ÖSSZETETT POISSON ELOSZLÁSOKRÓL, IV

(Megjegyzések az additív folyamatok elméletéhez)

PRÉKOPA ANDRÁS

Bemutatta Rényi Alfréd lev. tag az 1952. november 3-án tartott felolvasó ülésen

Bevezetés

Jelen dolgozatban a következő jelöléseket fogjuk használni. Legyen $\{\xi_t\}$ egy sztohasztikus folyamat; a $\xi_{t_2}-\xi_{t_1}$ különbségre vezessük be a következő jelölést:

$$\xi_J = \xi_{t_2} - \xi_{t_1},$$

ahol J a véges (t_1, t_2) intervallumot jelöli. Jelentse továbbá $W_\lambda(J)$ a következő valószínűséget:

$$W_\lambda(J) = \mathbf{P}(\xi_J = \lambda),$$

$F(x, J)$ pedig a ξ_J változó eloszlásfüggvényét. $F(x, J)$ karakterisztikus függvényét jelölje $f(u, J)$:

$$f(u, J) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux}\, dF(x, J).$$

A tárgyalás alapját képező folyamatot egy véges, zárt I intervallumban fogjuk tekinteni. Ebben az intervallumban $\{\xi_t\}$ tegyen eleget a következő feltételeknek: (J-vel ezentúl I valamely részintervallumát fogjuk jelölni.)

A) Ha $J_1, J_2, \ldots, J_n$ az I intervallum egy felosztását jelenti $I = J_1 + J_2 + \cdots + J_n$, a megfelelő $\xi_{J_1}, \xi_{J_2}, \ldots, \xi_{J_n}$ változók függetlenek;

B) A ξ_J változók egy valós számokból álló megszámlálható halmaz elemeit vehetik fel, mely halmaz független J speciális választásától.

Az A) feltételből következik, hogy ennek a halmaznak λ_k-val és λ_l-lel együtt tartalmaznia kell egy λ_m-et úgy, hogy $\lambda_k + \lambda_l = \lambda_m$, másszóval egy félcsoportot kell alkotnia az összeadásra nézve.

C) $1 - W_0(J) = 1 - \mathbf{P}(\xi_J = 0)$ folytonos intervallumfüggvény, vagyis

$$1 - W_0(J) \to 0,$$

ha J összehúzódik egy rögzített pontra.

A C) feltételből következik, hogy $1 - W_0(J)$ egyenletesen is folytonos I-ben.* Ugyancsak a C) feltételből következik, hogy $1 - f(u, J)$ is egyenletesen

* Legyen $\varphi(J)$ egy folytonos intervallumfüggvény az I zárt véges intervallumban; ebben az esetben $\varphi(J)$ egyenletesen is folytonos I-ben. Ellenkező esetben ugyanis léteznék egy oly $\varepsilon_0 > 0$, hogy kiválasztva egy alkalmas J_n sorozatot $|\varphi(J_n)| \geqq \varepsilon_0$, annak ellenére, hogy $|J_n| \to 0$. Jelentse d az J_n intervallumok középpontjainak egy sűrűsödési helyét, akkor kiválaszthatunk egy olyan J_{k_n} részsorozatot, hogy ezen részsorozat intervallumainak a középpontja konvergál d-hez. Mivel a J_{k_n} intervallumsorozat a d pontra összehúzódik, következik, hogy $\varphi(J_{k_n}) \to 0$, ami ellentmondás.

folytonos mégpedig u-tól függetlenül, ugyanis

$$|1-f(u,J)| \leqq 2(1-W_0(J)),$$

továbbá, hogy a ξ_t folyamat gyengén folytonos, hiszen

$$\mathbf{P}(|\xi_J|>\varepsilon) \leqq 1-\mathbf{P}(\xi_J=0) \to 0.$$

Az A) és C) feltételekből következik, hogy ξ_I korlátlanul osztható eloszlással rendelkezik ([1] 161—163.) és így $\log f(u,I)$ előállítható kanonikus alakban:

$$\log f(u,I)=i\gamma(I)u-\frac{\sigma^2(I)}{2}u^2+$$

(1)
$$+\int_{-\infty}^{0}\left(e^{iux}-1-\frac{iux}{1+x^2}\right)dM(x,I)+\int_{0}^{\infty}\left(e^{iux}-1-\frac{iux}{1+x^2}\right)dN(x,I),$$

ahol $\gamma(I)$ és $\sigma(I)$ állandók, $M(x,I)$ és $N(x,I)$ nemcsökkenő függvények a $(-\infty,0)$, illetve a $(0,\infty)$ intervallumokban; $M(-\infty)=N(\infty)=0$ és

$$\int_{-1}^{0}x^2\,dM(x,I)+\int_{0}^{1}x^2\,dN(x,I)<\infty.$$

A mi esetünkben az (1) formula egy egyszerűbb kifejezésre redukálódik. Ezen dolgozat legfőbb célja az, hogy ezt az egyszerűsítést elvégezze és a kapott kifejezésben $M(x,I)$ és $N(x,I)$ konkrét jelentését megadja.

1. §. $M(x,I)$ és $N(x,I)$ jelentése

TÉTEL: ha az A) B) C) feltételek teljesülnek, akkor az (1) formula a a következő alakba írható:

(2)
$$\log f(u,I)=\sum_{k=1}^{\infty}C_{\lambda_k}(I)(e^{i\lambda_k u}-1),$$

ahol

(3)
$$C_{\lambda_k}(I)=\int_I W_{\lambda_k}(J),\ \lambda_k\neq 0$$

és

(4)
$$\sum_{k=1}^{\infty}C_{\lambda_k}(I)=\int_I(1-W_0(J))<\infty.$$

(3)-ban (4)-ben az integrálok a BURKILL-féle értelemben vannak véve.

BIZONYÍTÁS. Először kimutatjuk, hogy $\sigma(I)=0$. Valóban az (1) formulában szereplő $f(u,I)$ függvény két karakterisztikus függvény szorzata:

$$f(u,I)=f_1(u,I)f_2(u,I),$$

ahol

$$f_1(u,I)=e^{-\frac{\sigma^2(I)}{2}u^2}$$

a következő normális eloszlás karakterisztikus függvénye:

$$F_1(x, I) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma(I)}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2(I)}} dy.$$

Mivel

$$|F_1(x+h, I) - F_1(x, I)| \leqq \frac{|h|}{\sqrt{2\pi\sigma(I)}}$$

és

$$F(x, I) = \int_{-\infty}^{\infty} F_1(x-y, I)\, dF_2(y, I),$$

következik, hogy

$$|F(x+h, I) - F(x, I)| \leqq \frac{|h|}{\sqrt{2\pi\sigma(I)}}$$

ez azonban ellentmondás, mert feltételeztük, hogy $F(x, I)$ lépcsős függvény. (Ezt a bizonyítást lásd [2], 94—95.)

$f(u, I)$ az u változó majdnem periodikus függvénye:

$$f(u, I) = \sum_{k=0}^{\infty} W_{\lambda_k}(I) e^{i\lambda_k u}.$$

$f(u, I)$-vel együtt $\log f(u, I)$ is majdnem periodikus. Ehhez csak azt kell belátnunk, hogy $|f(u, I)| \geqq \delta > 0$, mert $\log z$ folytonos a $0 < \delta \leqq |z| \leqq 1$ tartományban és ismeretes, hogy egy majdnem periodikus függvény folytonos függvénye is majdnem periodikus. Ha elvégezzük az $I = J_1 + J_2 + \cdots + J_n$ felbontást, ahol $|J_k|$ (J_k hossza) elegendő kicsiny ahhoz, hogy a C) feltétel következtében $|f(u, J_k)| \geqq \eta > 0$, következik, hogy

$$|f(u, I)| = \prod_{k=1}^{n} |f(u, J_k)| \geqq \eta^n = \delta > 0.$$

Szorozzuk meg (1) mindkét oldalát $\frac{1}{2T}$-vel és integráljunk a $(-T, T)$ intervallumban; ha Fubini tételét alkalmazva először az u változó szerint integrálunk, azt kapjuk, hogy

$$-\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \log f(u, I)\, du = \int_{-\infty}^{0} \left(1 - \frac{\sin Tx}{Tx}\right) dM(x, I) + \int_{0}^{\infty} \left(1 - \frac{\sin Tx}{Tx}\right) dN(x, I).$$

Ha $T \to \infty$, akkor mivel $\log f(u, I)$ majdnem periodikus, a baloldalon véges határértéket kapunk, figyelembe véve még, hogy

$$1 - \frac{\sin Tx}{Tx} \geqq 0,$$

alkalmazhatjuk Fatou tételét, melynek segítségével azt kapjuk, hogy

$$\int_{-\infty}^{0} dM(x, I) + \int_{0}^{\infty} dN(x, I) < \infty. \tag{5}$$

$M(x, I)$ és $N(x, I)$ tehát korlátos változásúak x szerint, másszóval az $x=0$ pontban véges határértékkel rendelkeznek. (5) alapján az (1) formula a következő alakra hozható:

$$\log f(u, I) = i\gamma'(I)u + \int_{-\infty}^{0} (e^{iux}-1)\, dM(x, I) + \int_{0}^{\infty} (e^{iux}-1)\, dN(x, I), \tag{6}$$

ahol

$$\gamma'(I) = \gamma(I) - \int_{-\infty}^{0} \frac{x}{1+x^2}\, dM(x, I) - \int_{0}^{\infty} \frac{x}{1+x^2}\, dN(x, I).$$

Itt $\gamma'(I)=0$, ugyanis (6) baloldala és jobboldalának két utolsó tagja u-nak korlátos függvénye.

$M(x, I)$ és $N(x, I)$ ugró függvények; ez abból következik, hogy (6) baloldalán majdnem periodikus függvény áll. Ugyanis, ha elvégezzük a következő felbontást:

$$M(x, I) = M_1(x, I) + M_2(x, I),\quad N(x, I) = N_1(x, I) + N_2(x, I),$$

ahol mindkét kifejezésben az első tag ugró függvényt jelöl, míg a második tag egy nemcsökkenő folytonos függvényt, akkor (6)-ból egy alkalmas átrendezéssel azt kapjuk, hogy a majdnem periodikus rész leválasztása után visszamaradó rész:

$$\varphi(u, I) = \int_{\infty}^{0} e^{iux} dM_2(x, I) + \int_{0}^{\infty} e^{iux}\, dN_2(x, I).$$

Az utóbbi kifejezés jobboldala csak abban az esetben lehet majdnem periodikus ha $M_2(x, I) = \text{konst.}$ és $N_2(x, I) = \text{konst.}$ Valóban, ez könnyen belátható, ha tekintjük az $M(\varphi(u, I)\, e^{-i\lambda u})$* kifejezést és kimutatjuk, hogy ez minden valós λ-ra $M_2(x, I)$ és $N_2(x, I)$ folytonossága következtében eltűnik.

Most kimutatjuk, hogy $\log f(u, I)$ ugyanazon exponensekkel rendelkezik, mint $f(u, I)$, továbbá, hogy a tétel többi állításai is igazak. Ennek bizonyításához szükségünk van egy lemmára.

LEMMA: ha egy sztochasztikus folyamat eleget tesz az A) B) és C) feltételeknek, akkor

$$\log f(u, I) = \int_I (f(u, J) - 1), \tag{7}$$

és a Burkill integrált értelmező összegek egyenletesen konvergálnak u szerint $\log f(u, I)$-hez, pontosabban

$$\left|\log f(u, I) - \sum_{k=1}^{n} (f(u, J_k) - 1)\right| \leqq K \max (1 - W_0(J_k)) \to 0. \tag{8}$$

* $M(\varphi(u, I) e^{-i\lambda u}) = \lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \varphi(u, I) e^{-i\lambda u} du.$

ha

$$\max |J_k| \to 0.$$

BIZONYÍTÁS. Tudjuk, hogy $|f(u,J)|^2$ $f(u,J)$-vel együtt majdnem periodikus karakterisztikus függvény és mivel $|f(u,J)|^2 \geqq \delta^2 > 0$, $\log |f(u,J)|^2$ hasonlóképpen majdnem periodikus. Jelöljük az $|f(u,J)|^2$ által meghatározott eloszlásban a 0 valószínűségét $W_0^*(J)$-vel, akkor

$$W_0^*(J) = \sum_{k=0}^{\infty} W_{\lambda_k}^2(J) = M(|f(u,J)|^2) \tag{9}$$

(9) alapján

$$W_0^*(J) - 1 \leqq W_0^2(J) + 1 - W_0(J) - 1 = W_0(J)(W_0(J) - 1),$$

tehát ha $|J|$ olyan kicsiny, hogy $W_0(J) > \frac{1}{2}$, akkor

$$1 - W_0(I) < 2(1 - W_0^*(J)). \tag{10}$$

Kimutatjuk, hogy $1 - W_0(J)$ korlátos változású.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n}(1 - W_0(J_k)) &\leqq 2\sum_{k=1}^{n}(1 - W_0^*(J_k)) = 2M\left(\sum_{k=1}^{n}(1 - |f(u,J_k)|^2)\right) \leqq \\ &\leqq -2M\left(\sum_{k=1}^{n}\log|f(u,J_k)|^2\right) = -2M(\log|f(u,I)|^2) = K. \end{aligned} \tag{11}$$

Itt felhasználtuk az $1 - x \leqq -\log x$ $(0 < x \leqq 1)$ egyenlőtlenséget. (8) a következőképpen igazolható:

$$\begin{aligned} &\left|\log f(u,I) - \sum_{k=1}^{n}(f(u,J_k) - 1)\right| \leqq \sum_{k=1}^{n}\left|\log f(u,J_k) - (f(u,J_k) - 1)\right| \leqq \\ &\leqq \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=2}^{\infty}\frac{1}{2}|f(u,J_k) - 1|^l \leqq \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{|f(u,J_k) - 1|}{1 - |f(u,J_k) - 1|} \leqq \\ &\leqq \sum_{k=1}^{n}|f(u,J_k) - 1|^2 \leqq 4\sum_{k=1}^{n}(1 - W_0(J_k))^2 \leqq K\max(1 - W_0(J_k)) \to 0. \end{aligned}$$

Mivel (8)-ban a sorozat egyenletesen konvergál $\log f(u,I)$-hez, következik, hogy

$$M\left(\sum_{k=1}^{n}(f(u,J_k) - 1)e^{-i\lambda u}\right) \to M(\log f(u,I)\, e^{-i\lambda u}),$$

vagyis ha $\log f(u,I)$ Fourier együtthatóit $C_{\lambda_k}(I)$-vel jelöljük, akkor

$$\left\{\begin{aligned} C_{\lambda_k}(I) &= \int_I W_{\lambda_k}(J), \quad \lambda_k \neq 0 \\ C_0(I) &= \int_I (W_0(J) - 1), \end{aligned}\right. \tag{12}$$

továbbá (6) következtében

$$-C_0(I) = \sum_{k=1}^{\infty} C_{\lambda_k}(I). \tag{13}$$

Ezzel a tétel be van bizonyítva.

Lehetséges, hogy a (2) formulában bizonyos λ_k értékekhez tartozó $C_{\lambda_k}(I)$ 0-val egyenlő. Ennek egy elegendő feltétele, hogy a zárt I intervallum minden pontjában

$$W_{\lambda_k}(J) = o(|J|),$$

miközben J a tekintett pontra összehúzódik. Ugyanis ebben az esetben

$$\int_I W_{\lambda_k}(J) = 0.$$

A bizonyítás nagyon egyszerű. Mivel a $\dfrac{W_{\lambda_k}(J)}{|J|}$ függvény folytonos a zárt I intervallumban, következik, hogy egyenletesen is folytonos. Másszóval, ha $\varepsilon > 0$ tetszőleges és $\max|J_l| < \delta$, következik, hogy $\dfrac{W_{\lambda_k}(J_l)}{|J_l|} < \varepsilon$ és így $\sum_{l=1}^{n} W_{\lambda_k}(J_l) < \varepsilon |I|$, vagyis (13) következik.

2. §. *Direkt bizonyítás*

Az előbb bebizonyított tételre direkt bizonyítást* is adhatunk, ha felhasználjuk a majdnem periodikus függvények elméletét.

Ebben az esetben nem használjuk fel az (1) formulát, de szükségünk van az 1. §. lemmájára. Az 1. §. lemmája szerint — amint azt (12)-ből láthatjuk — $\log f(u, I) - C_0(I)$ Fourier együtthatói a $C_{\lambda_k}(I) \geqq 0$ $(\lambda_k \neq 0)$ nem negatív számok. Ismeretes, hogy ha egy majdnem periodikus függvény Fourier együtthatói nem negatívok, akkor az összegük konvergál. (lásd [3], 62.):

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_{\lambda_k}(I) < \infty. \tag{14}$$

(14)-ből következik, hogy $\log f(u, I) - C_0(I)$ Fourier sora egyenletesen konvergál és így

$$\log f(u, I) = C_0(I) + \sum_{k=1}^{\infty} C_{\lambda_k}(I)\, e^{i\lambda_k u} \tag{15}$$

Ha u helyébe 0-t helyettesítünk, azt kapjuk, hogy

$$C_0(I) + \sum_{k=1}^{\infty} C_{\lambda_k}(I) = 0, \tag{16}$$

tehát

$$\log f(u, I) = \sum_{k=1}^{\infty} C_{\lambda_k}(I)\,(e^{i\lambda_k u} - 1),$$

amely éppen (2)-t bizonyítja, míg (12), (14) és (16) (3)-at és (4)-et igazolják.

* A (2) formulára egy direkt bizonyítást találunk [2]-ben arra az esetre, ha a λ_k számok összessége a nem negatív egész számok összességével azonos.

(14) bizonyítása nagyon egyszerűen elvégezhető abban az esetben, ha a λ_k számok összessége azonos az egész számok összességével. Valóban ebben az esetben $\log f(u, I)$ 2π szerint periodikus függvény. Mivel $f(u, I) = f(-u, I)$, $\log f(u, I)$ valós része páros függvény, képzetes része pedig páratlan. Következésképpen

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\log|f(u, I)| - C_0(I))\cos k u\, du = \begin{cases} \dfrac{C_k(I) + C_{-k}(I)}{2} & \text{ha } k \neq 0 \\ 0 & \text{ha } k = 0 \end{cases}$$

Az integrandusz folytonos, páros függvény és Fourier együtthatói nem negatívok, tehát*

$$\sum_{k \neq 0}(C_k(I) + C_{-k}(I)) < \infty.$$

3. §. $W_k(I)$ explicit alakja

Egyszerűség kedvéért szorítkozzunk arra az esetre, amikor a λ_k számok egész számok. Ebben az esetben (2) a következő alakban írható

$$\log f(u, I) = \sum_{k \neq 0} C_k(I)(e^{i\lambda_k u} - 1). \tag{17}$$

Fejezzük ki a $W_k(I)$ valószínűségeket a $C_k(I)$ intervallum-függvények segítségével. (17)-ből következik, hogy a ξ_I változó, amelyet most $\xi(I)$-vel fogunk jelölni a következőképpen állítható elő

$$\xi(I) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} k\xi_k(I) \quad \text{vagy} \quad \xi(I) = \sum_{k=1}^{\infty} k(\xi_k(I) - \xi_{-k}(I)), \tag{18}$$

ahol a $\xi_k(I)$ változók függetlenek és rendre $C_k(I)$ várható értékkel rendelkeznek. Tekintsük most (18) második kifejezését. Itt független, Poisson-eloszlású változók különbségei állanak. Általában ha ξ és η két λ és μ várható értékkel rendelkező Poisson eloszlású változó, a

$$\zeta = \xi - \eta$$

különbség csak egész értékeket vehet fel, továbbá

$$\mathbf{P}(\zeta = n) = \lambda^n e^{-(\lambda+\mu)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda\mu)^k}{k!(k+n)!} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

és

$$\mathbf{P}(\zeta = -n) = \mu^n e^{-(\lambda+\mu)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda\mu)^k}{k!(k+n)!} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

* PALEY tételének egy könnyen bizonyítható speciális esete a következő: ha egy páros folytonos függvény Fourier együtthatói nem negatívok, akkor az összegük konvergál. Valóban

$$\frac{1}{2} S_n(0) \leq \frac{n+1}{2n+1} S_n(0) \leq \frac{1}{2n+1} \sum_{k=n}^{2n} S_k(0) \leq \sigma_{2n}(0),$$

ahol σ_n az n-edik Fejér közepet jelenti.

Ezeket a valószínűségeket a

$$J_n(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}}{k!(k+n)!}$$

n-ed rendű Bessel függvények segítségével a következőképpen fejezhetjük ki:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{P}(\zeta = n) &= \left(\frac{1}{i}\sqrt{\frac{\lambda}{\mu}}\right)^n e^{-(\lambda+\mu)} J_n(2i\sqrt{\lambda\mu}) \\ \mathbf{P}(\zeta = -n) &= \left(\frac{1}{i}\sqrt{\frac{\mu}{\lambda}}\right)^n e^{-(\lambda+\mu)} J_n(2i\sqrt{\lambda\mu}), \end{aligned}\right\} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

vagy egységes írásmóddal:

$$\mathbf{P}(\zeta = n) = \left(\frac{1}{i}\right)^{|n|} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-(\lambda+\mu)} J_{|n|}(2i\sqrt{\lambda\mu}). \tag{19}$$

(19) felhasználásával, (18) alapján írhatjuk, hogy

$$\begin{gathered} W_k(I) = e^{-\lambda(I)} \sum_{\Sigma n r_n = k} \prod \left(\frac{1}{i}\right)^{|r_n|} \left(\frac{C_n(I)}{C_{-n}(I)}\right)^{\frac{r_n}{2}} J_{|r_n|}(2i\sqrt{C_n(I) C_{-n}(I)}) \\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (n = 1, 2, \dots; \ r_n \text{ egész szám}), \end{gathered} \tag{20}$$

ahol a szorzás minden olyan véges $\{r_n\}$ értékrendszer elemeire van kiterjesztve, amelyre $\Sigma n r_n = k$, míg az összegezés valamennyi ilyen rendszerre vonatkozik és

$$\lambda(I) = \sum_{n \neq 0} C_n(I).$$

Végül köszönetet mondok Rényi Alfrédnak értékes megjegyzéseiért.

Magyar Tudományos Akadémia
Alkalmazott Matematikai Intézete.

IRODALOM

[1] P. LÉVY, Processus stochastiques et mouvement Brownien (Paris 1948).

[2] A. RÉNYI, On composed Poisson distributions, II. Acta Math. Acad. Sci. Hung. 2 (1951), 83—98.

[3] J. FAVARD, Leçons sur les fonctions presques-périodiques (Paris, 1939).