

„VÁRAKOZÁSI IDŐ“-PROBLÉMÁK TÁRGYALÁSA MARKOV-FOLYAMATOK SEGÍTSÉGÉVEL

TAKÁCS LAJOS

Bemutatta Rényi Alfréd lev. tag az 1953. május 4-én tartott felolvasó ülésen

Bevezetés

„Várakozási idő“-problémák alatt általában a következő feladattal kapcsolatos kérdéseket értjük:

Tekintsünk egy kiszolgáló berendezést, amelyhez $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n < \dots$ időpontokban érkezik egy-egy személy. Az érkezési időpontok $\{t_n\}$ sorozatát valamilyen valószínűségi törvény határozza meg. Az egymás után érkező személyeket egyetlen kiszolgáló érkezési sorrendben szolgálja ki a következő módon: Ha egy személy olyan időpontban érkezik a kiszolgáló berendezéshez, amidőn nincs sem várakozó sem, kiszolgálás alatt álló személy, úgy azonnal megkezdődik kiszolgálása. Ha a kiszolgáló egy érkező személy időpontjában el van foglalva, úgy ennek a személynek a kiszolgálása abban az időpillanatban kezdődik meg, amikor a közvetlen előtte érkező személy kiszolgálása befejeződött. Feltételezzük, hogy az egyes személyek kiszolgálásának időtartamai pozitív valószínűségi változók. Jelöljük ezeket rendre $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_n, \dots$ -nel.

Ha megadjuk azt a valószínűségi törvényt, amelyet a $\{t_n\}$ és a $\{\chi_n\}$ változók sorozata követ, továbbá a rendszer állapotát $t=0$ időpontban (a kiszolgáló szabad, vagy mennyi idő múlva lesz szabad stb.) úgy ezzel az említett sztochasztikus folyamatot egyértelműen meghatároztuk.

Az említett sztochasztikus folyamattal kapcsolatban többek között a következő kérdések merülnek fel: Mennyi az n -ik érkező személy várakozási ideje? Mennyi egy esetleg t időpontban érkező személy várakozási ideje? Mihez tart a várakozási idő eloszlásfüggvénye, ha $n \rightarrow \infty$ illetve $t \rightarrow \infty$? Mennyi egy adott pillanatban a várakozó személyek száma? A kiszolgálási periódusok és szünetek milyen törvényt követnek?

Mi az itt felvetett kérdésekkel abban az esetben fogunk foglalkozni, amidőn a $\{t_n\}$ időpontok Poisson-folyamatban előforduló események időpontjait alkotják. Általában feltételezzük, hogy a Poisson-folyamat időben homogén, azaz az eseményssűrűség $\lambda(t) \equiv \lambda$ (állandó), de ahol csak tehetjük, az eredményeket nem homogén esetre is megadjuk. A $\{\chi_n\}$ kiszolgálási idők sorozatáról azt fogjuk feltenni, hogy azok egyforma eloszlású, független, pozitív valószínűségi változók.

Másik érdekes eset az, amidőn a $t_n - t_{n-1}$ ($n = 1, 2, \dots$; $t_0 = 0$) időkülönbségek egyforma eloszlású, független, pozitív valószínűségi változók.

Erről az esetről csupán néhány szót szólunk. Dolgozatunkban eredetileg ezzel a kérdéssel is foglalkoztunk, de D. V. LINDLEYnek időközben megjelent cikke fölöslegessé teszi erre vonatkozó tárgyalásunkat.

Abban az esetben, ha a $\{t_n\}$ időpontok λ sűrűségű Poisson-folyamat eseményeinek időpontjait alkotják A. JA. HINC SIN meghatározta a várakozási idő karakterisztikus függvényét stacionárius állapot feltételezése mellett. HINC SIN ezen eredménye az általunk adott tárgyalásban egyszerűen megkapható. Megoldjuk továbbá a problémát nem stacionárius állapot esetére is, amelyről eddig az volt a vélemény, hogy csak igen körülményesen tárgyalható. A folyamat ugyanis általában nem Markov-folyamat és úgy látszott, hogy a markovizálás végtelen sok egyenlethől álló integrodifferenciálegyenlet megoldására vezet. Észrevettük azonban, hogy a folyamat akkor is Markov-féle, ha az állapotot egyetlen mennyiséggel, magával a várakozási idővel írjuk le, és ekkor a probléma egyetlen integrodifferenciálegyenlettel oldható meg.

Szólnunk kell néhány szót több kiszolgáló berendezés esetéről is. Ebben az esetben a „várakozási idő”-problémával csupán olyan egyszerűsítő feltevések mellett foglalkoztak, melyek lényegében egy kiszolgáló berendezés esetére vezetnek vissza. Erre vonatkozóan többek között A. K. ERLANG és F. POLLACZEK ért el számos eredményt.

1. §. A probléma kitűzése

Tekintsünk egy Poisson-féle sztochasztikus folyamatot $0 \leq t$ időpontokban. Legyen az események előfordulásának sűrűsége $\lambda(t)$, ahol $\lambda(t)$ a t időparaméter valós, nemnegatív, folytonos és korlátos függvénye. Poisson-folyamat esetén feltételezzük, hogy *közös pont nélküli időintervallumokban előforduló események számai egymástól függetlenek*, továbbá, hogy *annak a valószínűsége, hogy t és $t + \Delta t$ időpontok között egy esemény előfordul $\lambda(t) \Delta t + o(\Delta t)$ és hogy több, mint egy esemény fordul elő $o(\Delta t)$.*

Tegyük fel, hogy azokban az időpontokban, midőn a Poisson-folyamatban előfordul egy esemény, valamely kiszolgáló-berendezéshez egy személy érkezik. Ha a kiszolgáló-berendezés előtt nincs várakozó személy, úgy azonnal megkezdődik ennek kiszolgálása. Ha vannak sorbanállók, úgy addig kell várakoznia, míg a korábban érkezettek kiszolgálása megtörténik és sor kerül reá. Ekkor abban a pillanatban megkezdődik kiszolgálása, midőn az előtte érkező személyé befejeződik. A kiszolgálás történjék érkezési sorrendben és az egyes kiszolgálási időtartamok: $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_n, \dots$ legyenek független valószínűségi változók ugyanazon $P(\chi_n \leq x) = H(x)$ eloszlásfüggvénnyel. Feltesszük, hogy valamennyi χ_n pozitív, azaz $H(0) = 0$.

* $o(\Delta t)$ olyan függvényt jelöl, melyre $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} = 0$

Ez a processzus a gyakorlatban számos helyen előfordul, így például telefonközpontokba érkező hívásoknál, repülőgépeknek repülőtérre való leszállásánál, személyeknek pénztár előtt való várakozásánál és egyéb várakozási problémáknál.

A fenti terminológiát a konkrétság kedvéért választottuk; megfogalmazható természetesen elvontan is a probléma.

Egy t időpontban esetleg érkező személy várakozási időtartamát jelöljük $\tau_i(t)$ valószínűségi változóval. Az $\tau_i(t)$ valószínűségi függvény által leírt folyamatot *időben homogénnek* nevezzük, ha $\lambda(t) \equiv \lambda$ (időtől független állandó) és *időben nem homogénnek* nevezzük, ha $\lambda(t)$ függ a t időparamétertől.

Legyen $P(\tau_i(t) \leq x) = F(t, x)$, azaz $F(t, x)$ annak a valószínűsége, hogy egy t időpontban érkező személy várakozási ideje x -nél nem nagyobb. Legyen továbbá $P(\tau_i(t_n - 0) \leq x) = F_n(x)$, azaz annak a valószínűsége, hogy az n -edik érkező személy várakozási ideje legfeljebb x . Itt $t_n (n = 1, 2, \dots)$ jelenti az n -edik személy érkezési időpontját.

Dolgozatunkban először $F(t, x)$ és $F_n(x)$ meghatározásával fogunk foglalkozni. Ezután azt fogjuk megvizsgálni, hogy milyen feltételek mellett létezik $\lim_{t \rightarrow \infty} F(t, x)$ és $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x)$ határeloszlás és ezek hogyan határozhatók meg.

Kimutatjuk, hogy általános feltételek mellett léteznek ezek a határeloszlások és pedig megegyeznek egymással. Ez a közös határeloszlásfüggvény szolgáltatja a *stacionárius megoldást*, azaz annak a valószínűségét, hogy ha a folyamat már végtelen hosszú ideje tart, egy tetszőlegesen választott időpontban a várakozási idő legfeljebb x , vagy egy tetszőlegesen választott személy várakozási ideje legfeljebb x .

Ezen kérdések tárgyalása után fogunk foglalkozni a kiszolgálási periódus időtartamának és a sorbanálló személyek számának meghatározásával.

Sorban állások problémájával az irodalomban többen foglalkoztak. Megemlítjük TH. C. FRY [1] könyvét, melyben A. K. ERLANG eredményeire hivatkozva, stacionárius állapot feltételezésével, foglalkozik a sorbanállások törvényeivel. Nevezetesen állandó és exponenciális eloszlást mutató kiszolgálási idők esetén meghatározza az átlagos várakozási időt és annak a valószínűségét, hogy egy adott időpontban a várakozók száma: $j (j = 0, 1, 2, \dots)$. (Exponenciális eloszlású kiszolgálási idők esetében FRY azzal az általánosabb kérdéssel is foglalkozik, midőn $\nu \geq 1$ kiszolgáló berendezés van és erre az esetre megadja a várakozási idők eloszlásfüggvényét is.) F. POLLACZEK [2] munkájában azzal az esettel foglalkozik, midőn $\nu \geq 1$ kiszolgáló berendezés van és az egyes kiszolgáló berendezések csupán minden ν -ik érkező személyt szolgálják ki. Előállítja a várakozási idők eloszlásfüggvényét arra az esetre, midőn egy adott időtartam alatt adott számú személy érkezik a kiszolgáló berendezésekhez és a kiszolgálási idők tetszőleges eloszlásúak. POLLACZEK ezen munkájában az eloszlásfüggvényekre és várható értékeikre több aszimptotikus formulát ad. POLLACZEK többi munkái közül csupán [3]-at említjük még

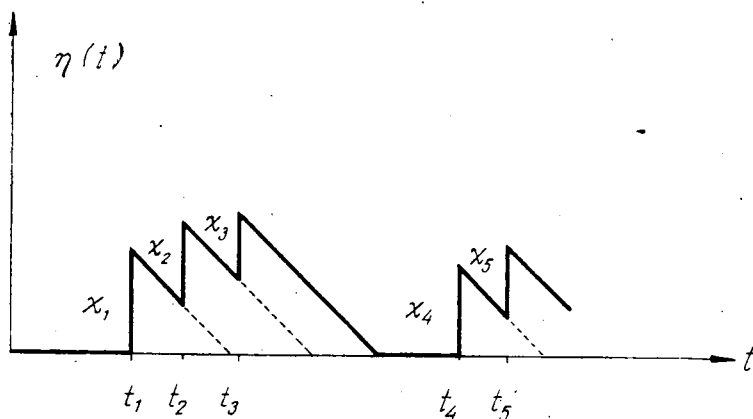
meg, melyben repülőgépek leszállásánál fellépő várakozási problémákkal foglalkozik. A. N. KOLMOGOROV [4] munkájában azt az esetet tárgyalja, midőn az érkező és elmenő személyek időpontjai Poisson-folyamatot alkotnak, azaz a kiszolgálási időtartam exponenciális eloszlású. Legmesszebbmenő A. JA. HINCSIN [5] munkája, melyben a kitűzött problémát stacionárius esetben, tetszőleges kiszolgálási idők mellett tárgyalja és meghatározza a várakozási idő karakterisztikus függvényét. Megemlítjük továbbá D. V. LINDLEY [6] munkáját, amely speciális esetként tartalmazza a stacionárius állapotra vonatkozó Hincsin-féle eredményt. Figyelemre méltó továbbá D. G. KENDALL [7] munkája, amelyben a sorbanállások problémájának igen részletes irodalmi összeállítása található meg.

Mi a következőkben az eddigieknél általánosabb feladatot oldunk meg, nevezetesen az eddig általánosan nem tárgyalt nem stacionárius esetet időben homogén esetben megoldjuk és időben nem homogén esetre is szolgáltatunk eredményeket. Feltételt adunk a stacionárius állapot létezésére és megadjuk az erre vonatkozó megoldást.

Úgy gondoljuk, hogy még az általánosabb problémát is egyszerűbben és rövidebben oldjuk meg, mint sok szerző a speciális problémákat. Az egyszerű megoldás magyarázata a következőkben rejlik: Az eddigi vélemény az volt — lásd pl. W. FELLER ([8] 426. o.) munkáját —, hogy a várakozási idő probléma csak abban a speciális esetben vezet Markov-folyamatra, ha a kiszolgálási idő exponenciális eloszlású és ekkor a rendszer $E_j (j = 0, 1, 2, \dots)$ állapotokban lehet, ahol E_j azt jelenti, hogy a várakozó és kiszolgálás alatt lévő személyek száma j . Ha a kiszolgálási idő nem exponenciális eloszlású, úgy a folyamat többé nem Markov-féle. Markov-félévé tehető úgy, hogy az állapotteret kibővítjük és az E_j állapotokhoz hozzáveszünk egy folytonos változót, az esetleg éppen kiszolgálás alatt álló személy eddigi kiszolgálási időtartamát. Ekkor viszont — FELLERT idézve — „az új egyenletek formálisan felírhatók, azonban olyan bonyolultak, hogy kétséges, hogy bármiféle nyereséget is jelentenének”. (The new equations can usually be written down but they are so complicated that it is doubtful whether anything is gained.) Észrevettük azonban, hogy a folyamat akkor is Markov-folyamatnak tekinthető, ha a rendszer állapotát egyetlen változóval, az illető időpontban esetleg érkező személy várakozási idejével írjuk le. Ez a leírás egyformán elvégezhető exponenciális és tetszőleges eloszlású kiszolgálási időtartamok esetében. Nagy előny, hogy ennél a tárgyalásnál az E_j állapotok semmiféle szerepet nem kapnak, s ennek következtében nem végtelen sok egyenletből álló rendszerrel, hanem csupán egyetlen integrodifferenciálegyenlettel kell foglalkoznunk.

2. §. A várakozási idő eloszlásfüggvénye

$\eta(t)$ valószínűségi függvény t időpontban a kiszolgáló berendezéshez esetleg érkező személy várakozási idejét jelenti. Ha $t=0$ időpontban a kiszolgáló szabad úgy $\eta(0)=0$. Ha $t=0$ időpontban a kiszolgáló el van foglalva, úgy megadható egy η_0 valószínűségi változó, amely megadja azt az időpontot, amikor a kiszolgáló kezdeti foglaltsága megszűnik. Ekkor $\eta(0)=\eta_0$, ugyanis ennyi lesz $t=0$ időpontban egy esetleg érkező személy várakozási



1. ábra

ideje. Ha egy adott időpontban $\eta(t)=0$, úgy zérus marad mindaddig az időpontig, amíg egy személy meg nem érkezik a kiszolgáló berendezéshez. Bármilyen legyen is $\eta(t)$ értéke, abban a pillanatban, amidőn egy személy érkezik a kiszolgáló berendezéshez $\eta(t)$ ugrást szenved és pedig az ugrás nagysága megegyezik ezen személy jövőendő kiszolgálási idejével. Egy személy megérkezése után $\eta(t)$ értéke lineárisan csökken egészen addig, amíg a következő személy meg nem érkezik, vagy addig, amíg zérussá nem válik.

Ha $\{t_n\}$ jelenti az egymásután érkező személyek időpontjainak sorozatát és $\{x_n\}$ a megfelelő kiszolgálási időtartamok sorozatát, úgy az elmondottak szerint $\eta(t)$ értéke $t_n (n=1, 2, \dots)$ időpontokban rendre $x_n (n=1, 2, \dots)$ nagyságú ugrást szenved. Közben $\eta(t)$ értéke lineárisan csökken, de ha egyszer elérte a zérus értéket, úgy az is marad a következő személy megérkezésének időpontjáig.

$\eta(t)$ -t a következő egyenletek definiálják: $\eta(0)=\eta_0$. Ha $t_n < t < t_{n+1}$ úgy:

$$(1) \quad \eta(t) = \begin{cases} \eta(t_n) - (t - t_n) & \text{ha } \eta(t_n) > t - t_n \\ 0 & \text{ha } \eta(t_n) \leq t - t_n \end{cases}$$

és ha $t = t_n$ úgy

$$(2) \quad \eta(t_n) = \eta(t_n - 0) + x_n.$$

Ha ismerjük azt a törvényt, amelyet a $\{t_n\}$ és $\{\chi_n\}$ valószínűségi változók sorozata követ, úgy $\eta(0) = \eta_0$ kezdeti feltétel mellett (1) és (2) egyenletek segítségével $\eta(t)$ meghatározható bármely t időpontban.

Kihangsúlyozzuk, hogy a fenti $\eta(t)$ valószínűségi függvény minden $t \geq 0$ értékre értelmezve van és $\eta(t_n - 0)$ szolgáltatja az n -ik érkező személy várakozási idejét. $\eta(t)$ menetét az 1. ábra szemlélteti.

Ha a $\{t_n\}$ időpontok Poisson-folyamat eseményeinek időpontjaival egyeznek meg és a $\{\chi_n\}$ -ek független valószínűségi változók, úgy az $\eta(t)$ valószínűségi függvény Markov folyamatot ír le. Ugyanis ha $\eta(t)$ értékét ismerjük egy adott időpontban, úgy ez az előbb elmondottak szerint egyértelműen meghatározza $\eta(t)$ jövő sztochasztikus viselkedését.

Ha a $\{t_n\}$ időpontok nem alkotnak Poisson-folyamatot, de a $t_n - t_{n-1}$ ($n = 1, 2, \dots$) időközönbségek egyforma eloszlású független valószínűségi változók, úgy az $\eta(t)$ folyamat már nem lesz Markov-féle, de a $\{t_n\}$ időpontok a folyamat Markov-pontjait, más elnevezés szerint regenerációs pontjait alkotják és így ebben is visszavezethető a folyamat Markov-folyamatok tanulmányozására.

A következőkben feltesszük, hogy a $\{t_n\}$ időpontok $\lambda(t)$ sűrűségű Poisson-folyamat eseményeinek időpontjait jelentik és a $\{\chi_n\}$ -ek egyforma eloszlású független valószínűségi változók. Általában feltesszük, hogy $\eta(0) = \eta_0$ tetszőleges és η_0 eloszlásfüggvénye $P(\eta_0 \leq x) = F_0(x)$, vagy speciálisan $\eta_0 \equiv 0$, mikor is $F_0(x) = 0$ ha $x < 0$ és $F_0(x) = 1$ ha $x \geq 0$. Most $P(\eta(t) \leq x) = F(t, x)$ eloszlásfüggvényre a következő tételt bizonyítjuk be:

1. TÉTEL Az $\eta(t)$ valószínűségi függvény $P(\eta(t) \leq x) = F(t, x)$ eloszlásfüggvénye a következő integrodifferenciálegyenletnek tesz eleget

$$(3) \quad \frac{\partial F(t, x)}{\partial t} = \frac{\partial F(t, x)}{\partial x} - \lambda(t) F(t, x) + \lambda(t) \int_0^x H(x-y) d_y F(t, y),$$

ahol az előforduló deriváltak vagy egyszerre jobboldali ($x \geq 0$) vagy egyszerre baloldali ($x > 0$) deriváltak. $F(t, x)$ eloszlásfüggvénynek $x = 0$ helyen $F(t, 0)$ nagyságú ugrása van, $0 < x$ értékekre minden t mellett folytonos. $F(0, x) = 1$ ($0 \leq x$) kezdeti feltétel mellett (3)-nak egyértelműen meghatározott $F(t, x)$ megoldása van.

BIZONYÍTÁS. Felírhatjuk a következő egyenletet $0 < \Delta t$ -re:

$$(4) \quad F(t + \Delta t, x) = (1 - \lambda(t) \Delta t) F(t, x + \Delta t) + \lambda(t) \Delta t \int_0^x H(x-y) d_y F(t, y) + o(\Delta t).$$

Ugyanis az az esemény, hogy $\eta(t + \Delta t) \leq x$ több egymást kizáró módon jöhet létre: 1. $(t, t + \Delta t)$ időközben nem következik be esemény, aminek a valószínűsége $1 - \lambda(t) \Delta t + o(\Delta t)$ és ekkor kell, hogy $\eta(t) \leq x + \Delta t$ legyen, aminek a valószínűsége $F(t, x + \Delta t)$. 2. $(t, t + \Delta t)$ közben bekövetkezik egy ese-

mény, aminek a valószínűsége $\lambda(t) \Delta t + o(\Delta t)$ és ha $r_i(t) = y$ ($0 \leq y \leq x$) úgy kell, hogy $\chi \leq x - y$ legyen, aminek a valószínűsége $H(x - y)$ és y eloszlásfüggvénye $F(t, y)$. 3. $(t, t + \Delta t)$ közben egynél több esemény következik be, aminek a valószínűsége $o(\Delta t)$.

Később meg fogjuk mutatni, hogy $0 < x$ -re $F(t, x)$ eloszlásfüggvény x -ben folytonos. $x = 0$ helyen $F(t, x)$ -nek általában $F(t, 0)$ nagyságú ugrása van. Így mindenesetre felírható, hogy $0 < \Delta t$ -re:

$$(5) \quad F(t, x + \Delta t) = F(t, x) + \frac{\partial F(t, x)}{\partial x} \Delta t + o(\Delta t),$$

ahol $\partial F / \partial x$ jobboldali deriváltat jelent, amely $x \geq 0$ -ra létezik. (5)-öt (4)-be helyettesítve $\Delta t \rightarrow 0$ határátmenetet elvégezve azt nyerjük, hogy $x \geq 0$ -ra

$$\frac{\partial F(t, x)}{\partial t} = \frac{\partial F(t, x)}{\partial x} - \lambda(t)F(t, x) + \lambda(t) \int_0^x H(x - y) d_y F(t, y),$$

ami megegyezik (3)-mal. Ez az egyenlet azt mutatja, hogy $F(t, x)$ t szerint jobbról differenciálható és a differenciáhányados megegyezik a baloldallal. Hasonlóan megmutatható, hogy $0 < x$ -re $F(t, x)$ t szerinti baloldali deriváltja is létezik és az is megegyezik (3) jobboldalával, csupán az a különbség, hogy most $\partial F / \partial x$ is baloldali x szerinti deriváltat jelent. Olyan x értékekre, melyeknél $F(t, x)$ jobboldali és baloldali x szerinti deriváltja megegyezik, azaz majdnem minden x értékre, $F(t, x)$ t szerint differenciálható és deriváltja megegyezik (3) jobboldalával.

Az $r_i(t)$ valószínűségi függvény által leírt folyamat úgynevezett kevert típusú Markov-folyamat. Ugyanis diszkontinuus és folytonos állapotváltozások keverékéből áll. Ilyen típusú folyamatokkal foglalkozott W. FELLER [9] munkájában, ahol megmutatta, hogy bizonyos feltételek mellett létezik egy egyértelműen meghatározott $F(t, x)$ megoldás, amely x -ben eloszlásfüggvény. FELLER elő is állítja a megoldást egyenletesen konvergens végtelen sor alakjában. Sajnos, általános tárgyalása erre a speciális esetre közvetlenül nem alkalmazható.

$F(t, x)$ megoldás helyett áttérünk ennek Laplace—Stieltjes transzformáltjának tanulmányozására. Ezen az úton nemcsak tételünket bizonyítjuk be, hanem előállítjuk a megoldást magát is. Vezessük be tehát a következő függvényeket, melyek $\Re(s) \geq 0$ -ra konvergenssek:

$$(6) \quad \Phi(t, s) = \int_0^\infty e^{-sx} dF(t, x)$$

és

$$(7) \quad \psi(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dH(x).$$

Képezzük a (3) egyenlet Laplace—Stieltjes transzformáltját mindkét oldalon, úgy azt nyerjük, hogy $\Re(s) \geq 0$ -ra

$$(8) \quad \frac{\partial \Phi(t, s)}{\partial t} = \Phi(t, s) [s - \lambda(t) + \lambda(t)\psi(s)] - s F(t, 0).$$

Itt mint könnyen belátható, $\partial \Phi / \partial t$ derivált minden t értékre létezik és $F(t, 0) = \lim_{x \rightarrow +0} F(t, x)$, azaz $F(t, x)$ ugrása az $x = 0$ helyen. Ennek a differenciálegyenletnek együtthatói t -nek folytonos függvényei és $\Phi(0, s) = 1$. Ezen kezdeti feltétel mellett, mint ismeretes, (8)-nak egyértelműen meghatározott megoldása van és pedig $\Re(s) \geq 0$ -ra

$$(9) \quad \Phi(t, s) = e^{st - [1 - \psi(s)] \cdot I(t)} \left[1 - s \int_0^t e^{-su + [1 - \psi(s)] \lambda(u)} F(u, 0) du \right],$$

ahol

$$(10) \quad I(t) = \int_0^t \lambda(u) du.$$

$\Phi(t, s)$ ismeretében, mint a Laplace-transzformációk elméletéből tudjuk, $F(t, x)$ eloszlásfüggvény egyértelműen meghatározható. Tehát $F(t, x)$ egyértelműen meg van határozva (9) formula segítségével, ha $F(u, 0)$ egyértelműen megadható $0 \leq u \leq t$ értékekre. Az, hogy $F(t, 0)$ minden t értékre egyértelműen meghatározható, világos lesz, ha a folyamatot a kiszolgáló berendezés szempontjából tekintjük. A kiszolgáló ideje szünetek és kiszolgálási periódusok váltakozásaiból tevődik össze és $F(t, 0)$ annak a valószínűsége, hogy t időpontban szünet legyen. $F(t, 0)$ egyértelműen meghatározható a kiszolgálási periódusok időtartamának eloszlásfüggvénye ismeretében. Időben nemhomogén folyamat esetén ez a számítás bonyolult, homogén folyamat esetén ellenben könnyen keresztülvihető, amit a következő fejezetben meg is teszünk.

Hátra van még annak a kimutatása, hogy $F(t, x)$ eloszlásfüggvény minden t értékre x -ben folytonos. $F(t, x)$ előállítható a következő alakban is:

$$(11) \quad F(t, x) = e^{-\lambda(t)} \left[1 + \int_0^t F(t-u, 0) \lambda(t-u) e^{-\lambda(t-u)} H(u+x) du + \right. \\ \left. + \int_0^t \left(\int_0^{x+u} F(t-u, x+u-y) \lambda(t-u) e^{-\lambda(t-u)} dH(y) \right) du \right].$$

Ugyanis $\lambda(t) \leq x$ ha 1.) $(0, t)$ időközben nem fordul elő esemény, 2.) $t-u$ (ahol $0 \leq u \leq t$) időpontban várakozás nélkül kezdődik egy kiszolgálás, melynek időtartama $u+x$ -nél kisebb és $(t-u, t)$ közben nem történik esemény 3.) $t-u$ (ahol $0 \leq u \leq t$) időpontban egy személy érkezik a kiszolgáló berendezéshez és ennek várakozási ideje $x+u-y$ -nél kisebb, ahol y jelenti a kiszolgálás időtartamát és $(t-u, t)$ közben senki sem érkezik a kiszolgáló berendezéshez.

(11) előállításából, mely egyúttal egy rekurzív formula $F(t, x)$ meghatározására könnyen megmutatható $F(t, x)$ folytonossága $x > 0$ értékekre.

Definíciókból következik, hogy $F(t, x)$ x -nek nem csökkenő függvénye. Az, hogy $F(t, +\infty) = 1$ abból a tényből következik, hogy $F(t, x)$ Laplace—Stieltjes transzformáltjára fennáll, hogy $\Phi(t, 0) = 1$.

Az elmondottak szerint kimondhatjuk a következő tételt is:

2. TÉTEL. Az 1. tételben felírt (1) integrodifferenciálegyenlet $F(t, x)$ megoldásának Laplace—Stieltjes transzformáltja

$$(12) \quad \Phi(t, s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} dF(t, x) \quad (\Re(s) \geq 0)$$

a következő alakban állítható elő:

$$(13) \quad \Phi(t, s) = e^{st - [1 - \psi(s)]A(t)} \left[1 - s \int_0^t e^{-su + [1 - \psi(s)]A(u)} F(u, 0) du \right],$$

ahol $F(u, 0)$ annak a valószínűségét jelenti, hogy u időpontban a kiszolgáló szabad.

Hasonlóan foglalkozhattunk volna azzal az esettel, midőn η_0 nem azonosan zérus, hanem tetszőleges valószínűségi változó. Ha feltesszük, hogy η_0 eloszlásfüggvénye $F_0(x)$, $0 < x$ értékekre folytonos, úgy az előbbi meggondolás szóról-szóra alkalmazható és csupán annyi módosítást kell tennünk, hogy (13)-ban a kezdeti feltétel, $\Phi(0, s) = 1$ helyett, $\Phi(0, s) = \Phi_0(s)$, ahol $\Phi_0(s)$ jelenti $F_0(x)$ Laplace—Stieltjes transzformáltját és $F(t, 0) - t$ is az új esetnek megfelelő kifejezéssel kell helyettesítenünk.

Ezek után rátérünk $\lim_{t \rightarrow \infty} F(t, x) = F^*(x)$ határeloszlás meghatározására. Erre vonatkozóan a következő tételeket bizonyítjuk be.

3. TÉTEL. Legyen χ_n valószínűségi változó várható értéke

$$(14) \quad \alpha = \int_0^{\infty} x dH(x) = \int_0^{\infty} [1 - H(x)] dx$$

és legyen

$$(15) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \lambda(t) = \lambda$$

pozitív állandó. Ekkor ha $\lambda\alpha < 1$ úgy létezik a kezdeti $F_0(x)$ eloszlástól függetlenül $\lim_{t \rightarrow \infty} F(t, x) = F^*(x)$ határeloszlásfüggvény, amelyet egyértelműen meghatároznak a következő egyenletek:

$$(16) \quad F^*(0) = 1 - \lambda\alpha$$

és

$$(17) \quad \frac{dF^*(x)}{dx} = \lambda \left[F^*(x) - \int_0^x H(x-y) dF^*(y) \right],$$

ahol az előforduló derivált jobboldali deriváltat jelent.

Ha $\lambda\alpha \geq 1$ úgy nem létezik $F^*(x)$ határeloszlás, hanem fennáll minden x -re, hogy $\lim_{t \rightarrow \infty} F(t, x) = 0$.

4. TÉTEL. Ha $\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda(t) = \lambda$ és $\lambda\alpha < 1$ úgy létezik a kezdeti $F_0(x)$ eloszlástól függetlenül $\lim_{t \rightarrow \infty} F(t, x) = F^*(x)$ határeloszlásfüggvény, amelyet egyértelműen meghatároz

$$(18) \quad \Phi^*(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dF^*(x), \quad (\Re(s) \geq 0),$$

Laplace—Stieltjes transzformált, amelyre fennáll, hogy

$$(19) \quad \Phi^*(s) = \frac{1 - \lambda\alpha}{1 - \lambda \frac{1 - \psi(s)}{s}}.$$

BIZONYÍTÁS. Mindenekelőtt kimutatjuk, hogy a kezdeti $F_0(x)$ eloszlástól függetlenül fennáll $\lim_{t \rightarrow \infty} F(t, 0) = 1 - \lambda\alpha$ határérték, ha $\lambda\alpha < 1$ és $\lim_{t \rightarrow \infty} F(t, 0) = 0$ ha $\lambda\alpha \geq 1$. Ha $\eta_0 = 0$ és $\lambda(t) = \lambda$ (állandó) úgy a következő fejezetben kimutatjuk, hogy $\lambda\alpha < 1$ esetén fennáll $\lim_{t \rightarrow \infty} F(t, 0) = F^*(0) = 1 - \lambda\alpha$ határérték. Ha η_0 tetszőleges úgy tekintjük azt az időpontot, amidőn a kiszolgáló kezdeti foglaltsága megszűnt. Ekkor akármennyi is a várakozók száma, a kezdeti állapottól függetlenül $t \rightarrow \infty$ esetén ugyanaz lesz az E_0 állapot valószínűsége, azaz tetszőleges η_0 esetén is fennáll, hogy $\lim_{t \rightarrow \infty} F(t, 0) = F^*(0) = 1 - \lambda\alpha$. Ugyanis a következő fejezetben kimutatjuk, hogy az E_0 állapot ergodikus, és így állításunk a Markov-láncok elméletéből következik. Ha $\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda(t) = \lambda$ úgy bizonyos t értéktől kezdve tetszőleges a $\lambda - t$ közrefogó λ_1 és λ_2 értékekre fennáll, hogy $\lambda_1 \leq \lambda(t) \leq \lambda_2$ és ekkor elegendő nagy t értékekre a kezdeti eloszlástól függetlenül fennáll, hogy $F_{\lambda_2}(t, 0) \leq F(t, 0) \leq F_{\lambda_1}(t, 0)$, ahol $F_\lambda(t, 0)$ jelenti λ sűrűséggel jellemzett folyamat esetén az $\eta_1(t) = 0$ állapot valószínűségét. Ennek helyessége az előzőhöz hasonló okoskodással az E_0 állapot ergodikus voltából következik. Így ha $\lambda_2\alpha < 1$ úgy fennáll, hogy:

$$1 - \lambda_2\alpha \leq \lim_{t \rightarrow \infty} F(t, 0) \leq 1 - \lambda_1\alpha.$$

Mivel λ_1 és λ_2 tetszőlegesen közel választható λ -hoz, ezért $\lambda\alpha < 1$ esetén fennáll, hogy $\lim_{t \rightarrow \infty} F(t, 0) = F^*(0) = 1 - \lambda\alpha$.

Ha $\lambda\alpha \geq 1$, úgy, mint látni fogjuk $\lambda(t) = \lambda$ (állandó) esetén $\lim_{t \rightarrow \infty} F(t, 0) = 0$ és ekkor általában is igaz, hogy $\lim_{t \rightarrow \infty} F(t, 0) = 0$.

A következőkben először feltesszük, hogy $\eta_0 = 0$ azaz $F_0(x) = 1$ ha $x \geq 0$.

Legyen most (13) formulában $s = -i\omega$, ahol ω valós szám. Így $F(t, x)$ eloszlásfüggvény karakterisztikus függvényét nyerjük. Jelöljük ezt most $\Phi_t(\omega)$ -

val. Ekkor

$$(20) \quad \Phi_t(\omega) = e^{-i\omega t - [1-\psi(-i\omega)]\lambda t} \left[1 + i\omega \int_0^t e^{i\omega u + [1-\psi(-i\omega)]\lambda u} F(u, 0) du \right].$$

$\Phi_t(\omega)$ minden t értékre egy nem negatív valószínűségi változó karakterisztikus függvénye és így alkalmazható A. ZYGMUND [10] tétele, amely szerint ha az $\omega = 0$ pontot tartalmazó tetszőleges intervallumban fennáll $\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi_t(\omega) = \Phi(\omega)$ és $\Phi(\omega)$ az $\omega = 0$ helyen folytonos, úgy létezik $\lim_{t \rightarrow \infty} F(t, x) = F^*(x)$ határel-oszlásfüggvény, amelynek karakterisztikus függvénye $\Phi(\omega)$ -val egyenlő.

Most kimutatjuk, hogy azon ω értékekre, amelyekre $\Re[\psi(-i\omega)] < 1$, fennáll a következő határérték

$$(21) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \Phi_t(\omega) = \frac{F^*(0)}{1 + \lambda \frac{1 - \psi(-i\omega)}{i\omega}}.$$

Legyen ω egy rögzített érték, amelyre $\Re[\psi(-i\omega)] < 1$ és legyen ekkor rövidség kedvéért $\varphi(t) = i\omega t + [1 - \psi(-i\omega)]\lambda t = i\omega t + \gamma\lambda t$, ahol $\Re(\gamma) < 0$, úgy

$$\Phi_t(\omega) = e^{-\varphi(t)} \left[1 + i\omega \int_0^t e^{\varphi(u)} F(u, 0) du \right].$$

Most $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\varphi(t)} = 0$ és kimutatandó tehát, hogy

$$(22) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\varphi(t)} \int_0^t e^{\varphi(u)} F(u, 0) du = \frac{F^*(0)}{\varphi^*},$$

ahol $\varphi^* = \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi'(t) = i\omega + [1 - \psi(-i\omega)]\lambda$. Rögzített T érték mellett

$$(23) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\varphi(t)} \int_0^T e^{\varphi(u)} F(u, 0) du = 0$$

és így csak azt kell kimutatni, hogy elegendő nagy t -re

$$(24) \quad \left| e^{-\varphi(t)} \int_T^t e^{\varphi(u)} F(u, 0) du - \frac{F^*(0)}{\varphi^*} \right|$$

tetszőleges kicsinnyé tehető.

Mindenekelőtt kimutatjuk, hogy elegendő nagy T -re

$$(25) \quad |e^{-\varphi(t)}| \int_T^t |e^{\varphi(u)}| du < \frac{2}{\lambda\delta},$$

ahol $\delta = \Re(\gamma) > 0$, azaz (25) korlátos függvény. Ugyanis ekkor $\Re\varphi(t) = \delta\lambda t$

és így

$$(26) \quad |e^{-\varphi(t)}| \int_T^t |e^{\varphi(u)}| du = e^{-\delta\Lambda(t)} \int_T^t e^{\delta\Lambda(u)} du \leq \frac{2e^{-\delta\Lambda(t)}}{\lambda} \int_T^t e^{\delta\Lambda(u)} \lambda(u) du \leq \frac{2}{\lambda\delta},$$

ahol T -t úgy választottuk meg, hogy $t \geq T$ értékekre $\lambda(t) \geq \lambda/2$ legyen.

Most fennáll, hogy

$$(27) \quad \left| e^{-\varphi(t)} \int_T^t e^{\varphi(u)} F(u, 0) du - \frac{F^*(0)}{\varphi^*} \right| \leq \left| e^{-\varphi(t)} \int_T^t e^{\varphi(u)} [F(u, 0) - F^*(0)] du \right| + \\ + F^*(0) \left| e^{-\varphi(t)} \int_T^t e^{\varphi(u)} du - \frac{1}{\varphi^*} \right|.$$

A jobboldalon az első tag $\leq \frac{2}{\lambda\delta} \max_{(T, t)} |F(u, 0) - F^*(0)|$. Ez elegendő nagy T értékekre tetszőlegesen kicsinnyé tehető. A második tag a következő egyenlet felhasználásával

$$(28) \quad e^{-\varphi(t)} \int_T^t e^{\varphi(u)} \varphi'(u) du = 1 - e^{\varphi(T) - \varphi(t)}$$

és $\varphi'(u) = \varphi^* + \gamma[\lambda(u) - \lambda]$ figyelembevételével a következőképpen írható:

$$(29) \quad e^{-\varphi(t)} \int_T^t e^{\varphi(u)} du - \frac{1}{\varphi^*} = -\frac{e^{\varphi(T) - \varphi(t)}}{\varphi^*} - \frac{\gamma e^{-\varphi(t)}}{\varphi^*} \int_T^t e^{\varphi(u)} [\lambda(u) - \lambda] du.$$

A jobboldal első tagja elegendő nagy t -re, a második pedig elegendő nagy T -re tetszőlegesen kicsinnyé tehető. Ugyanis $\lambda(u) - \lambda$, $u \geq T$ -re tetszőlegesen kicsinnyé tehető és fennáll (25). Így ezzel kimutattuk a (21) határérték helyességét.

Ki kell még mutatni, hogy $\omega = 0$ -nak van olyan környezete, amelyben

$\Re \left(\int_0^\infty e^{i\omega x} dH(x) \right) < 1$. Ha $H(x)$ elfajult eloszlás, mégpedig χ zérustól különböző állandó, tehát ez nyilvánvaló. Ha pedig $H(x)$ nem elfajult eloszlás, úgy KOLMOGOROV—GNYEGYENKO ([11] 60. o.) könyvében kimondott tételekből következik, hogy létezik olyan $\omega_0 \neq 0$ szám, hogy $(-\omega_0, \omega_0)$ intervallumban $|\psi(-i\omega)| < 1$, azaz $\Re \psi(-i\omega) < 1$ is fennáll. Ki kell még mutatni, hogy (21) folytonos az $\omega = 0$ helyen. Mivel $\psi(-i\omega)$ karakterisztikus függvény egyenletesen folytonos minden ω értékre és mivel

$$(30) \quad \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{1 - \psi(-i\omega)}{i\omega} = -\alpha$$

határérték létezik, tehát (21) is folytonos az $\omega = 0$ helyen. Így kimutattuk, hogy létezik $F^*(x)$ határeloszlás. Ha pedig létezik $F^*(x)$ határeloszlás, úgy (3) fennállásából következik, hogy elegendő tesz a (17) integrodifferenciálegyenletnek.

$F^*(x)$ Laplace—Stieltjes transzformáltja ekkor nyilvánvalóan

$$(31) \quad \Phi^*(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} dF^*(x) = \frac{F^*(0)}{1 - \lambda \frac{1 - \psi(s)}{s}} = \frac{1 - \lambda\alpha}{1 - \lambda \frac{1 - \psi(s)}{s}}.$$

Most $\Phi^*(0) = 1$, mivel

$$(32) \quad \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1 - \psi(s)}{s} = \int_0^{\infty} x dH(x) = \alpha.$$

Ha $\lambda\alpha \geq 1$ úgy $\lim_{t \rightarrow \infty} F(t, 0) = 0$ és ekkor könnyen belátható, hogy $\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi_t(\omega) = 0$ és így minden x -re $\lim_{t \rightarrow \infty} F(t, x) = 0$.

Ha η_0 tetszőleges $F_0(x)$ eloszlásfüggvénnyel bír, úgy $\lim_{t \rightarrow \infty} F(t, x)$ határeloszlás ekkor is létezik és megegyezik $F^*(x)$ -szel. Ugyanis mivel az E_0 állapot ergodik, ezért 1 valószínűséggel, véges időn belül eléri a rendszer az E_0 állapotot és mint kimutattuk, E_0 állapotból kiindulva $F(t, x)$, $F^*(x)$ határeloszláshoz tart $t \rightarrow \infty$ esetén.

A (31) formula ekvivalens A. JA. HINCIN [5] munkájában megadott stacionárius állapotra vonatkozó megoldásával.

MEGJEGYZÉS. Ha HINCIN nyomán feltételezzük, hogy $\lambda\alpha < 1$ esetén létezik stacionárius állapot, melynek eloszlásfüggvénye $F^*(x)$ úgy (3) egyenletből rövidebben eljuthatunk (31) egyenlethez. Ekkor ugyanis (3)-ból rögtön következik (17) egyenlet fennállása, melyből azt nyerjük, hogy $F^*(x)$ Laplace—Stieltjes transzformáltjára $\Phi^*(s)$ -re fennáll, hogy

$$\Phi^*(s) = \frac{F^*(0)}{1 - \lambda \frac{1 - \psi(s)}{s}}.$$

Mivel $F^*(x)$ eloszlásfüggvény, tehát kell, hogy $\lim_{s \rightarrow 0} \Phi^*(s) = 1$ legyen, másrészt, mint láttuk $\lim_{s \rightarrow 0} [1 - \psi(s)]/s = \alpha$ és így az adódik, hogy

$$F^*(0) = 1 - \lambda\alpha.$$

Most tegyük fel, hogy a $\{t_n\}$ időpontok időben homogén λ sűrűségű Poisson-folyamat eseményeinek időpontjaival egyeznek meg. Jelöljük az n -ik személy várakozási idejének eloszlásfüggvényét $F_n(x)$ -szel, azaz legyen $P(\eta(t_n - 0) \leq x) = F_n(x)$. Ha a kiszolgáló kezdeti elfoglaltsága η_0 és ennek eloszlásfüggvénye $P(\eta_0 \leq x) = F_0(x)$ úgy az $\{F_n(x)\}$ sorozat fokozatosan előállítható a következő rekurzív formula segítségével

$$(33) \quad F_n(x) = \int_0^{\infty} K(x, y) dF_{n-1}(y) \quad (n = 1, 2, \dots),$$

ahol

$$(34) \quad K(x, y) = H(x - y) + \int_{x-y}^{\infty} e^{-\lambda(u+y-x)} dH(u).$$

Ez egyszerűen onnan következik, hogy az $\{r_i(t_n - 0)\}$ valószínűségi változók sorozata Markov láncot alkot $P(r_i(t_n - 0) \leq x | r_i(t_{n-1} - 0) = y) = K(x, y)$ átmenet valószínűségekkel.

Kérdés, hogyan viselkedik $F_n(x)$ midőn $n \rightarrow \infty$. Erre vonatkozólag a következő tételt bizonyítjuk be.

5. TÉTEL. Ha $M(\gamma_n) = \alpha$ várható értékre fennáll, hogy $\lambda\alpha < 1$, úgy $F_n(x)$ eloszlásfüggvény $n \rightarrow \infty$ esetén a kezdeti $F_0(x)$ eloszlásfüggvénytől függetlenül a 3. és 4. tételben meghatározott $F^*(x)$ eloszlásfüggvényhez konvergál. Ha $\lambda\alpha \geq 1$ úgy $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = 0$ minden x értékre.

BIZONYÍTÁS. Először tekintsük azt az esetet, midőn $r_0 = 0$. Könnyen belátható, hogy ekkor $F_{n+1}(x) \leq F_n(x)$. Ugyanis $F_n(x)$ jelenti annak a valószínűségét, hogy az n -ik személy várakozási ideje legfeljebb x , ha az első személy kiszolgálása várakozás nélkül kezdődött és $F_{n+1}(x)$ felfogható úgy, mint annak a valószínűsége, hogy az n -ik személy várakozási ideje legfeljebb x egy olyan sorban, amelyben az első személy kiszolgálása esetleg várakozás után kezdődik meg. Mivel $\{F_n(x)\}$ sorozat monoton csökkenő és alulról korlátos, tehát minden x -re létezik $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x)$ határérték.

Most jelölje $G(t, x)$ a $(0, t)$ időintervallumban utolsónak érkező személy várakozási idejének eloszlásfüggvényét és legyen $K_t(x, y)$ annak a valószínűsége, hogy ha ezen személy várakozási ideje y , akkor egy t időpontban esetleg érkező személy várakozási ideje $\leq x$. Ekkor fennáll, hogy:

$$(35) \quad F(t, x) = \int_0^t K_t(x, y) d_y G(t, y).$$

Könnyen megmutatható, hogy

$$(36) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} K_t(x, y) = K(x, y),$$

ahol $K(x, y)$ -t (33) definiálja és

$$(37) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} G(t, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_{n+1}(x).$$

Ugyanis, ha t_n jelöli a $(0, t)$ intervallumban utolsónak érkező személy érkezési időpontját, úgy a $t - t_n$ változó $t \rightarrow \infty$ esetén exponenciális eloszlást követ $\lambda e^{-\lambda x}$ sűrűségfüggvénnyel és ez megegyezik két egymás utáni érkezési időpont közötti távolság eloszlásával. Továbbá ha $t \rightarrow \infty$ úgy 1 valószínűséggel $n \rightarrow \infty$. Így (35) alapján azt kapjuk, hogy

$$(38) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} F(t, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} K(x, y) dF_{n+1}(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_{n+2}(x),$$

ahol az utolsó egyenlőség (33) fennállásának a következménye. Mint láttuk, $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x)$ határérték létezik és így ez (38) szerint megegyezik $\lim_{t \rightarrow \infty} F(t, x)$ -szel, azaz $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = F^*(x)$ ha $\lambda\alpha < 1$, míg $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = 0$ ha $\lambda\alpha \geq 1$.

Ha η_0 tetszőleges, úgy szintén létezik határeloszlás és ez megegyezik $F^*(x)$ -szel. Ugyanis, mint a következő fejezetben látni fogjuk az E_0 állapot ergodikus, s ekkor tetszőleges kezdeti állapotból kiindulva 1 valószínűséggel bekövetkezik olyan időpont, amelyben a rendszer E_0 állapotban van. Ezután az időpont után pedig úgy viselkedik a rendszer, mintha a kezdőpontból $\eta_0 \equiv 0$ feltétel mellett indult volna el.

PÉLDÁK. 1. Legyen $\chi_n = \alpha$ (állandó) úgy $\psi(s) = e^{-s\alpha}$ és (19) alapján $\lambda\alpha < 1$ esetben:

$$(39) \quad \Phi^*(s) = \frac{1 - \lambda\alpha}{1 - \lambda \frac{1 - e^{-s\alpha}}{s}} = (1 - \lambda\alpha) s \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{\lambda^j e^{-s\alpha j}}{(s - \lambda)^{j+1}},$$

ahonnan

$$(40) \quad F^*(x) = (1 - \lambda\alpha) \sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{x}{\alpha} \right\rfloor} (-1)^j e^{\lambda(x - \alpha j)} \frac{\lambda^j (x - \alpha j)^j}{j!}.$$

2. Legyen χ_n exponenciális eloszlású, azaz $H(x) = 1 - e^{-x\alpha}$ (ha $x \geq 0$) úgy $\psi(s) = 1/(1 + \alpha s)$, ahonnan

$$(41) \quad \Phi^*(s) = \frac{(1 - \lambda\alpha)(1 + \alpha s)s}{(1 - \lambda\alpha)s + \alpha s^2}$$

és

$$(42) \quad F^*(x) = 1 - \lambda\alpha e^{-\frac{1 - \lambda\alpha}{\alpha} x}.$$

3. §. Időben homogén folyamattal kapcsolatos vizsgálatok

Ebben a fejezetben végig fel fogjuk tenni, hogy a $\{t_n\}$ időpontok időben homogén λ sűrűségű Poisson-folyamat eseményeinek időpontjaival egyeznek meg. Egyszerűség kedvéért legyen $\eta_0 \equiv 0$, azaz a kiszolgáló kezdeti elfoglaltsága zérus. Könnyen belátható, hogy a kiszolgáló ideje szünetekből és kiszolgálási periódusokból tevődik össze. Legyenek az egymást követő szünetek időtartamai $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \dots$ és a kiszolgálási periódusok időtartamai: $\xi_1, \xi_2, \dots$. Ezek valamennyien független változók. A $\{\mathcal{G}_n\}$ -ek exponenciális eloszlásúak $P(\mathcal{G}_n \leq x) = 1 - e^{-\lambda x}$ (ha $x \geq 0$) eloszlásfüggvénnyel. A $\{\xi_n\}$ -ek is egyforma eloszlásúak, de közös eloszlásfüggvényüket $P(\xi_n \leq x) = G(x)$ -et egyelőre nem ismerjük. Ennek meghatározása lesz egyik feladatunk. Ezután meghatározzuk $F(t, 0)$ -t annak a valószínűségét, hogy t időpontban a kiszolgáló szabad. Kimutatjuk, hogy $\lambda\alpha < 1$ esetén $\lim_{t \rightarrow \infty} F(t, 0) = 1 - \lambda\alpha$ és $\lambda\alpha \geq 1$

esetén $\lim_{t \rightarrow \infty} F(t, 0) = 0$. Meghatározzuk továbbá stacionárius esetben ($t \rightarrow \infty, \lambda a < 1$) annak a valószínűségét, hogy a rendszer $E_j (j = 0, 1, 2, \dots)$ állapotban legyen, azaz a várakozó és kiszolgálás alatt álló személyek száma j legyen.

1. *A kiszolgálási periódus vizsgálata.* Kiszolgálási periódusnak nevezzük azt az időtartamot, amelyet a kiszolgáló egy várakozás nélkül kezdődő kiszolgálás kezdőpontjától az időközben sorbanállók megszakítás nélküli kiszolgálása esetén az utolsó sorbanálló kiszolgálásának befejező időpontjáig tölt el. Jelöljük az egymást követő kiszolgálási periódusok időtartamait rendre $\xi_1, \xi_2, \dots$ valószínűségi változóval. Ezek függetlenek és közös eloszlásfüggvényük $P(\xi_n \leq x) = G(x)$.

$G(x)$ meghatározása. Tegyük fel, hogy a kiszolgáló berendezéshez egy várakozás nélküli személy érkezik. Az érkezés időpontjában rögtön megkezdődik ennek kiszolgálása. Tegyük fel, hogy ez a kiszolgálás y ideig tart. Annak a valószínűsége, hogy ezen y időtartam alatt n személy érkezik a kiszolgáló berendezéshez:

$$(43) \quad e^{-\lambda y} \frac{(\lambda y)^n}{n!},$$

azaz Poisson-eloszlást mutat. Ha $n = 0$, úgy a kiszolgálási periódus egyetlen kiszolgálásból áll és ekkor ennek időtartamának eloszlásfüggvénye: $H(x)$. Ha $n \geq 1$, úgy a kiszolgáló az első személy kiszolgálása után hozzákezd a sorbanállók egyikének kiszolgálásához. A többi sorbanállóról gondoljuk el, hogy félreállanak. Miután a kiszolgáló ezen személy és az időközben esetleg érkező személyek kiszolgálásával végzett, mely időtartam eloszlásfüggvénye $G(x)$, úgy a félreállított n személy közül megkezd egynek a kiszolgálását, miután ezzel és a közben érkezőkkel végzett, amely időtartam eloszlásfüggvénye ismét $G(x)$, úgy újra megkezd a félreállítottak egyikének kiszolgálását és ezt addig folytatja, míg a félreállítottak el nem fogynak. A kiszolgáló szempontjából tökéletesen mindegy, hogy érkezési sorrendben szolgálja-e ki a személyeket vagy sem. Ez csak a személyeket érinti, ugyanis a várakozási idő eloszlásfüggvénye ezzel megváltozik, $F(t, 0)$ és az átlagérték azonban változatlan marad. Jelöljük $G_n(x)$ -szel n számú ξ -vel megegyező eloszlású független valószínűségi változó összegének eloszlásfüggvényét, azaz $G(x)$ n -szeres konvolúcióját. $G_n(x)$ kiszámítható a következő rekurzív formula segítségével:

$$(44) \quad G_n(x) = \int_0^x G_{n-1}(x-y) dG(y) \quad (n = 2, 3, \dots),$$

ahol $G_1(x) = G(x)$, vagy karakterisztikus függvények módszerével. Tekintetbe véve, hogy független valószínűségi változók összegének karakterisztikus függvénye megegyezik az egyes változók karakterisztikus függvényeinek szorzatával.

Az elmondottak alapján felírható, hogy

$$(45) \quad G(x) = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda y} \frac{(\lambda y)^n}{n!} G_n(x-y) dH(y).$$

Ugyanis a kiszolgálási periódus hossza x -nél kisebb, ha az első érkező személy kiszolgálása y ideig tart ($0 < y \leq x$); y eloszlásfüggvénye $H(y)$, és ennek kiszolgálása alatt még n ($n=0, 1, 2, \dots$) személy érkezik, aminek a valószínűségét (43) szolgáltatja és ezek, valamint a közben érkezettek kiszolgálási időtartama $x-y$ -nél nem nagyobb, aminek a valószínűsége, mint láttuk $G_n(x-y)$. Megjegyezzük, hogy $G_0(x) = 1$ ha $x \geq 0$ és $G_0(x) = 0$ ha $x < 0$.

Legyen $G(x)$ Laplace-Stieltjes transzformáltja

$$(46) \quad \Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} dG(x),$$

amely $\Re(s) \geq 0$ -ra konvergens.

(45) egyenletből Laplace-transzformációra áttérve azt nyerjük, hogy

$$(47) \quad \Gamma(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[\Gamma(s)]^n}{n!} \int_0^{\infty} e^{-(s+\lambda)x} (\lambda x)^n dH(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\lambda^n [\Gamma(s)]^n \psi^{(n)}(s+\lambda)}{n!} = \\ = \psi[s+\lambda-\lambda\Gamma(s)],$$

azaz $G(x)$ Laplace-Stieltjes transzformáltja $\Gamma(s)$, $\Re(s) \geq 0$ -ra kielégíti a következő függvényegyenletet:

$$(48) \quad \Gamma(s) = \psi(s+\lambda-\lambda\Gamma(s)).$$

Ennek az egyenletnek fennállására D. G. KENDALL is adott [7] munkájában vázlatos bizonyítást. A továbbiakban a következő tételt bizonyítjuk be:

6. TÉTEL: A kiszolgálási periódus eloszlásfüggvényének, $G(x)$ -nek Laplace-transzformáltja $\Gamma(s)$ a $\Re(s) \geq 0$ -ra érvényes

$$(49) \quad \Gamma(s) = \psi[s+\lambda-\lambda\Gamma(s)]$$

függvényegyenletnek $\Gamma(\infty) = 0$ feltételnek eleget tevő, egyértelműen meghatározott analitikus megoldása. $\Gamma(s)$ ismeretében $G(x)$ egyértelműen meghatározható.

Jelölje p^* azt a legkisebb pozitív számot, amelyre fennáll

$$(50) \quad \psi(\lambda(1-p^*)) = p^*,$$

úgy $\lim_{x \rightarrow \infty} G(x) = p^*$. Ha $\lambda a \leq 1$ úgy $p^* = 1$ és ekkor $G(x)$ valódi eloszlás, míg ha $\lambda a > 1$, úgy $p^* < 1$, azaz $G(x)$ nem valódi eloszlás, és pedig ekkor a kiszolgálási idő végtelen is lehet $(1-p^*)$ valószínűséggel.

BIZONYÍTÁS: Nyilvánvaló, hogy $G(x)$ minden véges x értékre létezik és mint láttuk, $\Gamma(s)$ kielégíti a (49) függvényegyenletet. Továbbá nyilvánvaló,

hogy $\Gamma(s)$ analitikus és $\Gamma(\infty)=0$. $\Gamma(s)$ ismeretében $G(x)$ egyértelműen meghatározható. Ezért elegendő kimutatni, hogy $\Gamma(s)$ -et egyértelműen meghatározzák $\Gamma(\infty)=0$ és az analitikusság feltétele. Elegendő $\Gamma(s)$ -et csupán nem negatív valós s értékekre ismerni, ugyanis $\Re(s) \geq 0$ értékekre egyértelműen kiterjeszthető. Tekintsük tehát a (49) függvényegyenletet $0 \leq s < \infty$ valós értékekre. A $\psi(s)$ függvény $0 \leq s < \infty$ értékekre monoton csökken, és pedig $\psi(0)=1$ és $\psi(\infty)=0$. $\psi(s)$, $0 \leq s < \infty$ értékekre differenciálható, és a $\psi'(s)$ differenciáhányados monoton növekvő; $\psi'(0)=-\alpha$ és $\psi'(\infty)=0$. Legyen (49)-ben $\Gamma(s)=x$, úgy $s=\Gamma^{-1}(x)$ és $\psi(s)$ monoton voltából következik, hogy egyértelműen megfordítható, azaz $\psi^{-1}(x)$ a $0 \leq x \leq 1$ értékekre létezik. Ekkor (49)-ből azt kapjuk, hogy

$$\Gamma^{-1}(x) = \psi^{-1}(x) - \lambda(1-x),$$

valgyis $0 \leq x \leq 1$ értékekre $\Gamma^{-1}(x)$ egyértelműen meg van határozva. Kérdés $\Gamma(s)$ is egyértelműen meg van-e határozva?

A $\Gamma^{-1}(x)$ függvény az $x=0$ helyen ∞ és az $x=1$ helyen 0 és $0 < x \leq 1$ értékekre differenciálható, és pedig

$$\frac{d\Gamma^{-1}(x)}{dx} = \lambda + \frac{1}{\psi'(\psi^{-1}(x))},$$

a fent elmondottakból könnyen beláthatóan monoton növekvő függvény. Az $x=1$ pontban ezen derivált értéke $\lambda - \frac{1}{\alpha}$. Ha $\lambda\alpha \leq 1$, úgy ez a derivált nem pozitív és ekkor $\Gamma^{-1}(x)=0$ -nak nincs gyöke a $0 < x < 1$ intervallumban, hanem $\Gamma^{-1}(1)=0$. Míg ha $\lambda\alpha > 1$, úgy ez a derivált negatív, azaz $\Gamma^{-1}(x)=0$ -nak a $0 < x < 1$ közben van gyöke és nyilvánvalóan csakis egy gyöke van.

Jelölje $\Gamma^{-1}(x)=0$ legkisebb pozitív gyökét $x=p^*$ úgy $\Gamma^{-1}(x)$ a $0 \leq x \leq p^*$ intervallumban monoton csökkenő folytonos függvény. Így $s=\Gamma^{-1}(x)$ egyértelműen megfordítható és $\Gamma(s)$ a $0 \leq s < \infty$ intervallumban szolgáltatja a keresett $G(x)$ Laplace-transzformáltját. Ez a $\Gamma(s)$ a mondott feltételek mellett egyértelműen meg van határozva. A függvényegyenletnek általában több megoldása létezik, de csak egy elégíti ki az említett feltételeket. Most $\Gamma(0)=p^*$, azaz $\lim_{x \rightarrow \infty} G(x)=p^*$. A $\Gamma^{-1}(x)=0$ egyenlet gyökei pedig megegyeznek $\psi(\lambda(1-x))=x$ egyenlet gyökeivel. Ezzel tételünket bebizonyítottuk.

PÉLDA. Legyen $H(x)=1-e^{-x/\alpha}$, úgy $\psi(s)=1/(1+\alpha s)$ és ekkor (49)-ből

$$(51) \quad \Gamma(s) = \frac{1 + \alpha(s + \lambda) - \sqrt{[1 + \alpha(s + \lambda)]^2 - 4\alpha\lambda}}{2\alpha\lambda}$$

Most (49)-nek két megoldása van és pedig pozitív és negatív négyzetgyökkel vett megoldás. A negatív négyzetgyököt $\Gamma(\infty)=0$ feltétel miatt kell

venni. Ekkor (51) megfordításával azt nyerjük; hogy

$$(52) \quad G'(x) = e^{-\frac{(1+\lambda\alpha)x}{\alpha}} I_1\left(\frac{2\sqrt{\lambda\alpha}x}{\alpha}\right) \frac{1}{\sqrt{\lambda\alpha}x},$$

ahol $I_1(x) = J_1(ix)/i$ és $J_1(x)$ az elsőfajú Bessel-függvényt jelöli. Most $G(\infty) = 1$, ha $\lambda\alpha \leq 1$, míg $G(\infty) = 1/\lambda\alpha$, ha $\lambda\alpha > 1$.

A (48) összefüggés kiválóan alkalmas $G(x)$ momentumainak meghatározására.

Most meghatározzuk a várható kiszolgálási periódust

$$(53) \quad \mu = \int_0^{\infty} x dG(x)$$

-et, azonban közvetlenül (45)-ből. Emlékeztetünk arra, hogy

$$\alpha = \int_0^{\infty} x dH(x)$$

és így (45)-ből azt kapjuk, hogy

$$(54) \quad \mu = \alpha + \sum_{n=1}^{\infty} n\mu \int_0^{\infty} e^{-\lambda y} \frac{(\lambda y)^n}{n!} dH(y).$$

Ezt különben közvetlenül beláthatjuk: μ összetevődik az első személy átlagos kiszolgálási idejéből α -ból és ha ennek kiszolgálása közben n személy érkezik, aminek a valószínűsége

$$p_n = \int_0^{\infty} e^{-\lambda y} \frac{(\lambda y)^n}{n!} dH(y),$$

úgy ezek, valamint a közben érkezők átlagos kiszolgálási ideje a fent részletezett megfontolás szerint $n\mu$.

(54)-ben az összegezést végrehajtva az adódik, hogy

$$(55) \quad \mu = \alpha + \lambda\alpha\mu.$$

Ha $\lambda\alpha < 1$, úgy innen

$$(56) \quad \mu = \frac{\alpha}{1 - \lambda\alpha},$$

míg ha $\lambda\alpha \geq 1$, úgy $\mu = \infty$ lehet csak.

A $\lambda\alpha > 1$ esetben, mint említettük $p^* = \Gamma'(0)$ a valószínűsége annak, hogy a kiszolgálási periódus hossza véges. Ekkor kérdezhetjük, hogy mennyi a kiszolgáltatási periódus várható hossza azon feltétel mellett, hogy véges. Ennek értéke

$$(57) \quad \mu^* = -\frac{\Gamma'(0)}{\Gamma(0)}.$$

Itt $I'(0) = p^*$ és (49) szerint $I''(0) = \psi'(\lambda(1-p^*)) [1 - \lambda I'(0)]$, ahonnan $I''(0)$ meghatározható. Így végeredményben

$$(58) \quad \mu^* = \frac{-\psi'(\lambda(1-p^*))}{p^* [1 + \lambda \psi'(\lambda(1-p^*))]}.$$

Exponenciális kiszolgálási idők esetében, ha $\lambda\alpha > 1$, úgy $p^* = 1/\lambda\alpha$ és

$$(59) \quad \mu^* = \frac{\alpha}{\lambda\alpha - 1}.$$

Állandó α időtartamú kiszolgálási idők esetén, mikoris p^* a $\lambda\alpha p^* e^{-\lambda\alpha p^*} = \lambda\alpha e^{-\lambda\alpha}$ egyenlet legkisebb pozitív megoldása, azt kapjuk, hogy

$$(60) \quad \mu^* = \frac{\alpha}{1 - p^* \lambda \alpha}.$$

A kiszolgálási periódus vizsgálatával kapcsolatban felmerül még az a probléma, hogy egy kiszolgálási periódus hány személy kiszolgálásából áll. Jelöljük f_j -vel annak a valószínűségét, hogy egy kiszolgálási periódus j ($j=1, 2, \dots$) számú kiszolgálásból áll. Annak a valószínűsége, hogy egy személy kiszolgálása alatt n személy érkezik a kiszolgáló berendezéshez, mint már említettük,

$$(61) \quad p_n = \int_0^\infty e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^n}{n!} dH(x), \quad (n=0, 1, 2, \dots).$$

Ekkor könnyen belátható, hogy fennáll a következő összefüggés:

$$(62) \quad f_j = \sum_{\substack{n_1+n_2+\dots+n_{j-1}=j-1 \\ n_1+n_2+\dots+n_k \geq k \quad (k=1, 2, \dots, j-1)}} p_{n_1} p_{n_2} \dots p_{n_{j-1}}.$$

Célszerűbbnek látszik azonban az $\{f_j\}$ mennyiségek generátorfüggvényét meghatározni, melyet jelöljünk a következőképpen:

$$(63) \quad F(\omega) = \sum_{j=1}^\infty f_j \omega^j.$$

Az f_j valószínűségekre a következő rekurzív formulát írhatjuk fel:

$$(64) \quad \begin{cases} f_1 = p_0 \\ f_j = \sum_{n=1}^{j-1} p_n \sum_{j_1+j_2+\dots+j_n=j-1} f_{j_1} f_{j_2} \dots f_{j_n}. \end{cases}$$

Ennek indokolása teljesen analóg a $G(x)$ -re vonatkozó (45) formula felírásával. (64)-ből áttérve a generátorfüggvényekre, és tekintetbe véve, hogy

$$(65) \quad \psi(\lambda - \lambda\omega) = \sum_{n=0}^\infty p_n \omega^n,$$

azt kapjuk, hogy $F(\omega)$ a következő függvényegyenletnek tesz eleget:

$$(66) \quad F(\omega) = \omega \psi[\lambda - \lambda F(\omega)].$$

7. TÉTEL. Az f_j valószínűségek $F(\omega)$ generátorfüggvénye az

$$(67) \quad F(\omega) = \omega \psi[\lambda - \lambda F(\omega)]$$

függvényegyenletnek $F(0) = 0$ kezdeti feltétel által egyértelműen meghatározott, $|\omega| \leq 1$ -re analitikus megoldása. Legyen $x = p^*$ a $\psi(\lambda(1-x)) = x$ egyenlet legkisebb valós pozitív gyöke, úgy $\lim_{\omega \rightarrow 1} F(\omega) = p^*$.

BIZONYÍTÁS: Az f_j valószínűségek nyilvánvalóan léteznek. Így generátorfüggvényük $F(\omega)$ is létezik $|\omega| \leq 1$ -re, $F(\omega)$ analitikus $|\omega| \leq 1$ -re, $F(0) = 0$, továbbá $F(\omega)$ kielégíti a (67) függvényegyenletet. $F(\omega)$ ismeretében az f_j valószínűségek egyértelműen meghatározhatók. Így elegendő kimutatni, hogy $F(\omega)$ -át a mondott feltételek egyértelműen meghatározzák. Elegendő csupán $0 \leq \omega \leq 1$ valós értékekre megállapítani $F(\omega)$ -t, ennek ismeretében valamennyi $|\omega| \leq 1$ -re egyértelműen meghatározható. Legyen (67)-ben $x = F(\omega)$, úgy $\omega = F^{-1}(x)$ és ekkor erre (67) szerint fennáll

$$F^{-1}(x) = \frac{x}{\psi(\lambda(1-x))}.$$

Most $F^{-1}(0) = 0$ és $F^{-1}(1) = 1$ és $0 \leq x \leq 1$ értékekre $\frac{dF^{-1}(x)}{dx}$ monoton csökken. A $\frac{dF^{-1}(x)}{dx}$ derivált értéke az $x = 1$ pontban: $1 - \lambda\alpha$. Ha ez a derivált nem negatív, azaz $\lambda\alpha \leq 1$ úgy $F^{-1}(x)$ monoton növekedik a $0 \leq x \leq 1$ értékekre és $F^{-1}(1) = 1$. Ha ez a derivált pozitív, azaz $\lambda\alpha > 1$, úgy $F^{-1}(x) = 1$ -nek $0 < x < 1$ közben van egy és csakis egy $x = p^*$ gyöke és ekkor $0 \leq x \leq p^*$ értékekre $F^{-1}(x)$ monoton növekvő. Ha tehát $F^{-1}(x) = 1$ egyenlet legkisebb pozitív gyökét $x = p^*$ jelöli, úgy azt kapjuk, hogy $F^{-1}(x)$ a $0 \leq x \leq p^*$ értékekre egyértelműen megfordítható. $F(0) = 0$, $F(\omega)$ ω -nak folytonos függvénye és $\lim_{\omega \rightarrow 1} F(\omega) = p^*$. A fenti eljárással $F(\omega)$ -át egyértelműen előállítottuk. p^* annak a valószínűségét jelenti, hogy a kiszolgálási periódus végezzámú kiszolgálásból áll.

PÉLDA. Legyen $\chi_\alpha = \alpha$ (állandó). Ekkor $\psi(s) = e^{-s\alpha}$ és könnyen belátható, hogy

$$(68) \quad G(x) = \sum_{j=1}^{\left[\frac{x}{\alpha}\right]} f_j.$$

Tehát $G(x)$ -et visszavezettük az f_j valószínűségek meghatározására. Most $F(\omega)$ a következő függvényegyenletnek tesz eleget:

$$(69) \quad F(\omega) = \omega e^{-\alpha\lambda[1-F(\omega)]}.$$

Ha $y = \alpha\lambda F(\omega)$ és $x = \omega e^{-\alpha\lambda}$ jelöléssel élünk, úgy

$$(70) \quad ye^{-y} = x$$

összefüggést nyerjük. Innen kell meghatározni az $y = y(x)$ függvényt, azaz

(70) inverz függvényét. Mint ismeretes $y = y(x)$ -nek az origon átmenő ága az $|x| \leq 1$ értékekre a következő hatványsor alakban állítható elő:

$$(71) \quad y(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{j^{j-1}}{j!} x^j,$$

azaz $|\omega| \leq 1$ értékekre azt kapjuk, hogy

$$(72) \quad F(\omega) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda \alpha j} (\lambda \alpha j)^{j-1}}{j!} \omega^j.$$

Megjegyezzük, hogy (69)-ből a következő differenciálegyenletet is nyerhetnők

$$\omega F'(\omega) - F(\omega) = \lambda \alpha \omega F(\omega) F'(\omega),$$

melynek megoldását $F(0) = 0$ kezdeti feltétel mellett ugyancsak (72) szolgáltatja.

Így (68) alapján felírható, hogy a keresett $G(x)$ eloszlásfüggvény

$$(73) \quad G(x) = \sum_{j=1}^{\left\lfloor \frac{x}{\alpha} \right\rfloor} \frac{e^{-\lambda \alpha j} (\lambda \alpha j)^{j-1}}{j!}.$$

Megjegyezzük még, hogy (62) alapján felírható, hogy

$$(74) \quad f_j = e^{-\lambda \alpha j} (\lambda \alpha)^{j-1} \sum_{\substack{n_1+n_2+\dots+n_j=j-1 \\ n_1+n_2+\dots+n_k \geq k \ (k=1,2,\dots,j-1)}} \frac{1}{n_1! n_2! \dots n_j!}$$

és így ezen az úton is megkapható (73).

Ha χ_n exponenciális eloszlású, úgy (67) szerint

$$(75) \quad F(\omega) = \frac{(1 + \lambda \alpha) - \sqrt{(1 + \lambda \alpha)^2 - 4 \lambda \alpha \omega}}{2 \lambda \alpha},$$

ahonnan:

$$(76) \quad f_j = \frac{1}{2} \binom{2j}{j} \frac{(\lambda \alpha)^{j-1}}{(1 + \lambda \alpha)^{2j-1}}.$$

2. $F(t, 0)$ meghatározása. [12] munkánkban foglalkoztunk olyan sztochasztikus folyamatokkal, melyben $1 - e^{-\lambda x}$ eloszlásfüggvényű szünetek és $G(x)$ eloszlásfüggvényű történések váltogatják egymást. Kimutattuk, hogy ha a folyamat $t = 0$ időpontban szünettel kezdődik, akkor annak a valószínűsége, hogy $(t, t + \Delta t)$ időközben egy történet (most kiszolgálási periódus) kezdődjék, $f(t) \Delta t + o(\Delta t)$, ahol $f(t)$ az idő folytonos függvénye, és egyértelműen meg van határozva a következő Volterra-féle integrálegyenlettel:

$$(77) \quad f(t) = \lambda - \lambda \int_0^t f(t-x) [1 - G(x)] dx.$$

Most fennáll $f(t) \Delta t + o(\Delta t) = F(t, 0) \lambda \Delta t + o(\Delta t)$. Ugyanis $(t, t + \Delta t)$ közben

akkor kezdődik egy kiszolgálási periódus, ha t időpontban nincs várakozó, aminek a valószínűsége $F(t, 0)$ és $(t, t + \Delta t)$ közben valaki megérkezik a kiszolgáló berendezéshez, aminek a valószínűsége $\lambda \Delta t + o(\Delta t)$. Innen

$$(78) \quad F(t, 0) = \frac{f(t)}{\lambda}.$$

(70) alapján $\Re(s) > 0$ -ra fennáll, hogy

$$(79) \quad \int_0^{\infty} e^{-st} F(t, 0) dt = \frac{1}{s + \lambda - \lambda I'(s)}.$$

Innen $F(t, 0)$ egyértelműen meghatározható ($F(0, 0) = 1$).

Említett [12] munkánkban kimutattuk, hogy fennáll

$$(80) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \frac{\lambda}{1 + \lambda \mu}$$

határérték, ha μ véges. μ $G(x)$ átlagát jelenti. Innen (78) és (55) tekintetbevételével az adódik, hogy $\lambda \mu < 1$ esetén

$$(81) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} F(t, 0) = F^*(0) = \frac{1}{1 + \lambda \mu} = 1 - \lambda \alpha.$$

Ezzel kimutattuk $F^*(0)$ határérték létezését időben homogén esetben, amit az előző fejezetben felhasználtunk.

3. E_j állapot valószínűségének meghatározása. Jelölje P_j ($j = 0, 1, 2, \dots$) időben homogén folyamatnál stacionárius esetben annak a valószínűségét, hogy egy tetszőlegesen kiválasztott időpontban a rendszer E_j ($j = 0, 1, 2, \dots$) állapotban legyen, azaz a várakozó és kiszolgálás alatt álló személyek száma legyen j és P_0 annak a valószínűsége, hogy E_0 állapotban legyen a rendszer, azaz ne legyen se várakozó, se kiszolgálás alatt álló személy. Mint láttuk, $\lambda \mu < 1$ esetben fennáll

$$(82) \quad P_0 = 1 - \lambda \mu.$$

Ha $\lambda \mu \geq 1$, úgy mint láttuk $\mu = \infty$ és ekkor a rekurrens események elméletéből következik, hogy $P_0 = 0$. (Lásd W. FELLER [13] és [14] munkáit.)

HINCSIN [5] munkájában megmutatta, hogy stacionárius állapotban azaz $t \rightarrow \infty$ esetén annak a valószínűsége, hogy egy kiszolgálás végpontjában a rendszer E_j állapotban legyen, megegyezik annak a valószínűségével, hogy egy tetszőlegesen választott időpontban E_j állapotban legyen a rendszer. Elegendő tehát csupán a kiszolgálási idők végpontjaira felírni ezeket a valószínűségeket. Az egymást követő kiszolgálási idők végpontjaiban uralkodó állapotokat írja le $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n, \dots$ valószínűségi változó, ahol $\zeta_n = j$, ha E_j állapotban van a rendszer az n -ik kiszolgálás végpontjában. Az $\{\zeta_n\}$ valószínűségi változók által leírt folyamat Markov-láncot alkot a következő átmenet valószínű-

ségekkel $k \geq 1, j = 0, 1, 2, \dots$ -re

$$(83) \quad P(\xi_n = k + j - 1 | \xi_{n-1} = k) = p_j = \int_0^\infty e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^j}{j!} dH(x)$$

és $k = 0$ -ra

$$(84) \quad P(\xi_n = j, \xi_{n-1} = 0) = p_j.$$

Mint könnyen megmutatható, esetünkben alkalmazható W. FELLER ([14], 325.) könyvében kimondott tétel, mely szerint ha egy irreducibilis lánc állapotai ergodikusak, úgy a kezdeti ξ_1 értéktől függetlenül léteznek:

$$(85) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P(\xi_n = j) = P_j \quad (j = 0, 1, 2, \dots)$$

határvalószínűségek és a P_j értékek egyértelműen meghatározhatók a következő egyenletrendszerből:

$$(86) \quad P_j = P_{j+1}p_0 + P_j p_1 + \dots + P_1 p_j + P_0 p_j \quad (j = 0, 1, 2, \dots).$$

Esetünkben a Markov-lánc irreducibilis, ugyanis bármely állapot elérhető bármely állapotból elegendő számú lépéssel. FELLER kimutatja, hogy egy irreducibilis lánc állapotai mind ugyanazon osztályhoz tartoznak. $\lambda\alpha < 1$ esetén, mint láttuk, az E_0 állapot ergodikus és ennek következtében valamennyi állapotra fennáll ez. Ha $\lambda\alpha \geq 1$, úgy az E_0 állapot rekurrens nulla állapot és akkor az összes többi állapot is az, azaz $P_j = 0$ valamennyi j -re.

Legyen

$$(87) \quad H(\omega) = \sum_{j=0}^{\infty} P_j \omega^j$$

és

$$(88) \quad \pi(\omega) = \sum_{j=0}^{\infty} p_j \omega^j = \int_0^\infty e^{-\lambda(1-\omega)x} dH(x) = \psi(\lambda(1-\omega)),$$

úgy ezen generátorfüggvények segítségével (86)-ból azt nyerjük, hogy

$$(89) \quad \omega H(\omega) = \pi(\omega) [H(\omega) + P_0\omega - P_0],$$

ahonnan

$$(90) \quad H(\omega) = P_0 \frac{\pi(\omega)}{1 - \frac{1 - \pi(\omega)}{1 - \omega}}.$$

Ha $\omega \rightarrow 0$, úgy

$$(91) \quad \frac{1 - \pi(\omega)}{1 - \omega} \rightarrow \lambda\alpha$$

és ekkor $H(0) = P_0/(1 - \lambda\alpha)$. Most ha $\lambda\alpha < 1$, úgy akár $H(0) = 1$, akár akár $P_0 = 1 - \lambda\alpha$ tekintetbevételével azt kapjuk, hogy

$$(92) \quad H(\omega) = \frac{(1 - \lambda\alpha) \psi(\lambda(1 - \omega))}{1 - \frac{1 - \psi(\lambda(1 - \omega))}{1 - \omega}}.$$

PÉLDA: 1. χ_n exponenciális eloszlású valószínűségi változó, azaz $H(x) = 1 - e^{-x/\alpha}$. Ekkor $\psi(s) = 1/(1 + \alpha s)$ és így fennáll, hogy

$$(93) \quad \Pi(\omega) = \frac{1 - \lambda\alpha}{1 - \lambda\alpha\omega},$$

ahonnan

$$(94) \quad P_j = (1 - \lambda\alpha)(\lambda\alpha)^j.$$

2. $\chi_n = \alpha$ (állandó). Ekkor $\psi(s) = e^{-s\alpha}$ és így

$$(95) \quad \Pi(\omega) = \frac{(1 - \lambda\alpha)e^{-\lambda\alpha(1-\omega)}}{1 - \frac{1 - e^{-\lambda\alpha(1-\omega)}}{(1-\omega)}},$$

ahonnan

$$(96) \quad P_j = (1 - \lambda\alpha) \sum_{k=0}^{j-1} (-1)^{j-k} e^{k\lambda\alpha} \left(\frac{(k\lambda\alpha)^{j-k}}{(j-k)!} + \frac{(k\lambda\alpha)^{j-k-1}}{(j-k-1)!} \right).$$

4. §. „Várakozási idő“-problémák nem Poisson-folyamat esetén

Tegyük fel most, hogy a kiszolgáló berendezéshez érkező személyek $\{t_n\}$ érkezési időpontjaira fennáll, hogy a $t_n = t_n - t_{n-1}$ ($n = 1, 2, \dots; t_0 = 0$) időközönbségek egyforma eloszlású, független, pozitív valószínűségi változók közös $P(x) = Q(x)$ eloszlásfüggvénnyel. Időben homogén Poisson-folyamat esetén $Q(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ ($x \geq 0$) volt. Most azt az általánosabb esetet tárgyaljuk, midőn $Q(x)$ tetszőleges. A $\chi_1, \chi_2, \dots$ kiszolgálási időkről továbbra is fel fogjuk tenni, hogy azok egyforma eloszlású, független valószínűségi változók közös $H(x)$ eloszlásfüggvénnyel.

Már a 2. fejezetben említettük, hogy az ily módon definiált $\eta_i(t)$ valószínűségi függvény általában nem Markov-folyamatot ír le, de a $\{t_n\}$ érkezési időpontok a rendszer Markov-pontjait alkotják. Legyen $\eta_i(t_n - 0) = \eta_n$, azaz az n -edik érkező személy várakozási ideje és $\eta_i(0) = \eta_0$. Az elmondottak szerint az $\{\eta_n\}$ valószínűségi változók sorozata Markov-folyamatot alkot. Az $\{\eta_n\}$ valószínűségi változók η_0 ismeretében sorjában a következő valószínűségi egyenlet segítségével határozhatók meg:

$$(97) \quad \eta_{n+1} = \begin{cases} \eta_n + \chi_n - \tau_{n+1} & \text{ha } \tau_{n+1} - \chi_n < \eta_n \\ 0 & \text{ha } \tau_{n+1} - \chi_n \geq \eta_n \end{cases}$$

Jelöljük η_n valószínűségi változó eloszlásfüggvényét $P(\eta_n \leq x) = F_n(x)$ -szel. Az $\{F_n(x)\}$ sorozat $F_0(x)$ -ből kiindulva, fokozatosan előállítható a következő rekurzív formula segítségével:

$$(98) \quad F_{n+1}(x) = \int_0^\infty K(x, y) dF_n(y), \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

ahol

$$(99) \quad K(x, y) = \int_0^{\infty} [1 - Q(u + y - x)] dH(u).$$

Ugyanis az $\{i_n\}$ változó sorozat által leírt Markov-folyamat átmenet valószínűségei: $P(i_{n+1} \leq x | i_n = y) = K(x, y)$ és így fennáll (98). A számítások kényelmesen elvégezhetők a következő kétlépéses rekurzív formulák segítségével:

$$(100) \quad K_n(x) = \int_0^{\infty} H(x - y) dF_n(y)$$

és

$$(101) \quad F_{n+1}(x) = \int_0^{\infty} [1 - Q(y - x)] dK_n(y).$$

További kérdés, hogy mikor létezik $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = F(x)$ határeloszlásfüggvény és hogyan lehet meghatározni $F(x)$ -et. Erre vonatkozóan hivatkozunk D. V. LINDLEY [6] munkájára, amelyben a következő tételt bizonyította be:

Arra nézve, hogy létezzék $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = F(x)$ határeloszlásfüggvény, szükséges és elegendő, hogy fennálljon $M(\chi_n) < M(\tau_n)$ vagy $\tau_n - \chi_n \equiv 0$. Ha $M(\chi_n) \geq M(\tau_n)$ és $\tau_n - \chi_n \not\equiv 0$, úgy minden x -re $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = 0$. Az $F(x)$ határeloszlás, amennyiben létezik a kezdeti $F_0(x)$ eloszlástól független és a következő integrálegyenlet egyértelműen meghatározott megoldása:

$$(102) \quad F(x) = \int_0^{\infty} K(x, y) dF(y).$$

LINDLEY vizsgálataiban a (97) egyenletből indul ki és megmutatja, hogy ez az egyenlet egy bolyongási problémát ír le, amely probléma a rekurrens események elméletével és nagy számok törvényeinek segítségével tárgyalható.

Az itt kimondott tétel bebizonyítható a Markov-folyamatok általános tételei segítségével vagy visszavezethető lényegében annak a kimutatására, hogy az $i_n = 0$ állapot ergodikus véges visszatérési idővel, ha $\alpha < \theta$, ahol $\alpha = M(\chi_n)$ és $\theta = M(\tau_n)$.

Érdekes kérdés még az, hogy ha az $i_t(t)$ folyamatot minden t -re értelmezzük a 2. fejezetben leírt módon, úgy mikor létezik $\lim_{t \rightarrow \infty} F(t, x) = F^*(x)$ határeloszlásfüggvény és hogyan határozható meg. Erre vonatkozóan a következő tételt mondjuk ki:

6. TÉTEL. Ha $\alpha < \theta$ és $0 < \theta < \infty$ és $Q(x)$ nem olyan eloszlásfüggvény, amely csupán ugrásokkal növeli értékét egy adott szám bizonyos egész számú

többszöröseinél, úgy létezik a kezdeti $F_0(x)$ eloszlástól független $\lim_{t \rightarrow \infty} F(t, x) = F^*(x)$ határeloszlásfüggvény, amely a következőképp határozható meg:

$$(103) \quad F^*(x) = \frac{1}{\theta} \int_0^x [1 - Q(y)] K(y+x) dy,$$

ahol

$$(104) \quad K(x) = \int_0^\infty F(x-y) dH(y)$$

és $F(x)$ a (102) integrálegyenlet egyértelműen meghatározott megoldása.

Tételünk bizonyítására bevezetünk egy új változót, $\zeta(t)$ -t, amely t időpontnak a közvetlen megelőző t_n ($n=0, 1, 2, \dots$) időponttól vett távolságát jelenti. Az így definiált $\zeta(t)$ folyamat megegyezik J. L. DOOB [15] munkájában vizsgált megújítási folyamat speciális esetével. Feltételeink mellett alkalmazhatjuk DOOB [12] tételét, amely szerint létezik a következő határeloszlásfüggvény:

$$(105) \quad Q^*(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} P(\zeta(t) \leq x) = \frac{1}{\theta} \int_0^x [1 - Q(u)] du.$$

Ha $t \rightarrow \infty$ és t_n jelenti a $(0, t)$ szakaszban utoljára érkező személy érkezési időpontját, úgy 1 valószínűséggel $n \rightarrow \infty$ és $\lim_{n \rightarrow \infty} P(\tau_1(t_n) \leq x) = K(x)$, ahol $K(x)$ -et (104) szolgáltatja. Így könnyen beláthatóan

$$(106) \quad F^*(x) = \int_0^x K(x+y) dQ^*(y),$$

ami megegyezik (96)-tal.

Az egyértelműség és a kezdeti $F_0(x)$ eloszlástól való függetlenség az $F(x)$ -re kimondott tételből következik.

Megjegyezzük, hogy ha $F^*(x)$ -et úgy értelmezzük, mint $\nu_1(t)$ eloszlásfüggvényét egy végtelen hosszú ideje tartó folyamatban „találomra” választott $t = t^*$ időpontban, úgy $G(x)$ -re elég azt kikötni, hogy átlagára fennálljon: $0 < \mu < \infty$. Ezen pontosabban azt értjük, hogy a $(0, t)$ intervallumon választunk egy egyenletes eloszlást mutató pontot, erre nézve meghatározzuk a megfelelő eloszlásfüggvényt és azután $t \rightarrow \infty$ határátmenetet végzünk.

PÉLDA. Erre az esetre a várakozási idők mellett példának lehet felhozni vízgyűjtő-medencék megtelését és kiürülését. Ezt a példát G. P. BOJEV. ([16] 311. o. 170. példa) könyvéből meritettük. Jelentse $\nu_1(t)$ a vízgyűjtő medence készletét t időpontban. A vízgyűjtő medencék körülbelül éves periódusokban telnek meg és ha feltesszük, hogy az időegységenként távozó víz mennyisége a készlettől függetlenül ugyanannyi, míg a kiürülés bekövetkezik, úgy a fenti

modellel leírható jelenséggel állunk szemben. Stacionárius esetben a vízgyűjtő medence készletének eloszlásfüggvényét a (106) alatt megadott $F^*(x)$ szolgáltatja. Ha azt tesszük fel, hogy az időegységenként távozó víz arányos a készlettel, úgy a [17] dolgozatunkban leírt modell alkalmazható.

*Magyar Tudományos Akadémia
Alkalmazott Matematikai Intézete.*

IRODALOM

- [1] TH. C. FRY: Probability and its Engineering Uses (New-York (1928), 372—387.).
- [2] F. POLLACZEK: Über eine Aufgabe der Wahrscheinlichkeitsrechnung. [Mathematische Zeitschrift **32** (1930), I. 64—100; II. 729—850.].
- [3] F. POLLACZEK: Répartition des délais d'attente des avions arrivant à un aéroport qui possède s pistes d'atterrissages [Comptes Rendus Acad. Sci. Paris **232** (1951), 1901.].
- [4] A. N. KOLMOGOROV: Sur le problème d'attente [A. Я. Хинчин Mathematique, Математический Сборник **38** (1931), 101—106].
- [5] А. Я. Хинчин: Математическая теория стационарной очереди [Математический Сборник **39** (1932), 73—84.].
- [6] D. V. LINDLEY: The theory of queues with a single counter [Proceedings of the Cambridge Philosophical Society **48** (1952), 277—289.].
- [7] D. G. KENDALL: Some problems in the theory of queues [Journal of the Royal Statistical Society. Ser. B. **13** (1951), 151—185.].
- [8] W. FELLER: On theory of stochastic processes, with particular reference to applications [Proceedings of the Berkeley Symposium (1949), 403—432.].
- [9] W. FELLER: Zur Theorie der stochastischen Prozesse [Mathematische Annalen **113** (1936), 113—160.].
- [10] A. ZYGMUND: A remark on characteristic functions [Proceedings of the Second Berkeley Symposium (1951), 369—372.].
- [11] A. N. KOLMOGOROV: és B. V. GNYEGYENKO: Független valószínűségi változók összegeinek határeloszlásai (Budapest, 1951).
- [12] L. TAKÁCS: Occurrence and coincidence phenomena in case of happenings with arbitrary distribution law of duration [Acta Math. Hung. **2** (1951), 275—298.].
- [13] W. FELLER: Fluctuation theory of recurrent events [Transaction of the Am. Math. Soc. **67** (1949), 98—119.].
- [14] W. FELLER: An Introduction to Probability Theory and its Application [New-York, 1950.].
- [15] J. L. DOOB: Renewal theory from the point of view of the theory of probability [Transaction Am. Math. Soc. **63** (1948), 422—438.].
- [16] Г. П. Боеб: Теория вероятностей (Москва, 1950.).
- [17] TAKÁCS L.: Bizonyos fizikai regisztráló berendezésekkel kapcsolatos sztochasztikus folyamatokról. [MTA III. Oszt. Közl. **4** (1954) 571—587.]