POISSON-FOLYAMAT ÁLTAL SZÁRMAZTATOTT TÖRTÉNÉSFOLYAMATOKRÓL

TAKÁCS LAJOS

Bemutatta Rényi Alfréd lev. tag az 1953. január 5-én tartott felolvasó ülésen

1. §. Bevezetés

[1] dolgozatunk második részében foglalkoztunk a következő problémával: Legyen adva m számú egymástól független sztochasztikus folyamat. Az egyes sztochasztikus folyamatokat definiáljuk a következőképpen: Tekintsünk egy POISSON-folyamatot $0 \leqq u < \infty$ időközben, melyben az események előfordulásának sűrűsége p, azaz *annak a valószínűsége, hogy u és $u + \Delta u$ időpontok között egy esemény előfordul* $p\Delta u + o(\Delta u)$ és hogy ezen időközben több, mint egy esemény fordul elő: $o(\Delta u)$, továbbá közös pont nélküli időintervallumokban előforduló események számai egymástól függetlenek.*

A Poisson-folyamatban előforduló események közül bizonyosak létrehoznak egy-egy történést, mégpedig az $(0 \leqq u < \infty)$ időintervallumban bekövetkező első esemény létrehoz egy χ_1 időtartamú történést és ezután sorrahaladva mindazon események létrehoznak egy-egy $\chi_2, \chi_3, \ldots$ időtartamú történést, melyek olyan időpontokban fordulnak elő, midőn nem folyik történés. Feltesszük, hogy a χ_k valószínűségi változók egymástól függetlenek és ugyanazon $P(\chi_k \leqq x) = H(x)$ eloszlásfüggvénnyel bírnak. Valamennyi χ_k csupán pozitív értékeket vesz fel, azaz $H(0) = 0$ és várható értéke $M(\chi_k) = \alpha$ véges szám. A Poisson-folyamatból ily módon nyert másodlagos sztochasztikus folyamatot *történésfolyamatnak* nevezzük. Megjegyezzük, hogy ez a folyamat a gyakorlatban például Geiger—Müller számlálóval történő részecskeszámlálásnál lép fel.

[1]-ben megmutattuk, hogy annak a valószínűsége, hogy a történések folyamatában u és $u + \Delta u$ időpontok között kezdődjék egy történés:

$$f(u)\Delta u + o(\Delta u),$$

ahol $f(u)$ a következő integrálegyenletnek tesz eleget:

$$f(u) = p - p\int_0^u f(u-x)\,[1 - H(x)]\,dx, \tag{1}$$

melynek egyértelműen meghatározott, folytonos $f(u)$ megoldása van. Ha $H(x)$

* A $o(\Delta u)$ olyan függvényt jelöl, amelyre $\lim\limits_{\Delta u \to 0} \dfrac{o(\Delta u)}{\Delta u} = 0.$

Laplace—Stieltjes transzformáltja

$$\psi(s)=\int_0^\infty e^{-sx}\,dH(x), \qquad (\Re(s)\geqq 0) \tag{2}$$

úgy $f(u)$ Laplace transzformáltja

$$\int_0^\infty e^{-su}f(u)\,du=\frac{p}{s+p-p\psi(s)}, \tag{3}$$

amely $\Re(s)>0$-ra konvergens és ebből $f(u)$ egyértelműen meghatározható.

Annak a valószínűsége, hogy a történések folyamatában u időpontban éppen folyjék egy történés:

$$F(u)=1-\frac{1}{p}f(u). \tag{4}$$

Kimutattuk, hogy fennállnak

$$f^*=\lim_{u\to\infty}f(u)=\frac{p}{1+p\alpha} \tag{5}$$

és

$$F^*=\lim_{u\to\infty}F(u)=\frac{p\alpha}{1+p\alpha}, \tag{6}$$

határértékek, ahol α, χ_k várható értékét jelöli.

Ha most a fent definiált történések folyamatából m számút tekintünk egyidejűleg, úgy azt mondjuk, hogy u időpontban E_k $(k=0, 1, \ldots, m)$ állapotban van a rendszer, ha abban a pillanatban k folyamatban történés folyik és $m-k$-ban nem folyik. [1]-ben a fenti rendszert először $(0, t)$ időintervallumban, majd végtelen hosszú ideig tartó folyamatnál egy kiragadott t hosszúságú időintervallumban vizsgáltuk. Ezen utóbbi esetet stacionárius állapotnak neveztük. Meghatároztuk nem stacionárius és stacionárius állapotban egyaránt a $(0, t)$ időközben, illetve t időtartam alatt előforduló $E_{k-1}\to E_k$ átmenetek várható számát: $m_{m,k}(t)$-t és $m^*_{m,k}(t)$-t. Továbbá azt mondtuk, hogy u időpontban (legalább k-szoros) koincidencia van, ha a rendszer E_j $(j=k, k+1, \ldots, m)$ állapotok egyikében tartózkodik. Meghatároztuk nem stacionárius és stacionárius esetben a $(0, t)$ időközbe, illetve egy t hosszúságú intervallumba eső koincidenciák várható összidőtartamát: $\tau_{m,k}(t)$-t és $\tau^*_{m,k}(t)$-t.

Megjegyezzük, hogy a stacionárius folyamatra nyert eredmények úgy értendők, hogy először $(u, u+t)$ időközre állapítjuk meg a kérdéses valószínűségeket, illetve várható értékeket és azután $u\to\infty$ határátmenetet végzünk.

Jelen dolgozatunkban a $k=1$ speciális esetet tesszük részletesebb vizsgálat tárgyává. Meg fogjuk határozni nem stacionárius esetben annak a valószínűségét, hogy $(0, t)$ időközben az $E_0\to E_1$ átmenetek száma $\leqq n$ jelöljük ezt $W_1(t, n)$-nel. Továbbá annak a valószínűségét, hogy $(0, t)$ időközben az E_j $(j=1, 2, \ldots, m)$ állapotokban való tartózkodás összidőtartama $\leqq z$, jelöljük ezt $\Omega_1(t, z)$-vel. Meg fogjuk határozni a megfelelő valószínűségeket stacionárius esetben is, mikor is $W_1^*(t, n)$, illetve $\Omega_1^*(t, n)$-nel fogjuk jelölni ezeket. Továbbá legyenek az egyes $E_0 \to E_1$ átmenetek és a közvetlen utána következő $E_1 \to E_0$ átmenetek időpontjai közötti távolságok rendre: $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots$ valószínűségi változók. Nyilvánvaló, hogy ξ_n-ek független valószínűségi változók ugyanazon eloszlásfüggvénnyel. Meghatározandó ezek eloszlásfüggvénye $P(\xi_n \leqq x) = D(x)$ és átlaga

$$\vartheta = \int_0^\infty [1 - D(x)]\, dx. \tag{7}$$

Jelölje $k=1$ esetben a fentemlített várható értékeket: $m_1(t)$, $m_1^*(t)$, $\tau_1(t)$ és $\tau_1^*(t)$. [1] dolgozatunk eredményei alapján felírhatjuk, hogy

$$m_1(t) = \sum_{n=0}^\infty [1 - W_1(t, n)] = mp \int_0^t [1 - F(u)]^m\, du, \tag{8}$$

$$m_1^*(t) = \sum_{n=0}^\infty [1 - W_1^*(t, n)] = mp \left(\frac{1}{1+p\alpha}\right)^m t \tag{9}$$

$$\tau_1(t) = \int_0^t [1 - \Omega_1(t, z)]\, dz = \int_0^t [1 - (1 - F(u))^m]\, du, \tag{10}$$

$$\tau_1^*(t) = \int_0^t [1 - \Omega_1^*(t, z)]\, dz = \left[1 - \left(\frac{1}{1+p\alpha}\right)^m\right] t. \tag{11}$$

(8) és (10), valamint (9) és (11) összehasonlításából az adódik, hogy

$$m_1(t) + mp\, \tau_1(t) = mpt \tag{12}$$

és

$$m_1^*(t) + mp\, \tau_1^*(t) = mpt. \tag{13}$$

A ϑ várható érték a nagyszámok törvénye alapján vagy a felújítás èlméĭet ismert tétele szerint a következőképpen határozható meg:

$$\vartheta = \lim_{t \to \infty} \frac{\tau_1^*(t)}{m_1^*(t)} = \frac{(1+p\alpha)^m - 1}{mp}. \tag{14}$$

Dolgozatunk első részében a fentemlített valószínűségek meghatározásával fogunk foglalkozni. Az alkalmazott módszer tudomásunk szerint új, amellett igen egyszerű és azt hisszük, számos hasonló típusú probléma megoldásánál is sikerrel alkalmazható. Dolgozatunk második részében egy, a fentitől látszólag eltérő problémával fogunk foglalkozni és erre alkalmazzuk módszerünket. Ez a probléma azonban — mint látni fogjuk —, szoros kapcsolatban van az előzővel, ugyanis annak határesetét képezi.

2. §. Segédtételek

Ebben a fejezetben néhány segédtétel bizonyítását adjuk meg, melyeket fel fogunk használni a következőkben. Tekintsünk egy sztochasztikus folyamatot $0 \leqq u < \infty$ időpontokban. Tegyük fel, hogy a folyamat csak két állapotban lehet: A vagy B állapotban. Legyen a folyamat $u = 0$ időpontban A állapotban, és tegyük fel, hogy a folyamatban az A és B állapotok váltogatják egymást. Legyenek az egymást követő különböző állapotokban való tartózkodás időtartamai független valószínűségi változók, mégpedig az A állapotban való tartózkodás időtartamai: $\eta_0, \eta_1, \eta_2, \ldots$ ugyanazon

$$C(x) = \begin{cases} 1 - e^{-px} & \text{ha } x \geqq 0 \\ 0 & \text{ha } x < 0 \end{cases} \tag{15}$$

eloszlásfüggvénnyel és a B állapotban való tartózkodás időtartamai $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots$ ugyanazon $D(x)$ eloszlásfüggvénnyel, ahol $D(0) = 0$.

Ezen definíció a folyamat struktúráját egyértelműen meghatározza. A folyamat Markov-pontjait alkotják mindazon időpontok, amelyekben a rendszer A állapotban van. Ugyanis ha tudjuk, hogy egy adott időpontban a rendszer A állapotban van, úgy annak a valószínűsége, hogy a következő $A \to B$ átmenet $\leqq x$ idő mulva következik be, $C(x)$-szel egyenlő, függetlenül attól, hogy mikor következett be az utolsó $B \to A$ átmenet.

Az elmondottakból az is világos, hogy az egymást követő $A \to B$ átmenetek időpontjai közötti távolságok $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \ldots$ is független valószínűségi változók ($\zeta_k = \eta_k + \xi_k$) ugyanazon $G(x) = C(x) * D(x)$ eloszlásfüggvénnyel, azaz

$$G(x) = \int_0^x [1 - e^{-p(x-y)}]\, d D(y). \tag{16}$$

Jelölje a fenti esetben annak a valószínűségét, hogy $(0 \leqq u \leqq t)$ időközben $\leqq n$ $A \to B$ átmenet fordul elő: $W(t, n)$ és a megfelelő valószínűséget stacionárius esetben, azaz végtelen hosszú ideje tartó folyamat kiragadott t hosszúságú időintervallumára vonatkozóan $W^*(t, n)$. Meg fogjuk határozni ezeket az eloszlásfüggvényeket, valamint várható értékeiket és momentumaikat. Meg fogjuk határozni annak a valószínűségét, hogy nem stacionárius esetben a B állapotban való tartózkodás $(0, t)$ időközbe eső összhossza $\leqq z$; jelöljük ezt $\Omega(t, z)$-vel. Ugyanezt a valószínűséget meghatározzuk stacionárius esetre is, mikor is $\Omega^*(t, z)$-vel fogjuk jelölni. Továbbá meg fogjuk határozni ezen valószínűség eloszlásfüggvények átlagait.

Nem stacionárius eset

$W(t, n)$ meghatározása. Jelölje az egymást követő $A \to B$ átmenetek időpontjait rendre $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$. Ekkor annak a valószínűsége, hogy $(0 < u \leqq t)$ időintervallumban $\leqq n$ $A \to B$ átmenet fordul elő, egyenlő annak a valószínű-

ségével, hogy az $n+1$-edik átmenet t időpont után fordul elő, azaz

$$W(t,n)=P(t<u_{n+1})=1-P(u_{n+1}\leqq t)=1-C(t)*G_n(t), \tag{17}$$

ahol $G_n(t)$ jelenti $G(t)$ függvény n-szeres konvolúcióját, melyet $G_1(t)=G(t)$-ből kiindulva a következő rekurzív formulával határozhatunk meg:

$$G_n(t)=\int_0^t G_{n-1}(t-x)\,d\,G(x). \tag{18}$$

Ugyanis $u_{n+1}=\eta_0+\zeta_1+\zeta_2+\cdots+\zeta_n$, azaz $n+1$ független valószínűségi változó összege. Most $P(\eta_0\leqq x)=C(x)$ és mint ismeretes, $\zeta_1+\zeta_2+\cdots+\zeta_n$ eloszlásfüggvényét: $G_n(x)$-et a (18) rekurzív formula segítségével határozhatjuk meg.

Másrészt tudjuk, hogy független valószínűségi változók összegének Laplace—Stieltjes transzformáltja egyenlő az egyes változók Laplace—Stieltjes transzformáltjainak szorzatával. Ennek segítségével, ha ζ_k $(k=1,2,\ldots)$ Laplace—Stieltjes transzformáltját $\varphi(s)$-sel jelöljük, azaz $\Re(s)\geqq 0$-ra:

$$\varphi(s)=\int_0^\infty e^{-sx}d\,G(x), \tag{19}$$

úgy $\zeta_1+\zeta_2+\cdots+\zeta_n$ Laplace—Stieltjes transzformáltja:

$$\int_0^\infty e^{-sx}d\,G_n(x)=[\varphi(s)]^n \tag{20}$$

és tekintetbe véve, hogy

$$\int_0^\infty e^{-sx}d\,C(x)=\frac{p}{p+s}, \tag{21}$$

(17) alapján az adódik, hogy $W(t,n)$ Laplace-transzformáltja $\Re(s)>0$-ra

$$\int_0^\infty e^{-st}\,W(t,n)\,dt=\frac{1}{s}-\frac{p[\varphi(s)]^n}{s(p+s)}, \tag{22}$$

ahonnan $W(t,n)$ egyértelműen meghatározható.

A várható érték meghatározása. Ha a $(0,t)$ időközben előforduló $A\to B$ átmenetek várható száma véges, ami esetünkben nyilvánvaló, úgy az előállítható a következő alakban:

$$m(t)=\sum_{n=0}^\infty[1-W(t,n)]=\sum_{n=0}^\infty[C(t)*G_n(t)]. \tag{23}$$

(23) Laplace—Stieltjes transzformáltja tagonként képezhető és így azt nyerjük, hogy:

$$\int_0^\infty e^{-st}dm(t)=\frac{p}{p+s}\,\frac{1}{1-\varphi(s)}, \tag{24}$$

amely konvergens, ha $\Re(s)>0$. Mint a megújuló sokaságok elméletéből ismeretes (W. FELLER [2]) innen egyértelműen meghatározható $m(t)$ nemcsökkenő átlagfüggvény.

A momentumok meghatározása. Ha $W(t, n)$ r-edik momentuma véges, úgy a következőképpen állítható elő:

$$m_r(t)=\sum_{n=0}^{\infty}[(n+1)^r-n^r][1-W(t, n)]. \tag{25}$$

Ennek Laplace—Stieltjes transzformáltja $\Re(s)>0$-ra

$$\int_0^\infty e^{-st}dm_r(t)=\frac{p}{p+s}\sum_{n=0}^{\infty}[(n+1)^r-n^r][\varphi(s)]^n=\frac{p}{p+s}\sum_{j=1}^{r}\mathfrak{S}_r^j\frac{j![\varphi(s)]^{j-1}}{[1-\varphi(s)]^j}, \tag{26}$$

ahol $\mathfrak{S}_r^j$ a másodfajú Stirling számokat jelöli. Itt felhasználtuk a jólismert

$$n^r=\sum_{j=1}^{r}\mathfrak{S}_r^j j!\binom{n}{j} \tag{27}$$

relációt. (26) ismeretében $m_r(t)$ egyértelműen meghatározható.

Stacionárius eset

$W^*(t, n)$ meghatározása. Ha a vizsgált folyamat már végtelen hosszú ideje tart és egy kiszemelt t hosszúságú időintervallumban vizsgáljuk, hogy mi a valószínűsége annak, hogy $\leqq n$ $A\to B$ átmenet fordul elő, úgy ismerni kell, hogy mi a helyzet az intervallum kezdőpontjában. Annak a valószínűsége, hogy a kezdeti időponttól számítva a következő $A\to B$ átmenet $\leqq x$ időtartamon belül következik be, mint ismeretes

$$G^*(x)=\frac{1}{\mu}\int_0^x[1-G(y)]\,dy, \tag{28}$$

ahol μ jelenti $G(x)$ átlagát, azaz

$$\mu=\int_0^\infty[1-G(x)]\,dx. \tag{29}$$

Ennek indokolása a következőképpen történik: Ha ζ_u-val jelöljük u időpontnak a közvetlen utána következő $A\to B$ átmenettől vett távolságát, úgy feltételeink mellett a ζ_u által leírt folyamatra alkalmazható J. L. DOOB [3] munkájában kimondott 12. tétel, amely szerint létezik $\lim\limits_{u\to\infty}P(\zeta_u\leqq x)=G^*(x)$ határeloszlás és ezt (28) szolgáltatja.

$G^*(x)$ eloszlásfüggvény ismeretében könnyen felírható $W^*(t, n)$. Ugyanis $W^*(t, n)$ hasonlóan határozható meg, mint $W(t, n)$, csupán η_0 helyére egy olyan valószínűségi változó lép, amelynek eloszlásfüggvénye $G^*(x)$ és így

$$W^*(t, n)=1-G^*(t)*G_n(t). \tag{30}$$

Mivel esetünkben

$$(31)\qquad \int_0^\infty e^{-sx}\,dG^*(x)=\frac{1-\varphi(s)}{\mu s},$$

(20) felhasználásával az adódik, hogy $\Re(s)>0$-ra

$$(32)\qquad \int_0^\infty e^{-st}\,W^*(t,n)\,dt=\frac{1}{s}-\frac{[1-\varphi(s)][\varphi(s)]^n}{\mu s^2},$$

ahonnan $W^*(t,n)$ egyértelműen meghatározható.

A várható érték meghatározása. Stacionárius esetben t időtartam alatt bekövetkező események várható száma

$$(33)\qquad m^*(t)=\sum_{n=0}^{\infty}[1-W^*(t,n)]=\frac{t}{\mu},$$

amely egyszerű számítással adódik és mint az előre is várható.

A momentumok meghatározása. Amennyiben a magasabbrendű momentumok végesek, az előbbiekhez hasonlóan nyerjük, hogy az r-edik momentum

$$(34)\qquad m_r^*(t)=\sum_{n=0}^{\infty}[(n+1)^r-n^r][1-W^*(t,n)]$$

és ennek Laplace—Stieltjes transzformáltja (26)-hoz hasonlóan

$$(35)\qquad \int_0^\infty e^{-st}\,dm_r^*(t)=\frac{1}{\mu s}\sum_{j=1}^{r}\mathfrak{S}_r^j\frac{j!\,[\varphi(s)]^{j-1}}{[1-\varphi(s)]^{j-1}},$$

amely $\Re(s)>0$-ra konvergens és innen $m_r^*(t)$ egyértelműen meghatározható.

B állapotban való tartózkodás időtartama

Mint láttuk az egymást követő $A\to B$ átmenetek időpontjai közötti távolságok eloszlásfüggvényét $G(x)$-et (16) szolgáltatja. Viszont, ha $G(x)$-et ismerjük, úgy (16)-ból meghatározható $D(x)$. Mivel $G(x)$ Laplace—Stieltjes transzformáltja $\varphi(s)$ és $C(x)$ Laplace—Stieltjes transzformáltja: $p\,(p+s)$, következőleg (16)-ból $\Re(s)\geqq 0$-ra:

$$(36)\qquad \int_0^\infty e^{-sx}\,dD(x)=\frac{\varphi(s)(p+s)}{s},$$

ahonnan $D(x)$ eloszlásfüggvény egyértelműen meghatározható. Legyen $D(x)$ n-szeres konvolúciója $D_n(x)$. Ez nagyon egyszerűen meghatározható (36) segítségével, ugyanis eszerint $D_n(x)$ Laplace—Stieltjes transzformáltja $\Re(s)\geqq 0$-ra

$$(37)\qquad \int_0^\infty e^{-sx}\,dD_n(x)=\left[\frac{\varphi(s)(p+s)}{s}\right]^n,$$

ahonnan $D_n(x)$ meghatározható. Most $D_0(x)=0$, ha $x<0$ és $D_0(x)=1$, ha $x \geqq 0$.

$\Omega(t,z)$ és $\Omega^*(t,z)$ valószínűségi eloszlásfüggvények meghatározására hivatkozunk [1] dolgozatunkra. Nem stacionárius esetben annak a valószínűsége, hogy $(0,t)$ időintervallumban a B állapotban való tartózkodás összhossza $\leqq z$ [1] dolgozatunk eredménye szerint (feltéve, hogy $u=0$ időpontban A állapotban van a folyamat):

$$(38) \qquad \Omega(t,z)=\begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-p(t-z)}\frac{[p(t-z)]^n}{n!}D_n(z) & \text{ha } 0\leqq z\leqq t \\ 1 & \text{ha } z\geqq t \end{cases}$$

és stacionárius esetben

$$(39) \qquad \Omega^*(t,z)=\begin{cases} \frac{1}{1+p\vartheta}\left\{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-p(t-z)}\frac{[p(t-z)]^n}{n!}\right\}\left\{D_n(z)+p\int_0^z [1-D(x)]D_n(z-x)\,dx\right\} & \text{ha } 0\leqq z<t \\ 1 & \text{ha } z\geqq t, \end{cases}$$

ahol ϑ jelenti $D(x)$ átlagát, azaz:

$$(40) \qquad \vartheta=\int_0^{\infty}[1-D(x)]\,dx.$$

Megjegyezzük, hogy $\Omega^*(t,z)$-nek $z=t$ helyen

$$(41) \qquad \frac{p}{1+p\vartheta}\int_t^{\infty}[1-D(x)]\,dx$$

nagyságú ugrása van.

Az $\Omega(t,z)$ és $\Omega^*(t,z)$ valószínűségek is egyszerűen előállíthatók Laplace-transzformáció segítségével, mégpedig ha $t-z=a$ (állandó) esetre szorítkozunk és $\Omega(a+z,z)$, illetve $\Omega^*(a+z,z)$ z szerinti Laplace-transzformáltját képezzük az a paraméter mellett. Ekkor ugyanis

$$(42) \qquad \int_0^{\infty} e^{-sz}\Omega(a+z,z)\,dz=\frac{1}{s}\sum_{n=0}^{\infty} e^{-pa}\frac{(pa)^n}{n!}\left[\frac{\varphi(s)(p+s)}{s}\right]^n=\frac{1}{s}e^{-a[p-(p+s)\varphi(s)]}$$

és hasonlóan

$$(43) \qquad \int_0^{\infty} e^{-sz}\Omega^*(a+z,z)\,dz=\frac{(p+s)\,(1-\varphi(s))}{(1+p\vartheta)s^2}e^{-a[p-(p+s)\varphi(s)]}.$$

A Laplace-transzformáltak megfordítása segítségével nyerjük $\Omega(a+z,z)$, illetve $\Omega^*(a+z,z)$-et. Ezekből $a=t-z$ helyettesítéssel adódik a kívánt $\Omega(t,z)$ és $\Omega^*(t,z)$ valószínűség eloszlásfüggvény.

A B állapotban való tartózkodás időtartamának átlaga nem stacionárius esetben:

$$(44) \qquad \tau(t)=\int_0^t [1-\Omega(t,z)]\,dz$$

és ennek Laplace—Stieltjes transzformáltja $\Re(s) > 0$-ra

$$(45)\qquad \int_0^\infty e^{-st} d\tau(t) = \frac{1}{s} - \frac{1}{p+s} \sum_{n=0}^{\infty} [\varphi(s)]^n = \frac{1}{s} - \frac{1}{(p+s)[1-\varphi(s)]}.$$

Stacionárius esetben

$$(46)\qquad \tau^*(t) = \int_0^t [1-\Omega^*(t,z)]dz = \frac{pt}{1+p\vartheta},$$

mint az egyszerű számítással adódik.

A magasabbrendű momentumok meghatározásával nem foglalkozunk, erre nézve utalunk [1] dolgozatunkra.

Amint a fenti tárgyalásból kitűnik, ha ismerjük $G(x)$ eloszlásfüggvényt, úgy előállítva ennek Laplace—Stieltjes transzformáltját $\varphi(s)$-et, a kérdéses valószínűségek mind meghatározhatók. Az alábbiakban olyan eseteket fogunk tárgyalni, midőn a $G(x)$ eloszlásfüggvényt nem ismerjük, de kerülő úton meg tudjuk határozni az $m(t)$ átlagfüggvényt. Ha ismerjük $m(t)$-t, úgy (26) *segítségével a következőképpen határozható meg $\varphi(s)$:*

$$(47)\qquad \varphi(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dG(x) = 1 - \frac{p}{p+s} \frac{1}{\int_0^\infty e^{-st} dm(t)},$$

és innen $G(x)$ átlaga

$$(48)\qquad \mu = \int_0^\infty x dG(x) = \lim_{t\to\infty} \frac{t}{m(t)}.$$

Ha $P(t)$ jelenti annak a valószínűségét, hogy t időpontban A állapotban van a rendszer és $P = \lim_{t\to\infty} P(t)$, úgy [1] dolgozatunk eredményei alapján felírhatjuk, hogy $\mu = 1/pP$.

Dolgozatunknak ez a főgondolata: Vannak esetek, midőn $G(x)$ meghatározása vagy nem vihető véghez, vagy nagy nehézségekkel jár s ugyanakkor $m(t)$ egyszerűen kiszámítható és ennek ismeretében egyszerűen adódik $\varphi(s)$, $G(x)$ Laplace—Stieltjes transzformáltja. $\varphi(s)$ ismeretében pedig $G(x)$ egyértelműen meghatározható, és így a jelenlegi fejezet eredményei alkalmazhatók problémáink megoldására.

Előre bocsátjuk továbbá, hogy a következő két fejezetben tárgyalt speciális folyamatoknál hasonló jelöléseket alkalmazunk, mint a fent tárgyalt általános esetnél.

3. §. A kitűzött probléma megoldása

Mint könnyen belátható, az m-számú egymástól független történések folyamatából álló rendszerben azon időpontok, midőn a rendszer E_0 állapotban van, a folyamat Markov-pontjait alkotják. Az E_0 állapotban való tartózkodás időtartamai független valószínűségi változók ugyanazon $C(x) = 1 - e^{-mpx}$ $(x \geqq 0)$ eloszlásfüggvénnyel. Az egymást követő *nem*-E_0 ($E_1, E_2, \ldots, E_m$ egyike) állapotban való tartózkodás időtartamai szintén független valószínűségi változók ugyanazon $D(x)$ eloszlásfüggvénnyel, amelyet egyelőre nem ismerünk. Most a második fejezetben tárgyalt folyamattal állunk szemben. E_0 állapotnak ott A felel meg, *nem*-E_0-nak B állapot és az $E_0 \to E_1$ átmeneteknek az $A \to B$ átmenetek. Jelölje most az egymást követő $E_0 \to E_1$ átmenetek időpontjai közötti távolság eloszlásfüggvényét $G(x)$.

Legyen $G(x)$ Laplace—Stieltjes transzformáltja $\Re(s) \geqq 0$-ra

$$\varphi(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dG(x). \tag{49}$$

Ennek ismeretében az előző fejezet eredményei felhasználásával a kérdéses valószínűségek meghatározhatók.

Így $W_1(t, n)$ annak a valószínűsége, hogy $(0, t)$ közben $\leqq n$, $E_0 \to E_1$ átmenet fordul elő, a következő kifejezés segítségével határozható meg

$$\int_0^\infty e^{-st} W_1^*(t, n) dt = \frac{1}{s} - \frac{mp}{mp+s} \frac{[\varphi(s)]^n}{s}, \quad (\Re(s) > 0). \tag{50}$$

Stacionárius esetben $W_1^*(t, n)$ a következő transzformált segítségével határozható meg

$$\int_0^\infty e^{-st} W_1^*(t, n) dt = \frac{1}{s} - \frac{[1-\varphi(s)][\varphi(s)]^n}{\mu s^2}, \quad (\Re(s) > 0). \tag{51}$$

Itt μ $G(x)$ átlagát jelöli.

Esetünkben (36) szerint $\Re(s) \geqq 0$-ra fennáll

$$\int_0^\infty e^{-sx} dD(x) = \frac{mp+s}{mp} \varphi(s). \tag{52}$$

Most $D(x)$ átlaga $\vartheta = \mu - 1/mp$ és ha n-szeres konvolúciója $D_n(x)$, úgy (40) szerint

$$\Omega_1(t, z) = \sum_{n=0}^\infty e^{-mp(t-z)} \frac{[mp(t-z)]^n}{n!} D_n(z), \quad (0 \leqq z \leqq t), \tag{53}$$

és (39) alapján:

$$\Omega_1^*(t, z) = \tag{54}$$

$$= \frac{1}{1+mp\vartheta} \sum_{n=0}^\infty e^{-mp(t-z)} \frac{[mp(t-z)]^n}{n!} \cdot \left\{ D_n(z) + mp \int_0^z [1-D(x)] D_n(z-x) dx \right\},$$

$$(0 \leqq z < t).$$

Amint látjuk, az összes kérdésre válasz adható ebben az esetben, ha ismerjük $\varphi(s)$-t $G(x)$ Laplace—Stieltjes transzformáltját. Ez (47) formula segítségével $m_1(t)$ meghatározásával kapható meg. (8) szerint (4) figyelembevételével:

$$m_1(t)=\frac{mp}{p^m}\int_0^t [f(u)]^m du, \tag{55}$$

és ennek Laplace—Stieltjes transzformáltja:

$$\int_0^\infty e^{-st} d m_1(t)=\frac{mp}{p^m}\int_0^\infty e^{-st}[f(t)]^m dt, \tag{56}$$

mely $\Re(s)>0$-ra konvergens.

Így (47) szerint az adódik, hogy

$$\varphi(s)=1-\frac{p^m}{mp+s}\left\{\int_0^\infty e^{-st}[f(t)]^m dt\right\}^{-1}. \tag{57}$$

Miután $\varphi(s)$-et meghatároztuk a kérdéses valószínűségek is egyszerűen megkaphatók. Megjegyezzük, hogy adott $H(x)$ mellett $f(t)$-t (1) megoldása szolgáltatja. Most $G(x)$ eloszlás átlaga:

$$\mu=\int_0^\infty x\, d\, G(x)=\frac{(1+p\alpha)^m}{mp}, \tag{58}$$

ahol $\alpha=M\{\chi_k\}$, azaz χ_k várható értéke.

Megjegyezzük, hogy módszerünk nem alkalmazható az $E_k \to E_{k+1}$ (illetve $E_{k+1}\to E_k$) $k\neq 0$ átmenetek tanulmányozására, ugyanis az ilyen átmenetek közti időtartamok függnek attól, hogy abban a t pillanatban, amikor az $E_k\to E_{k+1}$ (illetve $E_{k+1}\to E_k$) átmenet megtörténik, a már folyamatban lévő történések mióta vannak folyamatban. Kivétel az az eset, midőn χ_k-k exponenciális eloszlásúak, amely könnyen tárgyalható ezzel a módszerrel. A $k=0$ esetben azonban a vázolt módszer alkalmazható problémánk általános megoldására.

4. §. *Poisson-folyamat által származtatott történésfolyamat*

A fentemlített módszer alkalmazására felhozunk egy másik példát, mellyel az rendkívül egyszerűen, különben pedig még speciális esetben is igen körülményesen tárgyalható. Ez a példa egyébként, mint látni fogjuk, szoros kapcsolatban áll az előzővel.

Tekintsünk egy λ sűrűségű Poisson-folyamatot $0\leqq u$ időpontokban. Ekkor annak a valószínűsége, hogy u és $u+\Delta u$ időpontok között *egy esemény előfordul:* $\lambda\Delta u+o(\Delta u)$ és hogy egynél több esemény fordul elő: $o(\Delta u)$. Feltesszük, hogy minden egyes esemény létrehoz egy $\chi_k (k=1, 2,\ldots)$ ideig tartó történést, ahol χ_k-k független valószínűségi változók ugyanazon $P(\chi_k \leqq x) = H(x)$ eloszlásfüggvénnyel. Legyen $\chi_k > 0$ azaz $H(0) = 0$. Ezt a folyamatot tette vizsgálat tárgyává RÉNYI A. [4] munkájában és megállapította, hogy egy adott időpontban éppen folyamatban lévő történések száma Poisson-eloszlást mutat.

Azt mondjuk, hogy a folyamat u időpontban E_k állapotban van, ha az éppen folyó történések száma k. Jelölje annak a valószínűségét, hogy $(0, t)$ időközben az $E_0 \to E_1$ átmenetek száma $\leqq n$, $W_1(t, n)$ és ugyanezt a valószínűséget egy végtelen hosszú ideje tartó folyamatból kiragadott t hosszúságú intervallumra, azaz stacionárius állapot esetén: $W_1^*(t, n)$.

Jelölje $(0, t)$ időközben a *nem* $-E_0$ azaz E_j, $(j = 1, 2, \ldots)$ állapotok egyikében való tartózkodás időtartamának eloszlásfüggvényét, azaz annak a valószínűségét, hogy ez az időtartam $\leqq z$ $\Omega_1(t, z)$ és ugyanezt stacionárius esetre $\Omega_1^*(t, z)$.

Mint könnyen belátható esetünkben azon időpontok, midőn a rendszer E_0 állapotban van a folyamat Markov-pontjait alkotják. Az E_0 állapotban való tartózkodás időtartamai független valószínűségi változók ugyanazon $C(x) = 1 - e^{-\lambda x} (x \geqq 0)$ eloszlásfüggvénnyel és a *nem* $-E_0$ állapotban való tartózkodás időtartamai szintén független valószínűségi változók ugyanazon $D(x)$ eloszlásfüggvénnyel, amelyet egyelőre nem ismerünk. Ez a folyamat megegyezik a második fejezetben tárgyalt folyamattal, ha E_0-t A-val azonosítjuk, *nem* $-E_0$-t B-vel és az $E_0 \to E_1$, átmenetek időpontjainak az $A \to B$ átmenetek időpontjait feleltetjük meg. Ekkor az egymást követő $E_0 \to E_1$, átmenetek időpontjai közötti távolság eloszlásfüggvénye: $G(x) = C(x) * D(x)$. $G(x)$ átlagát jelöljük μ-vel. Legyen $\Re(s) \geqq 0$-ra:

$$\varphi(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dG(x), \tag{59}$$

úgy (16) alapján

$$\int_0^\infty e^{-sx} dD(x) = \frac{\lambda + s}{\lambda} \varphi(s). \tag{60}$$

Jelöljük $D(x)$ n-szeres konvolúcióját $D_n(x)$-szel és $D(x)$ átlagát ϑ-val; $\vartheta = \mu - 1/\lambda$. Ekkor az előző fejezetek alkalmazásával tüstént felírható, hogy

$$\int_0^\infty e^{-st} W_1(t, n) dt = \frac{1}{s} - \frac{\lambda}{\lambda + s} \frac{[\varphi(s)]^n}{s}, \tag{61}$$

$$\int_0^\infty e^{-st} W_1^*(t, n) dt = \frac{1}{s} - \frac{[1 - \varphi(s)] \, [\varphi(s)]^n}{\mu s^2} \tag{62}$$

és

$$\Omega_1(t,z)=\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda(t-z)}\frac{[\lambda(t-z)]^n}{n!}D_n(z), \qquad (0\leqq z\leqq t), \tag{63}$$

$$\Omega_1^*(t,z)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+\lambda\vartheta}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda(t-z)}\frac{[\lambda(t-z)]^n}{n!}\left\{D_n(z)+\lambda\int_0^z[1-D(x)]\,D_n(z-x)\,dx\right\} & \text{ha } 0\leqq z<t,\\ 1 & \text{ha } z\geqq t.\end{cases} \tag{64}$$

Amint látjuk, a szóbanforgó valószínűségek meghatározását $\varphi(s)$ meghatározásra vezettük vissza, amit viszont az átlagfüggvény kerülő úton való meghatározása segítségével állítunk elő.

A fenti problémával Geiger—Müller számlálókkal kapcsolatban C. LEVERT és W. L. SCHEEN [5], L. KOSTEN [6] és W. FELLER [7] munkájukban foglalkoztak, véletlen intervallumoknak egy egyenesen való elhelyezkedésével kapcsolatosan pedig C. DOMB [8] foglalkozott munkájában. A felsorolt szerzők csupán $\chi_k=\alpha$ (állandó) esetet tárgyalják. LEVERT és SCHEEN a problémát úgy oldják meg, hogy a t hosszúságú időintervallumot egy körkerülettel helyettesítik és az ily módon módosított problémára bonyolult többdimenziós integrálokkal állítják elő a megfelelő $W_1(t,n)$ valószínűséget, ami a mienktől természetesen különbözik és meghatározzák ennek faktoriális momentumait. KOSTEN kritika tárgyává teszi LEVERT és SCHEEN említett tárgyalását és a stacionárius esetre megadja az exakt $W_1^*(t,n)$ megoldást és kiszámítja ennek faktoriális momentumait. Módszere parciális differenciálegyenletek és integrálegyenletek rendszeréből álló egyensúlyi egyenletek Haeviside-operátor kalkulussal való megoldásán alapszik. W. FELLER valószínűségi változók összegezésére vezeti vissza a problémát és ezáltal az előző tárgyalásokat leegyszerűsíti és pontosabb becslést ér el. DOMB $\Omega_1^*(t,z)$ eloszlásfüggvényt, legalább is annak Laplace transzformáltját határozza meg, rekurzív formulák segítségével, amelyeket Laplace-transzformáció segítségével old meg.

Megmutatjuk, hogy a fenti eredmények milyen egyszerűen adódnak az általunk bevezetett módszerrel.

Csupán $\varphi(s)$ meghatározására van szükségünk. Ezt (47) szerint az átlagfüggvény meghatározása segítségével kapjuk meg.

Ha $m_1(t)$ jelenti a $(0,t)$ intervallumban előforduló $E_0\rightarrow E_1$ átmenetek várható számát, úgy $m_1(t+\Delta t)-m_1(t)$ a $(t,t+\Delta t)$ intervallumban előforduló átmenetek várható száma. Legyen $P_0(t)$ annak a valószínűsége, hogy t időpontban E_0 állapotban van a rendszer:

$$P_0(t)=\begin{cases} e^{-\lambda t} & \text{ha } 0\leqq t\leqq\alpha\\ e^{-\lambda\alpha} & \text{ha } t>\alpha.\end{cases} \tag{65}$$

Ugyanis t időpontban akkor van E_0 állapotban a rendszer, ha $(0,t)$ illetve $(t-\alpha,t)$ időintervallumban nem fordul elő egy esemény sem.

Most fennáll

$$(66) \qquad m_1(t+\Delta t)-m_1(t)=P_0(t)\lambda\Delta t+o(\Delta t).$$

Ugyanis, ha t időpontban E_0 állapotban van a rendszer, úgy $(t, t+\Delta t)$ időközben egyetlen $E_0 \to E_1$ átmenet $\lambda\Delta t+o(\Delta t)$ valószínűséggel fordul elő és egyéb esetekben a $(t, t+\Delta t)$ intervallumban előforduló $E_0 \to E_1$ átmenetek várható száma: $o(\Delta t)$.

(66)-ból;

$$(67) \qquad m_1'(t)=\begin{cases} e^{-\lambda t}\lambda & \text{ha} \quad 0 \leqq t \leqq \alpha \\ e^{-\lambda\alpha}\lambda & \text{ha} \quad t \geqq \alpha. \end{cases}$$

Így:

$$(68) \qquad \int_0^\infty e^{-st}\,dm_1(t)=\frac{\lambda}{\lambda+s}\,\frac{s+\lambda e^{-(\lambda+s)\alpha}}{s},$$

ahonnan (47) felhasználásával

$$(69) \qquad \varphi(s)=\frac{\lambda e^{-\alpha(\lambda+s)}}{s+\lambda e^{-\alpha(\lambda+s)}}.$$

Ennek ismeretében a kérdéses valószínűségek (61)—(64) formulák segítségével meghatározhatók.

Ezek előrebocsátása után rátérünk az általános esetre, midőn χ_k eloszlásfüggvénye $H(x)$ tetszőleges. A $(0, t)$ intervallumban kezdődő történéseket tekintve, mint azt RÉNYI [4] munkájában megmutatta, t időpontban E_0 állapotban

$$(70) \qquad P_0(t)=e^{-\lambda\int_0^t [1-H(x)]\,dx}$$

valószínűséggel van a rendszer. Ennek igazolását mi is megadjuk.

Felírható, hogy

$$(71) \qquad P_0(t)=e^{-\lambda t}+\lambda\int_0^t e^{-\lambda(t-x)}P_0(x)H(x)\,dx.$$

Ugyanis t időpontban úgy lehet E_0 állapotban a rendszer, hogy $(0, t)$ időközben nem fordul elő esemény, aminek a valószínűsége $e^{-\lambda t}$, vagy hogy $(0, t)$ időközben $t-x$ időpontban fordul elő az első $E_0 \to E_1$ átmenet. Ennek sűrűségfüggvénye: $e^{-\lambda(t-x)}\lambda$. Az ebben a pillanatban kezdődő történés befejeződik t időpontig, aminek a valószínűsége $H(x)$, és a $(t-x, t)$ időközben kezdődő történéseket tekintve azok mindegyike befejeződik a t időpontig, aminek a valószínűsége $P_0(x)$.

Legyen $g(t)=e^{\lambda t}P_0(t)$, úgy

$$(72) \qquad g(t)=1+\lambda\int_0^t g(x)H(x)\,dx.$$

Itt $g(0)=1$ és

$$(73) \qquad g'(t)=\lambda g(t)H(t),$$

ahonnan

$$g(t) = e^{\lambda \int_0^t H(x)\,dx} \tag{74}$$

és így

$$P_0(t) = e^{-\lambda \int_0^t [1-H(x)]\,dx}. \tag{75}$$

Határozzuk meg most a $(t, t+\Delta t)$ közben előforduló $E_0 \to E_1$ átmenetek várható számát. Erre fennáll

$$m_1(t+\Delta t) - m_1(t) = P_0(t)\lambda\Delta t + o(\Delta t). \tag{76}$$

Ugyanis, ha t időpontban E_0 állapotban van a rendszer, úgy annak a valószínűsége, hogy $(t, t+\Delta t)$ közben egyetlen $E_0 \to E_1$ átmenet fordul elő: $\lambda\Delta t + o(\Delta t)$, és hogy egynél több $E_0 \to E_1$ átmenet annak a valószínűsége: $o(\Delta t)$. Ha t időpontban *nem* $-E_0$ állapotban van a rendszer, úgy a $(t, t+\Delta t)$ közben előforduló $E_0 \to E_1$ átmenetek várható száma: $o(\Delta t)$. (76)-ból.

$$m_1'(t) = \lambda P_0(t), \tag{77}$$

és így

$$\int_0^\infty e^{-st}\,dm_1(t) = \lambda \int_0^\infty e^{-st} P_0(t)\,dt = \lambda \int_0^\infty e^{-st-\lambda \int_0^t [1-H(x)]\,dx}\,dt, \tag{78}$$

ahonnan (47) felhasználásával az adódik, hogy

$$\varphi(s) = 1 - \frac{\lambda}{\lambda+s} \left\{ \int_0^\infty e^{-st-\lambda \int_0^t [1-H(x)]\,dx}\,dt \right\}^{-1}. \tag{79}$$

Ennek ismeretében a (61)—(64) formulák segítségével kiszámíthatók a kérdéses valószínűségek.

Most

$$\mu = \int_0^\infty x\,dG(x) = \frac{e^{\lambda\alpha}}{\lambda}, \tag{80}$$

ahol $\alpha = M(\chi_k)$.

Ezen utóbbi fejezetben tárgyalt folyamat szoros összefüggésben áll a korábban tárgyalt m számú történések folyamatából álló rendszerrel. Ez ugyanis azt a határesetet képezi, midőn: $m \to \infty, p \to 0$ de $mp = \lambda$ (állandó).

Erre nézve elegendő megmutatni, hogy (57) formula a fenti határátmenettel (79)-be megy át. Tekintetbe véve, hogy (1) felhasználásával kimutatható, hogy fennáll:

$$f(t) = p - p^2 \int_0^t [1 - H(x)]\,dx + o(p^2), \tag{81}$$

így

$$(82) \qquad \left[\frac{f(t)}{p}\right]^m = \left[1-p\int_0^t [1-H(x)]\,dx+o(p)\right]^m \to e^{-\lambda\int_0^t [1-H(x)]\,dx}, \text{ ha } m\to\infty,$$

adódik és ennek alkalmazásával (57)-ből következik (79).

Az, hogy a második folyamat az előzőnek határesete, szemléletből is nyilvánvaló, ha tekintetbe vesszük, hogy a Poisson-folyamat a „Bernoulli-folyamat" határesete.

PÉLDA: Legyen $\chi_k = \alpha$ (állandó), azaz $H(x)=0$ ha $x<\alpha$ és $H(x)=1$ ha $x \geqq \alpha$. Ekkor (79) szerint

$$(83) \qquad \varphi(s) = \frac{\lambda e^{-\alpha(\lambda+s)}}{s+\lambda e^{-\alpha(\lambda+s)}},$$

ami megegyezik (69)-cel. Innen

$$(84) \qquad G(x) = \sum_{j=1}^{\left[\frac{x}{\alpha}\right]} (-1)^{j-1}\frac{e^{-j\alpha\lambda}\lambda^j}{j!}(x-j\alpha)^j,$$

és (60) szerint $D(x)$ Laplace—Stieltjes transzformáltja

$$(85) \qquad \int_0^\infty e^{-sx}\,dD(x) = \frac{\lambda+s}{\lambda}\,\frac{\lambda e^{-\alpha(\lambda+s)}}{s+\lambda e^{-\alpha(\lambda+s)}},$$

ahonnan

$$(86) \qquad D(x) = \sum_{j=1}^{\left[\frac{x}{\alpha}\right]} (-1)^{j-1} e^{-j\alpha\lambda}\left[\frac{\lambda^j(x-j\alpha)^j}{j!}+\frac{\lambda^{j-1}(x-j\alpha)^{j-1}}{(j-1)!}\right],$$

és hasonlóan

$$(87) \qquad D_n(x) = \sum_{j=n}^{\left[\frac{x}{\alpha}\right]} (-1)^{j-n}\binom{j-1}{n-1} e^{-j\alpha\lambda}\left[\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{\lambda^{j-k}(x-j\alpha)^{j-k}}{(j-k)!}\right].$$

(61) szerint

$$(88) \qquad \begin{aligned}\int_0^\infty e^{-st}W_1(t,n)\,dt &= \frac{1}{s}-\frac{\lambda}{\lambda+s}\,\frac{[\varphi(s)]^n}{s} = \\ &= \frac{1}{s}-\frac{\lambda}{\lambda+s}\sum_{j=n}^{\infty}(-1)^{j-n}\binom{j-1}{n-1}\frac{\lambda^j e^{-j\alpha(\lambda+s)}}{s^{j+1}},\end{aligned}$$

ahonnan

$$(89) \qquad W_1(t,n) = 1+(-1)^n\sum_{j=n}^{\left[\frac{t}{\alpha}\right]}\binom{j-1}{n-1}e^{-j\alpha\lambda}\left[e^{-\lambda(t-j\alpha)}-\sum_{k=0}^{j}(-1)^k\frac{[\lambda(t-j\alpha)]^k}{k!}\right],$$

és (62) szerint

$$(90) \qquad \begin{aligned}\int_0^\infty e^{-st}W_1^*(t,n)\,dt &= \frac{1}{s}-\frac{1-\varphi(s)}{\mu s}\,\frac{[\varphi(s)]^n}{s} = \\ &= \frac{1}{s}-\frac{1}{\mu}\sum_{j=n}^{\infty}(-1)^{j-n}\binom{j}{n}\frac{\lambda^j e^{-j\alpha(\lambda+s)}}{s^{j+2}},\end{aligned}$$

ahol μ jelenti $G(x)$ átlagát, melynek értéke

(91) $$\mu = e^{\alpha\lambda}/\lambda.$$

Innen

(92) $$W_1^*(t, n) = 1 - \sum_{j=n}^{\left[\frac{t}{\alpha}\right]} (-1)^{j-n} \binom{j}{n} \frac{e^{-\alpha\lambda(j+1)} \lambda^{j+1} (t - j\alpha)^{j+1}}{(j+1)!},$$

megegyezésben L. KOSTEN [6] eredményével.

$\Omega_1(t, z)$ és $\Omega_1^*(t, z)$ eloszlásfüggvények felírása (63) és (64) szerint $D_n(x)$ (87) kifejezése segítségével végezhető el. Most $D(x)$ átlaga: $\vartheta = (e^{\alpha\lambda} - 1)/\lambda$. $\Omega_1(t, z)$ és $\Omega_1^*(t, z)$ kifejezése csak látszólag tartalmaz végtelen sok tagot, ugyanis $D_n(x) = 0$ ha $n > x/\alpha$.

Magyar Tudományos Akadémia
Alkalmazott Matematikai Intézete.

IRODALOM

[1] L. TAKÁCS: Occurence and coindidence phenomena in case of happenings with arbitrary distribution law of duration [Hung. Acta. Math. **2** (1951), 275—298.]

[2] W. FELLER: On the integral equation of renewal theory [Annals of Mathematical Statistics **12** (1941), 243—267].

[3] J. L. DOOB: Renewal theory from the point of view of the theory of probability. [Transactions of the American Mathematical Society **63** (1948), 422—438.]

[4] A. RÉNYI: On some problems concerning Poisson processes [Publicationes Mathematicae Debrecen, **2** (1951), 66—79].

[5] C. LEVERT and W. L. SCHEEN: Probability fluctuation of discharges in a Geiger—Müller counter produced by cosmic radiation [Physica **10** (1943), 225—238].

[6] L. KOSTEN: On the frequency distribution of the number of discharges counted by a Geiger—Müller counter in a constant interval. [Physica, **10** (1943), 749—756.]

[7] W. FELLER: On probability problems in the theory of counters [Courant Anniversary Volum, New-York. (1948), 105—115.]

[8] C. DOMB: The problem of random intervals on a line [Proc. Cambridge, Phil. Soc. **43** (1947), 329—341.]