ELOSZLÁSOK MEGHATÁROZÁSA KÖZÉPÉRTÉKEIK SEGÍTSÉGÉVEL

VINCZE ISTVÁN

Bemutatta Rényi Alfréd lev. tag az 1953. november 23-án tartott felolvasó ülésen

Bevezetés

Tekintsünk valamely (a, b) intervallumban egy $f(x)$ sűrűségfüggvényt, tekintsük továbbá az (a, b) intervallumnak egy felosztássorozatát

(1) $$a < x_{n1} < x_{n2} < \cdots < x_{nn} < b, \quad n = 1, 2, \ldots$$

melyre

(2) $$\max_n (x_{nk+1} - x_{nk}) \to 0, \quad \text{ha} \quad n \to \infty.$$

RÉNYI ALFRÉD vetette fel a kérdést, hogy az $f(x)$ folytonos, nemnegatív sűrűségfüggvény, amely esetleg egyéb feltételeknek is eleget tesz, egyértelműen meghatározott-e, ha ismeretes n és k minden értékére $(1 \leq k \leq n)$ az $x_{nk} \leqq x \leqq x_{nk+1}$ intervallumhoz tartozó feltételes várható érték:

$$\frac{\int\limits_{x_{nk}}^{x_{nk+1}} t f(t)\, dt}{\int\limits_{x_{nk}}^{x_{nk+1}} f(t)\, dt}.$$

RÉNYI ALFRÉD a kérdést a Schmidt-féle kozmogóniai elmélettel kapcsolatosan vetette fel, éspedig az alappontoknak speciális megválasztása mellett.

A probléma a mechanika terminológiájával a következőképpen fogalmazható meg: A folytonos, nemnegatív $f(x)$ függvény, amely esetleg egyéb feltételeknek is eleget tesz, meghatározott-e egy állandó szorzótól eltekintve, ha ismerjük a (2) feltételeknek eleget tevő (1) alappontrendszer minden intervallumára nézve az $x_{nk} \leqq x \leqq x_{nk+1}$, $0 \leqq y \leqq f(x)$ tartomány súlypontjának abszcisszáját.

A kérdést az (a, b) intervallumban folytonos, az intervallum belsejében *pozitív* és egyszer differenciálható $f(x)$ függvényekre igenlően válaszoljuk meg. Az alappontrendszerre vonatkozó feltételeinket valamivel általánosabban a következőképpen fogalmazzuk meg: Tekintsük az (a, b) intervallumban a zárt részintervallumoknak egy egymásba nem nyúló

(1′) $$I_{n1}, I_{n2}, \ldots I_{nn}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

rendszerét, melyre

$$(2') \qquad \max_k D(I_{nk}) \to 0, \quad \text{ha} \quad n \to \infty,$$

ahol $D(I)$ jelenti az I intervallum hosszát; vegyük továbbá a (3') feltételt, mely szerint az (a, b) intervallum minden belső pontjához található ezen intervallumoknak olyan végtelen sorozata, amelyek mindegyike tartalmazza az illető pontot.

Ekkor az alábbi tételt fogalmazhatjuk meg:

Az (a, b) intervallumban értelmezett folytonos pozitív $f(x)$ sűrűség egyértelműen meg van határozva, ha ismerjük a (2') és (3') feltételeket kielégítő (1') intervallumrendszer minden intervallumában az $f(x)$ sűrűség feltételes várható értékét, (illetve egy állandó szorzótól eltekintve meg van határozva, ha ismerjük az illető intervallumban a görbe alatti terület súlypont abszcisszáját.)

Eredményünk több dimenzióra következőképpen fogalmazható meg:

Legyen a három dimenziós tér valamely egyszeresen összefüggő korlátos zárt T tartományán értelmezve a $\varrho(x, y, z)$ sűrűségű folytonos eloszlás; legyen továbbá $\varrho(x, y, z)$ a benne szereplő változóknak kétszer folytonosan differenciálható függvénye. Tekintsük most minden pozitív egész n-re a T tartományba eső

$$(1'') \qquad T_{n1}, T_{n2}, \ldots T_{nn}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

egymásba nem nyúló kockaalakú tartományok rendszerét, amelyek lapjai a tengelysíkokkal párhuzamosak és amelyekre

$$(2'') \qquad \max_{(k)} D(T_{nk}) \to 0, \quad \text{ha} \quad n \to \infty,$$

ahol $D(T)$ jelenti a T tartomány ármérőjét. Kössük ki továbbá, hogy (3'') a T tartomány minden belső pontját az (1'') rendszerből végtelen sok kocka tartalmazza.

Ekkor bebizonyítjuk, hogy *a $\varrho(x, y, z)$ sűrűség egy állandó szorzótól eltekintve egyértelműen meg van határozva akkor, ha ismerjük minden T_{nk} kockaalakú tartományon az eloszlás súlypontjának koordinátáit.*

Dolgozatunk 1. §-ában az egyváltozós esetre vonatkozó eredményeinket ismertetjük. Foglalkozunk itt avval a kérdéssel is, hogy ha a sűrűség az (a, b) intervallum valamely izolált, belső helyén eltűnik, akkor miként következtethetünk bizonyos feltételek mellett az alappontrendszer és súlypontabszcisszák ismeretében a zéróhelyek multiplicitására. A 2—4. §-ok állításaink bizonyítását tartalmazzák, míg az 5. §-ban néhány megjegyzést teszünk.

1. §. Tekintsük az (a, b) intervallum valamely rögzített x helyét és vegyük az (1) alappontcsoport ama intervallumait, amelyekre x ezen intervallumok belsejére, illetve baloldali végpontjára esik.*

* Ezt a feltevést az általánosság megszorítása nélkül tehetjük, mert ha véges sok intervallumtól eltekintve x az intervallumok jobboldalára esnék, akkor az $f(-x)$-re végezhetjük meggondolásainkat.

Legyen ezen intervallumok valamelyike I_{nk} és jelöljük ennek végpontjait $x_{nk}^{(1)}$, ill. $x_{nk}^{(2)}$-vel. Legyen tehát $x_{nk}^{(1)} \leqq x < x_{nk}^{(2)}$. A (3) feltétel szerint létezik az egész számoknak olyan $n_1, n_2, \ldots$ végtelen sorozata, hogy I_{n_i, k_i} tartalmazza x-et. A továbbiakban ezt a sorozatot röviden I_{nk}-val jelöljük és nem juttatjuk kifejezésre sem azt, hogy általában n az egész számoknak csupán egy részsorozatán tart végtelen felé, sem pedig azt, hogy k még n-től is és x-től függ; (ez a jelölésmód nem vezet félreértésre). Ezen intervallumok hossza növekvő n mellett a (2′) feltétel miatt 0 felé tart, s így ez az intervallumsorozat az x helyet értelmezi; a következőkben az x-hez tartó intervallumsorozatnak fogjuk nevezni.*

Ismeretes, hogy ha az $f(x)$ folytonos függvény valamely x_0 helyen 0-tól különbözik, akkor az intervallumok x_0-hoz tartó sorozatára az intervallumokhoz tartozó súlypontabszcisszák határértékben az intervallum középpontjához tartanak; pontosabban

$$\frac{s_{nk} - x_{nk}^{(1)}}{x_{nk}^{(2)} - x_{nk}^{(1)}} \to \frac{1}{2}, \quad \text{ha } n \to \infty. \tag{4}$$

E határérték tehát nem ad felvilágosítást a függvényre nézve. Ha azonban a súlypontnak az intervallum középpontjától való eltérését vizsgáljuk, a következő eredményre jutunk:

SEGÉDTÉTEL: *Legyen $f(x)$ az (a, b) zárt intervallumban mindenütt differenciálható, pozitív függvény. Akkor a (2′) és (3′) feltételnek eleget tevő (1′) alappontcsoport minden x-hez tartó intervallumsorozatára,*

$$\frac{s_{nk} - \dfrac{x_{nk}^{(1)} + x_{nk}^{(2)}}{2}}{(x_{nk}^{(2)} - x_{nk}^{(1)})^2} \to \frac{1}{12} \frac{f'(x)}{f(x)}, \quad \text{ha} \quad n \to \infty.$$

Ilyenmódon, ha $f(x)$ pozitív az (a, b) intervallum minden belső pontjában, akkor létezik a baloldalon álló kifejezés határértéke, amelyet $\psi(x)$-szel jelölhetünk, s amely az (a, b)-ben mindenütt értelmezett integrálható függvény. Ennélfogva az

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = 12 \cdot \psi(x)$$

differenciálegyenlet megoldható és egy állandó szorzótól eltekintve megadja $f(x)$-et.

Említettük, hogy az (a, b) intervallum minden x helyére, ahol az $f(x)$ folytonos függvény 0-tól különbözik, a (4) reláció áll fenn. E tulajdonság $f(x)$ egy 0 helyére is nyilván érvényes, ha ott a függvény — legalább egy kis környezetben — e pontra nézve szimmetrikus és a zéróhelyekhez tartó intervallumsorozat intervallumai szímmetrikusan helyezkednek el a gyök-

* Természetesen az x-hez többféleképpen választható feléje tartó intervallum-sorozat.

helyre nézve. Elég ehhez azonban az intervallumsorozatra nézve az

$$\frac{x_{nk}^{(2)}-z}{z-x_{nk}^{(1)}}\to 1, \quad \text{ha} \quad n\to\infty,$$

feltétel teljesülése is, ha z-vel jelöljük az illető 0 helyet. Vizsgáljuk meg mármost, hogy e kivételes esettől eltekintve az alappontcsoport és súlypontabszcisszák rendszere hogyan ad felvilágosítást a diszkrét zéró helyek bizonyos tulajdonságaira.

Vezessük be előbb a következő fogalmat: Az x-hez tartó intervallumsorozatról azt mondjuk, hogy *stabilisan tart x felé*, ha létezik a következő (véges, vagy végtelen) nemnegatív határérték:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{nk}^{(2)}-x}{x-x_{nk}^{(1)}}=c_x.$$

A c_x határérték általában nem létezik, azonban érvényes a következő tétel:

Minden x-re a feléje tartó intervallumsorozatból kiválasztható az intervallumoknak olyan x-hez tartó részsorozata, amely stabilisan tart x felé.

Tekintsük ugyanis valamely x-re a (4) alatti reláció baloldalán álló hányadosok sorozatát ($n=1,2,3,\ldots$). E pozitív mennyiségek között mindig található vagy végtelen sok olyan, amely az 1-nél kisebb, vagy végtelen sok olyan, amely az 1-nél nem kisebb. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy a második eset áll fenn (az első esetben $f(-x)$-re végezhetjük meggondolásainkat) s a sorozatból mindig kiválasztható vagy véges határértékkel bíró konvergens, vagy végtelen felé tartó részsorozat, q. e. d.

A mondottakból következik, hogy valamely x helyhez több c_x is tartozhat az alappontcsoporttól függően. Tekintsük a továbbiakban minden x-hez c_x-et valamilyen módon meghatározottnak.

A következőkben valamely x helyet mindig stabilis intervallumsorozattal, illetve részsorozattal közelítünk meg, azonban az áttekinthetőség kedvéért nem juttatjuk kifejezésre, hogy az n egész szám a pozitív egész számoknak csak egy részsorozatán keresztül tart végtelen felé, sem pedig, hogy a k pozitív egész n-től és x-től függ.

Érvényes mármost a következő

TÉTEL: *Legyen z az (a,b) intervallumban folytonos nemnegatív $f(x)$ függvénynek diszkrét 0 helye. Legyen továbbá $f(x)$ e helyen többször differenciálható s legyen $f^{(l)}(x)\neq 0$, (nyilván l páros szám és $f^{(l)}(x)>0$). Ekkor a z-hez tartó stabilis intervallumsorozatra, amelyre $c_z\geqq 1$,*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{s_{nk}-x_{nk}}{x_{nk+1}-x_{nk}}=\frac{1}{c_z+1}\left(\frac{l+1}{l+2}\,\frac{c_z^{l+2}-1}{c_z^{l+1}+1}+\frac{1}{c_z}\right). \tag{5}$$

Ha $c_z\neq 1$, akkor az (5) egyenletből l értéke egyértelműen meghatározható.

A $c_z = 1$ esetben tehát e határérték $\frac{1}{2}$ s a függvényre nézve semmi felvilágosítást nem nyerünk. Ha azonban $c_z \neq 1$, akkor ebből egyrészt a függvény eltűnésére, másrészt az első el nem tűnő derivált rendjére következtethetünk. Ha $c_z = \infty$, akkor az $\frac{l+1}{l+2}$ határértéket kapjuk. — A $c_z < 1$ esetben hasonló tételhez juthatunk.

2. §. Most rátérünk a segédtétel bizonyítására. Ki kell számítanunk a

$$\psi_n(x) = \frac{s_{nk} - \frac{x_{nk}^{(1)} + x_{nk}^{(2)}}{2}}{(x_{nk}^{(2)} - x_{nk}^{(1)})^2}$$

kifejezést. Az egyszerűség kedvéért vezessük be a következő jelöléseket:

$$s_{nk} = s,\ x_{nk}^{(2)} - x = \Delta x_2,\ x - x_{nk}^{(1)} = \Delta x_1,\ \Delta x_1 + \Delta x_2 = \Delta x.$$

Itt tehát Δx_1 és Δx_2 *egymástól függetlenül* tartanak majd zéró felé. E jelölésekkel

$$\frac{x_{nk}^{(1)} + x_{nk}^{(2)}}{2} = x + \frac{\Delta x_2 - \Delta x_1}{2}$$

és

$$x_{nk}^{(2)} - x_{nk}^{(1)} = \Delta x_1 + \Delta x_2 = \Delta x.$$

$\psi_n(x)$ most a következő alakot ölti:

$$\frac{s - x - \frac{\Delta x_2 - \Delta x_1}{2}}{\Delta x^2} = \frac{1}{\Delta x^2}\left(\frac{\int\limits_{x-\Delta x_1}^{x+\Delta x_2} t f(t)\,dt}{\int\limits_{x-\Delta x_1}^{x+\Delta x_2} f(t)\,dt} - x - \frac{\Delta x_2 - \Delta x_1}{2}\right) =$$

$$(6) \qquad = \frac{1}{\Delta x^2}\,\frac{\int\limits_{x-\Delta x_1}^{x+\Delta x_2} (t-x) f(t)\,dt - \frac{\Delta x_2 - \Delta x_1}{2}\int\limits_{x-\Delta x_1}^{x+\Delta x_2} f(t)\,dt}{\int\limits_{x-\Delta x_1}^{x+\Delta x_2} f(t)\,dt}.$$

Az $f(x)$ differenciálhatóságára vonatkozó feltevésünk szerint érvényes x-nek elég kis környezetére

$$f(t) = f(x) + (t-x)f'(x) + o(t-x)$$

$f(t)$-t a (6) alatt kapott kifejezésbe helyettesítve, a $(t-x)$ hatványainak integrálása és megfelelő rendezés után a számlálóban $f(x)$ már nem szerepel s eredményül a következőt nyerjük:

$$\frac{1}{\Delta x^2}\,\frac{\frac{1}{12}\Delta x^3 f'(x) + \int\limits_{x-\Delta x_1}^{x+\Delta x_2} o(t-x)^2\,dt - \frac{\Delta x_2 - \Delta x_2}{2}\int\limits_{x-\Delta x_1}^{x+\Delta x_2} o(t-x)\,dt}{\Delta x\left[f(x) + \frac{\Delta x_2 - \Delta x_1}{2} f'(x) + \frac{1}{\Delta x}\int\limits_{x-\Delta x_1}^{x+\Delta x_2} o(t-x)\,dt\right]}.$$

Osszunk most a számlálóban $\varDelta x^3$-mal és vizsgáljuk a második tagot

$$\frac{1}{\varDelta x^3}\int\limits_{x-\varDelta x_1}^{x+\varDelta x_2} o(t-x)^2\,dt=\frac{1}{\varDelta x^3}\int\limits_{x-\varDelta x_1}^{x} o(t-x)^2+\frac{1}{\varDelta x^3}\int\limits_{x}^{x+\varDelta x_2} o(t-x)^2\,dt=$$

$$=\frac{1}{\varDelta x^3}(o(-\varDelta x_1)^3+o(\varDelta x_2)^3).$$

Minthogy $\frac{\varDelta x_1}{\varDelta x}<1$ és $\frac{\varDelta x_2}{\varDelta x}<1$, ennélfogva ez a kifejezés zéró felé tart, akárhogyan is tartatjuk $\varDelta x_1$-et és $\varDelta x_2$-et 0 felé.

Hasonló a helyzet a számláló harmadik tagjával:

$$\frac{\varDelta x_2-\varDelta x_1}{2\varDelta x^3}\int\limits_{x-\varDelta x_1}^{x+\varDelta x_2} o(t-x)\,dx=\frac{\varDelta x_2-\varDelta x_1}{2\varDelta x}\cdot\frac{1}{\varDelta x^2}(o(\varDelta x_1)^2+o(\varDelta x_2)^2),$$

ahol $|\varDelta x_2-\varDelta x_1|<\varDelta x$ s a szorzat második része $\varDelta x_1$ és $\varDelta x_2$-vel zéró felé tart.

A nevezőben $f'(x)$ tényezője ugyancsak 0 felé tart, míg a harmadik tagban az integrál kifejezés másodrendben tart zéró felé.

Arra az eredményre jutottunk tehát, hogy ha $\varDelta x_1$ és $\varDelta x_2$ egymástól függetlenül zéró felé tartanak, fenti kifejezés határértéke $\frac{1}{12}\frac{f'(x)}{f(x)}$, amivel segédtételünket bebizonyítottuk.

3. §. Tételünk bizonyításához a

$$\varphi_n(z)=\frac{s_{nk}-x_{nk}^{(1)}}{x_{nk}^{(2)}-x_{nk}^{(1)}}$$

kifejezés határértékét kell megállapítanunk, ha n egy stabilis intervallumsorozat indexein át tart végtelen felé. Itt minden n-re és a hozzátartozó k-kra $x_{nk}^{(1)}\leqq z<x_{nk}^{(2)}$, ahol z az $f(x)$ függvény valamely az (a,b) intervallum belsejébe eső zéróhelye. Az $f(x)$-re vonatkozó feltevés szerint z elég kis környezetében felírhatjuk, hogy

$$f(t)=\frac{f^{(l)}(z)}{l!}(t-z)^l+o(t-z)^l$$

és $f^{(l)}(z)>0$ (az l nyilván páros szám).

Áttérve a 2. §-ban használt jelöléseinkre

$$\varDelta z_1=z-x_{nk}^{(1)} \text{ és } \varDelta z_2=x_{nk}^{(2)}-z$$

és ezek úgy tartanak 0 felé, hogy a

$$\frac{\varDelta z_2}{\varDelta z_1}\to c_z,$$

ahol $c_z\geqq 1$ véges, vagy végtelen mennyiség.

Ekkor $\varphi_n(z)$ a következőképpen írható fel:

$$\frac{1}{\Delta z_1+\Delta z_2}\left(\frac{\int\limits_{z-\Delta z_1}^{z+\Delta z_2} t f(t)\,dt}{\int\limits_{j-\Delta z_1}^{z+\Delta z_2} f(t)\,dt}-z+\Delta z_1\right).$$

$f(t)$ fenti kifejezését beírva és a $(t-z)$ hatványintegráljait kiszámítva megfelelő rendezés után a következőt nyerjük:

$$\frac{1}{\Delta z_1+\Delta z_2}\,\frac{\dfrac{f^{(l)}(z)}{l!}\,\dfrac{\Delta z_2^{l+2}-\Delta z_1^{l+2}}{l+2}+\int\limits_{z-\Delta j_1}^{z+\Delta z_2} o(t-z)^{l+1}\,dt}{\dfrac{f^{(l)}(z)}{l!}\,\dfrac{\Delta z_2^{l+1}+\Delta z_1^{l+1}}{l+1}+\int\limits_{z+\Delta z_1}^{z+\Delta z_2} o(t-l)^{l}}+\frac{\Delta z_1}{\Delta z_1+\Delta z_2}.$$

Osszuk az első tag számlálóját és nevezőjét Δz_2^{l+1}-val:

$$\frac{1}{\dfrac{\Delta z_1}{\Delta z_2}+1}\,\frac{\dfrac{f^{(l)}(z)}{l!\,(l+2)}\left[1-\left(\dfrac{\Delta z_1}{\Delta z_2}\right)^{l+2}\right]+\dfrac{1}{\Delta z_2^{l+1}}\int\limits_{z-\Delta z_1}^{z+\Delta z_2} o(t-z)^{l+1}\,dt}{\dfrac{f^{(l)}(z)}{l!\,(l+1)}\left[1+\left(\dfrac{\Delta z_1}{\Delta z_2}\right)^{l+1}\right]+\dfrac{1}{\Delta z_2^{l+1}}\int\limits_{z-\Delta z_1}^{z+\Delta z_2} o(t-z)^{l}\,dt}+\frac{\dfrac{\Delta z_1}{\Delta z_2}}{1+\dfrac{\Delta z_1}{\Delta z_2}}.$$

A nevező második tagját két részre bontva

$$\frac{1}{\Delta z_2^{l+1}}\int\limits_{z-\Delta z_1}^{z} o(t-z)^l\,dt+\frac{1}{\Delta z_2^{l+1}}\int\limits_{z}^{z+\Delta z_2} o(t-z)^l\,dt=\frac{1}{\Delta z_2^{l+1}}\,[o\,(-\Delta z_1)^{l+1}+o\,(\Delta z_2)^{l+1}].$$

Minthogy Δz_2 elég kis értékére $\Delta z_2>\Delta z_1$, ennélfogva mindkét kifejezés 0 felé tart, ha Δz_1 és Δz_2 tartanak 0 felé.

A számláló második tagjára hasonló meggondolással kapjuk ezt az eredményt és így ha Δz_1 és Δz_2 0 felé tartanak $\varphi_n(z)$ a következő határérték felé tart:

$$\frac{1}{\dfrac{1}{c_z}+1}\,\frac{l+1}{l+2}\,\frac{1-\dfrac{1}{c_z^{l+2}}}{1+\dfrac{1}{c_z^{l+1}}}+\frac{\dfrac{1}{c_z}}{1+\dfrac{1}{c_z}}=\frac{1}{1+c_z}\left(\frac{l+1}{l+2}\,\frac{c_z^{l+2}-1}{c_z^{l+1}+1}+1\right).$$

Jelöljük ezt az értékét d_z-vel. d_z tehát az alappontrendszer és súlypontabszcisszák ismeretében meg van határozva, éspedig c_z függvényeként, amit szintén az alappontrendszerből határozhatunk meg. Látjuk, ha $c_z=1$, akkor $d_z=\frac{1}{2}$, míg ha $c_z=\infty$, akkor $d_z=\frac{l+1}{l+2}$. Ez utóbbi eset áll fenn akkor is, ha az (a, b) intervallum kezdő- vagy végpontjáról van szó, továbbá akkor, ha a z-hez tartozó minden n-re és a megfelelő k-ra $x_{nk}=z$. Az $l=0$-ra $d_z=\frac{1}{2}$, tehát (4) egyenletünkhöz jutunk.

Tételünk második állítása szerint c_z és d_z az l-et, vagyis a függvény z-ben első el nem tünő deriváltjának rendjét egyértelműen meghatározza. Ki kell mutatnunk tehát, hogy az

$$\frac{1}{1+c_z}\left(\frac{l+1}{l+2}\frac{c_z^{l+2}-1}{c_z^{l+1}+1}+1\right)=d_z$$

egyenletnek egyetlen pozitív gyöke van az l ismeretlenre nézve.

Ez azonban annak következménye, hogy $c_z>1$ esetben a baloldalon álló kifejezés $l>0$-ra monoton növekvő függvénye l-nek. Ugyanis $\frac{l+1}{l+2}$ valóban ilyen tulajdonságú, míg ennek szorzója a következő alakban írható:

$$c_z-\frac{1+c_z}{1+c_z^{l+1}};$$

itt a kivonandó nevezője s így az egész kifejezés értéke is határozottan növekszik, ha $l>0$. Ekkor azonban legfeljebb egy l-re vehet fel a baloldalon álló kifejezés egy megadott értéket. Márpedig problémánk természetéből következik, hogy ezt az értéket valóban felveszi.

4. §. Most rátérünk bevezetésünk három dimenzióra vonatkozó állításának bizonyítására.

Tekintsük a T tartomány valamely $P(x,y,z)$ belső pontját és vegyük az n indexek olyan sorozatát, amelyekhez van olyan k, hogy a T_{nk} tartalmazza (belsejében vagy kerületén) a P pontot. E tartományok átmérője a (2') feltétel miatt 0-hoz tart, figyelembe véve, hogy kikötésünk szerint végtelen sok a P pontot tartalmazó T_{nk} tartomány létezik. Jelöljük a T_{nk} tartomány középpontját O_{nk}-val, a $\varrho(x,y,z)$ sűrűségű tömegeloszlással vett súlypontját S_{nk}-val; jelöljük továbbá az O_{nk}-ból az S_{nk}-hoz mutató vektort $\overrightarrow{O_{nk}S_{nk}}$-val. E feltételek és jelölések mellett a 2. §-ban kimondott segédtételnek következő megfelelőjét bizonyítjuk be:

Ha a T tartományon értelmezett nemnegatív $\varrho(x,y,z)$ függvény valamennyi változója szerint egyszer folytonosan differenciálható, és valamely $P(x,y,z)$ helyen határozottan pozitív, akkor a T_{nk} tartományok ezen P ponthoz tartó sorozatára

$$\frac{1}{V_{nk}^{2/3}}\overrightarrow{O_{nk}P_{nk}}\to\frac{1}{12}\operatorname{grad}\log\operatorname{nat}\varrho(x,y,z), \tag{7}$$

ahol V_{nk} jelenti a T_{nk} kockaalakú tartomány köbtartalmát és n a megfelelő indexeken át tart végtelen felé.

Tételünket elég a (7) alatti vektor valamelyik komponensére bizonyítani. Számítsuk ezért ki az

$$\frac{S_x^{nk}-O_x^{nk}}{V_{nk}^{2/3}}$$

kifejezést, ahol O_x^{nk} jelenti a T_{nk} középpontjának x koordinátáját.

Legyen a T_{nk} tartomány változó pontja (u, v, w)

$$u_1 \leqq u \leqq u_2$$
$$v_1 \leqq v \leqq v_2$$
$$w_1 \leqq w \leqq w_2$$

ahol $u_2 - u_1 = v_2 - v_1 = w_2 - w_1$; vezessük be továbbá a következő jelöléseket:

$$u_2 - x = \Delta x_2, \quad x - u_1 = \Delta x_1, \quad \Delta x_1 + \Delta x_2 = \Delta x;$$

ekkor

$$V_{nk} = (u_2 - u_1)(v_2 - v_1)(w_2 - w_1) = \Delta x^3 = V. \tag{8}$$

E jelöléseinkkel

$$s_x^{nk} - \sigma_x^{nk} = \frac{\iiint u\varrho(u, v, w)\,du\,dv\,dw}{\iiint \varrho(u, v, w)\,du\,dv\,dw} - \frac{\iiint u\,du\,dv\,dw}{\iiint du\,dv\,dw} \tag{9}$$

ahol az integrál mindenütt a T_{nk} tartományra vonatkozik.

A $\varrho(x, y, z)$ függvényre vonatkozó differenciálhatósági feltevés szerint felírhatjuk, hogy az (x, y, z) pont elég kis környezetében

$$\varrho(u, v, w) = \varrho + \varrho_x'(u - x) + \varrho_y'(v - y) + \varrho_z'(w - z) + o(\Delta r), \tag{10}$$

ahol a $\varrho, \varrho_x', \varrho_y', \varrho_z'$ függvényünknek és első parciális deriváltjainak értékét jelentik az (x, y, z) pontban és

$$\Delta r = \sqrt{(u - x)^2 + (v - y)^2 + (w - z)^2}.$$

A (9) alatti kifejezés jobboldalát közös nevezőre hozva, majd $\varrho(u, v, w)$ helyébe a (10) alatti kifejezést írva számlálóként a következőt nyerjük:

$$\begin{aligned}
&\varrho_x'\left[V\iiint u(u - x)\,du\,dv\,dw - \iiint (u - x)\,du\,dv\,dw \iiint u\,du\,dv\,dw\right] + \\
&+ \varrho_y'\left[V\iiint u(v - y)\,du\,dv\,dw - \iiint u\,du\,dv\,dw \iiint (u - y)\,du\,dv\,dw\right] + \\
&+ \varrho_z'\left[V\iiint u(w - z)\,du\,dv\,dw - \iiint (w - z)\,du\,dv\,dw \iiint u\,du\,dv\,dw\right] + \\
&+ V\iiint u\,o(\Delta r)\,du\,dv\,dw - \iiint o(\Delta r)\,du\,dv\,dw \iiint u\,du\,dv\,dw.
\end{aligned} \tag{11}$$

Megmutatjuk, hogy ϱ_x' együtthatója $V^{8/3}$ nagyságrendű, míg a többi tag nagyságrendje ennél kisebb.

Számítsuk ki ϱ_x' együtthatóját; bővítve a

$$-V\iiint x(u - x)\,du\,dv\,dw + \iiint x\,du\,dv\,dw \iiint (u - x)\,du\,dv\,dw = 0$$

kifejezéssel, továbbá figyelembe véve a (8) alatti összefüggéseket, a következőt nyerjük:

$$\begin{aligned}
&V\iiint (u - x)^2\,du\,dv\,dw - \left(\iiint (u - x)\,du\,dv\,dw\right)^2 = V\frac{\Delta x_2^3 + \Delta x_1^3}{3}(v_2 - v_1)(w_2 - w_1) - \\
&- \frac{(\Delta x_2^2 - \Delta x_1^2)^2}{4}(v_2 - v_1)^2(w_2 - w_1)^2 = \frac{1}{3}V^2(\Delta u_2^2 - \Delta u_1\Delta u_2 + \Delta u_1^2) - \\
&- \frac{1}{4}V^2(\Delta u_2^2 - 2\Delta u_1\Delta u_2 + \Delta u_1^2) = \frac{1}{12}V^2\Delta x^2 = \frac{1}{12}V^{8/3}.
\end{aligned}$$

ϱ'_y és ϱ'_z együtthatói eltünnek; ugyanis

$$V\iiint u(v-y)\,du\,dv\,dw = V\int\limits_{u_1}^{u_2} u\,dw \int\limits_{w_1}^{w_2}\int\limits_{v_1}^{v_2}(v-y)\,dv\,dw =$$

$$= V\frac{1}{(v_2-v_1)(w_2-w_1)}\iiint u\,du\,dv\,dw \cdot \frac{1}{u_2-u_1}\iiint (v-y)\,du\,dv\,dw =$$

$$= \iiint u\,du\,dv\,dw \iiint (v-y)\,du\,dv\,dw,$$

hasonlóképpen ϱ'_z együtthatójára.

Végül (11) utolsó két tagja a ϱ'_x-re alkalmazott átalakítás alkalmazása után a következőképpen becsülhető meg:

$$\left| V\iiint (u-x)o(\Delta r)\,du\,dv\,dw - \iiint o(\Delta r)\,du\,dv\,dw \iiint (u-x)\,du\,dv\,dw \right| \leqq$$

$$\leqq 2V^2 \max|u-x|\,o(\max \Delta r) = 2V^2 \Delta x\, o(\Delta x\sqrt{3}).$$

Azonban (8) szerint $\Delta x = V^{1/3}$ és így a constans $V^{7/3}o(V^{1/3})$ majorizálja e két tagot.

A (9) kifejezés nevezője $\varrho(u, v, w)$ (10) alatti alakjának helyettesítése után

$$V^2\varrho + V\varrho'_x\iiint (u-x)\,du\,dv\,dw + V\varrho'_y\iiint (v-y)\,du\,dv\,dw +$$

$$+ V\varrho'_z\iiint (w-z)\,du\,dv\,dw + V\iiint o(\Delta r)\,du\,dv\,dw.$$

Az előzőekhez hasonló számolás alapján nyerjük, hogy $\varrho'_x, \varrho'_y, \varrho'_z$ együtthatóinak nagyságrendje nem haladja meg a $V^2\Delta x$-et, az utolsó tag pedig a $V^2 o(\Delta x)$-et, ilyenformán e tagokból a V^2-et kiemelve 0 felé tartó kifejezéseket nyerünk.

A mondottak szerint az

$$\frac{s_x^{nk} - \sigma_x^{nk}}{V^{2/3}}$$

kifejezés számlálóját és nevezőjét $V^2 \cdot V^{2/3} = V^{8/3}$-al osztva az első tagoktól eltekintve mindenütt V-el 0 felé tartó értékeket kapunk, s így e kifejezés valóban

$$\frac{1}{12}\,\frac{\varrho'_x(x,y,z)}{\varrho(x,y,z)}$$

felé tart, amivel állításunkat bebizonyítottuk.

Bevezetésünkben mondott az a tételünk, mely szerint ha $\varrho(x,y,z)$ kétszer folytonosan differenciálható, a T-n pozitív függvény, akkor a beosztástartományok és súlypontok ismeretében egy állandó szorzótól eltekintve egyértelműen meg van határozva, a következőképpen látható be: miután a

$$\lim \frac{1}{V_{nk}^{2/3}}\,\overrightarrow{O_{nk}S_{nk}}$$

határérték a T tartomány minden belső pontjára képezhető és feltételeink szerint ott folytonos és parciális deriváltakkal rendelkező komponensekkel bír, ennélfogva ezt a T-n belül és határátmenettel a kerületén nyert vektorfüggvényt $\Psi(x, y, z)$-vel jelölve a

$$\text{grad log nat}\, \varrho(x, y, z) = \Psi(x, y, z)$$

differenciálegyenlet az analízis elemei szerint a log nat $\varrho(x, y, z)$-re egy additív konstanstól eltekintve és így $\varrho(x, y, z)$-re egy állandó szorzótól eltekintve egyértelmű megoldást ad.

5. §. E §-ban néhány megjegyzést teszünk.

a) A bevezetésben felvetett problémát úgy is fogalmazhatjuk, hogy ha az alappontrendszer intervallumaira nézve megadjuk az $f(x)$ függvény *első és nulladik momentumának hányadosát*, vajjon ezekből az $f(x)$-re hogyan következtethetünk vissza.

Feltehető az a kérdés is, hogy ha az alappontrendszer intervallumain megadjuk az $r+1$-ik és r-ik momentumok hányadosát, vajjon ezáltal az $f(x)$ függvény legalábbis egy állandó szorzótól eltekintve meg van-e határozva. Itt r tetszőleges nemnegatív számot jelenthet.

Ez a kérdés egyszerűen visszavezethető az előzőre, csupán

$$F(x) = x^r \cdot f(x)$$

függvényre kell megfelelően alkalmazni eredményeinket, ill. meggondolásainkat.

b) A térbeli tartományra vonatkozó tételünkben a T_{nk} tartományokat kockaalakúaknak választottuk. Kapott eredményünkre vezetett volna az is, ha parallelepipedonokat választottunk volna és csupán azt a kikötést kellett volna tennünk, hogy ennek átmérője ugyanazon nagyságrendben tartson 0-hoz, mint a köbtartalom $^1/_3$-ik hatványa. Általánosabb tartományfelosztás esetére még vissza kívánok térni.

c) Szerző vizsgálatait két irányban folytatja. Egyrészt — Rényi Alfréd ösztönzésére — azt a kérdést vizsgálja, hogy valamely eloszlásból vett N elemű mintából hogyan lehet eredményeink alapján további következtetést vonni az eloszlás jellegére. Másrészt az itt felhasznált gondolatok alkalmasak a differenciálgeometria bizonyos fogalmainak tömegeloszlás sűrűségével való vonatkozásainak vizsgálatára.

Magyar Tudományos Akadémia
Alkalmazott Matematikai Intézete.