárgyalt $\zeta(u,z)$ folyamatot a következő fejezetben kimondott tétel segítségével fogjuk tárgyalni. Miként bizonyos sztochasztikus folyamatok visszavezethetők független valószínűségi változók összegének a tanulmányozására, úgy az itt tárgyalt folyamat visszavezethető bizonyos valószínűségi függvény integráljának a meghatározására.

6. §. Segédtétel

Most a következő segédtételt bizonyítjuk be $\zeta(z)$ additív Markov-folyamatra vonatkozóan.

LEMMA: *A $z\geqq 0$-ra értelmezett $\zeta(z)$ valószínűségi függvényre legyen érvényes, hogy*

1. $\zeta(0)\equiv 0$.

2. *$z_1<z_2\leqq z_3<z_4$-re $\zeta(z_2)-\zeta(z_1)$ és $\zeta(z_4)-\zeta(z_3)$ független valószínűségi változók.*

3. *Legyen $\zeta(z+\Delta z)-\zeta(z)$ változó karakterisztikus függvénye $M\{e^{i\omega[\zeta(z+\Delta z)-\zeta(z)]}\}=\psi_{\Delta z}(z,\omega)$ és álljon fenn ω-ban egyenletesen a következő összefüggés*

$$\log\psi_{\Delta z}(z,\omega)=\Delta z\log\psi(z,\omega)+o(\Delta z). \tag{44}$$

Ha $P(\zeta(z)\leqq x)=F(z,x)$ és $\zeta(z)$ karakterisztikus függvénye

$$\Phi(z,\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega x}\,d_xF(x,z) \tag{45}$$

úgy fennáll

$$\log \Phi(z,\omega)=\int_0^z \log \psi(u,\omega)\,du, \tag{46}$$

feltéve, hogy a jobboldalon álló integrál létezik. $\Phi(z,\omega)$ ismeretében egyértelműen meghatározható $F(z,x)$.

Megjegyezzük, hogy ha a $\zeta(z)$ folyamat differenciálható és diferenciálhányadosa $\xi(z)$ folyamat, azaz $\xi(z)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\zeta(z+h)-\zeta(z)}{h}$ (valószínűségi értelemben) úgy a 3. feltétel teljesül és $\psi(z,\omega)$ nem más, mint $\xi(z)$ karakterisztikus függvénye, azaz $\psi(z,\omega)=M\{e^{i\omega\xi(z)}\}$.

Ekkor felírható, hogy

$$\zeta(z)=\int_0^z \xi(u)\,du. \tag{47}$$

BIZONYÍTÁS. Ismeretes, hogy független valószínűségi változók összegének karakterisztikus függvénye egyenlő az egyes változók karakterisztikus függvényeinek szorzatával. Ez a tétel azonban érvényes marad akkor is, ha csak azt követeljük meg, hogy a valószínűségi változók összegében mindegyik változó független legyen a megelőző változók összegétől. Ekkor a valószínűségi változókat *tágabb értelemben függetleneknek* fogjuk nevezni. (Ez a tény lehetővé teszi, hogy tételünk kimondásánál a 2. követelményt enyhítsük és akárhány változó-növekmény függetlensége helyett csupán kettőét követeljük meg.)

Tételünk ennek a tételnek közvetlen általánosítása arra az esetre, midőn az összeadandó valószínűségi változók számának helyére egy folytonosan változó paraméter lép. Az általánosítás közvetlenül keresztülvihető, ha az említett tételt olyan alakban fogalmazzuk meg, hogy független, illetve az említett tágabb értelemben független valószínűségi változók összegezése esetén az egyes változók karakterisztikus függvényeinek logaritmusai összeadódnak.

Osszuk be a $(0,z)$ intervallumot $z_0=0, z_1,\ldots,z_n=z$ osztópontokkal n számú $\Delta z=z/n$ nagyságú szakaszra. Legyen $\zeta(z_i)-\zeta(z_{i-1})=\xi_i$ $(i=1,2,\ldots,n)$ úgy

$$\zeta(z)=\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_n. \tag{48}$$

A $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n$ valószínűségi változók tágabb értelemben függetlenek és karakterisztikus függvényeik rendre $\psi_{\Delta z}(z_{i-1},\omega)$ $(i=1,2,\ldots,n)$. Tágabb értelemben független valószínűségi változók összegének karakterisztikus függvénye egyenlő az egyes változók karakterisztikus függvényeinek szorzatával, azaz

$$\Phi(z,\omega)=\prod_{i=1}^{n}\psi_{\Delta z}(z_{i-1},\omega). \tag{49}$$

Mindkét oldal logaritmusát véve

$$\log\Phi(z,\omega)=\sum_{i=1}^{n}\log\psi_{\Delta z}(z_{i-1},\omega)=\sum_{i=1}^{n}[\log\psi(z_{i-1},\omega)\Delta z+o(\Delta z)], \tag{50}$$

ahol a második egyenlőség a 3. feltétel következménye.

Ha feltételezzük, hogy $\log \psi(z, \omega)$ a $(0, z)$ intervallumban integrálható, úgy $n \to \infty$ esetén (50) jobboldala

$$\int_0^z \log \psi(z, \omega)\, dz \tag{51}$$

integrálhoz konvergál és ezzel igazoltuk állításunkat.

Megjegyezzük, hogy ha (51) *integrál határértéke $z \to \infty$ esetén létezik és $\omega = 0$ helyen folytonos, úgy $\lim\limits_{z \to \infty} F(z, x) = F(x)$ határeloszlás is létezik, melynek karakterisztikus függvényét $\Phi(\omega)$-val jelölve fennáll:*

$$\log \Phi(\omega) = \int_0^\infty \log \psi(z, \omega)\, dz. \tag{52}$$

MEGJEGYZÉS. Ha létezik $\xi(z) = \zeta'(z)$ valószínűségi függvény és m-edik félinvariánsa véges, úgy

$$\lambda_j(z) = (-i)^j \left[\frac{d^j \log \psi(z, \omega)}{d\omega^j}\right]_{\omega=0} \qquad (j = 1, 2, \ldots, m) \tag{53}$$

félinvariánsok is végesek és ekkor $\zeta(z)$ félinvariánsai $\Lambda_j(z)$-k is léteznek az m-edikig bezárólag:

$$\Lambda_j(z) = (-i)^j \left[\frac{d^j \log \Phi(z, \omega)}{d\omega^j}\right]_{\omega=0} \qquad (j = 1, 2, \ldots, m) \tag{54}$$

és ezekre fennáll

$$\Lambda_j(z) = \int_0^z \lambda_j(z)\, dz \qquad (j = 1, 2, \ldots, m). \tag{55}$$

Ugyanis ekkor

$$\log \psi(z, \omega) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\lambda_j(z)}{j!} (i\omega)^j + 0(\omega^m) \tag{56}$$

és innen (46) segítségével adódik (55).

7. §. *A $G(u, x)$ és $G^*(x)$ eloszlásfüggvények meghatározása*

Tekintsük $\zeta(u, z)$ valószínűségi függvényt. Mivel u rögzített, célszerű lesz az események sűrűségét $p(z) = \lambda(u - z)$ függvénnyel jelölni. Ekkor ha ismerjük $\zeta(u, z)$ valószínűségi változó eloszlásfüggvényét $P(\zeta(u, z) \leq x) = F(z, x)$-et úgy egyszerűen megkapható $G(u, x)$ és $G^*(x)$. Ugyanis fennáll, hogy $G(u, x) = F(u, x)$, ha $p(z) = \lambda(u - z)$ és $G^*(x) = \lim\limits_{z \to \infty} F(z, x)$, ha $p(z) \equiv \lambda$.

Most a következő tételt bizonyítjuk be:

3. TÉTEL: $F(z, x)$ *karakterisztikus függvényére $\Phi(z, \omega)$-ra fennáll, hogy*

$$\log \Phi(z, \omega) = -\int_0^z p(v)[1 - \varphi(v, \omega)]\, dv, \tag{57}$$

ahol

$$(58)\qquad \varphi(z,\omega)=\int_0^\infty e^{i\omega f(z,x)}\,dH(x).$$

BIZONYÍTÁS: Jelöljük $\zeta(u,z+\Delta z)-\zeta(u,z)$ karakterisztikus függvényét $\psi_{\Delta z}(z,\omega)$-val, azaz $\psi_{\Delta z}(z,\omega)=M\{e^{i\omega[\zeta(u,z+\Delta z)-\zeta(u,z)]}\}$. Erre fennáll, hogy

$$(59)\qquad \psi_{\Delta z}(z,\omega)=(1-p(z)\Delta z)+p(z)\Delta z\int_0^\infty e^{i\omega f(z,x)}dH(x)+o(\Delta z).$$

Ugyanis $\zeta(u,z)$ a $(z,z+\Delta z)$ közben nem szenved változást, ha ezen közben nem fordul elő esemény, aminek a valószínűsége $1-p(z)\Delta z+o(\Delta z)$ és ekkor $\zeta(u,z+\Delta z)-\zeta(u,z)=0$ vagy változást szenved, aminek a valószínűsége $p(z)\Delta z+o(\Delta z)$ és ha $\zeta(u,z+\Delta z)-\zeta(u,z)=f(z,y)$, ahol $y\leqq x$ úgy ennek a valószínűsége $H(x)$.

Így nyerjük (59) egyenletet.

(58) jelölés bevezetésével (59) a következő alakban írható

$$(60)\qquad \psi_{\Delta z}(z,\omega)=(1-p(z)\Delta z)+p(z)\Delta z\,\varphi(z,\omega)+o(\Delta z)$$

és innen

$$(61)\qquad \log\psi(z,\omega)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\log\psi_{\Delta z}(z,\omega)}{\Delta z}=-p(z)\,[1-\varphi(z,\omega)].$$

Így $\zeta(u,z)$-re alkalmazhatjuk segédtételünket. Ugyanis $\zeta(u,z)$ az 1. és 2. feltételt nyilvánvalóan kielégíti. Most megmutattuk, hogy a 3. feltételt is kielégíti. Ha (58) integrál létezik, úgy (57) is létezik és ezzel tételünket igazoltuk.

További kérdés, hogy mikor létezik $\lim\limits_{z\to\infty}F(z,x)=F(x)$ határeloszlásfüggvény. Most feltesszük, hogy $\lambda(u)\equiv\lambda$ állandó. Erre vonatkozóan a következő tételt bizonyítjuk be.

4. TÉTEL. *Ha a következő kettős integrál létezik és véges*

$$(62)\qquad \int_0^\infty\left[\int_0^\infty|f(z,x)|\,dH(x)\right]dz$$

úgy $\lambda(u)\equiv\lambda$ esetén létezik $\lim\limits_{z\to\infty}F(z,x)=F(x)$ határeloszlásfüggvény és ennek karakterisztikus függvényére $\Phi(\omega)$-ra fennáll, hogy:

$$(63)\qquad \log\Phi(\omega)=-\lambda\int_0^\infty[1-\varphi(z,\omega)]dz.$$

BIZONYÍTÁS: Hivatkozva LÉVY—CRAMÉR említett tételére, elegendő kimutatni, hogy létezik

$$(64)\qquad \lim_{z\to\infty}\int_0^z[1-\varphi(v,\omega)]dv$$

határérték és az $\omega=0$ helyen folytonos.

Legyen

(65) $$M(v) = \int_0^\infty |f(v, x)| dH(x)$$

úgy fennáll

(66) $$|1 - \varphi(v, \omega)| \leqq |\omega| M(v)$$

és így

(67) $$\left| \int_0^z [1 - \varphi(v, \omega)] dv \right| \leqq |\omega| \int_0^z M(v) dv.$$

Innen látszik, hogy ha (62) létezik, úgy (64) minden véges ω esetén létezik és az $\omega = 0$ helyen folytonos.

Jelöljük most $G(u, x)$ karakterisztikus függvényét $\Psi(u, \omega)$-val, azaz

(68) $$\Psi(u, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} d_x G(u, x)$$

és $G^*(x)$ karakterisztikus függvényét $\Psi^*(\omega)$-val azaz

(69) $$\Psi^*(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} dG^*(x),$$

úgy fennáll

(70) $$\log \Psi(u, \omega) = -\int_0^u \lambda(u - z) [1 - \varphi(\omega, z)] dz,$$

amennyiben (58) *minden z-re létezik és*

(71) $$\log \Psi^*(\omega) = -\lambda \int_0^\infty [1 - \varphi(\omega, z)] dz,$$

amennyiben (62) *létezik és véges.*

1. MEGJEGYZÉS: Ha $f(z, \chi) = \chi e^{-\alpha z}$ választással élünk és feltesszük, hogy χ várható értéke véges, úgy a fentiek a 3. fejezet eredményeit szolgáltatják.

2. MEGJEGYZÉS: Jelöljük $G(u, x)$ eloszlásfüggvény j-edik félinvariánsát $\Lambda_j(u)$-val, azaz legyen

(72) $$\Lambda_j(u) = (-i)^j \left[\frac{d^j \log \Psi(u, \omega)}{d\omega^j} \right]_{\omega=0} \qquad (j = 1, 2, \ldots).$$

Segédtételünk alapján kimondhatjuk, hogy ha

(73) $$\lambda_j(z) = \lambda(u - z) \int_0^\infty [f(z, x)]^j dH(x)$$

létezik és $(0, u)$ intervallumban integrálható úgy $\Lambda_j(u)$ is létezik és fennáll:

(74) $$\Lambda_j(u) = \int_0^u \lambda_j(z) dz.$$

Ha speciálisan $f(z,\chi)=\chi f(z)$ és χ j-edik momentuma létezik és ez

(75) $$M_j=\int\limits_0^\infty x^j dH(x),$$

úgy

(76) $$A_j(u)=M_j\int\limits_0^u \lambda(u-z)\,[f(z)]^j dz.$$

Ha $G^*(x)$ eloszlásfüggvény j-edik félinvariánsát A_j-vel jelöljük és ez létezik, úgy fennáll:

(77) $$A_j=\lambda\int\limits_0^\infty\Big[\int\limits_0^\infty (f(z,x))^j dH(x)\Big]dz$$

és $f(z,\chi)=\chi f(z)$ speciális esetben

(78) $$A_j=\lambda M_j\int\limits_0^\infty [f(z)]^j dz.$$

Ez a fizikai irodalomban jólismert CAMPBELL-formula. Megjegyezzük, hogy az eredeti CAMPBELL-formula, mely csupán az átlagra és szórásra vonatkozott, idők folyamán nagymértékben általánosítva lett E. N. ROWLAND, A. JA. HINCSIN, S. O. RICE és mások által.

3. MEGJEGYZÉS: A fentiekből következik, hogy $\eta^*(u)$ átlagértéke:

(79) $$M\{\eta^*(u)\}=\lambda\int\limits_0^\infty\Big[\int\limits_0^\infty f(z,x)dH(x)\Big]dz$$

feltéve, hogy az integrál létezik. Ugyanis $\eta^*(u)$ átlagértéke megegyezik az első félinvariánssal.

$\eta^*(u)$ szórásnégyzete

(80) $$D^2\{\eta^*(u)\}=\lambda\int\limits_0^\infty\Big[\int\limits_0^\infty (f(z,x))^2 dH(x)\Big]dz$$

feltéve, hogy ez az integrál létezik. Ugyanis $\eta^*(u)$ szórásnégyzete $D^2\{\eta^*(u)\}=$ $=M\{\eta^{*2}(u)\}-M^2\{\eta^*(u)\}$ megegyezik a második félinvariánssal.

8. §. Az $\eta^*(u)$ folyamat harmonikus analízise.

Megmutatható, hogy ha

(81) $$\int\limits_0^\infty\Big|f(z,x)dH(x)\Big|dz$$

integrál létezik, úgy $\eta^*(u)$ *egy szűkebb értelemben stacionárius folyamatot* definiál. Nekünk azonban erre nem lesz szükségünk, hanem csak arra, hogy az $\eta^*(u)$ folyamat *tágabb értelemben stacionárius,* azaz $\eta^*(u)$ átlaga és szórása állandó és korrelációs függvénye nem függ u-tól.

Mint az előző fejezetben láttuk, fennáll

$$M\{\eta^*(u)\} = \lambda \int_0^\infty \left[\int_0^\infty f(z,x)\,dH(x)\right] dz = m \tag{82}$$

és

$$D^2\{\eta^*(u)\} = \lambda \int_0^\infty \left[\int_0^\infty (f(z,x))^2\,dH(x)\right] dz = \sigma^2 \tag{83}$$

feltéve, hogy ezen integrálok léteznek. Ezek a mennyiségek u-tól független állandók, amelyeket ezért m illetve σ^2-tel jelölünk.

Definiáljuk $\eta^*(u)$ korrelációs függvényét a szokott módon:

$$R(\tau) = \frac{M\{\eta^*(u)\,\eta^*(u-\tau)\} - m^2}{\sigma^2}. \tag{84}$$

Ennek meghatározására a következő tételt bizonyítjuk be:

5. TÉTEL: *A fent definiált $\eta^*(u)$ stacionárius sztochasztikus folyamat korrelációs függvényére fennáll, hogy*

$$R(\tau) = \frac{\lambda}{\sigma^2} \int_0^\infty \left[\int_0^\infty f(u,x) f(u-\tau,x)\,dH(x)\right] du \tag{85}$$

és $R(\tau)$ τ-nak páros függvénye.

BIZONYÍTÁS: Tekintsük $\theta(u) = \eta^*(u) + \eta^*(u-\tau)$ folyamatot. Ez a folyamat szintén stacionárius és csupán abban különbözik az előzőtől, hogy $f(u,\chi)$ helyett $f(u,\chi) + f(u-\tau,\chi)$ szolgáltatja az $u=0$ időpontban kezdődött jel időbeli lefolyását. Erre nézve fennáll

$$\begin{aligned} D^2\{\theta(u)\} &= \lambda \int_0^\infty \left[\int_0^\infty (f(u,x) + f(u-\tau,x))^2\,dH(x)\right] du = 2\sigma^2 + \\ &+ 2\lambda \int_0^\infty \left[\int_0^\infty f(u,x) f(u-\tau,x)\,dH(x)\right] du \end{aligned} \tag{86}$$

Másrészt pedig általánosan érvényes, hogy ξ_1 és ξ_2 valószínűségi változók összegének szórásnégyzete

$$D^2\{\xi_1 + \xi_2\} = \sigma_1^2 + 2R\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2, \tag{87}$$

ahol σ_1^2, illetve σ_2^2 jelenti ξ_1, illetve ξ_2 szórásnégyzetét és R jelenti ξ_1 és ξ_2 korrelációs koefficiensét. $\xi_1 = \eta^*(u)$ és $\xi_2 = \eta^*(u-\tau)$ választással azt nyerjük, hogy

$$D^2\{\theta(u)\} = 2\sigma^2 + 2\sigma^2 R(\tau). \tag{88}$$

(86) és (88) összehasonlításából adódik (85).

Stacionárius sztochasztikus folyamatokra A. JA. HINCSIN [13] BOCHNER tételére hivatkozva bebizonyítja, hogy annak a szükséges és elegendő feltétele, hogy $R(\tau)$ egy stacionárius folyamat korrelációs függvénye legyen, az, hogy előállítható legyen a következő alakban:

$$R(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}\cos\tau\omega\, dF(\omega), \tag{89}$$

ahol $F(\omega)$ egy valószínűségi eloszlásfüggvény. $F(\omega)$-át a processzus spektrális függvényének nevezzük.

A fizikában egy ilyen sztochasztikus processzus spektrális függvénye alatt:

$$G(\omega)=m^2+\sigma^2[F(\omega)-F(-\omega)] \tag{90}$$

függvényt értik, melynek szemléletes jelentése a következő: Ha $\eta^*(u)$-t áramnak tekintjük, melyet egységnyi ellenálláson vezetünk keresztül, úgy a leadott átlagos teljesítmény

$$\lim_{T\to\infty} M\left\{\frac{1}{T}\int_0^T[\eta^*(u)]^2\,du\right\}=M\{[\eta^*(u)]^2\}=m^2+\sigma^2 \tag{91}$$

és ennek a teljesítménynek a $0\leqq\omega<\infty$ frekvenciákra való eloszlását szolgáltatja $G(\omega)$, amely a $(0,\omega)$ frekvenciasávban leadott teljesítményt adja. Itt ω körfrekvenciát jelent, azaz $\omega=2\pi f$, ahol f a közönséges frekvenciát jelöli.

Ezután $F(\omega)$ meghatározásával fogunk foglalkozni.

Tegyük fel, hogy $f(u,x)$ minden véges x értékekre abszolút és négyzetesen integrálható függvény, azaz

$$\int_0^{\infty}|f(u,x)|^p\,du<\infty \quad (p=1,2). \tag{92}$$

Ekkor mint ismeretes, $f(u,x)$ előállítható Fourier-integrál alakjában. Legyen

$$f(u,x)=\int_{-\infty}^{\infty}A(\omega,x)e^{i\omega u}\,d\omega, \tag{93}$$

ahol

$$A(\omega,x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}f(u,x)e^{-i\omega u}\,du. \tag{94}$$

A fizikai irodalomban $2|A(\omega,x)|$-et tekintik $f(u,x)$ spektrális előállításban az ω frekvenciájú komponens amplitudó-sűrűségfüggvényének.

Ebben az esetben PLANCHEREL tételéből következik, hogy

$$\int_0^{\infty}[f(u,x)]^2\,du=4\pi\int_0^{\infty}|A(\omega,x)|^2\,d\omega. \tag{95}$$

Ha $f(u,x)$ négyzetesen integrálható, úgy $f(u,x)+f(u-\tau,x)$ is négyzetesen integrálható és akkor erre alkalmazva PLANCHEREL tételét, egyszerűen adódik, hogy fennáll

$$\int_0^{\infty}[f(u,x)+f(u-\tau,x)]^2\,du=4\pi\int_0^{\infty}|A(\omega,x)|^2(2+2\cos\omega\tau)\,d\omega. \tag{96}$$

Innen (95) tekintetbevételével következik, hogy

$$(97)\qquad \int_0^\infty [f(u,x)f(u-\tau,x)]\,du = 4\pi\int_0^\infty |A(\omega,x)|^2 \cos\omega\tau\,d\omega.$$

Képezzük mindkét oldal Stieltjes integrálját $H(x)$-szerint

$$(98)\qquad \int_0^\infty\left[\int_0^\infty f(u,x)f(u-\tau,x)\,du\right]dH(x) = 4\pi\int_0^\infty\left[\int_0^\infty |A(\omega,x)|^2\cos\omega\tau\,d\omega\right]dH(x).$$

Ha feltételezzük, hogy a (85) alatti korrelációs függvény $\tau=0$-ra létezik, úgy ezek az integrálok is léteznek és egyszerűen belátható, hogy az integráció sorrendje felcserélhető. Így

$$(99)\qquad \begin{aligned} R(\tau) &= \frac{\lambda}{\sigma^2}\int_0^\infty\left[\int_0^\infty f(u,x)f(u-\tau,x)\,dH(x)\right]du = \\ &= \frac{4\omega\lambda}{\sigma^2}\int_0^\infty\left[\int_0^\infty |A(\omega,x)|^2\,dH(x)\right]\cos\omega\tau\,d\omega. \end{aligned}$$

Ez az előállítás azt is mutatja, hogy a HINCSIN-féle (89)-es előállításban szereplő $F(\omega)$ függvény ω-szerint differenciálható, $F'(\omega)$, ω-nak páros függvénye éspedig

$$(100)\qquad F'(\omega) = \frac{2\pi\lambda}{\sigma^2}\int_0^\infty |A(\omega,x)|^2\,dH(x).$$

Ez az előállítás valamennyi ω-ra érvényes, mivel $|A(\omega,x)|$, ω-nak páros függvénye.

Megjegyezzük, hogy G. PÓLYA [14] karakterisztikus függvényekről szóló munkájában kimondott tétel szerint, ha $R(\tau)$-ról feltesszük, hogy $\tau>0$-ra konvex, úgy következik, hogy a HINCSIN-féle (89)-es előállításban szereplő $F(\omega)$ eloszlásfüggvény $\omega\neq 0$-ra minden esetre differenciálható és differenciálhányadosa ω-nak páros függvénye.

Kimondhatjuk tehát a következő tételt:

6. TÉTEL. *Tekintsük a fent definiált $\eta^*(u)$ sztochasztikus folyamatot, melyről feltételezzük, hogy a* (85) *alatti korrelációs függvénye létezik. Tegyük fel továbbá, hogy $f(u,x)$ a tekintetbe jövő x értékekre abszolút és négyzetesen integrálható, ekkor $R(\tau)$ korrelációs függvény Hincsin-féle* (89) *előállításában szereplő $F(\omega)$ eloszlásfüggvény ω szerint differenciálható és fennáll:*

$$(101)\qquad F'(\omega) = \frac{2\pi\lambda}{\sigma^2}\int_0^\infty |A(\omega,x)|^2\,dH(x).$$

A fent említett $0 \leqq \omega < \infty$-ra értelmezett $G(\omega)$ spektrális eloszlás összetevődik egy $\omega = 0$ helyen lévő m^2 nagyságú ugrásból és egy folytonos szakaszból, melynek sűrűségfüggvénye

$$G'(\omega) = 4\pi\lambda \int_0^\infty |A(\omega, x)|^2 dH(x). \tag{102}$$

MEGJEGYZÉS: Ha $f(u, \chi) = \chi f(u)$ és $f(u)$ Fourier-transzformáltja

$$A(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty f(u) e^{-iu\omega} du, \tag{103}$$

továbbá

$$M_2 = \int_0^\infty x^2 dH(x), \tag{104}$$

úgy $A(\omega, x) = xA(\omega)$ és

$$G'(\omega) = 4\pi\lambda M_2 |A(\omega)|^2 \tag{105}$$

és (85) alapján

$$R(\tau) = \frac{\lambda M_2}{\sigma^2} \int_0^\infty f(u) f(u - \tau) du, \tag{106}$$

ahol

$$\sigma^2 = \lambda M_2 \int_0^\infty [f(u)]^2 du. \tag{107}$$

9. §. *Példák*

Ebben a fejezetben csupán $\eta^*(u)$ folyamattal fogunk foglalkozni és feltesszük, hogy $f(u, \chi) = \chi e^{-\alpha u}$, ahol χ eloszlásfüggvénye $H(x)$. Ezt a folyamatot elektronsokszorozókkal történő részecskeszámlálásra alkalmazzuk.

Most λ jelenti az elektronsokszorozó katódjához érkező korpuszkulák időbeli sűrűségét. χ jelenti az egyes elektronok által létrehozott feszültséglökések amplitudóit. $\alpha = 1/RC$, ahol RC az észlelő berendezés időállandója. Ha az erősítő küszöbfeszültsége: a úgy a látszólagos esemény sűrűség:

$$\lambda'(a) = \lambda K^*(a), \tag{108}$$

ahol $K^*(a)$ Fourier—Stieltjes transzformáltja

$$R(\omega) = \int_0^\infty e^{i\omega a} dK^*(a) = [1 - \varphi(\omega)] \Phi^*(\omega) \tag{109}$$

és itt

$$\varphi(\omega) = \int_0^\infty e^{i\omega x} dH(x) \tag{110}$$

és

$$\Phi^*(\omega)=\int_0^\infty e^{i\omega x}\,dG^*(x)=\exp\left\{-\frac{\lambda}{\alpha}\int_0^1 \frac{1-\varphi(\omega v)}{v}\,dv\right\}. \tag{111}$$

$G^*(x)$ és $K^*(a)$ ismeretében könnyen meghatározható $\tau^*(t,a), m^*(t,a)$ és $\vartheta^*(a)$ is (33), (39) és (43) formulák segítségével.

1. ÉSZLELÉSI PROBLÉMA. Legyen χ valószínűségi változó exponenciális eloszlású, azaz $H(x)=1-e^{-x/\mu}(x\geqq 0)$, ahol $\mu=M\{\chi\}$ pozitív állandó. Ekkor

$$\varphi(\omega)=(1-i\omega\mu)^{-1} \tag{112}$$

és innen (111) szerint

$$\Phi^*(\omega)=(1-i\omega\mu)^{-\lambda/\alpha} \tag{113}$$

és (109) szerint

$$R(\omega)=(1-i\omega\mu)^{-\frac{\lambda}{\alpha}}-(1-i\omega\mu)^{-\frac{\lambda}{\alpha}-1}. \tag{114}$$

Ezek segítségével

$$G^*(x)=\int_0^x e^{-y/\mu}\frac{(y/\mu)^{\frac{\lambda}{\alpha}-1}}{\Gamma\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)}\frac{dy}{\mu} \tag{115}$$

és

$$K^*(a)=\frac{e^{-a/\mu}(a/\mu)^{\frac{\lambda}{\alpha}}}{\Gamma\left(\frac{\lambda}{\alpha}+1\right)}, \tag{116}$$

ahonnan

$$m(t)=\lambda t\,\frac{e^{-a/\mu}(a/\mu)^{\frac{\lambda}{\alpha}}}{\Gamma\left(\frac{\lambda}{\alpha}+1\right)}, \tag{117}$$

$$\tau(t)=\frac{t}{\Gamma\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)}\int_{a/\mu}^\infty e^{-y}y^{\frac{\lambda}{\alpha}-1}\,dy, \tag{118}$$

$$\vartheta(a)=\alpha\,\frac{\displaystyle\int_{a/\mu}^\infty e^{-y}y^{\frac{\lambda}{\alpha}-1}\,dy}{e^{-a/\mu}(a/\mu)^{\frac{\lambda}{\alpha}}}. \tag{119}$$

Az itt szereplő nem teljes és teljes gammafüggvények hányadosára táblázatok találhatók K. PEARSON [15] könyvében.

Most a látszólagos eseménysűrűség a küszöbfeszültség mellett

$$(120) \qquad \lambda'(a) = \lambda e^{-a/\mu} \frac{(a/\mu)^{\frac{\lambda}{\alpha}}}{\Gamma\left(1+\frac{\lambda}{\alpha}\right)}.$$

Itt μ jelenti egy jel átlagos amplitudóját és $\lambda'(a)$ akkor lesz maximális, ha $a = \frac{\lambda\mu}{\alpha}$. Legyen speciálisan $\lambda/\alpha = 0{,}25$ (például $\lambda = 10^5 \sec^{-1}$ és $\alpha = 4.10^5 \sec^{-1}$ azaz $RC = 2{,}5 \cdot 10^{-6}$ sec) úgy $a = z\mu$ jelöléssel a következő táblázatot állíthatjuk össze:

z	λ'/λ	z	λ'/λ	z	λ'/λ	z	λ'/λ
0,00	0,0000	0,50	0,5627	1,00	0,4059	1,50	0,2724
0,05	0,4963	0,55	0,5482	1,05	0,3908	1,55	0,2613
0,10	0,5614	0,60	0,5329	1,10	0,3761	1,60	0,2505
0,15	0,5910	0,65	0,5171	1,15	0,3618	1,65	0,2401
0,20	0,6041	0,70	0,5011	1,20	0,3478	1,70	0,2301
0,25	0,6076	0,75	0,4850	1,25	0,3342	1,75	0,2205
0,30	0,6049	0,80	0,4688	1,30	0,3211	1,80	0,2112
0,35	0,5980	0,85	0,4528	1,35	0,3083	1,85	0,2023
0,40	0,5881	0,90	0,4369	1,40	0,2959	1,90	0,1937
0,45	0,5762	0,95	0,4212	1,45	0,2840	1,95	0,1855

2. Koincidencia probléma.

a) Véletlen koincidenciák. Legyen ismét χ eloszlásfüggvénye: $H(x) = 1 - e^{-x/\mu} (x \geqq 0)$. Most számláljunk két λ sűrűséggel érkező korpuszkula processzust két ugyanolyan elektronsokszorozóval. Ekkor a küszöbfeszültség mellett a koincidenciák látszólagos sűrűsége (120)-ból, abban λ helyére 2λ-t téve

$$(121) \qquad \lambda_k'(a) = 2\lambda e^{-a/\mu} \frac{(a/\mu)^{\frac{2\lambda}{\alpha}}}{\Gamma\left(1+\frac{2\lambda}{\alpha}\right)}.$$

Ennek maximuma: $a_{\max} = 2\lambda\mu/\alpha$-nál van. Legyen $\lambda/\alpha = 0{,}25$ mint az előző példában és $z = a/\mu$ úgy

z	λ_k'/λ	z	λ_k'/λ	z	λ_k'/λ	z	λ_k'/λ	z	λ_k'/λ
0,000	0,0000	0,05	0,4800	0,55	0,9656	1,05	0,8092	1,55	0,5963
0,001	0,0713	0,10	0,6457	0,60	0,9594	1,10	0,7879	1,60	0,5763
0,002	0,1007	0,15	0,7523	0,65	0,9498	1,15	0,7663	1,65	0,5567
0,003	0,1232	0,20	0,8263	0,70	0,9376	1,20	0,7446	1,70	0,5375
0,004	0,1422	0,25	0,8788	0,75	0,9232	1,25	0,7229	1,75	0,5188
0,005	0,1588	0,30	0,9157	0,80	0,9070	1,30	0,7013	1,80	0,5005
0,010	0,2234	0,35	0,9408	0,85	0,8893	1,35	0,6798	1,85	0,4826
0,020	0,3128	0,40	0,9567	0,90	0,8704	1,40	0,6585	1,90	0,4653
0,030	0,3793	0,45	0,9653	0,95	0,8507	1,45	0,6374	1,95	0,4484
0,040	0,4337	0,50	0,9679	1,00	0,8302	1,50	0,6167	2,00	0,4319

b) Műkoincidenciák. Az előző eredményt azzal a feltevéssel nyertük, hogy az elektronsokszorozók katódjaira érkező korpuszkulák függetlenek egymástól. Most tegyük fel, hogy a két processzus között teljes kapcsolat van; azaz mindkét elektronsokszorozó katódjára eső korpuszkulák pontosan egyidőben érkeznek. Kérdés, mennyi lesz ekkor a látszólagos koincidenciák sűrűsége. Ez a két folyamat visszavezethető egyetlen olyan folyamatra, melyben az események sűrűsége λ és a jelek amplitudóinak eloszlásfüggvénye az előző $1-e^{-x/\mu}(x\geqq 0)$ eloszlás önmagával való kompozíciója, azaz

$$H(x)=1-\left(1+\frac{x}{\mu}\right)e^{-x/\mu}\quad \text{ha}\quad x\geqq 0. \tag{122}$$

Ekkor

$$\varphi(\omega)=(1-i\omega\mu)^{-2} \tag{123}$$

és

$$\log \Phi^*(\omega)=-\frac{\lambda}{\alpha}\int_0^1\frac{1-\varphi(\omega v)}{v}dv=\frac{\lambda}{\alpha}\left[\frac{i\omega\mu}{1-i\omega\mu}-\log(1-i\omega\mu)\right] \tag{124}$$

azaz

$$\Phi^*(\omega)=(1-i\omega\mu)^{-\frac{\lambda}{\alpha}}e^{\frac{\lambda}{\alpha}\frac{i\omega\mu}{1-i\omega\mu}}=e^{-\frac{\lambda}{\alpha}}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(\lambda/\alpha)^j}{j!}(1-i\omega\mu)^{-\frac{\lambda}{\alpha}-j} \tag{125}$$

és

$$R(\omega)=-i\omega\mu\sum_{j=0}^{\infty}\frac{e^{-\frac{\lambda}{\alpha}}(\lambda/\alpha)^j}{j!}\left[(1-i\omega\mu)^{-\frac{\lambda}{\alpha}-1-j}+(1-i\omega\mu)^{-\frac{\lambda}{\alpha}-2-j}\right], \tag{126}$$

ahonnan

$$G^*(x)=\sum_{j=0}^{\infty}e^{-\lambda/\alpha}\frac{(\lambda/\alpha)^j}{j!}\int_0^x e^{-y/\mu}\frac{(y/\mu)^{\frac{\lambda}{\alpha}+j-1}}{\Gamma\left(\frac{\lambda}{\alpha}+j\right)}\frac{dy}{\mu} \tag{127}$$

és

$$K^*(a)=\sum_{j=0}^{\infty}e^{-\lambda/\alpha}\frac{(\lambda/\alpha)^j}{j!}\left[e^{-a/\mu}\frac{(a/\mu)^{\frac{\lambda}{\alpha}+j}}{\Gamma\left(\frac{\lambda}{\alpha}+1+j\right)}+e^{-a/\mu}\frac{(a/\mu)^{\frac{\lambda}{\alpha}+j+1}}{\Gamma\left(\frac{\lambda}{\alpha}+2+j\right)}\right]. \tag{128}$$

A Bessel-függvény definíciója szerint

$$J_\varrho(ix)=\left(\frac{ix}{2}\right)^\varrho\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(x/2)^{2\nu}}{\nu!\,\Gamma(\nu+\varrho+1)} \tag{129}$$

és ennek segítségével

$$K^*(a)=e^{-\left(\frac{\lambda}{\alpha}+\frac{a}{\mu}\right)}(a/\mu)^{\lambda/\alpha}\left[\frac{J_{\frac{\lambda}{\alpha}}\left(i2\sqrt{\frac{\lambda a}{\alpha\mu}}\right)}{\left(i\sqrt{\frac{\lambda a}{\alpha\mu}}\right)^{\lambda/\alpha}}+\frac{a}{\mu}\frac{J_{\frac{\lambda}{\alpha}+1}\left(i2\sqrt{\frac{\lambda a}{\alpha\mu}}\right)}{\left(i\sqrt{\frac{\lambda a}{\alpha\mu}}\right)^{\lambda/\alpha}}\right]. \tag{130}$$

Ha $\lambda/\alpha = n$ egész szám, úgy $K^*(a)$ kiszámítása visszavezethető Poisson-eloszlást mutató valószínűségi változók különbségének az eloszlásfüggvényének meghatározására éspedig

$$K^*(a) = P(\xi_1 - \xi_2 = n) + P(\xi_1 - \xi_2 = n+1), \tag{131}$$

ahol

$$P(\xi_1 = k) = \frac{e^{-\frac{a}{\mu}}(a/\mu)^k}{k!} \tag{132}$$

és

$$P(\xi_2 = k) = \frac{e^{-n} n^k}{k!}. \tag{133}$$

Poisson-eloszlásra jó táblázat található E. C. MOLINA [16] könnyvében.

Ekkor a koincidenciák látszólagos sűrűsége:

$$\lambda_k''(a) = \lambda K^*(a), \tag{134}$$

ahol $K^*(a)$-t (130) szolgáltatja. Legyen mint előbb $\lambda/\alpha = 0{,}25$ és $z = a/\mu$, úgy:

z	λ_k''/λ	z	λ_k''/λ	z	λ_k''/λ	z	λ_k''/λ	z	λ_k''/λ
0,000	0,0000	0,05	0,4059	0,55	0,6749	1,05	0,6588	1,55	0,5707
0,001	0,1528	0,10	0,4814	0,60	0,6793	1,10	0,6520	1,60	0,5603
0,002	0,1817	0,15	0,5303	0,65	0,6820	1,15	0,6446	1,65	0,5497
0,003	0,2011	0,20	0,5664	0,70	0,6831	1,20	0,6367	1,70	0,5391
0,004	0,2161	0,25	0,5944	0,75	0,6828	1,25	0,6283	1,75	0,5284
0,005	0,2285	0,30	0,6167	0,80	0,6813	1,30	0,6194	1,80	0,5176
0,010	0,2717	0,35	0,6345	0,85	0,6786	1,35	0,6102	1,85	0,5068
0,020	0,3231	0,40	0,6487	0,90	0,6750	1,40	0,6007	1,90	0,4960
0,030	0,3575	0,45	0,6599	0,95	0,6704	1,45	0,5909	1,95	0,4852
0,040	0,3840	0,50	0,6685	1,00	0,6650	1,50	0,5809	2,00	0,4744

Az 1. ábrán feltüntettük λ_k'/λ, λ_k''/λ és $(\lambda_k' - \lambda_k'')/\lambda$ mennyiségeket $z = a/\mu$ függvényében. Ha azt akarjuk megvizsgálni, hogy két elektronsokszorozó katódjára eső korpuszkulák érkezési idejei között van-e kapcsolat vagy nincs, úgy mivel mint láttuk függetlenség esetén $\lambda_k'(a)$ volt a véletlen koincidenciák látszólagos sűrűsége és teljes kapcsolat esetén $\lambda_k''(a)$, tehát célszerű a-t úgy megválasztani, hogy $|\lambda_k'(a) - \lambda_k''(a)|$ maximum legyen.

3. Észlelési probléma. Legyen $H(x)$ n-indexhez tartozó gamma-eloszlás, azaz $1 - e^{-x/\mu}(x \geqq 0)$ exponenciális eloszlás önmagával való n-szeres kompozíciója, azaz

$$H(x) = \int_0^x e^{-y/\mu} \frac{(y/\mu)^{n-1}}{(n-1)!} \frac{dy}{\mu} = 1 - \sum_{j=0}^{n-1} e^{-x/\mu} \frac{(x/\mu)^j}{j!}, \tag{135}$$

úgy

$$\varphi(\omega) = (1 - i\omega\mu)^{-n} \tag{136}$$

és

$$\log \Phi^*(\omega) = -\frac{\lambda}{\alpha}\int_0^1 \frac{1-\varphi(\omega v)}{v}\,dv = \tag{137}$$

$$= -\frac{\lambda}{\alpha}\left[\log(1-i\omega\mu)+(n-1)-\sum_{j=1}^{n-1}(1-i\omega\mu)^{-j}\right]$$

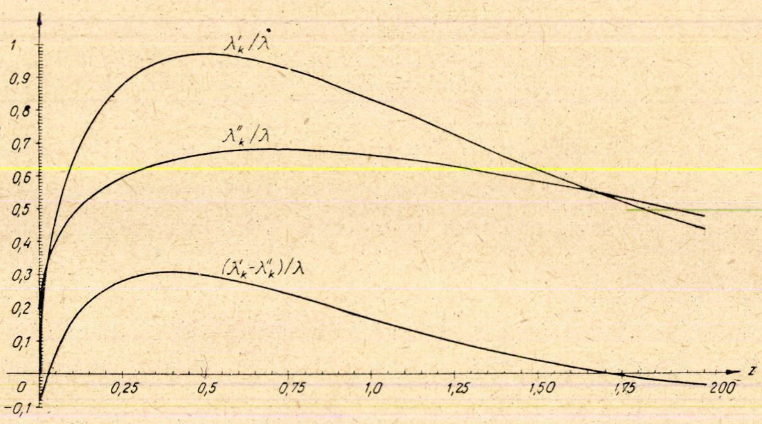
azaz

$$\Phi^*(\omega) = e^{-\frac{\lambda}{\alpha}(n-1)}(1-i\omega\mu)^{-\frac{\lambda}{\alpha}}\,e^{\frac{\lambda}{\alpha}\sum\limits_{j=1}^{n-1}(1-i\omega\mu)^{-j}} = \tag{138}$$

$$= e^{-\frac{\lambda}{\alpha}(n-1)}\sum_{l=0}^{\infty} C_l (1-i\omega\mu)^{-l-\frac{\lambda}{\alpha}},$$

ahol

$$C_l = \sum_{\nu_1+2\nu_2+\dots+(n-1)\nu_{n-1}=l} \frac{1}{\nu_1!\,\nu_2!\cdots\nu_{n-1}!}\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)^{\nu_1+\nu_2+\dots+\nu_{n-1}}. \tag{139}$$



1. ábra

Ekkor

$$G^*(x) = e^{-\frac{\lambda}{\alpha}(n-1)}\sum_{l=0}^{\infty} C_l \int_0^x e^{-y/\mu}\,\frac{(y/\mu)^{\frac{\lambda}{\alpha}+l-1}}{\Gamma\!\left(\frac{\lambda}{\alpha}+l\right)}\,\frac{dy}{\mu}. \tag{140}$$

Továbbá

$$R(\omega) = [1-\varphi(\omega)]\,\Phi^*(\omega) =$$

$$= -i\omega\mu\,[(1-i\omega\mu)^{-1}+\dots+(1-i\omega\mu)^{-n}]\,\Phi^*(\omega) = \tag{141}$$

$$= -i\omega\mu\, e^{-\frac{\lambda}{\alpha}(n-1)}\sum_{r=1}^{\infty} B_r(1-i\omega\mu)^{-\frac{\lambda}{\alpha}-r},$$

ahol

$$B_r = \sum_{l=r-n}^{r-1} C_l. \tag{142}$$

Itt $l \geqq 0$-ra C_l-et (142) definiálja és $l<0$-ra $C_l = 0$. Ennek segítségével

$$(143) \qquad K^*(a) = e^{-\frac{\lambda}{\alpha}(n-1)} \sum_{r=1}^{\infty} B_r e^{-\frac{a}{\mu}} \frac{\left(\frac{a}{\mu}\right)^{\frac{\lambda}{\alpha}+r+1}}{\Gamma\left(\frac{\lambda}{\alpha}+r\right)}.$$

$G^*(x)$ és $K^*(a)$ kiszámítására jó segítséget nyújt PEARSON [15] táblázata. Abban az esetben, ha λ/α egész szám, ezen sorok kiszámítása Poisson-eloszlásra vonatkozó táblázat segítségével végezhető el.

Az előző példánál tárgyalt koincidencia problémára teljes kapcsolat (műkoincidenciák) esetén a fenti formulák felhasználhatók, mivel két gamma-eloszlás kompozíciója ismét gamma-eloszlás.

4. $\eta^*(u)$ folyamat harmonikus analízise. Legyen $H(x)$ eloszlásfüggvény tetszőleges, amelynek első és második momentuma M_1 és M_2 véges. Ha $f(u,\chi) = \chi f(u)$, úgy (106) alapján

$$(144) \qquad R(\tau) = e^{-\alpha|\tau|},$$

függetlenül $H(x)$ eloszlásfüggvénytől.

$G(\omega)$ spektrális eloszlásnak az $\omega = 0$ helyen $m^2 = M_1^2/\alpha^2$ nagyságú ugrása van és $0<\omega<\infty$-ra differenciálható és differenciálhányadosa (105) szerint

$$(145) \qquad G'(\omega) = \frac{2\lambda M_2}{\alpha^2+\omega^2},$$

ugyanis

$$(146) \qquad A(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty e^{-\alpha u} e^{-i\omega u}\, du = \frac{1}{2\pi}\,\frac{1}{\alpha+i\omega}.$$

Végül köszönetemet fejezem ki RÉNYI ALFRÉDnak a dolgozat átolvasásáért és számos értékes megjegyzéséért.

Magyar Tudományos Akadémia
Alkalmazott Matematikai Intézete.

IRODALOM

[1] N. Campbell: The study of discontinuous phenomena [Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, **15** (1909), 117—137].

[2] N. Campbell: Discontinuities in light emission [Proc. Camb. Phil. Soc. **15** (1909), 310—328].

[3] E. N. Rowland: The theory of the mean square variation of a function formed by adding known functions with random phases, and applications to the theories of the shot effect and of light [Proc. Camb. Phil. Soc. **32** (1936), 580—597].

[4] A. Khintchine: Theorie des abklingenden Spontaneffektes [Bull. Acad. Sci. URSS Ser. Math. **3** (1938), 312—323; Zentralblatt für Math. **19** (1939), 224].

[5] S. O. Rice: Mathematical Analysis of Random Noise [Bell. System Technical Journal. **23** (1944), 282—332; **24** (1945), 46—156].

[6] A. Rényi: On some problems concerning Poisson processes [Publicationes Mathematicae (Debrecen) **2** (1951), 66–73].

[7] A. N. Kolmogorov: Über die analytischen Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung [Math. Ann. **104** (1931), 415—458].

[8] W. Feller: On the integrodifferential equations of purely discontinuous Markoff processes [Trans. Amer. Math. Soc. **48** (1940), 488—515].

[9] W. Feller: Zur Theorie der stochastischen Processe [Math. Ann. **113** (1936), 113—160].

[10] A. Khintchine: Asymptotische Gesetze der Wahrscheinlichkeitsrechnung (Berlin (1933) 23).

[11] H. Cramér: Mathematical Methods of Statistics (Princeton, 1946).

[12] A. H. Колмогоров и Ю. В. Прохоров: О суммах случайного числа случайных слагаемых. Усп. Матем. Наук. т IV., быш. 4, (1949) 168—172.

[13] A. Khintchine: Korrelationstheorie der stationär stochastischen Prozesse [Math. Ann. **109** (1934), 604—610].

[14] G. Pólya: Remarks on characteristic functions [Proc. of the Berkeley Symposium. 1949, 115—123].

15] K. Pearson: Tables of Incomplete Γ function (London, 1922).

[16] E. C. Molina: Poisson's Exponential Binomial Limit (New-York, 1945).

FÜGGELÉK

Bemutatta Rényi Alfréd lev. tag az 1953. június 8-án tartott felolvasó ülésen

Ebben a függelékben a dolgozat 3. tételére adunk attól eltérő elemi bizonyítást, amely egyben általánosabb is.

Tekintsünk egy általában időben nem homogén POISSON-féle sztochasztikus folyamatot $0 \leqq t < \infty$ időpontokban. Legyen $(0, t)$ időintervallumban előforduló események várható száma: $A(t)$. Feltesszük, hogy $A(0)=0$ és $A(t)$ t-nek nem csökkenő függvénye. Ekkor mint ismeretes, annak a valószínűsége, hogy $(0, t)$ időközben pontosan n számú esemény fordul elő.

$$P(t, n) = e^{-A(t)} \frac{[A(t)]^n}{n!}. \tag{1}$$

Tegyük fel, hogy a Poisson-folyamatban előforduló minden egyes esemény elindít egy $f(u, \chi)$ időbeli lefolyású jelet, ahol χ valószínűségi változó és u jelenti a jel kezdőpontjától számított időtartamot. Legyen $f(u, \chi) \equiv 0$ ha $u < 0$. Tegyük fel, hogy az egyes jelek lineárisan összegeződnek, azaz ha a Poisson folyamatban $(0, t)$ időközben előforduló események időpontjait: $t_1, t_2, \ldots, t_n$-nel jelöljük és az események által megindított jelek véletlen paraméterei rendre $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_n$ úgy a jelek összegének értéke t időpontban:

$$\eta(t) = \sum_{k=1}^{n} f(t - t_k, \chi_k). \tag{2}$$

Feltesszük, hogy $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_n, \ldots$ független valószínűségi változók, melyek mindegyikének eloszlásfüggvénye: $P(\chi_k \leqq x) = H(x)$.

Célunk az, hogy meghatározzuk $\eta(t)$ valószínűségi változó eloszlásfüggvényét: $P(\eta(t) \leqq x) = F(t, x)$-et valamennyi t értékre. Az eloszlásfüggvény egyértelműen meghatározható a karakterisztikus függvény ismeretében, melyet jelöljünk a következőképpen:

$$\Phi(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} d_x F(t, x). \tag{3}$$

Erre vonatkozóan a következő tételt bizonyítjuk be:

3b. TÉTEL: Ha

$$\varphi(u, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega f(u, x)} dH(x) \tag{4}$$

integrál $0 \leqq u < t$ *értékekre majdnem mindenütt létezik, úgy fennáll*

$$\Phi(t, \omega) = \exp\left\{ -\int_0^t [1 - \varphi(t-u, \omega)]\, dA(u) \right\}. \tag{5}$$

BIZONYÍTÁS: Először bebizonyítjuk a következő segédtételt, amelyen a tétel bizonyítása alapszik:

LEMMA: *Azon feltétel mellett, hogy a fentemlített Poisson-folyamatban $(0, t)$ időközben pontosan n esemény fordul elő, az n számú esemény előfordulási időpontjai úgy tekinthetők, mint n számú független véletlen pont eloszlása $(0, t)$ időintervallumban, melyek mindegyikére annak a valószínűsége, hogy $(0, x)$ időintervallumba esik* $(0 \leqq x \leqq t): A(x)/A(t)$.

Legyen η_t valószínűségi változó a Poisson-folyamatban $(0, t)$ időintervallumban előforduló események száma és legyenek $0 \leqq \xi_1 \leqq \xi_2 \leqq \ldots \leqq \xi_n \leqq \ldots$ az egymást követő események időpontjai. Ekkor állításunk igazolására elegendő kimutatni, hogy $0 \leqq x_1 \leqq x_2 \leqq \ldots \leqq x_n \leqq \ldots$ értékekre fennáll a következő feltételes valószínűségeloszlás

$$P(\xi_1 \leqq x_1, \xi_2 \leqq x_2, \ldots, \xi_n \leqq x_n \mid \eta_t = n) = \tag{6}$$

$$= \sum_{j_1, \ldots, j_n} \frac{n!}{j_1! j_2! \ldots j_n!} \left[\frac{A(x_1)}{A(t)}\right]^{j_1} \left[\frac{A(x_2) - A(x_1)}{A(t)}\right]^{j_2} \ldots \left[\frac{A(x_n) - A(x_{n-1})}{A(t)}\right]^{j_n},$$

ahol az összegezés azon j értékekre terjesztendő ki, amelyekre

$$j_1 \geqq 1, j_1 + j_2 \geqq 2, \ldots, j_1 + j_2 + \cdots + j_{n-1} \geqq n - 1 \quad \text{és} \quad j_1 + j_2 + \cdots + j_n = n.$$

A jobboldal ugyanis $(0, t)$ időintervallumban az említett törvény szerint elosztott n számú független pont nagyság szerint rendezett koordinátáinak, azaz $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ n számú valószínűségi változó, együttes eloszlásfüggvényét adja.

A feltételes valószínűségek definíciója szerint

$$P(\xi_1 \leqq x_1, \xi_2 \leqq x_2, \ldots, \xi_n \leqq x_n \mid \eta_t) = \frac{P(\xi_1 \leqq x_1, \xi_2 \leqq x_2, \ldots, \xi_n \leqq x_n ; \eta_t = n)}{P(\eta_t = n)}. \tag{7}$$

Most

$$P(\xi_1 \leqq x_1, \xi_2 \leqq x_2, \ldots, \xi_n \leqq x_n ; \eta_t = n) = \tag{8}$$

$$= e^{-A(t)} \sum_{j_1, \ldots, j_n} \frac{[A(x_1)]^{j_1}}{j_1!} \frac{[A(x_2) - A(x_1)]^{j_2}}{j_2!} \ldots \frac{[A(x_n) - A(x_{n-1})]^{j_n}}{j_n!},$$

ahol az összegezés kiterjesztendő: $j_1 \geqq 1, j_1 + j_2 \geqq 2, \ldots, j_1 + j_2 + \cdots + j_{n-1} \geqq n - 1$ és $j_1 + j_2 + \cdots + j_n = n$ értékekre. (8) jobboldala megegyezik annak a valószínűségével, hogy a Poisson-folyamatban $(0, x_1), (x_1, x_2), \ldots, (x_{n-1}, x_n), (x_n, t)$ intervallumokban rendre $j_1, j_2, \ldots, j_n, 0$ esemény fordul elő, ahol a lehetséges j értékeket az előző egyenlőtlenségek definiálják.

Mivel (1) szerint

$$P(\eta_t = n) = e^{-A(t)} \frac{[A(t)]^n}{n!}, \tag{9}$$

következőleg (8) és (9) felhasználásával (7) kifejezés jobboldala, megegyezik (6)-tal, amit bizonyítani kívántunk.

Ezután rátérünk a tétel bizonyítására. Először is megállapítjuk, hogy egy $(0, t)$ időközbe eső véletlen pontból (melynek eloszlástörvényét: $A(x)/A(t)$ szolgáltatja) mint kezdőpontból elinduló jel t időpontban mért nagyságának karakterisztikus függvénye mivel egyenlő. Ha tudjuk, hogy a jel u időpontban kezdődött, úgy ezen feltétel mellett a karakterisztikus függvény

(10) $$\varphi(u, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega f(t-u, x)} dH(x).$$

Mivel u eloszlásfüggvénye $A(u)/A(t)$, ezért egy véletlen pont által elindított jel t időpontban mért nagyságának karakterisztikus függvénye a feltételes várható értékekre vonatkozó tétel felhasználásával:

(11) $$\psi_t(\omega) = \frac{1}{A(t)} \int_0^t \varphi(t-u, \omega) dA(u).$$

Ha $(0, t)$ intervallumban n számú esemény fordul elő, úgy segédtételünk szerint a jelek értékeinek összege t időpontban n számú független valószínűségi változó összege, melyek mindegyikének karakterisztikus függvényét (11) szolgáltatja. Így az összeg karakterisztikus függvénye: $[\psi_t(\omega)]^n$.

Mivel n esemény bekövetkezésének valószínűségét (1) formula szolgáltatja, következőleg

(12) $$\Phi(t, \omega) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-A(t)} \frac{[A(t)]^n}{n!} [\psi_t(\omega)]^n = e^{-A(t)[1-\psi_t(\omega)]}.$$

Ez megegyezik (5) formulával és éppen ezt kívántuk bizonyítani.

Magyar Tudományos Akadémia
Alkalmazott Matematikai Intézete.